ランク2 ミューテーションの不変曲線について

野邊, 厚
千葉大学教育学部

https://doi.org/10.15017/1957510

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 29AO-S7 (1), pp.69-74, 2018-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University
バージョン：

応用力学研究所研究集会報告 No.29AO-S7
「非線形波動研究の新潮流ー理論とその応用ー」（研究代表者　辻本　諭）

Reports of RIAM Symposium No.29AO-S7

New trends in nonlinear waves - theory and applications -

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 9 - November 11, 2017

Article No. 10 (pp. 69 - 74)

ランク 2 ミューテーションの不変曲線について

野邊 厚（NOBE Atsushi）

（Received 14 January 2018; Accepted 1 March 2018）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2018

ランク 2 ミューテーションの不変曲線について

千葉大学教育学部　野邊 厚（NOBE Atsushi）*

概 要

ランク 2 のクラスター代数における非自明なミューテーション列には、自然に 2 次元離散可積分系の構造が入る。とくに、G_2 型以外の有限型ミューテーションは QRT 系であり、楕円曲線をその不変曲線にもつ離散可積分系である。一方、G_2 型ミューテーションにおいては、最も低次の不変曲線でさえ特異 4 次曲線である。しかし、ブローアップによる特異点解消を通して、G_2 型ミューテーションと共役な、楕円曲線上の離散可積分系を構成することが可能である。このような手順を通して、ランク 2 の有限型およびアフィン型クラスター代数は楕円曲線の加法構造をその幾何学的背景にもつことが導かれる。

1　はじめに

クラスター代数とは、2002 年に Fomin-Zelevinsky により発見された代数系であり [2]、以下のように定義される。はじめに、初期種子とよばれる変数（クラスター変数）、係数、行列（交換行列）の組を用意する。この初期種子にミューテーションとよばれる操作（成分の双有理変換）を繰り返し適用し、得られた種子全体に含まれるクラスター変数が生成する多項式環をクラスター代数とよぶ。クラスター代数の生成元は初期クラスターの Laurent 多項式であることが Fomin-Zelevinsky によって示されており [2]、そのような性質を Laurent 性とよぶ。さらに、このような Laurent 多項式の係数はすべて正であること（正値性）も知られている [6, 4]。

初期種子に含まれる変数の個数をそのクラスター代数のランクとよぶ。ランク 1 のクラスター代数は自明であるので、非自明かつ最低ランクのものはランク 2 である。ランク 2 のクラスター代数は次の三種に分類される；1）有限型、2）アフィン型、3）不定型。これらの型は、交換行列 $B = (b_{ij})$ の Cartan 行列

$$A(B) = (2\delta_{ij} - |b_{ij}|) = \begin{pmatrix} 2 & -|b_{12}| \\ -|b_{21}| & 2 \end{pmatrix}$$

の型に対応する；1）$|b_{12}b_{21}| < 4$、2）$|b_{12}b_{21}| = 4$、3）$|b_{12}b_{21}| > 4$。とくに、有限型のミューテーションのみ有限周期をもつ [3]（表 1）。

一般に、適当なクラスター代数のミューテーション列を適切に選ぶことにより、クラスター代数と離散可積分系の時間発展との関係が導かれるが [10]、とくにランク 2 の場合、非自明なミューテーション列は本質的に一つであり、一つのクラスター代数に対応する離散可積分系が一意に定まる。ランク 2 の有限型ミューテーションのうち、$A_1 \times A_1$ 型、B_2 型、A_2 型にはそれぞれ周期 2、3、5 をもつ QRT 系 [11] が対応する [7]。本稿では、G_2 型ミューテーションから、特異 4 次曲線を不変曲線にもつ、周期 4 の離散可積分系を導出する。また、この不変曲線の特異点解消を通して、G_2 型ミューテーションと共役な楕円曲線上の離散可積分系を構成する。さらに、G_2 型ミューテーションは本質的に楕円曲線の加法構造から導かれることを示す。紙幅の都合上、証明などの詳細については [9] に譲る。

*〒 263-8522 千葉市稲毛区弥生町 1 丁目 3 3 番, E-mail: nobe@faculty.chiba-u.jp

2　G_2 型ミューテーションと離散可積分系

G_2 型ミューテーションを定義しよう。係数半体 $(\mathbb{P}, \cdot, \oplus)$ を任意に固定する。初期種子 $\Sigma_0 := (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0, B_0)$ を次のように定める：

$$\boldsymbol{x}_0 = (x_{1;0}, x_{2;0}), \quad \boldsymbol{y}_0 = (y_{1;0}, y_{2;0}),$$
$$B_0 = (b^0_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

交換行列 B_0 は反対称行列ではないが、反対称化可能行列であることに注意。B_0 の Cartan 行列 $A(B_0)$ は G_2 型である。初期クラスター変数 $x_{1;0}$ および $x_{2;0}$ が群環 $\mathbb{QP}$ 上生成する有理函数体を $\mathcal{F} = \mathbb{QP}(x_{1;0}, x_{2;0})$ とおく。

次に i 方向のミューテーション μ_i（$i = 1, 2$）を導入する。交換行列 B_0 はミューテーションにより符号のみ入れ替わる：

$$B_0 \overset{\mu_i}{\longmapsto} -B_0 \qquad (i = 1, 2)$$

一方、係数およびクラスター変数はそれぞれ次のようにミューテーションする（$i = 1, 2$）：

$$y_{j;m} \overset{\mu_i}{\longmapsto} y_{j;m+1} := \begin{cases} y_{i;m}^{-1} & j = i, \\ y_{j;m} y_{i;m}^{[b_{ij}]_+} (y_{i;m} \oplus 1)^{-b_{ij}} & j \neq i, \end{cases}$$
$$x_{j;m} \overset{\mu_i}{\longmapsto} x_{j;m+1} := \begin{cases} \dfrac{y_{i;m} x_{1;m}^{[b_{1i}]_+} x_{2;m}^{[b_{2i}]_+} + x_{1;m}^{[-b_{1i}]_+} x_{2;m}^{[-b_{2i}]_+}}{(y_{i;m} \oplus 1) x_{i;m}} & j = i, \\ x_{j;m} & j \neq i, \end{cases}$$

ただし、$[a]_+ := \max(a, 0)$ とした。初期種子 Σ_0 からミューテーション μ_1、μ_2 を繰り返し適用することで得られるクラスター全体を $\mathcal{X}$ とおく。$\mathcal{X}$ の生成する $\mathcal{F}$ の部分代数 $\mathcal{A} = \mathbb{ZP}[\mathcal{X}]$ を G_2 型クラスター代数とよぶ。

ミューテーションは対合（$\mu_i^2 = \mathrm{id}$）であることから、非自明なミューテーション列は次のものに限られる：

$$\cdots, \mu_1, \mu_2, \mu_1, \mu_2, \cdots$$

そのため、ミューテーションの合成 $\mu_2 \circ \mu_1$ の定める写像

$$\boldsymbol{x}_{2k} = (x_{1;2k}, x_{2;2k}) \overset{\mu_2 \circ \mu_1}{\longmapsto} \boldsymbol{x}_{2k+2} = (x_{1;2k+2}, x_{2;2k+2}),$$
$$\boldsymbol{y}_{2k} = (y_{1;2k}, y_{2;2k}) \overset{\mu_2 \circ \mu_1}{\longmapsto} \boldsymbol{y}_{2k+2} = (y_{1;2k+2}, y_{2;2k+2})$$

を考察すれば十分である。実際、写像 $\mu_2 \circ \mu_1$ から 2 次元双有理写像力学系が得られる。

命題 1. 初期種子 $\Sigma_0 = (\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{y}_0, B_0)$ に対して、G_2 型ミューテーションの列 $\mu_1, \mu_2, \mu_1, \mu_2, \ldots$ は次の双有理写像力学系 $\psi : \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ を導く：

$$\psi : \left(z^t, w^t\right) \mapsto \left(z^{t+1}, w^{t+1}\right) = \left(\frac{\left(w^t\right)^3 + 1}{z^t}, \frac{z^{t+1} + 1}{w^t} \right), \tag{1}$$
$$\left(z^t, w^t\right) := \left(y_{2;2t} x_{1;2t}, \frac{x_{2;2t}}{\sqrt[3]{y_{1;2t}}} \right) \tag{2}$$

ただし、$(z^0, w^0) \in \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ とする。

（証明）　係数の交換関係より

$$y_{1;2k}y_{1;2k+1}=1,\quad y_{2;2k+1}=\frac{y_{2;2k}y_{1;2k}}{y_{1;2k}\oplus 1},\quad y_{2;2k+1}y_{2;2k+2}=1,\quad y_{1;2k+2}=\frac{y_{1;2k+1}y_{2;2k+1}^3}{(y_{2;2k+1}\oplus 1)^3}$$

また、これらおよび変数の交換関係より次を得る：

$$x_{1;2k+1}=\frac{y_{1;2k}+x_{2;2k}^3}{(y_{1;2k}\oplus 1)x_{1;2k}},\qquad x_{2;2k+1}=x_{2;2k},$$

$$x_{1;2k+2}=x_{1;2k+1}=\frac{y_{1;2k}+x_{2;2k}^3}{y_{1;2k}y_{2;2k}y_{2;2k+2}x_{1;2k}}=\frac{1+\frac{x_{2;2k}^3}{y_{1;2k}}}{y_{2;2k}y_{2;2k+2}x_{1;2k}},$$
$$x_{2;2k+2}=\frac{y_{2;2k+1}+x_{1;2k+1}}{(y_{2;2k+1}\oplus 1)x_{2;2k+1}}=\frac{1+y_{2;2k+2}x_{1;2k+2}}{\frac{1}{\sqrt[3]{y_{1;2k}y_{1;2k+2}}}x_{2;2k}}$$

(2) によって変数 z^t, w^t を定義すると、双有理写像 (1) を得る。 □

写像 ψ は本質的に G_2 型ミューテーションであることから次がしたがう。

命題 2. 双有理写像 ψ は周期 4 をもつ：$\psi^4=\mathrm{id}$。 □

このようにして得られた双有理写像 ψ は QRT 系ではないが、特異 4 次曲線上の 2 次元離散可積分系を定める。実際、ψ は次のような不変曲線をもつ。

定理 1. 双有理写像力学系 $\psi:\mathbb{P}^2(\mathbb{C})\to\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の不変曲線の一つは、次の多項式 f で与えられる、特異 4 次曲線 $\overline{\gamma}_\lambda$ である：

$$\begin{aligned}
&\overline{\gamma}_\lambda := \gamma_\lambda\cup\left\{P_\infty, P'_\infty\right\},\\
&\gamma_\lambda := \left(f(z,w)=0\right),\\
&f(z,w) := w^4+(z+1)w^3+\lambda^2 zw^2+(z+1)^2 w+(z+1)^2,\\
&\lambda^2 = -\frac{(w^0)^4+(z^0+1)(w^0)^3+(z^0+1)^2(w^0+1)}{z^0(w^0)^2}
\end{aligned}$$

ただし、$P_\infty=[1:0:0]$、$P'_\infty=[1:-1:0]$（斉次座標 $(z,w)\mapsto[z:w:1]$）は無限遠点。$\overline{\gamma}_\lambda$ は $\mathfrak{p}:=(-1,0)$ に特異点（通常二重点）をもつ。 □

注意 1. 有限周期をもつ 2 次元有理写像力学系は、一般に複数の不変曲線をもつことに注意 [5]。

特異 4 次曲線 $\overline{\gamma}_\lambda$ のペンシル $\{\overline{\gamma}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}$ の base point は次の通り：

$$P_\infty,\qquad P'_\infty,\qquad \mathfrak{p},\qquad (0,-1)\,,\qquad (0,\zeta_6)\,,\qquad \left(0,\zeta_6^5\right)$$

ただし、ζ_6 は 1 の 6 乗根とする。とくに、無限遠点 P_∞、P'_∞ および特異点 $\mathfrak{p}$ が base point であることに注意しよう。双有理写像 ψ は base point 上では不定であり、$\mathbb{P}^2(\mathbb{C})-\{\text{base points}\}$ 上の力学系と見るのが自然である。よって、アフィン曲線 γ_λ を ψ の不変曲線と思ってもとくに問題ない。(base point において $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ をブローアップして初期値空間を構成してもよいが、ここではそれは必要としない。)

3　特異点解消

特異点 $\mathfrak{p}$ におけるブローアップにより、不変曲線 $\overline{\gamma}_\lambda$ の特異点を解消しよう。とくに $\mathfrak{p}$ は通常二重点のため、1 回のブローアップでその特異点は解消される。さらに、$\mathfrak{p}$ はペンシル $\{\overline{\gamma}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{P}^1(\mathbb{C})}$ の base point でもあるため、この方法でペンシルの曲線を一斉にブローアップできる。

射影平面 $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ の $\mathfrak{p}$ におけるブローアップを $\widetilde{U}=\widetilde{\mathcal{U}}_0\cup\widetilde{\mathcal{U}}_1\subset\mathbb{P}^1(\mathbb{C})\times\mathbb{A}^2$ とし、以下、$\widetilde{\mathcal{U}}_1\simeq\mathbb{A}^2$ 上で考える。ただし

$$\begin{aligned}
&\widetilde{U}:=\{((a_0:a_1),(b,c))\mid(b+1)a_1=ca_0\},\\
&\widetilde{\mathcal{U}}_i:=\left\{((a_0:a_1),(b,c))\in\widetilde{U}\mid a_i\neq 0\right\}\simeq\mathbb{A}^2\quad(i=0,1),\\
&\widetilde{\pi}:\widetilde{U}\to\begin{cases}\widetilde{\mathcal{U}}_0;(u,v)\mapsto(z,w)=(v,u(v+1)),\\ \widetilde{\mathcal{U}}_1;(u,v)\mapsto(z,w)=(uv-1,u)\end{cases}
\end{aligned}$$

である。射影 $\widetilde{\pi}$ により、γ_λ は狭義引き戻し $\widetilde{\gamma}_\lambda$ と例外曲線 E に変換される：

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\gamma}_\lambda:=\left(\widetilde{f}_1(u,v)=0\right),\\
&\widetilde{f}_1(u,v):=u^2(v+1)+uv^2+v^2+\lambda^2(uv-1),\\
&E:=(u=0)
\end{aligned}$$

このとき、generic な λ（$\lambda\neq\pm1,\pm2$）に対して曲線 $\widetilde{\gamma}_\lambda$ は非特異 3 次曲線（楕円曲線）である。ペンシル $\{\widetilde{\gamma}_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{C}}$ の base point は次の 3 点

$$(-1,-1),\qquad\left(\zeta_6,\zeta_6^5\right),\qquad\left(\zeta_6^5,\zeta_6\right)$$

であり、これらは $\widetilde{\pi}$ により、ペンシル $\{\gamma_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{C}}$ の base point である 3 点 $(0,-1)$、$(0,\zeta_6)$、$\left(0,\zeta_6^5\right)$ にそれぞれ写る。

さらに、$\widetilde{\pi}$ を用いて、双有理写像 ψ から楕円曲線 $\widetilde{\gamma}_\lambda$ 上の共役な双有理写像 $\widetilde{\psi}:=\widetilde{\pi}^{-1}\circ\psi\circ\widetilde{\pi}$ を構成できる：

$$\widetilde{\psi}:(u^t,v^t)\mapsto(u^{t+1},v^{t+1})=\left(\frac{(u^t)^2+v^t}{u^tv^t-1},u^t\right)\tag{3}$$

注意 2. 狭義引き戻し $\widetilde{\gamma}_\lambda$ と例外曲線 $u=0$ は、2 点 $(0,\pm\lambda)$ で交わるため、これらの点において $\widetilde{\pi}^{-1}$ は一意ではない。そのため、これらの点においては、上式 (3) を用いて $\widetilde{\psi}$ を定義する：

$$\widetilde{\psi}(0,\pm\lambda)=(\mp\lambda,0)$$

こうして、$\widetilde{\psi}$ は $\widetilde{\gamma}_\lambda-\left\{(-1,-1),\left(\zeta_6,\zeta_6^5\right),\left(\zeta_6^5,\zeta_6\right)\right\}$ 上で定義される。

いま、楕円曲線 $\widetilde{\gamma}_\lambda$ 上に 3 種類の双有理変換

$$\begin{aligned}
&\phi_{\mathrm{h}}:\left(u^t,v^t\right)\mapsto\left(\frac{(v^t)^2+u^t}{u^tv^t-1},v^t\right),\\
&\phi_{\mathrm{v}}:\left(u^t,v^t\right)\mapsto\left(u^t,\frac{(u^t)^2+v^t}{u^tv^t-1}\right),\\
&\phi_{\mathrm{d}}:\left(u^t,v^t\right)\mapsto\left(v^t,u^t\right)
\end{aligned}$$

を導入し、これら ϕ_{h}、ϕ_{v}、ϕ_{d} をそれぞれ horizontal flip、vertical flip、diagonal flip とよぶことにする。このとき、horizaontal flip ϕ_{h} と vertical flip ϕ_{v} との合成の定める $\widetilde{\gamma}_\lambda$ 上の双有理写像力

学系 $\phi := \phi_{\mathrm{v}} \circ \phi_{\mathrm{h}}$ を QRT 系とよぶのであった [11, 12]。さらに、$\widetilde{\psi}$ は QRT 系と同様に flip タイプの双有理写像力学系、すなわち、vertical flip ϕ_{v} と diagonal flip ϕ_{d} との合成であることが示される。

定理 2. 楕円曲線 $\widetilde{\gamma}_\lambda$ 上の双有理写像力学系 $\widetilde{\psi}$ および ϕ はそれぞれ次をみたす：

$$\widetilde{\psi} = \phi_{\mathrm{d}} \circ \phi_{\mathrm{v}}, \qquad \widetilde{\psi}^4 = (\phi_{\mathrm{d}} \circ \phi_{\mathrm{v}})^4 = \mathrm{id},$$
$$\phi = \phi_{\mathrm{v}} \circ \phi_{\mathrm{h}}, \qquad \phi^2 = (\phi_{\mathrm{v}} \circ \phi_{\mathrm{h}})^2 = \mathrm{id}$$

さらに、$\widetilde{\psi}$ は ϕ の "半分" である：$\phi = \widetilde{\psi}^2$。 □

次節でこのような flip タイプの力学系は楕円曲線の加法構造に由来することを示す。

4 G_2 型ミューテーションと楕円曲線の加法

双有理写像 ϕ および $\widetilde{\psi}$ の不変曲線 $\overline{\gamma}_\lambda$ の Weierstrass 標準形 E_λ は次のように与えられる：

$$\begin{aligned}
&E_\lambda = \{g(x,y) = 0\} \cup \{\mathcal{O} = [0:1:0]\} \\
&g(x,y) := y^2 + a_1xy + a_3y - x^3 - a_2x^2 - a_4x - a_6 = 0 \\
&a_1 = -\left(\lambda^2 - 4\right), \quad a_2 = 2\left(\lambda^2 - 1\right), \quad a_3 = 0, \quad a_4 = \left(\lambda^2 - 1\right)^2, \quad a_6 = 0
\end{aligned}$$

とくに、$a_3 = 0$ より、$\overline{\gamma}_\lambda$ 上の QRT 系 ϕ は周期 2 をもつことが分かる [12]。

楕円曲線 $\overline{\gamma}_\lambda$ から E_λ への変換を通して、双有理写像 ϕ および $\widetilde{\psi}$ とそれぞれ共役な E_λ 上の双有理写像を得ることができるが、記号の節約のため、それらもそれぞれ ϕ および $\widetilde{\psi}$ で表すものとする。点 $\mathcal{O}$ を単位元とする、楕円曲線 E_λ 上の点のなす加法群 $(E_\lambda, +, \mathcal{O})$ を考える。このとき、定理 2 を幾何学的に述べた次の定理を得る。

定理 3. 楕円曲線 E_λ 上の点 $S = (-\lambda^2 + 1, 0)$ および $T = (0, 0)$ をとる。このとき、双有理写像 $\widetilde{\psi}$ および ϕ は、加法群 $(E_\lambda, +, \mathcal{O})$ の加法を用いて、それぞれ次のように表される：

$$\widetilde{\psi} : P \mapsto P - S, \qquad \phi : P \mapsto P + T$$

さらに、点 S、T に関して次が成り立つ：$2T = 4S = \mathcal{O}$。 □

このように、点 S および T は楕円曲線 E_λ 上の torsion point であるが、さらに次が成り立つ：generic な λ（$\lambda \neq \pm 1, \pm 2$）に対して E_λ 上に $\pm S$、T 以外の torsion point は存在しない [1]。この事実から次の定理がしたがう。

定理 4. 楕円曲線 E_λ の Mordell-Weil 群 $E_\lambda(\mathbb{Q})$ の捩れ部分群 $E_\lambda(\mathbb{Q})_{\mathrm{tors}}$ は次で与えられる：

$$E_\lambda(\mathbb{Q})_{\mathrm{tors}} = \{S, 2S = T, 3S = -S, 4S = \mathcal{O}\} \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$$

すなわち、$E_\lambda(\mathbb{Q})_{\mathrm{tors}}$ は点 S の生成する 4 次巡回群である。 □

したがって、楕円曲線 E_λ の加法構造から得られる有限周期の離散力学系は、上で考察した ϕ、ψ（$\widetilde{\psi}$）以外に存在しない。さらに、点 S が捩れ部分群 $E_\lambda(\mathbb{Q})_{\mathrm{tors}}$ の生成元であることから、G_2 型ミューテーション ψ は QRT 系 ϕ より "詳細な" 点の動きを与えていることが分かる。

表 1: ランク 2 のクラスター代数から得られる離散可積分系とそれらの不変曲線。IC は不変曲線、RIC は不変曲線のブローアップによる狭義引き戻しを表し、$\sharp$ は特異曲線であることを示す。

Type	Finite				Affine	
	$A_1 \times A_1$	B_2 (C_2)	G_2	A_2	$A_1^{(1)}$	$A_2^{(2)}$
(b_{12}, b_{21})	$(0,0)$	$(-2,1)$	$(1,-3)$	$(-1,1)$	$(-2,2)$	$(-4,1)$
Period	2	3	4	5	∞	∞
QRT map	◯	◯	×	◯	◯	×
Deg. of IC	3	3	$4^\sharp$	3	2	$4^\sharp$
Deg. of RIC	—	—	3	—	—	2

5 まとめ

ランク 2 のクラスター代数から得られる離散可積分系に関して分かっていることを表 1 にまとめる。アフィン型の $A_2^{(2)}$ に対しても、G_2 型と同様に、不変曲線として特異 4 次曲線が得られ、その特異点解消から楕円曲線の加法構造を用いた幾何学的解釈が与えられる [7, 8]。このようにして、ランク 2 のクラスター代数のうち、有限型およびアフィン型に関してはその素性が明らかにされているが、不定型に関しては不変曲線を求めることさえできていない。ランク 2 の不定型クラスター代数の背後にある幾何学の解明は今後の課題である。

謝辞　本研究は科学研究費補助金（基盤研究 (C) 課題番号 26400107）の助成を受けている。

参考文献

[1] Cremona J E, *Algorithms for Modular Elliptic Curves*, Cambridge University Press (1997)

[2] Fomin S and Zelevinsky A, *J. Amer. Math. Soc.* **15** (2002)

[3] Fomin S and Zelevinsky A, *Invent. Math.* **154** (2003)

[4] Gross M, Hacking P, Keel S and Kontsevich M, *arXiv:1411.1394v2* (2014)

[5] Hirota R and Yahagi H, *J. Phys. Soc. Jpn.* **71** 2867-72 (2002)

[6] Lee K and Schiffler R, *arXiv:1306.2415* (2013)

[7] Nobe A, *J. Phys. A: Math. Theor.* **49** (2016)

[8] Nobe A, *arXiv:1801.10320* (2018)

[9] Nobe A, in preparation

[10] Okubo N, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu* **B41** (2013)

[11] Quispel G R W, Roberts J A G and Thompson C J, *Physica D* **34** (1989)

[12] Tsuda T, *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** (2004)