

双線形化法による離散時間Newell-Whithamモデルの 特殊解の構成

鈴木, 大庸
法政大学大学院理工学研究科

磯島, 伸
法政大学理工学部

<https://doi.org/10.15017/1957519>

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 29A0-S7 (1), pp.113-118, 2018-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

バージョン：

権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.29AO-S7
「非線形波動研究の新潮流—理論とその応用—」 (研究代表者 辻本 諭)

Reports of RIAM Symposium No.29AO-S7

New trends in nonlinear waves - theory and applications -

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 9 - November 11, 2017

Article No. 17 (pp. 113 - 118)

双線形化法による離散時間 Newell-Whitham モデルの特殊解の 構成

鈴木 大庸 (SUZUKI Kouyo), 磯島 伸 (ISOJIMA Shin)

(Received 13 January 2018; Accepted 14 March 2018)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2018

双線形化法による離散時間 Newell-Whitham モデルの 特殊解の構成

法政大学大学院理工学研究科 鈴木 大庸 (Kouyo Suzuki)

法政大学理工学部 磯島 伸 (Shin Isojima)

概要

交通流モデルの 1 つである離散時間 Newell-Whitham モデルの, 2 つの従属変数を持つ双線形形式を導き, その特殊解を構成する. 従属変数 1 つの双線形形式から得られる既知の特殊解との比較も行う.

1 はじめに

交通流モデルは, 待ち行列理論や流体モデルなどと分類されている. その中の車追従モデル (図 1 参照) の 1 つとして 1990 年に Whitham によって示された, Newell-Whitham(NW) モデル [1] が存在する. 金井, 土谷によって双線形形式を用いた厳密解 [2] が示された. しかし, 現在に至るまで, 全離散や超離散といった手法を用いた研究がなされていなかったが, 可積分系と関連付けることにより, 全離散 NW モデルと従属変数 1 つの双線形形式および特殊解を導くことができた [3]. この解は任意パラメータを持たなかった. 本稿では, 2 節で eNW モデルと, [3] に基づいたその時間離散化を紹介する. 3 節では, 双線形化法を用いて, NW モデルの 2 つの従属変数を持つ双線形形式とその特殊解を導く. 4 節では, 厳密解のグラフの描画を行い, その交通流としての意味を考察する. 最後に 5 節では従属変数 1 つの特殊解との比較も含めたまとめを述べる.

2 eNW モデルの時間差分化

2.1 eNW モデル

時刻 t での, n 番目の車の位置を $x_n(t)$, 先行する $n+1$ 番目の車との車間距離を

$$h_n(t) := x_{n+1} - x_n \quad (1)$$

とする. そして, 車間距離 h に対して最適な速度を返す函数 $V(h)$ (最適速度 (OV) 函数) を導入し, 交通流モデルとして遅延時間を τ とする遅延微分方程式 [1][5]

$$\dot{x}_n(t + \tau) = V(h_n(t)) \quad (2)$$

を考える. 特に,

$$V(h) = V_0[1 - \exp(-(\alpha/V_0)(h - L))] \quad (0 < \alpha) \quad (3)$$

の場合 (図 2 参照) を指数関数型 NW(eNW) モデルと呼ぶことにする. ここで V_0 は最大速度, L は最小車間距離を意味し, α は $h = L$ における微分係数である. なお, 最適速度関数を

$$V(h) = \tanh(h - c) + \tanh c \quad (c > 0 \text{ は定数}) \quad (4)$$

とする場合もよく知られている.

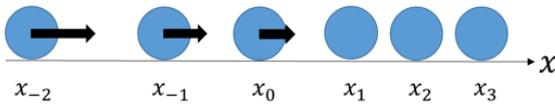


図 1 車が追いつかず, 衝突しない一車線交通

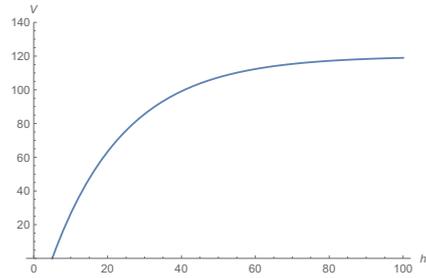


図 2 $V = 120, L = 5, \alpha = 6$ の eNW モデルの OV 関数

2.2 eNW モデルと離散可積分系

eNW モデルを車間距離 h のみを用いた形

$$\dot{h}_n(t + \tau) = V(h_{n+1}(t)) - V(h_n(t)) \quad (5)$$

に書き換える. ここで,

$$s_n(t) = \frac{\alpha}{V_0}(h_n(t) - L) \quad (6)$$

と変換すると

$$\frac{1}{\alpha} \dot{s}_n(t + \tau) = -e^{-s_{n+1}} + e^{-s_n} \quad (7)$$

となる. eNW モデルについては, 交通流と類似した系である格子系で, なおかつ可積分である Kac-van Moerbeke (KvM) 系

$$\dot{R}_j = -e^{-R_{j-1}} + e^{-R_{j+1}}, \quad R_j = R_j(T) \quad (8)$$

と対比することにより厳密解を求めることができる [1][5]. 変数変換

$$e^{-s_n} = S_n \quad (9)$$

によって (7) は

$$\frac{1}{\alpha} \dot{S}(t) = S_n(t) \{S_{n+1}(t - \tau) - S_n(t - \tau)\} \quad (10)$$

となる. KvM 系に eNW モデルと同様の変数変換

$$e^{-R_j} = u_j \quad (11)$$

を施すと,

$$\dot{u}_j + u_j(u_{j-1} - u_{j+1}) = 0, \quad u_j = u_j(T) \quad (12)$$

と Lotka-Volterra (LV) 方程式に変形できる. (10) と (12) はそれぞれ進行波

$$\begin{aligned} S(\phi) = S_n(t), \quad \phi &= \frac{\alpha}{\tau}t + 2\alpha n \\ u(\Phi) = u_j(T), \quad \Phi &= \frac{1}{\tau}T + \alpha j \end{aligned} \quad (13)$$

を仮定すれば同じ方程式

$$\frac{1}{\tau}\dot{S}(\phi) = S(\phi)\{S(\phi + \alpha) - S(\phi - \alpha)\} \quad (14)$$

$$\frac{1}{\tau}\dot{u}(\Phi) = u(\Phi)\{u(\Phi + \alpha) - u(\Phi - \alpha)\}$$

に帰着されるため, 解の一部を共有することがわかり, 独立変数の関係

$$t = \frac{T}{\alpha}, \quad n = \frac{j}{2} \quad (15)$$

がわかる.

2.3 全離散 eNW モデル

全離散 LV 方程式 [6] は

$$\frac{v_j^{\tilde{t}+1}}{v_j^{\tilde{t}}} = \frac{1 + \delta v_{j+1}^{\tilde{t}}}{1 + \delta v_{j-1}^{\tilde{t}+1}} \quad (16)$$

で与えられる. これを利用して全離散 eNW モデルを導く.

まず, $S_n(t)$ の時間離散化を $K_n^{\tilde{t}} = \frac{1}{\alpha}S_n(\gamma\tilde{t})$ ($t = \gamma\tilde{t}$) とする. (13) 式から $S_n(t - \tau) = S_{n-\frac{1}{2}}(t)$ が成り立ち, その離散類似として

$$K_n^{\tilde{t}-m} = K_{n-\frac{1}{2}}^{\tilde{t}}, \quad m = \frac{\tau}{\gamma} \quad (m \text{ は正の整数}) \quad (17)$$

を仮定する. また, 半離散での進行波の仮定を比較することで

$$\begin{aligned} K_n^{\tilde{t}} &= v_j^{\tilde{t}} \\ \tilde{t} &= \frac{\tilde{T}}{\alpha}, \quad n = \frac{j}{2} \end{aligned} \quad (18)$$

という関係がわかり, 時間差分間隔は $\gamma = \delta/\alpha$ とするのが妥当である. よって, 全離散 eNW モデル

$$\frac{K_n^{\tilde{t}+\frac{1}{\alpha}}}{K_n^{\tilde{t}}} = \frac{1 + \alpha\gamma K_{n+1}^{\tilde{t}-m}}{1 + \alpha\gamma K_n^{\tilde{t}+\frac{1}{\alpha}-m}} \quad (19)$$

を得る. 独立変数が整数値をとるために $\alpha = 1/l$ ($l \in \mathbb{N}$) とする.

3 全離散 eNW モデルの厳密解

双線形化法 [7] に従い, 変数変換

$$K_n^{\tilde{t}} = \frac{F_n^{\tilde{t}}}{G_n^{\tilde{t}}} \quad (F_n^{\tilde{t}} > 0, G_n^{\tilde{t}} > 0) \quad (20)$$

を仮定し, $F = F_n^{\tilde{t}}, F^- = F_n^{\tilde{t}-m}, F^\alpha = F_n^{\tilde{t}+\frac{1}{\alpha}}, F_+ = F_{n+1}^{\tilde{t}}$ とすると, (19) 式は

$$\frac{F^\alpha G}{G_+^- G^{\alpha-} + \alpha\gamma F_+^- G^{\alpha-}} = \frac{FG^\alpha}{G_+^- G^{\alpha-} + \alpha\gamma F^{\alpha-} G_+^-} (= \lambda) \quad (21)$$

に変形される. 分離パラメータ $\lambda \neq 0$ を導入すると, 以下の双線形方程式

$$\begin{aligned} F^\alpha G &= \lambda(G_+^- G^{\alpha-} + \alpha\gamma F_+^- G^{\alpha-}) \\ FG^\alpha &= \lambda(G_+^- G^{\alpha-} + \alpha\gamma F^{\alpha-} G_+^-) \end{aligned}$$

を得る. これは (19) 式 of 双線形形式である. ここで, $F = 1 + CX, G = A + BX, X = e^{b\tilde{t}+an}$ (A, B, C は正の定数, a, b は定数) の形の解を仮定すると, パラメータに対する以下の 2 通りの十分条件が求まる.

1. $B - AC \neq 0, \frac{1}{\alpha} \neq m$ かつ

$$a = b \left(\frac{1}{\alpha} + m \right) \quad (22)$$

$$B = \left(\frac{1}{\lambda e^{a-2mb}} - \alpha\gamma \right) C \quad (23)$$

$$A = \frac{1}{\lambda} - \alpha\gamma \quad (24)$$

$$\lambda\gamma e^{\frac{b}{\alpha}} + e^{b(\frac{1}{\alpha}+m)} \left(\frac{1}{\alpha} - \lambda\gamma \right) - \frac{1}{\alpha} e^{mb} = 0 \quad (25)$$

2. $B - AC \neq 0, (23)$ 式, (24) 式と $\frac{1}{\alpha} = m$ かつ

$$a = mb + \log \left\{ 1 + \frac{m}{\lambda\gamma} (e^{mb} - 1) \right\} \quad (26)$$

4 数値シミュレーション

前節で求めた厳密解の振る舞いを調べる. 図3はパラメータが条件1. を満たす場合である. ただし, $\lambda = 1, \gamma = 0.01, C = 1, \alpha = 1/3, m = 10$ とし, 他のパラメータは $A \cong 1.00, B \cong 1.00, a \cong 16.03, b \cong 0.80$ となる. 車間距離に対応する K の時間変化を追跡すると, 徐々に K の大きな車の番号が減少していることが分かる. すなわち, この解は交通流でいう渋滞区間の最後尾の様子を表すと考えられる. 図4はパラメータが条件2. を満たす場合である. ただし, $\lambda = 1, \gamma = 0.01, C = 1, 1/\alpha = m = 3$ とし, 他のパラメータは $A \cong 1.00, B \cong 1.02 \times 10^{-9}, a \cong 35.70, b = 5$ となる. K の時間変化を追跡すると, 徐々に K の大きな車の番号が増加していることが分かる. この解は交通流でいう渋滞区間の先頭の様子を表すと考えられる.

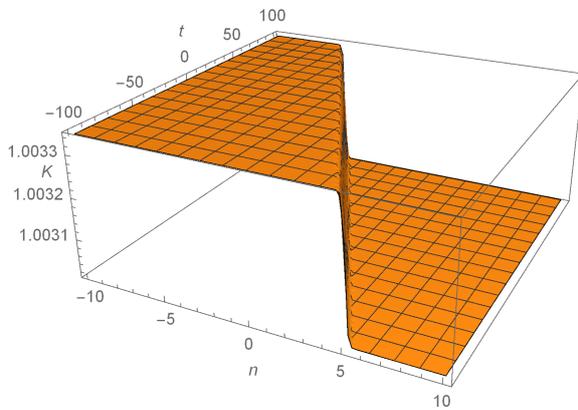


図3 $\alpha = 1/3, m = 10$

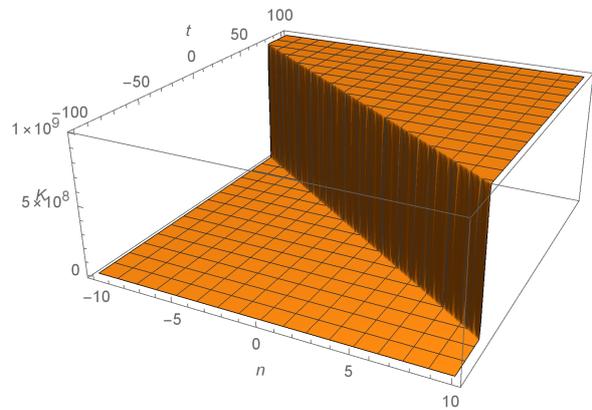


図4 $1/\alpha = m = 3$

5 まとめ

論文 [2] では eNW モデルの厳密解が論じられ, 従属変数を2つ用いた双線形形式を通して自由パラメータを1つ持つ厳密解が求められた. このことから, 離散系においても同様に自由パラメータを持つ解が存在すると予想していた. 従属変数を1つ用いた離散双線形形式から得られた解は任意パラメータを持たず, ソリトンのような概形をしていた [3]. 本稿では, 従属変数を2つ用いた離散双線形形式を通して任意パラメータを持つ厳密解を求めることができた. 従って, より自由度の高い解を得られたといえる. また, 解のグラフは衝撃波のような概形をしており, 実際の道路交通状況を表しているように見える. 本稿でグラフの描画に用いたパラメータは一例であり, 交通流モデルとして妥当な解を与える一般的なパラメータの条件を調べる必要がある. 現在, 超離散化の計算が進行中であり [8], 適切な境界条件の下でのコンピューター上での計算, シミュレーションによって, 交通流モデルとしての解析を行うことが課題となる.

参考文献

- [1] G.B.Whitham, Proc. R. Soc. London Ser. A428 (1990) 49.
- [2] M.Kanai and Y.Tutiya, J. Phys. Soc. Jpn.76 (2007) 083002.
- [3] 鈴木大庸, 磯島伸, 『離散可積分系による Newell-Whitham モデルの時間差分化とその解』, 研究集会報告「非線形波動研究の深化と展開」28AO-S6, 九州大学応用力学研究所, 2017 年 3 月, pp. 61–66.
- [4] M.Kanai, S.Isojima, K.Nishinari and T.Tokihiro, Phys. Rev. E, 79 (2009) 056108.
- [5] 金井政宏, 杉山雄規, 『時間遅れ最適速度モデルの厳密解について』, Proceedings of the Symposium on Simulation of Traffic Flow, 13 (2007).
- [6] 中村佳正 編, 『可積分系の応用数理』, 裳華房 (2000).
- [7] R. Hirota, in The Direct Method in Soliton Theory, ed. A. Nagai, J. Nimmo, and C. Gilson (Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 2004) Cambridge Tracts in Mathematics.
- [8] K.Suzuki and S.Isojima, in preparation.