九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

クラスター代数とq-パンルヴェ方程式の退化構造

大久保，直人
青山学院大学理工学部

鈴木，貴雄
近畿大学理工学部

https://doi.org/10.15017/1957511

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 29AO-S7 (1), pp.75-80, 2018-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University
バージョン：
権利関係：

KYUSHU UNIVERSITY

応用力学研究所研究集会報告 No.29AO-S7
「非線形波動研究の新潮流ー理論とその応用ー」（研究代表者　辻本　諭）

Reports of RIAM Symposium No.29AO-S7

New trends in nonlinear waves - theory and applications -

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 9 - November 11, 2017

Article No. 11 (pp. 75 - 80)

クラスター代数と q-パンルヴェ方程式の退化構造

大久保 直人（OKUBO Naoto），鈴木 貴雄（SUZUKI Takao）

（Received 15 January 2018; Accepted 20 February 2018）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2018

クラスター代数と q-パンルヴェ方程式の退化構造

青山学院大学　理工学部　　大久保　直人　(OKUBO Naoto)
近畿大学　理工学部　　鈴木　貴雄　(SUZUKI Takao)

概要

クラスター代数とは可換環の一種であり，その生成系は箙の変異という操作によって定義される．本稿では，q-パンルヴェ VI 方程式の高階化が変異によって記述されること，箙の頂点の合流操作が q-パンルヴェ方程式の退化と対応することを紹介する．

1　はじめに

Fomin と Zelevinsky により導入されたクラスター代数 ([1]) は, クラスター変数と係数によって記述される可換環の一種であり, その生成系は変異 (mutation) という操作によって定義される. 変異とは, クラスター変数, 係数, 箙 (quiver) の組からなる seed に対して新しい種を得る操作である. 変異によって新たに得られる係数は元の係数の有理式となる.

q-パンルヴェ方程式は以下のような退化構造を持つことが知られている ([4]).

$$\begin{array}{l} q\text{-}P(A_0^*) \to q\text{-}P(A_1) \to q\text{-}P(A_2) \to q\text{-}P(A_3) \to q\text{-}P(A_4) \to \ q\text{-}P(A_5) \ \to \ q\text{-}P(A_6) \ \to q\text{-}P(A_7) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \searrow \quad \nearrow \qquad \nearrow \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad q\text{-}P(A_5)^{\#} \to q\text{-}P(A_6)^{\#} \to q\text{-}P(A_7') \end{array}$$

この図において q-$P(A_3)$ が q-パンルヴェ VI 方程式 ([2]) に相当する．本稿では, 津田によって導入された q-$P(A_3)$ のある一般化 ([7]) を箙の変異から導出する. 更に, 離散パンルヴェ方程式の退化に対応する操作として箙の頂点の合流を考察し, それにより q-$P(A_3)$ からの退化として得られる 8 つの方程式を変異から系統的に導出する[*1].

2　クラスター代数

ここでは必要な記号及び定義のみを簡潔に記す．N 次反対称整数行列 $\Lambda = (\lambda_{i,j})_{i,j=1}^N$ と変数の組 $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_N)$ の組 $(\Lambda, \boldsymbol{y})$ を seed という. 各 y_i を係数という.

Definition 2.1　[1]　seed $(\Lambda, \boldsymbol{y})$ の $k \in \{1, \ldots, N\}$ における変異 $\mu_k : (\Lambda, \boldsymbol{y}) \mapsto (\Lambda', \boldsymbol{y}')$, $\Lambda' = (\lambda'_{i,j})_{i,j=1}^N$, $\boldsymbol{y}' = (y'_1, \ldots, y'_N)$ を以下で定義する:

$$\lambda'_{i,j} = \begin{cases} -\lambda_{i,j} & (i = k \vee j = k) \\ \lambda_{i,j} + \lambda_{i,k}\lambda_{k,j} & (\lambda_{i,k} > 0 \wedge \lambda_{k,j} > 0) \\ \lambda_{i,j} - \lambda_{i,k}\lambda_{k,j} & (\lambda_{i,k} < 0 \wedge \lambda_{k,j} < 0) \\ \lambda_{i,j} & (\text{otherwise}) \end{cases}, \tag{2.1}$$

[*1] これらのうち q-$P(A_3)$, q-$P(A_5)^{\#}$, q-$P(A_6)$, q-$P(A_7)$ の 4 つは, 既に論文 [3] において箙の変異から得られており, 残りの 4 つは最近 [8] において得られた.

$$y_i' = \begin{cases} y_k^{-1} & (i=k) \\ y_i(y_k^{-1}+1)^{-\lambda_{k,i}} & (\lambda_{k,i} \geq 0) \\ y_i(y_k+1)^{-\lambda_{k,i}} & (\lambda_{k,i} < 0) \end{cases}. \tag{2.2}$$

N 次反対称整数行列 $\Lambda = (\lambda_{i,j})_{i,j=1}^N$ は各頂点に $1,\dots,N$ の番号をつけたループと 2-サイクルをもたない箙 Q と次の規則により 1 対 1 に対応する: $\lambda_{i,j} = a > 0 \Leftrightarrow$ 頂点 i から j に向かう矢印は a 本. 以下では行列 Λ と対応する箙 Q を同一視する.

3 q-パンルヴェ VI 方程式の高階化

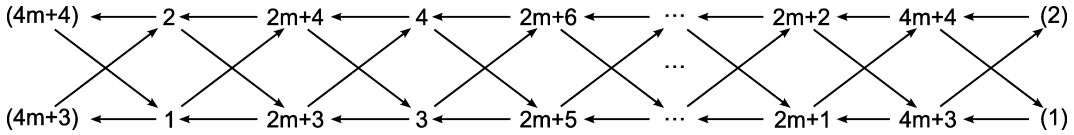

図 1　Generalized q-$P_{\rm VI}$ quiver

以降, $m \in \mathbb{N}$ とする. 初期 seed の箙 Q_0 (図 1) に対応する行列 Λ_0 を次のようにおく:

$$\begin{aligned}\Lambda_0 &= X_{1,4m+3} - X_{1,4m+4} - X_{1,2m+3} + X_{1,2m+4} - X_{2,4m+3} + X_{2,4m+4} + X_{2,2m+3} - X_{2,2m+4} \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m}(X_{2i+1,2i+2m+1} - X_{2i+1,2i+2m+2} - X_{2i+1,2i+2m+3} + X_{2i+1,2i+2m+4}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m}(-X_{2i+2,2i+2m+1} + X_{2i+2,2i+2m+2} + X_{2i+2,2i+2m+3} - X_{2i+2,2i+2m+4}).\end{aligned}$$

ただし, $X_{i,j} = E_{i,j} - E_{j,i}$ とし, $E_{i,j}$ は (i,j) 成分が 1 で他の成分は全て 0 となるような $(4m+4)$ 次正方行列とする. 初期 seed の係数を $\boldsymbol{y}_0 = (y_{0,1},\dots,y_{0,2m+2},z_{0,1},\dots,z_{0,2m+2})$ とする. 変異の合成 $T_1 = \mu_1\mu_2\dots\mu_{2m+2}$ 及び $T_2 = \mu_{2m+3}\mu_{2m+4}\dots\mu_{4m+4}$ を用いて, 係数の列を

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{y}_0 = (y_{0,1},\dots,y_{0,2m+2},z_{0,1},\dots,z_{0,2m+2}) \\ \xrightarrow{T_1}\ & \boldsymbol{y}_1 = (z_{1,\nu(1)},\dots,z_{1,\nu(2m+2)},y_{1,1},\dots,y_{1,2m+2}) \\ \xrightarrow{T_2}\ & \boldsymbol{y}_2 = (y_{2,\nu(1)},\dots,y_{2,\nu(2m+2)},z_{2,\nu(1)},\dots,z_{2,\nu(2m+2)}) \\ \xrightarrow{T_1}\ & \boldsymbol{y}_3 = (z_{3,\nu^2(1)},\dots,z_{3,\nu^2(2m+2)},y_{3,\nu(1)},\dots,y_{3,\nu(2m+2)}) \\ \xrightarrow{T_2}\ & \boldsymbol{y}_4 = (y_{4,\nu^2(1)},\dots,y_{4,\nu^2(2m+2)},z_{4,\nu^2(1)},\dots,z_{4,\nu^2(2m+2)}) \\ \xrightarrow{T_1}\ & \dots \end{aligned}$$

によって帰納的に定める. ただし,

$$\nu(1) = 2m+2, \quad \nu(2) = 2m+1, \quad \nu(2i+1) = 2i, \quad \nu(2i+2) = 2i-1 \quad (i = 1,\dots,m)$$

とする. このとき, $T_i(\Lambda_0) = -\Lambda_0$ $(i=1,2)$ が成り立つ. 以降, $y_{n,i}$ の添字を $n \in \mathbb{Z}$ 及び $i \in \mathbb{Z}_{2m+2}$ で取る.

Proposition 3.1　係数 $y_{n,i}$ は差分方程式系

$$\begin{aligned} y_{n+2,2i-1}\,y_{n,2i+2} &= \frac{(1+y_{n+1,2i-1})(1+y_{n+1,2i+2})}{(1+\frac{1}{y_{n+1,2i}})(1+\frac{1}{y_{n+1,2i+1}})}, \\ y_{n+2,2i}\,y_{n,2i+1} &= \frac{(1+y_{n+1,2i})(1+y_{n+1,2i+1})}{(1+\frac{1}{y_{n+1,2i-1}})(1+\frac{1}{y_{n+1,2i+2}})}, \end{aligned} \tag{3.1}$$

を満たす.

これより直ちに次の補題が従う.

Lemma 3.2　方程式系 (3.1) の下で, $y_{n,i}$ は関係式

$$\frac{y_{n+2,2i-1}\,y_{n+2,2i}}{y_{n+1,2i+1}\,y_{n+1,2i+2}} = \frac{y_{n+1,2i-1}\,y_{n+1,2i}}{y_{n,2i+1}\,y_{n,2i+2}} \quad (i = 1, \dots, m+1),$$
$$\prod_{i=1}^{m+1} (y_{n+2,2i-1}\,y_{n,2i}) = \prod_{i=1}^{m+1} (y_{n+1,2i-1}\,y_{n+1,2i}),$$

を満たす.

補題の 1 つめの式より,

$$c_i = \frac{y_{n+1,2i-1}\,y_{n+1,2i}}{y_{n,2i+1}\,y_{n,2i+2}} \quad (i = 1, \dots, m+1),$$

は n についての定数となる. ただし, c_i の添字は $i \in \mathbb{Z}_{m+1}$ で取ることとする. これを用いると,

$$\begin{aligned} y_{n,2i-1}\,y_{n,2i} &= c_i\,y_{n-1,2i+1}\,y_{n-1,2i+2} \\ &= c_i c_{i+1}\,y_{n-2,2i+3}\,y_{n-2,2i+4} \\ &= \dots \\ &= c_i c_{i+1} \dots c_{i+n-1}\,y_{0,2i+2n-1}\,y_{0,2i+2n} \end{aligned}$$

となり, 更に初期値を

$$c'_i = y_{0,2i-1}\,y_{0,2i} \quad (i = 1, \dots, m+1),$$

とおくと,

$$y_{n,2i-1}\,y_{n,2i} = c_{i,n-1}c'_{i+n} \quad (i = 1, \dots, m+1), \quad c_{i,n-1} = \prod_{j=1}^{n} c_{i+j-1},$$

と表される. ただし, c'_i の添字も $i \in \mathbb{Z}_{m+1}$ で取ることとする. また,

$$c = \prod_{i=1}^{m+1} c_i,$$

とおくと, 補題の 2 つめの式の左辺は

$$\prod_{i=1}^{m+1} (y_{n+2,2i-1}\,y_{n,2i}) = \prod_{i=1}^{m+1} \frac{c_{i,n-1}c'_{i+n}\,y_{n+2,2i-1}}{y_{n,2i-1}} = c^n \prod_{i=1}^{m+1} \frac{c'_i\,y_{n+2,2i-1}}{y_{n,2i-1}},$$

右辺は

$$\prod_{i=1}^{m+1} (y_{n+1,2i-1}\,y_{n+1,2i}) = \prod_{i=1}^{m+1} c_{i,n}c'_{i+n+1} = c^{n+1} \prod_{i=1}^{m+1} c'_i,$$

とそれぞれ書き直されるので,

$$\prod_{i=1}^{m+1} y_{n+2,2i-1} = c \prod_{i=1}^{m+1} y_{n,2i-1},$$

が得られる. 更に初期値を

$$c''_0 = \prod_{i=1}^{m+1} y_{0,2i-1}, \quad c''_1 = \prod_{i=1}^{m+1} y_{1,2i-1},$$

とおくと,

$$\prod_{i=1}^{m+1} y_{n,2i-1} = \begin{cases} c^k c''_0 & (n = 2k) \\ c^k c''_1 & (n = 2k+1) \end{cases},$$

と表される. 以上より, 方程式系 (3.1) は $2m$ 階差分方程式

$$y_{n+2,2i-1} = c_i\, y_{n,2i+1}\, \frac{(y_{n+1,2i-1}+1)(y_{n+1,2i+1}+c_{i+1,n}c'_{i+n+2})}{(y_{n+1,2i-1}+c_{i,n}c'_{i+n+1})(y_{n+1,2i+1}+1)},$$

に帰着する.

従属変数及びパラメーターを

$$f_i^{(n)} = y_{2n+1,2i-1}, \quad g_i^{(n)} = y_{2n,2i-1}, \quad c'_{i,n} = c_{i,n}c'_{i+n+1} \quad (i = 1, \dots, m+1).$$

とおくと, 最終的に次の定理が得られる.

Theorem 3.3 $f_i^{(n)}, g_i^{(n)}$ $(i = 1, \dots, m+1)$ は差分方程式系

$$\begin{aligned} f_i^{(n+1)} &= c_i\, f_{i+1}^{(n)}\, \frac{(g_i^{(n+1)}+1)(g_{i+1}^{(n+1)}+c'_{i+1,2n+1})}{(g_i^{(n+1)}+c'_{i,2n+1})(g_{i+1}^{(n+1)}+1)}, \\ g_i^{(n+1)} &= c_i\, g_{i+1}^{(n)}\, \frac{(f_i^{(n)}+1)(f_{i+1}^{(n)}+c'_{i+1,2n})}{(f_i^{(n)}+c'_{i,2n})(f_{i+1}^{(n)}+1)}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

ただし

$$\prod_{i=1}^{m+1} f_i^{(n)} = c^n c''_1, \quad \prod_{i=1}^{m+1} g_i^{(n)} = c^n c''_0,$$

を満たす.

この方程式は論文 [7] のものと等価である. しかし, 論文 [5, 6] のものと等価であるかどうかはまだ不明である.

4 箙の合流と q-パンルヴェ方程式の退化

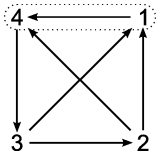

図 2 箙の頂点の合流の例 (合流前)

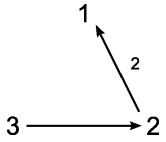

図 3 箙の頂点の合流の例 (合流後)

箙 Q の頂点の合流 $i \to j$ を, Q の i, j 間の矢印を消去し, 頂点 i, j を重ねて新たに 1 つの頂点 j とする操作と定義する. 図 2,3 は頂点の合流 $4 \to 1$ の例である.

図 1 の箙において $m = 1$ としたものが q-$P(A_3)$ の箙 (図 9) となる. この箙に対して以下のように頂点の合流を行うことで q-$P(A_3)$ の退化によって得られる方程式の箙を構成できる:

- 図 9 の箙に対して頂点の合流 $8 \to 1$ を行うことにより, q-$P(A_4)$ の箙 (図 8) が得られる.
- 図 8 の箙に対して頂点の合流 $7 \to 2$ を行うことにより, q-$P(A_5)$, q-$P(A_5)^{\#}$ の箙 (図 7) が得られる. (合流後に頂点 5 と 6 を入れ替えている.)
- 図 7 の箙に対して頂点の合流 $6 \to 1$ を行うことにより, q-$P(A_6)$, q-$P(A_6)^{\#}$ の箙 (図 6) が得られる.
- 図 6 の箙に対して頂点の合流 $5 \to 4$ を行うことにより, q-$P(A_7)$ の箙 (図 4) が得られる.
- 図 6 の箙に対して頂点の合流 $5 \to 2$ を行うことにより, q-$P(A'_7)$ の箙 (図 5) が得られる.

これらの箙から q-パンルヴェ方程式を導出する手法を紹介する. 本稿では q-$P(A_7)$ についてのみ述べるが, 他の方程式も同様に構成できる. Q を図 4 の箙とし, 置換 $\nu \in \mathcal{S}_4$ を $\nu = (1234)$, mutation (の合成) T_0 を

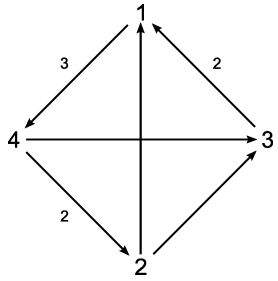

図 4　q-$P(A_7)$

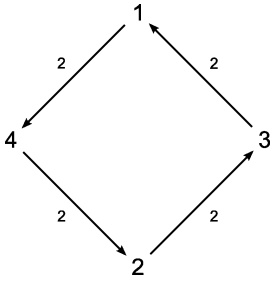

図 5　q-$P(A_7')$

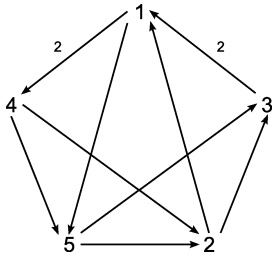

図 6　q-$P(A_6)$, q-$P(A_6)^{\#}$

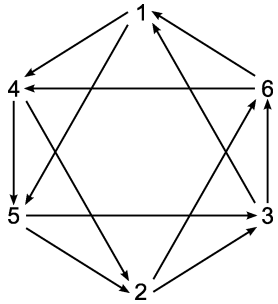

図 7　q-$P(A_5)$, q-$P(A_5)^{\#}$

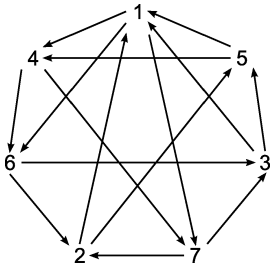

図 8　q-$P(A_4)$

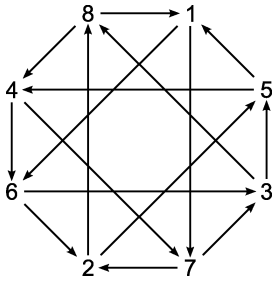

図 9　q-$P(A_3)$

$T_0 = \mu_2$ とする．さらに, $T_i = \mu_{\nu^{-i}(2)}$ とし, seed $(Q, \boldsymbol{y}_0)$ に対して以下のように変異を行い, 係数 $y_{n,i}$ を定める:

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{y}_0 = (y_{0,1}, \dots, y_{0,4}) \\ \xrightarrow{T_0} \quad & \boldsymbol{y}_1 = (y_{1,\nu(1)}, \dots, y_{1,\nu(4)}) \\ \xrightarrow{T_1} \quad & \boldsymbol{y}_2 = (y_{2,\nu^2(1)}, \dots, y_{2,\nu^2(4)}) \\ \xrightarrow{T_2} \quad & \cdots . \end{aligned}$$

Proposition 4.1　係数 $y_{n,i}$ は差分方程式系

$$\begin{aligned} y_{n+1,1} &= y_{n,4}(y_{n,2}+1)^2, \\ y_{n+1,2} &= y_{n,1}(y_{n,2}^{-1}+1)^{-1}, \\ y_{n+1,3} &= y_{n,2}^{-1}, \\ y_{n+1,4} &= y_{n,3}(y_{n,2}^{-1}+1)^{-1}, \end{aligned} \tag{4.1}$$

を満たす.

この差分方程式系において, 以下の c_1, c_2 は n に依らない保存量となる:

$$c_1 = \frac{y_{n+1,1}\, y_{n+1,2}\, y_{n+1,4}}{y_{n,2}}, \quad c_2 = c_1^{-n} y_{n,2}\, y_{n+1,1} (y_{n+1,2})^2$$

これらを用いると以下の定理を得る.

Theorem 4.2　係数 $y_{n,2}$ は以下を満たす:

$$y_{n+2,2} y_{n,2} = \frac{c_1^n c_2}{y_{n+1,2}(y_{n+1,2}+1)}.$$

この差分方程式が q-$P(A_7)$ である．q-$P(A_3)$ の退化で得られる他の方程式についても, 以下の表のように Q, ν, T_0 をとることにより同様の手法で導出できる.

	q-$P(A_7')$	q-$P(A_6)$	q-$P(A_6)^{\#}$	q-$P(A_5)$	q-$P(A_5^{\#})$	q-$P(A_4)$	q-$P(A_3)$
Q	図 5	図 6	図 6	図 7	図 7	図 8	図 9
ν	(13)(24)	(14253)	(13)(254)	(12)(3654)	(154)(263)	(145)(26)(37)	(1845)(2736)
T_0	$\mu_1\mu_2$	μ_2	$\mu_1\mu_5\mu_2$	$\mu_1\mu_5\mu_3\mu_1$	$\mu_1\mu_2$	$\mu_2\mu_3\mu_4$	$\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4$

5 今後の課題

本稿では論文 [7] において得られた q-パンルヴェ VI 方程式の高階化を箙の変異を用いて構成し, 箙の頂点の合流と方程式の退化との関係を紹介した. 今後の課題としては, q-パンルヴェ VI 方程式の一般化である q-ガルニエ系を同様の手法で構成すること, 箙の頂点の合流と方程式の極限操作との関係を明確に与えることを考えている.

参考文献

[1] S. Fomin and A. Zelevinsky, *Cluster algebras IV: Coefficients*, Compositio Mathematica **143** (2007) 112-164.

[2] M. Jimbo and H. Sakai, *A q-analog of the sixth Painlevé equation*, Let. Math. Phys. **38** (1996) 145–154.

[3] N. Okubo, *Bilinear equations and q-discrete Painlevé equations satisfied by variables and coefficients in cluster algebras*, J. Phys. A: Math. Theor. **48** (2015) 355201.

[4] H. Sakai, *Rational surfaces associated with affine root systems and geometry of the Painlevé equations*, Comm. Math. Phys. **220** (2001) 165–229.

[5] T. Suzuki, *A q-analogue of the Drinfeld-Sokolov hierarchy of type A and q-Painlevé system*, AMS Contemp. Math. **651** (2015) 25–38.

[6] T. Suzuki, *A reformulation of the generalized q-Painlevé VI system with $W(A_{2n+1}^{(1)})$ symmetry*, J. Integrable Syst. **2** (2017) xyw017.

[7] T. Tsuda, *On an integrable system of q-difference equations satisfied by the universal characters: its Lax formalism and an application to q-Painlevé equations*, Comm. Math. Phys. **293** (2010) 347–359.

[8] M. Bershtein, P. Gavrylenko and A. Marshakov, *Cluster integrable systems, q-Painlevé equations and their quantization*, (2017) arXiv: 1711.02063.