離散戸田方程式を用いた要素および固有値が指定された逆固有値問題の解法

赤岩, 香苗
京都産業大学コンピュータ理工学部

谷口, 雄大
同志社大学理工学部

近藤, 弘一
同志社大学大学院理工学研究科

https://doi.org/10.15017/1957516

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 29AO-S7 (1), pp.101-106, 2018-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：

応用力学研究所研究集会報告 No.29AO-S7
「非線形波動研究の新潮流ー理論とその応用ー」（研究代表者　辻本　諭）

Reports of RIAM Symposium No.29AO-S7

New trends in nonlinear waves - theory and applications -

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 9 - November 11, 2017

Article No. 15 (pp. 101 - 106)

離散戸田方程式を用いた要素および固有値が指定された逆固有値問題の解法

赤岩 香苗（AKAIWA Kanae），谷口 雄大（TANIGUCHI Yudai），近藤 弘一（KONDO Koichi）

（Received 15 January 2018; Accepted 4 March 2018）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2018

離散戸田方程式を用いた 要素および固有値が指定された逆固有値問題の解法

京都産業大学コンピュータ理工学部　赤岩 香苗 (AKAIWA Kanae)
同志社大学理工学部　谷口 雄大 (TANIGUCHI Yudai)
同志社大学大学院理工学研究科　近藤 弘一 (KONDO Koichi)

概要　逆固有値問題の 1 つとして，指定した要素と固有値をもつ行列を構成する問題が知られている．本稿では，特に 3 重対角行列に対して，全固有値と，左上から順に一部の要素を指定する逆固有値問題の解法を離散戸田方程式を用いて提案する．指定する固有値が重複固有値の場合についても示す．

1　はじめに

与えられた行列に対して，固有値および固有ベクトルを求める固有値問題は，理学・工学において非常に重要な話題であり，盛んに研究されている．逆固有値問題とは，固有値問題の逆問題であり，行列の固有値や構造といった性質により種々の小問題に分類される．特に，指定された固有値をもつ 3 重対角行列を構成する問題は， 逆スツルム・リウヴィル問題，極の配置問題，マス-バネモデルの構成など幅広い分野に現れる [4]．最近では，直交多項式理論に基づき特殊な構造をもつ 3 重対角行列の逆固有値問題が議論されている [5]．

逆固有値問題の 1 つとして，行列の固有値だけではなく要素の一部も指定する問題がある [4]．この問題はある種の補完問題であり，例えば，m 次の対称な 3 重対角行列の場合，非零である $2m-1$ 個の要素のうち $m-1$ 個の要素を指定するので，$m-1$ 個の要素を補完する問題となる．

本稿では以下の問題を考える．

問題 1 (3 重対角行列の要素の一部と固有値を指定する逆固有値問題)**.** 2 つの 2 重対角行列の積で表せる 3 重対角行列

$$T=\begin{pmatrix}1&&&\\e_1&1&&\\&\ddots&\ddots&\\&&e_{m-1}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q_1&1&&\\&q_2&\ddots&\\&&\ddots&1\\&&&q_m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}q_1&1&&\\q_1e_1&q_2+e_1&\ddots&\\&\ddots&\ddots&1\\&&q_{m-1}e_{m-1}&q_m+e_{m-1}\end{pmatrix}$$

を考える．m 個の固有値，および（2 重対角行列の）要素を $q_1,e_1,q_2,e_2,\ldots$ の順に $m-1$ 個指定する．そのような固有値と要素をもつ T を求めよ．

例えば，$m=5$ のとき，固有値を $5,4,3,2,1$，要素を $q_1=e_1=q_2=e_2=2$ と指定する．このとき，次の 3 重対角行列 T は問題の条件を満たす．

$$T=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\2&1&0&0&0\\0&2&1&0&0\\0&0&-\frac{33}{4}&1&0\\0&0&0&\frac{28}{51}&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&1&0&0&0\\0&2&1&0&0\\0&0&\frac{5}{4}&1&0\\0&0&0&\frac{34}{3}&1\\0&0&0&0&\frac{36}{17}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&1&0&0&0\\4&4&1&0&0\\0&4&\frac{13}{4}&1&0\\0&0&-\frac{165}{16}&\frac{37}{12}&1\\0&0&0&\frac{56}{9}&\frac{8}{3}\end{pmatrix}.$$

以下では，離散戸田方程式を用いた問題 1 の解法を提案する (cf. [1])．この手法は，指定する固有値が重複する場合や複素数の場合でも適用可能である．

2 離散戸田方程式と固有値問題

離散可積分系の代表的な方程式の 1 つに（有限）離散戸田方程式 [12, 7]

$$
\begin{gathered}
q_k^{(n+1)} + e_{k-1}^{(n+1)} = q_k^{(n)} + e_k^{(n)}, \quad q_k^{(n+1)} e_{k-1}^{(n+1)} = q_{k+1}^{(n)} e_k^{(n)}, \\
e_0^{(0)} \equiv 0, \quad e_m^{(n)} \equiv 0, \quad k = 1, 2, \ldots, m-1, \quad n = 0, 1, \ldots
\end{gathered} \tag{1}
$$

がある．ここで，k は空間変数，n は離散時間変数である．離散戸田方程式 (1) は，m 次 3 重対角行列

$$
T^{(n)} = L^{(n)} R^{(n)}, \tag{2}
$$

$$
L^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ e_1^{(n)} & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & e_{m-1}^{(n)} & 1 \end{pmatrix}, \quad R^{(n)} = \begin{pmatrix} q_1^{(n)} & 1 & & \\ & q_2^{(n)} & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & q_m^{(n)} \end{pmatrix} \tag{3}
$$

の固有値問題と関連づくことが知られている．離散戸田方程式 (1) は 3 重対角行列 $T = T^{(0)}$ の固有値計算法である quotient-difference (qd) 法 [9, 10, 6] の漸化式と等価である．(1) の解 $q_k^{(n)}, e_k^{(n)}$ は

$$
q_k^{(n)} = \frac{\tau_k^{(n+1)} \tau_{k-1}^{(n)}}{\tau_k^{(n)} \tau_{k-1}^{(n+1)}}, \quad e_k^{(n)} = \frac{\tau_{k-1}^{(n+1)} \tau_{k+1}^{(n)}}{\tau_k^{(n)} \tau_k^{(n+1)}}, \quad \tau_k^{(n)} = \begin{vmatrix} f_n & f_{n+1} & \cdots & f_{n+k-1} \\ f_{n+1} & f_{n+2} & \cdots & f_{n+k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n+k-1} & f_{n+k} & \cdots & f_{n+2k-2} \end{vmatrix} \tag{4}
$$

と表される．ただし、f_n は任意関数である．

非零の定数 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{C}$ を根にもつモニックな多項式

$$
\begin{aligned}
p(z) &= (z - \lambda_1)(z - \lambda_2) \cdots (z - \lambda_m) \\
&= z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \cdots + a_{m-1} z + a_m
\end{aligned} \tag{5}
$$

を導入しよう．多項式 (5) に現れる $a_1, a_2, \ldots, a_m$ を係数にもつ線形方程式

$$
f_{n+m} + a_1 f_{n+m-1} + a_{m-1} f_{n+m-2} + \cdots + a_{m-1} f_{n+1} + a_m f_n = 0 \tag{6}
$$

を定義する．線形方程式 (6) を満たす f_n を要素にもつ行列式 $\tau_k^{(n)}$ について，$\tau_{m+1}^{(n)} = 0$ となることは，行列式の多重線形性からただちに示せる．

ここで，k 次の多項式

$$
\phi_k^{(n)}(z) := \frac{\tau_k^{(n)}(z)}{\tau_k^{(n)}}, \quad \tau_k^{(n)}(z) := \begin{vmatrix} f_n & f_{n+1} & \cdots & f_{n+k-1} & 1 \\ f_{n+1} & f_{n+2} & \cdots & f_{n+k} & z \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{n+k-1} & f_{n+k} & \cdots & f_{n+2k-2} & z^{k-1} \\ f_{n+k} & f_{n+k+1} & \cdots & f_{n+2k-1} & z^k \end{vmatrix}
$$

を導入する．このとき，クリストフェル変換

$$
z \phi_{k-1}^{(n+1)}(z) = \phi_k^{(n)}(z) + q_k^{(n)} \phi_{k-1}^{(n)}(z), \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad n = 0, 1, \ldots
$$

とジェロニマス変換

$$
\phi_k^{(n)}(z) = \phi_k^{(n+1)}(z) + e_k^{(n)} \phi_{k-1}^{(n+1)}(z), \quad k = 1, 2, \ldots, m, \quad n = 0, 1, \ldots
$$

から以下の関係式が導かれる [11, 8].

$$
R^{(n)} \Phi_i^{(n)} = \lambda_i \Phi_i^{(n+1)}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{7}
$$

$$
L^{(n)} \Phi_i^{(n+1)} = \Phi_i^{(n)}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad n = 0, 1, \ldots. \tag{8}
$$

ただし，$\Phi_i^{(n)} := (\phi_0^{(n)}(\lambda_i),\ \phi_1^{(n)}(\lambda_i),\ \ldots,\ \phi_{m-1}^{(n)}(\lambda_i))^{\mathrm{T}}$ である．式 (7) および (8) から，以下が成り立つ．

定理 1 (3 重対角行列の固有値問題 [6, 8]). 列 $\{f_n\}_{n=0,1,\ldots}$ から得られる $q_k^{(n)}, e_k^{(n)}$ が well-defined であるとき，(2) および (3) で定まる 3 重対角行列 $T^{(n)}$ とベクトル $\Phi_i^{(n)}$ は以下を満たす：

$$T^{(n)}\Phi_i^{(n)} = \lambda_i \Phi_i^{(n)}, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad n = 0, 1, \ldots.$$

定理 1 は以下のことを意味している；固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ から決まるモニック多項式 (5) と同じ係数をもつ線形関係式 (6) を満たす，f_n を初期値 $f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}$ から与える．このとき，$q_k^{(n)}$ と $e_k^{(n)}$ を離散戸田方程式 (1) を用いて計算すれば，$T^{(n)}$ は固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ をもつ．

3　固有値および要素が指定された逆固有値問題

ここでは，指定された m 個の固有値と $m-1$ 個の要素をもつ m 次 3 重対角行列を構成する逆固有値問題（問題 1）を考える．定理 1 を踏まえると，問題 1 の解は次の手順で求められる．

m 次の 3 重対角行列の m 個の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ と要素を $q_k^{(0)}, e_k^{(0)}$ を $q_1^{(0)}, e_1^{(0)}, q_2^{(0)}, e_2^{(0)}, \ldots$ の順に $m-1$ 個指定する．具体的には，m 個の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ と以下を指定する：

$$\begin{cases} q_1^{(0)}, e_1^{(0)}, q_2^{(0)}, e_2^{(0)}, \ldots, q_{(m-2)/2}^{(0)}, e_{(m-2)/2}^{(0)}, q_{m/2}^{(0)}, & (m\text{: 偶数}), \\ q_1^{(0)}, e_1^{(0)}, q_2^{(0)}, e_2^{(0)}, \ldots, q_{(m-1)/2}^{(0)}, e_{(m-1)/2}^{(0)}, & (m\text{: 奇数}). \end{cases}$$

ただし，指定する $q_k^{(0)}$ と $e_k^{(0)}$ は非零とする．このとき，離散戸田方程式 (1) を $n \to n+1$ の時間方向の発展を与える形

$$q_k^{(n+1)} = q_k^{(n)} + e_k^{(n)} - e_{k-1}^{(n+1)}, \quad e_k^{(n+1)} = \frac{q_{k+1}^{(n)}}{q_k^{(n+1)}} e_k^{(n)}, \quad e_0^{(n)} \equiv 0 \tag{9}$$

で用いて，以下を求める．

$$\begin{cases} q_1^{(1)}, q_1^{(2)}, \ldots, q_1^{(m-2)} \\ e_1^{(1)}, e_1^{(2)}, \ldots, e_1^{(m-3)} \\ q_2^{(1)}, q_2^{(2)}, \ldots, q_2^{(m-4)} \\ e_2^{(1)}, e_2^{(2)}, \ldots, e_2^{(m-5)} \\ \qquad \cdots \\ q_{(m-2)/2}^{(1)}, q_{(m-2)/2}^{(2)} \\ e_{(m-2)/2}^{(1)} \end{cases} \quad (m\text{: 偶数}), \qquad \begin{cases} q_1^{(1)}, q_1^{(2)}, \ldots, q_1^{(m-2)} \\ e_1^{(1)}, e_1^{(2)}, \ldots, e_1^{(m-3)} \\ q_2^{(1)}, q_2^{(2)}, \ldots, q_2^{(m-4)} \\ e_2^{(1)}, e_2^{(2)}, \ldots, e_2^{(m-5)} \\ \qquad \cdots \\ e_{(m-3)/2}^{(1)}, e_{(m-1)/2}^{(2)} \\ q_{(m-1)/2}^{(1)} \end{cases} \quad (m\text{: 奇数}).$$

式 (4) から得られる $q_1^{(n)} = f_{n+1}/f_n$ に基づき，$f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_{m-1}$ を漸化式

$$f_{n+1} = f_n q_1^{(n)}$$

により求める．ここで，初期値の f_0 は非零であればなんでもよいが，ここでは $f_0 = 1$ とする．こうして得られた f_0, $f_1, \ldots, f_{m-1}$ を初期値として，線形関係式 (6) を用いて，$f_m,\ f_{m+1},\ \ldots,\ f_{2m-1}$ を求める．

続いて，(4) から得られる

$$q_1^{(n)} = \frac{f_{n+1}}{f_n}, \quad n = m-1, m, \ldots, 2m-2 \tag{10}$$

を用いて，$q_1^{(m-1)},\ q_1^{(m)},\ \ldots,\ q_1^{(2m-2)}$ を求める．離散戸田方程式 (1) を $k \to k+1$ の空間方向の発展を与える形

$$e_k^{(n)} = q_k^{(n+1)} + e_{k-1}^{(n+1)} - q_k^{(n)}, \quad q_{k+1}^{(n)} = \frac{e_k^{(n)}}{q_k^{(n+1)}} q_k^{(n+1)} \tag{11}$$

で用いて，残りの

$$\begin{cases} q_{(m+2)/2}^{(0)}, e_{(m+2)/2}^{(0)}, q_{(m+4)/2}^{(0)}, e_{(m+4)/2}^{(0)}, \ldots, q_{m-1}^{(0)}, e_{m-1}^{(0)}, q_m^{(0)}, & (m\text{: 偶数}), \\ e_{(m+1)/2}^{(0)}, q_{(m+3)/2}^{(0)}, e_{(m+3)/2}^{(0)}, \ldots, q_{m-1}^{(0)}, e_{m-1}^{(0)}, q_m^{(0)}, & (m\text{: 奇数}) \end{cases}$$

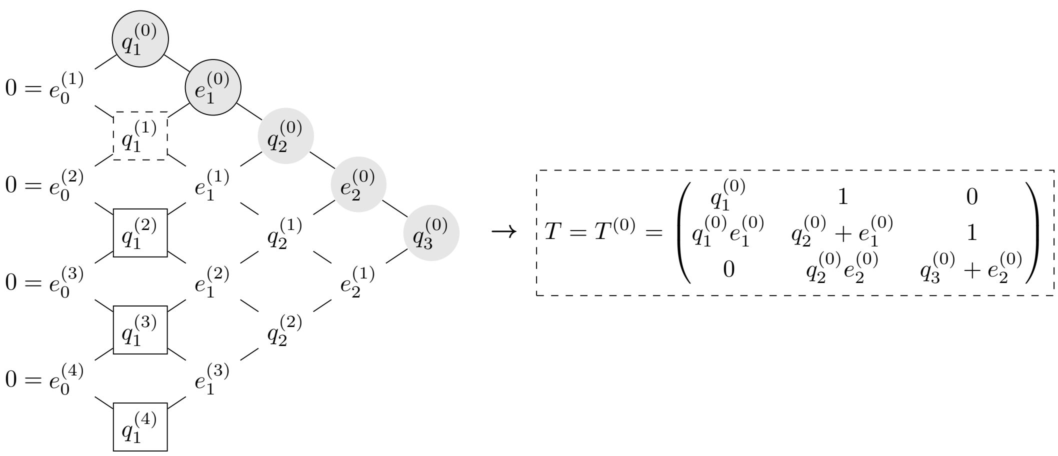

図 1　$m = 3$ の場合の行列 $T = T^{(0)}$ を構成する手順．実線の丸で囲まれた $q_k^{(0)}, e_k^{(0)}$ は指定する要素，点線の四角で囲まれた $q_k^{(n)}, e_k^{(n)}$ は式 (9) によって求められる変数，実線の四角で囲まれた $q_1^{(n)}$ は式 (10) で求められる変数，囲いのない $q_k^{(n)}, e_k^{(n)}$ は式 (11) によって求められる変数である．灰色の丸でマークされている $q_k^{(0)}, e_k^{(0)}$ から行列 $T = T^{(0)}$ を構成する．

を求める．こうして求まった $q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \ldots, q_m^{(0)}$ と $e_1^{(0)}, e_2^{(0)}, \ldots, e_{m-1}^{(0)}$ を (2) に代入すれば，所望の m 次 3 重対角行列 $T = T^{(0)}$ が得られる．

以上の手順を Algorithm 1 にまとめる．図 1 は，行列サイズ $m = 3$ の場合の行列 $T = T^{(0)}$ を構成する手順を示している．

Algorithm 1 指定した固有値および要素をもつ 3 重対角行列の構成法

Input: 行列サイズ m，非零の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$，2 重対角行列 $L^{(0)}$ と $R^{(0)}$ の非零要素

- $q_k^{(0)}$ for $k = 1, 2, \ldots, m/2$, $e_k^{(0)}$ for $k = 1, 2, \ldots, (m-2)/2$（$m$: 偶数）
- $q_k^{(0)}, e_k^{(0)}$ for $k = 1, 2, \ldots, (m-1)/2$（$m$: 奇数）

Output: 指定された固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ と要素をもつ 3 重対角行列 $T = T^{(0)}$

1: $n = 0, 1, \ldots, 2m-2$ に対して，$e_0^{(n)} = 0$ とする．

2: $n = 1, 2, \ldots, m-2$ に対して，以下を繰り返す：

- $k = \ell + 1 \bmod 2$, $\ell = 1, 2, \ldots, m-n-1$ に対して，以下を繰り返す：
- $\ell + 1 \bmod 2 = 0$ のとき，$q_k^{(n+1)} = e_k^{(n)} + q_k^{(n)} - e_{k-1}^{(n+1)}$
- $\ell + 1 \bmod 2 = 1$ のとき，$e_k^{(n+1)} = q_{k+1}^{(n)} e_k^{(n)} / q_k^{(n+1)}$

3: $f_0 = 1$ とし，$n = 0, 1, \ldots, m-1$ に対して，$f_{n+1} = f_n q_1^{(n)}$ を計算する．

4: $p(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2) \cdots (x - \lambda_m) = x^m + a_1 x^{m-1} + \cdots + a_{m-1}x + a_m$ の係数 $a_1, a_2, \ldots, a_m$ を求める．

5: $n = m, m+1, \ldots, 2m-1$ に対して，$f_n = -\sum_{i=1}^{m} a_i f_{n-i}$ を計算する．

6: $n = m, m+1, \ldots, 2m-2$ に対して，$q_1^{(n)} = f_{n+1}/f_n$ を計算する．

7: 残りの $q_k^{(0)}, e_k^{(0)}$ を求めるために，以下を繰り返し計算する：

- $e_k^{(n)} = e_{k-1}^{(n+1)} + q_k^{(n+1)} - q_k^{(n)}$
- $q_k^{(n)} = e_{k-1}^{(n+1)} q_{k-1}^{(n+1)} / e_{k-1}^{(n)}$

8: 式 (2), (3) から $T = T^{(0)}$ を生成する．

注意. [1, 2, 3] では，指定された固有値をもつ m 次行列を求める逆固有値問題を考えている．特に，固有値がすべて相

異なる 3 重対角行列の場合には，線形方程式 (6) を満たす f_n を一般解

$$f_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \cdots + c_m\lambda_m^n = \sum_{i=1}^{m} c_i\lambda_i^n$$

の形で与えている．ただし，$c_1, c_2, \ldots, c_m$ は非零の任意定数である．本稿では，f_n を決めるために，$c_1, c_2, \ldots, c_m$ を与える代わりに，$m-1$ 個の $q_1^{(0)}, e_1^{(0)}, q_2^{(0)}, e_2^{(0)}, \ldots$ を与えて，そこから $f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}$ を決めている．$c_1, c_2, \ldots, c_m$ と $f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}$ の間には

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{m-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1^{m-1} & \lambda_2^{m-1} & \cdots & \lambda_m^{m-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$$

という関係があるので，$c_1, c_2, \ldots, c_m$ を与えることと $f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}$ を与えることは等価である．

固有値が重複する場合は，相異なる固有値を $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \ldots, \hat{\lambda}_N$，それぞれの代数的重複度を $m_1, m_2, \ldots, m_N$ $(m_1 + m_2 + \cdots + m_N = m)$ とおくと，線形方程式 (6) の一般解は

$$f_n = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=0}^{m_i-1} \hat{c}_i^{(j)} \binom{n}{j} \hat{\lambda}_i^{n-j}$$

と表すことができる．ただし，$\hat{c}_i^{(j)}$ は非零の任意定数である．この場合も同様に，$\hat{c}_i^{(j)}$ を与えることと $f_0, f_1, \ldots, f_{m-1}$ を与えることは等価である．

Algorithm 1 は，指定された固有値が重複固有値の場合も適用可能である．ただし，構成される行列 T は，固有多項式 $p(x)$ が最小多項式と一致するような 3 重対角行列となる．言い換えると，相異なる固有値 $\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \ldots, \hat{\lambda}_N$ の幾何的重複度はすべて 1 になる，すなわち，代数的重複度が $m_1, m_2, \ldots, m_N$ であるとき，T のジョルダン標準形 J は以下で与えられる：

$$J = \mathrm{diag}(J_1, J_2, \ldots, J_N), \quad J_i = \begin{pmatrix} \hat{\lambda}_i & 1 & & \\ & \hat{\lambda}_i & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \hat{\lambda}_i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m_i \times m_i}.$$

詳しい証明は [1] を参照されたい．

4 数値例

本節では，いくつかの数値例を挙げる．実行環境は Mac OS X 10.11.6，使用したソフトウェアは Mathematica11.2 である．

最初の例は，共役な複素固有値をもち要素がすべて実数の場合である．行列サイズは $m = 4$，固有値は $\lambda_1 = 1+i, \lambda_2 = 1-i, \lambda_3 = 2i, \lambda_4 = -2i$，指定する要素は $q_1^{(0)} = e_1^{(0)} = q_2^{(0)} = 1$ とする．このとき，Algorithm 1 によって構成される 3 重対角行列 $T_1 = T_1^{(0)}$ は，以下である：

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{13} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 13 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -15 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

次の例は，複素固有値をもち，さらに要素に複素数が現れる場合である．行列サイズは $m = 4$，固有値は $\lambda_1 = 2+i, \lambda_2 = 2i, \lambda_3 = 1-i, \lambda_4 = -i$，指定する要素は $q_1^{(0)} = e_1^{(0)} = q_2^{(0)} = 1$ とする．このとき，Algorithm 1 によって

構成される 3 重対角行列 $T_2 = T_2^{(0)}$ は，以下である：

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7+6i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{202}{425} - \frac{111}{425}i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{98}{17} - \frac{86}{17}i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{19}{25} + \frac{8i}{25} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -7+6i & -\frac{21}{17} + \frac{16}{17}i & 1 \\ 0 & 0 & \frac{410}{289} - \frac{1130}{289}i & \frac{21}{17} + \frac{1}{17}i \end{pmatrix}.$$

最後の例は，重複固有値をもつ場合である．行列サイズは $m = 5$，固有値は $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2, \lambda_4 = \lambda_5 = -1$，指定する要素は $q_1^{(0)} = e_1^{(0)} = q_2^{(0)} = e_2^{(0)} = 1$ とする．このとき，Algorithm 1 によって構成される 3 重対角行列 $T_3 = T_3^{(0)}$ は，以下である：

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6}{5} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -18 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

5 おわりに

本稿では，指定された m 個の固有値と，左上から順に指定された $m-1$ 個の要素をもつような m 次 3 重対角行列を，離散戸田方程式を用いて構成する方法を示した．提案手法は，固有値が重複する場合や複素固有値をもつ場合も適用可能である．今後は [2, 3] を基に，3 重対角行列だけではなく，ヘッセンベルグ行列や帯行列などより一般の構造をもつ行列に対しても，固有値と一部の要素を指定した逆固有値問題の解法を離散可積分系を用いて開発していく．

謝辞 本研究の一部は JSPS 科研費 JP17K18229 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] Akaiwa, K., Iwasaki, M., Kondo, K. and Nakamura, Y., A tridiagonal matrix construction by the quotient difference recursion formula in the case of multiple eigenvalues, *Pacific J. Math. Indust.*, **6** (2014), 21–29.

[2] Akaiwa, K., Nakamura, Y., Iwasaki, M., Tsutsumi, H. and Kondo, K., An finite-step construction of totally nonnegative matrices with specified eigenvalues, *Numer. Algor.*, **70** (2015), 469–484.

[3] Akaiwa, K., Nakamura, Y., Iwasaki, M., Yoshida, A. and Kondo, K., An arbitrary band structure construction of totally nonnegative matrices with prescribed eigenvalues, *Numer. Algor.*, **75** (2017), 1079–1101.

[4] Chu, M. T. and Golub, C. H., *Inverse Eigenvalue Problems –Theory, Algorithms and Applications–*, Oxford University Press, New York, 2005.

[5] Genest, V. X., Tsujimoto, S., Vinet, L., Zhedanov, A. Persymmetric Jacobi matrices, isospectral deformations and orthogonal polynomials, *J. Math. Anal. Appl.*, **450** (2017), 915–928.

[6] Henrici, P., *Applied and Computational Complex Analysis, Vol. 1* John Wiley, New York, 1974.

[7] Hirota, R., Tsujimoto, S., Imai T., Difference scheme of soliton equation, in: Future directions of nonlinear dynamics in physical and biological systems, P. L. Christiansen, J. C. Eilbeck and R. D. Parmentier eds., Plenum, New York (1993), 7–15.

[8] 中村佳正，可積分系の機能数理，共立出版，2006.

[9] Rutishauser, H., Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix mit Hilfe des Quotienten-Differenzen-Algorithmus, *Z. Angew. Math. Phys.*, **6** (1955), 387–401.

[10] Rutishauser, H., *Lectures on Numerical Mathematics*, Birkhäuser, Boston, 1990.

[11] Spridonov, V., Zhedanov, A., Discrete-time Volterra chain and classical orthogonal polynomials, *J. Phis. A: Math. Gen.*, **30** (1997), 8727–8737.

[12] Toda, M., *Theory of Nonlinear Lattices. Second Edition*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.