

グローバルセルオートマトンの諸性質の解析

坂田, 幸太郎
早稲田大学大学院基幹理工学研究科

延東, 和茂
早稲田大学大学院基幹理工学研究科

高橋, 大輔
早稲田大学大学院基幹理工学研究科

<https://doi.org/10.15017/1957514>

出版情報：応用力学研究所研究集会報告．29A0-S7（1），pp.88-93，2018-03．九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：



応用力学研究所研究集会報告 No.29AO-S7
「非線形波動研究の新潮流—理論とその応用—」 (研究代表者 辻本 諭)

Reports of RIAM Symposium No.29AO-S7

New trends in nonlinear waves - theory and applications -

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 9 - November 11, 2017

Article No. 13 (pp. 88 - 93)

グローバルセルオートマトンの諸性質 の解析

坂田 幸太郎 (SAKATA Kotaro), 延東 和茂 (ENDO
Kazusige), 高橋 大輔 (TAKAHASHI daisuke)

(Received 7 January 2018; Accepted 13 February 2018)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2018

グローバルセルオートマトンの諸性質の解析

早稲田大学大学院基幹理工学研究科 坂田 幸太郎 (SAKATA Kotaro)
早稲田大学大学院基幹理工学研究科 延東 和茂 (ENDO Kazusige)
早稲田大学大学院基幹理工学研究科 高橋 大輔 (TAKAHASHI daisuke)

概要

大域的情報に基づいて時間発展をする, ある 2 次元の離散力学系をグローバルセルオートマトン (GCA) と名付けている [1]. この GCA のソリトンの振舞いをする解の基本構成や相互作用について説明する他, 確率を入れた時間発展ルールでどのような振舞いをするかを観察し解析したので報告する.

1 グローバルセルオートマトン (GCA)

グローバルセルオートマトン (GCA) とは, 一般のセルオートマトン (CA) のように局所的近傍により時間発展を定めるのではなく, 大域的な情報に基づいて時間発展を行うセルオートマトンである. まず, 本研究の対象となる GCA の基本設定と時間発展ルールを説明する.

1.1 GCA の基本状態

1 つのセルは正方形であり, 各セルの状態は図 1 の 2 種類のいずれかであるとする. 便宜上, 左のセルの状態を 0, 右のセルの状態を 1 と記号で表す. これらのセルを 2 次元セル平面内に配置すると図 2 のようになりセル同士の線が繋がり曲線 (折れ線) ができる. さらに周期境界条件をとることで曲線の端はすべてつながり任意の曲線は閉曲線になる.

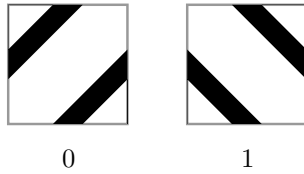


図 1 セルの内部状態

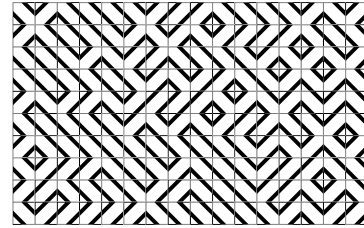


図 2 2 次元セルの状態の例. 周期境界条件よりどの黒線も閉曲線となる.

1.2 GCA の時間発展ルール

GCA の時間発展ルールは次のように定められる. 各セルについて, セル内の 2 本の短線が異なる閉曲線上にある場合はセルをもう片方の状態 ($0 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 0$) へ変える. 逆に 2 つの短線が同一閉曲線上にある場合はセルの状態は変えない. 図 3 にその時間発展の例を示す.

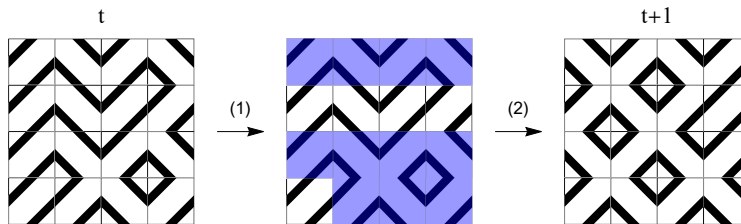


図 3 ある状態の時刻 t から $t+1$ への時間発展の様子

- (1) 時刻 t のある状態で, セル内の 2 つの短線が異なる閉曲線上にあるセルを探す (青でハイライトしたセル).
- (2) (1) でハイライトしたセルの状態を $0 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 0$ にかえて時刻 $t+1$ の状態にする.

このように時間発展を行うためには閉曲線の同定のため、曲線をたどって状態を調べる必要があり、あるセル内の2つの短線が同一閉曲線上にあるか異なる閉曲線上にあるかは、近傍のセルを確認するだけでは判断できない。これが大域的な情報に基づく時間発展ルールと呼ばれる所以である。

2 GCA の時間発展の解析

2.1 GCA の特徴的パターン

先行研究 [1] では時間発展によって得られるいくつかの特徴的なパターンが述べられている。

ソリトンの相互作用をする進行波

図4は1つの閉曲線上の2つの山の形状が正面衝突した後に互いをすり抜けるというソリトンの相互作用の例である。なお、この2次元セル平面内に多数の最小の閉曲線がバックグラウンドとして周期2でフリップしているが見やすくするために薄色で示している。

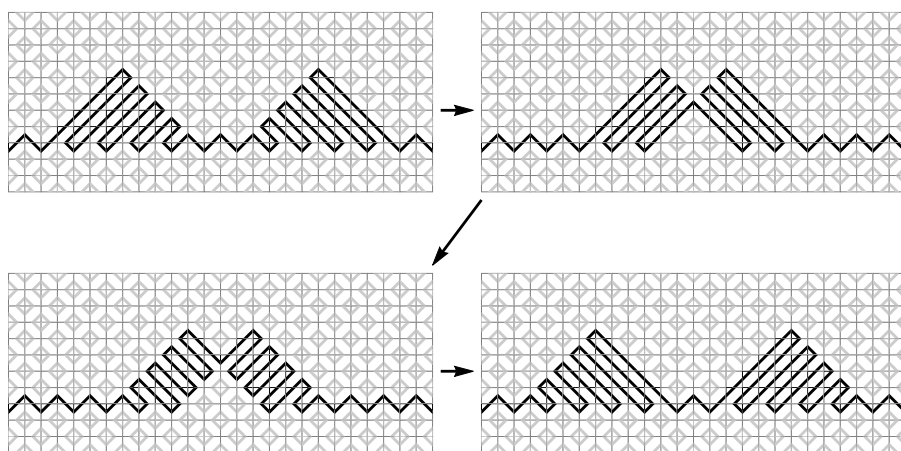


図4 同一閉曲線上の左右逆の進行波の相互作用の様子

進行波の消滅相互作用

一方、図5のような2つの進行波が異なる閉曲線上にある場合、時間発展によって衝突してもすり抜けは起こらず1つの閉曲線に融合し、さらに時間発展を行うと最終的に最小の閉曲線のみとなる。大きな閉曲線が縮んで最小の閉曲線のみになってしまうことを消滅と呼ぶことにする。周期境界条件を考えて2次元セル平面をトーラス曲面だと考えたとき、曲面を2つの領域に分けることができる閉曲線は時間発展するとすべて消滅する。

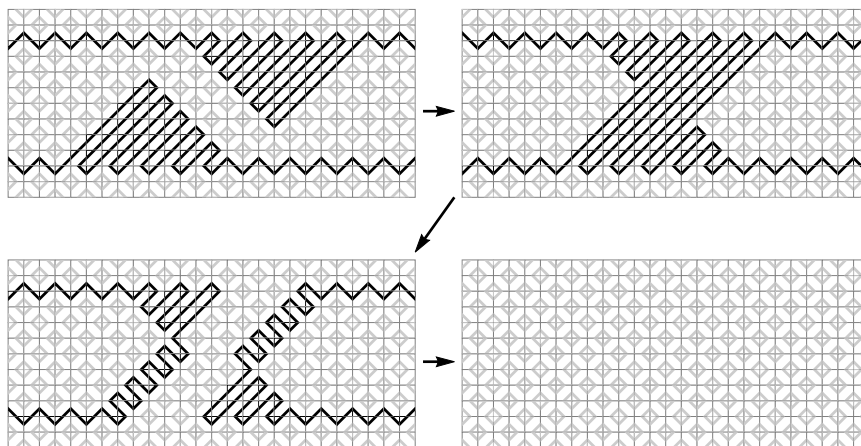


図5 2つの閉曲線上の上下左右逆の進行波の相互作用の様子

2.2 3つ以上の閉曲線上の進行波の衝突

先行研究では2つの波が衝突した際に得られるパターンが述べられていたが、本研究では3つ以上の異なる閉曲線上の進行波が衝突した際にどのように変化するかを解析したのでいくつか紹介する。

2.2.1 3つの異なる閉曲線上の進行波の衝突

2つの異なる閉曲線上の進行波同士は衝突した後に消滅していたが、3つの異なる閉曲線上にあるもの同士が衝突すると消滅せず以下のような現象が起こる。

融合するパターン

進行波同士が衝突すると、閉曲線同士が融合して1つになる。

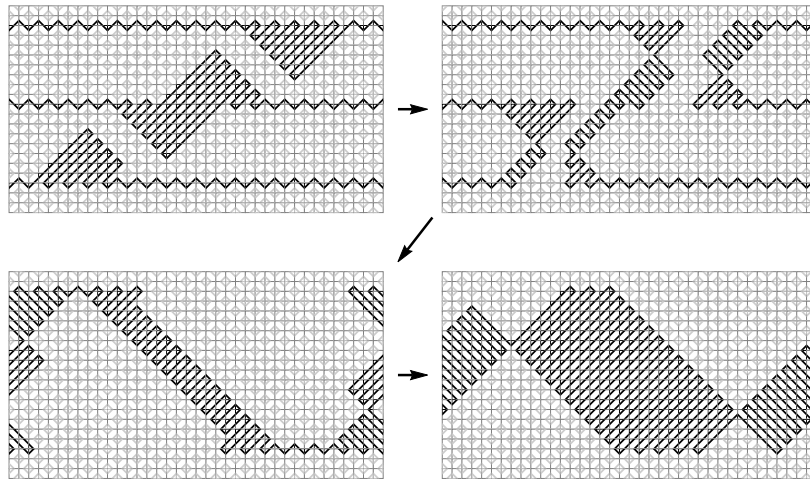


図6 3つの閉曲線上の進行波の相互作用の様子(その1). 衝突後1つの閉曲線となる。

すり抜けるパターン

進行波同士が衝突した後、すり抜けが起こり閉曲線の本数と形を維持する。

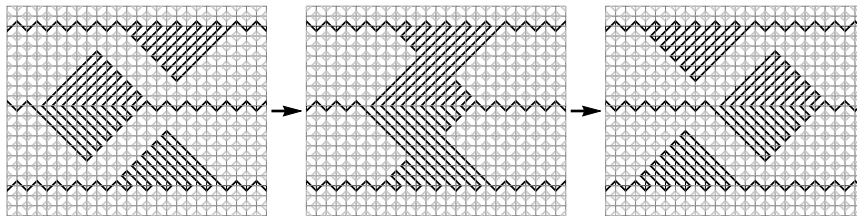


図7 3つの閉曲線上の進行波の相互作用の様子(その2). 衝突後もすり抜けて形を保存している。

2.2.2 4つの異なる閉曲線上の進行波の衝突

4つの異なる閉曲線上の進行波が衝突すると、2つのときと同様にして消滅するパターンが確認できた。

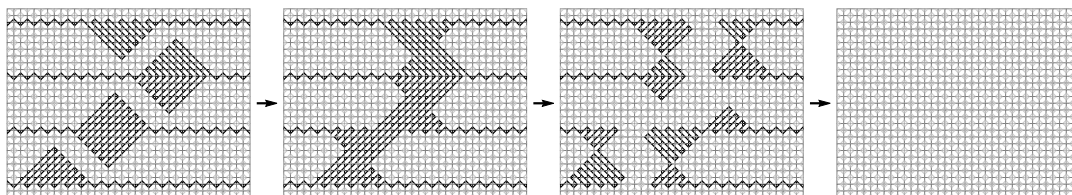


図8 4つの閉曲線上の進行波の相互作用の様子. 衝突後に消滅している。

進行波の衝突について、閉曲線の本数が偶数の場合は衝突後に閉曲線が消滅してしまい、奇数の場合はすり抜けたり融合するようなパターンが生じることが一般にわかっている。

3 確率を導入した時間発展ルール

1.2 節で述べた時間発展ではセル内の 2 つの短線が異なる閉曲線上にある場合は必ずセルの状態を他方に変えていた。本章ではこの時間発展ルールに確率を導入してルールを拡張し、解からある種の物理量を測り、統計的に解析する。確率を入れた時間発展ルールでは、セル内の 2 つの短線が異なる閉曲線上にある場合、確率 p ($0 < p < 1$) でセルの状態を変えるという操作をすべてのセルにおいて独立に同時に行う。図 9 にその時間発展の例を示す。

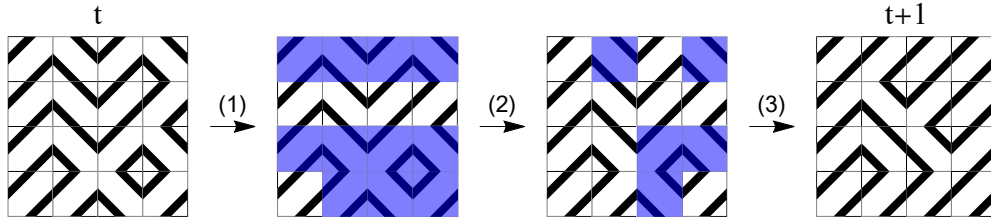


図 9 ある状態の時刻 t から $t+1$ への確率 p での時間発展の様子

- (1) 時刻 t のある状態で、セル内の 2 つの短線が異なる閉曲線上にあるセルを探す (青でハイライトしたセル)。
- (2) (1) でハイライトしたセルについて、確率 p で状態を変えるセルをハイライトし直す。
- (3) (2) でハイライトしたセルの状態を $0 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 0$ にかえて時刻 $t+1$ の状態にする。

3.1 閉曲線の本数の変化

確率を入れずに時間発展を行うと、進行波のように変化する閉曲線は残り、それ以外のものは消滅してしまうため閉曲線の本数は一定または周期的な数となる。これに対して確率を入れて時間発展を行うと、閉曲線は複雑な生成消滅の過程をたどる。そこで閉曲線の本数が確率入りの時間発展によってどのように変化するかを解析した。

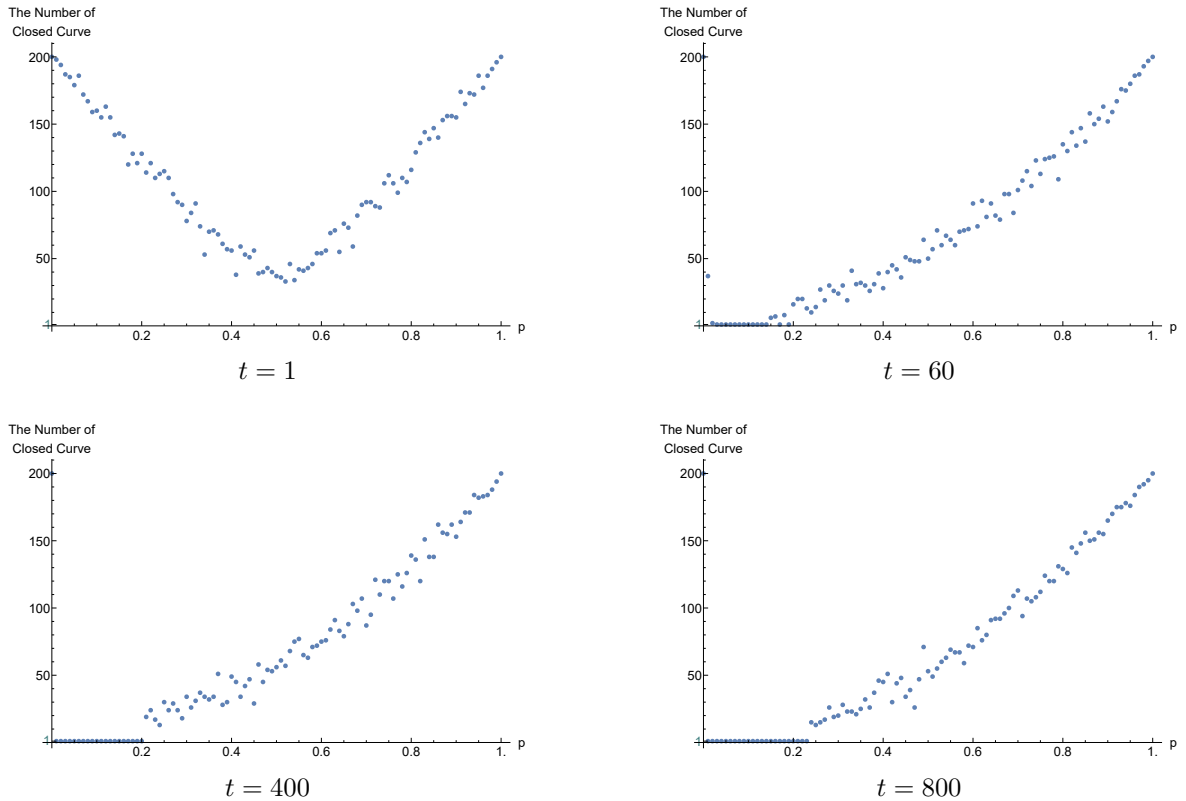


図 10 セル数 20×20 の状態での確率 p で t ステップ時間発展したときの閉曲線の本数の確率依存

図 10 はセル数 20×20 で確率 p による時間発展を行った際の時刻 t での閉曲線の本数である。初期状態 ($t = 0$) はすべての閉曲線が最小の閉曲線で、最も閉曲線の本数が多い状態 (ここでは 200 本) である。 $t = 1$ では $p = 0.5$ 付近での閉曲線の本数が大きく減っていることがわかる。さらに $t = 60$ になると、 $p < 0.2$ では閉曲線の本数が 1 本となっているが、この状態は次の時間発展で変化するセルがない定常状態である。しかし $t = 400, 800$ と時間発展が進むと、どの確率においても閉曲線の本数に大きな変化が見られなくなる。本来はさらに大きな時刻での数値計算を行うことが望ましいが、GCA の時間発展は大きな計算量を要するため $t = 800$ までの数値計算でとどめている。しかし得られた結果から推察すると、十分に時間発展すると、ある確率より小さいところでは閉曲線の本数は 1 本となり、それより確率が大きなところでは閉曲線の本数が 1 本以外の状態になるような、いわゆる相転移が起こるのではないかと予想できる。

3.2 遷移確率行列による解析

上記の予想を検証するために、任意の状態から任意の状態への遷移確率行列を導入する。いまセル数 $N \times M$ の状態に対して、全状態の集合を U とすると、セルの状態は 2 種類あるので U の要素数は $2^{N \times M}$ 個である。そこから図 11 のようにして $u(t), u(t+1) \in U$ に対して状態遷移確率 $P(u(t+1) | u(t))$ を求めると、 $2^{N \times M} \times 2^{N \times M}$ の状態の遷移確率行列を算出することができる。

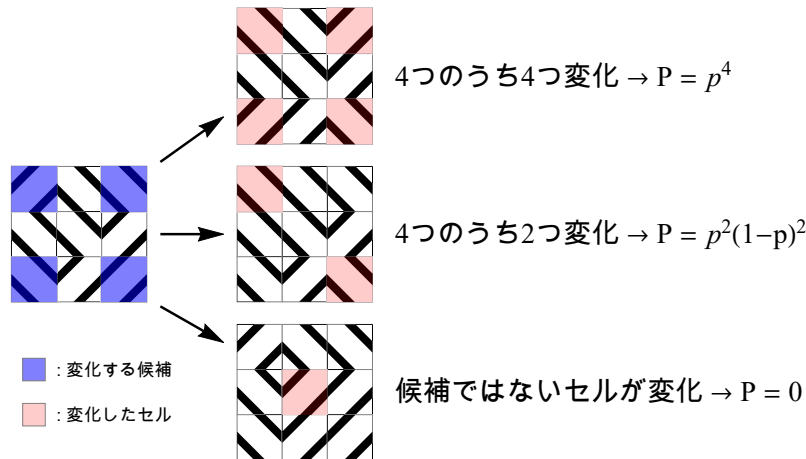


図 11 $P(u(t+1) | u(t))$ の算出の方法 (セル数 3×3 の状態で確率 p の場合)

さらに任意の状態に対して閉曲線の本数も一意に定まるので、状態の遷移確率行列を用いて閉曲線の本数の遷移確率行列を算出することができる。

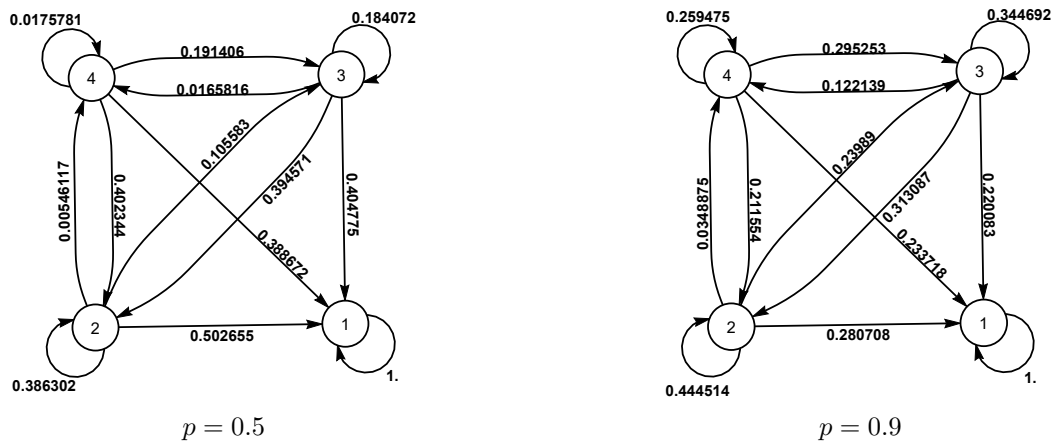


図 12 セル数 3×3 の状態で確率 p での閉曲線の本数の遷移確率行列のグラフ

図 12 はセル数 3×3 の状態で確率 p での閉曲線の本数の遷移確率行列をグラフで表したものである。ノードに付記する数は閉曲線の本数, エッジに付記する数は状態遷移確率である。 $p = 0.5, 0.9$ では 1 以外のノードから正の確率で 1 のノードに向かい, 1 のノードでは確率 1 でループするので, 十分な時間発展で閉曲線の本数が 1 本となる定常状態になることがわかる。つまりセル数 3×3 の状態では相転移は起こらない。

4 結論

本研究では, 先行研究で述べられていた進行波のパターンを複数の閉曲線上で衝突させたときに起こる新たなパターンを発見した。また時間発展ルールに確率を入れることを試みた結果, 十分に時間発展を行うことで閉曲線の本数が減少する様子が確認でき, さらには遷移確率行列を考えることで, セルの数が少ない状態のときは任意の確率 p ($0 < p < 1$) で十分に時間発展すると閉曲線の本数が 1 本という定常状態になることがわかった。今回は残念ながらセル数 3×3 より大きな状態での遷移確率行列を数値計算により算出することができなかったため, 相転移のような現象は確認できなかった。今後の課題としては, 進行波を含む新たなパターンの発見と形成の解析のほか, セル数の多い状態での確率を入れた時間発展による相転移の有無の検証があげられる。

参考文献

- [1] 中村伸也・岩尾昌央・高橋大輔 (2007) 「大域的情報に基く時間発展ルールを持つ二次元 CA について」 研究集会「戸田格子 40 周年非線形波動研究の歩みと展望」