

相似幾何における弾性曲線とその離散化・CAGD との 関連について

井ノ口, 順一
筑波大学数理物質系

梶原, 健司
九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

三浦, 憲二郎
静岡大学大学院工学研究科

朴, 炯基
九州大学大学院数理学府

他

<https://doi.org/10.15017/1957509>

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 29A0-S7 (1), pp.61-68, 2018-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

バージョン：

権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.29AO-S7
「非線形波動研究の新潮流—理論とその応用—」 (研究代表者 辻本 諭)

Reports of RIAM Symposium No.29AO-S7

New trends in nonlinear waves - theory and applications -

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 9 - November 11, 2017

Article No. 09 (pp. 61 - 68)

相似幾何における弾性曲線とその離散 化・CAGD との関連について

井ノ口 順一 (INOGUCHI Jun-ichi), 梶原 健司
(KAJIWARA Kenji), 三浦 憲二郎 (MIURA Kenjiro T.),
朴 炯基 (PARK Hyeongki), SCHIEF Wolfgang K.
(SCHIEF Wolfgang K.)

(Received 15 January 2018; Accepted 14 March 2018)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2018

相似幾何における弾性曲線とその離散化・CAGD との関連について

筑波大学数理物質系	井ノ口 順一	(INOUCHI Jun-ichi)
九州大学マス・フォア・インダストリ研究所	梶原 健司	(KAJIWARA Kenji)
静岡大学大学院工学研究科	三浦 憲二郎	(MIURA Kenjiro T.)
九州大学大学院数理学府	朴 炯基	(PARK Hyeongki)
University of New South Wales	Wolfgang K. SCHIEF	

概要

弾性エネルギーの臨界点である平面曲線は弾性曲線とよばれる。弾性曲線は mKdV 方程式と深く関連し、実際、平面曲線の等周変形を記述する mKdV 方程式の進行波解から定まる曲線が弾性曲線である。本稿では相似幾何学の枠組みを用いて工業意匠設計で用いられている対数型美的曲線 (LAC) とその一般化を考察し、それらが平面曲線の等角変形を記述する Burgers 方程式の定常解として特徴付けられること、および適当なエネルギーの臨界点として定式化できることを報告する。この結果は、LAC が弾性曲線の相似幾何類似であることを示唆する。以上の理論的枠組みに基づき、可積分離散化の手法を応用した LAC の離散化を提案する。さらに、それらを離散変分問題の解として定式化する。

1 はじめに

工業意匠設計 (industrial shape design) や CAGD (computer aided geometric design) において特別な性質をもつ平面曲線が設計部品として使われている。とくに曲率単調な曲線が有用である。本稿ではそれらの一つで、車のデザイナーが美しいと感じる曲線から共通の性質を抽出して提案された対数型美的曲線 (log-aesthetic curves, LAC) と呼ばれる曲線族 [3, 9] を相似幾何の観点から考察し、Euclid 幾何における Euler の弾性曲線の相似幾何類似と理解できることを明らかにする。

Euler は Euclid 平面内の曲線に対し弾性エネルギーを最小化する曲線を考察した。弧長径数表示された全長 ℓ の曲線 $\gamma(s)$ が弾性曲線 (elastica) であるとは γ が全長を保つ変分に関し、弾性エネルギー (elastic energy)

$$E(\gamma) = \int_0^\ell \frac{1}{2} \kappa(s)^2 ds, \quad (1.1)$$

の臨界点であることをいう。ここで κ は Euclid 曲率を表す。

Euclid 平面 E^2 内の 2 点 A, B とベクトル X, Y を採り固定する。以下の条件をみたす C^∞ 級曲線 $\gamma: [0, \ell] \rightarrow \mathbb{R}^2$ の全体を $\mathcal{E}(A, B; X, Y)$ で表す。

$$\gamma(0) = A, \quad \gamma(\ell) = B, \quad \frac{d\gamma}{ds}(0) = X, \quad \frac{d\gamma}{ds}(\ell) = Y. \quad (1.2)$$

この変分問題に関する Euler-Lagrange 方程式は

$$2 \frac{d^2 \kappa}{ds^2} + \kappa^3 - \lambda \kappa = 0, \quad (\lambda \text{ は定数}). \quad (1.3)$$

とくに $\lambda = 0$ の弾性曲線は自由弾性曲線 (free elastica) とよばれる [10].

註 弾性曲線の定義において「弧長径数表示」を条件からはずした定式化も知られている [8]. 弾性エネルギーを修正した汎関数

$$\int_\gamma \frac{1}{2} |\dot{\gamma}(t)|^2 dt + \Lambda(t) \int_\gamma (|\dot{\gamma}(t)|^2 - 1) dt, \quad (1.4)$$

の臨界点が弾性曲線である．ここで $\Lambda(t)$ は t に依存した Lagrangian 乗数であり，定数 λ とは $\lambda = 2\Lambda + 3\kappa^2$ という関係にある．

次に，平面曲線の Euclid 幾何における不変径数である弧長を不変に保つ等周変形を考察する．Euclid 幾何における単位接ベクトル場，単位法ベクトル場をそれぞれ $T^E = \gamma_s, N^E$ で表す． J を原点を中心とする正の $\pi/2$ 回転とすると $N^E = JT^E$ である．弧長径数表示された曲線の標準的な等周変形として Goldstein-Petrich 流 [2, 7] :

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma = -\frac{\partial \kappa}{\partial s} N^E - \frac{1}{2} \kappa^2 T^E, \quad (1.5)$$

が知られている．Frenet 標構 $F^E = (T^E, N^E)$ のみならず Lax 方程式

$$(F^E)^{-1} \frac{\partial F^E}{\partial s} = \kappa J, \quad (F^E)^{-1} \frac{\partial F^E}{\partial t} = -\left(\frac{\partial^2 \kappa}{\partial s^2} + \frac{1}{2} \kappa^3 \right) J, \quad (1.6)$$

の両立条件は mKdV 方程式である :

$$\frac{\partial \kappa}{\partial t} + \frac{\partial^3 \kappa}{\partial s^3} + \frac{3}{2} \kappa^2 \frac{\partial \kappa}{\partial s} = 0. \quad (1.7)$$

mKdV 方程式の進行波解 $\kappa(s - \lambda t/2)$ は

$$2 \frac{d^2 \kappa}{dw^2} + \kappa^3 - \lambda \kappa = c_0, \quad w = s - \frac{\lambda t}{2}, \quad c_0 \in \mathbb{R}, \quad (1.8)$$

に従う．(1.8) と (1.3) を比較して，弾性曲線が Goldstein-Petrich 流の進行波解であることがわかる．

2 対数型美的曲線と相似幾何

2.1 対数型美的曲線

弧長径数表示された平面曲線 $\gamma(s)$ が傾き α の対数型美的曲線であるとは，曲率半径 $q = q(s)$ が次の式で与えられるときをいう [9] :

$$q(s)^\alpha = as + b \quad (\alpha \neq 0), \quad q(s) = \exp(as + b) \quad (\alpha = 0), \quad a, b \in \mathbb{R}. \quad (2.1)$$

対数型美的曲線は種々の基本的な平面曲線を含んでいる．実際，クロソイド（緩和曲線）は $\alpha = -1$ の LAC である．また $\alpha = 1$ のときは対数螺旋であり， $\alpha = 0$ の LAC は Nielsen 螺旋と呼ばれている．この定式化は Euclid 幾何に基づくものであるが，見たとおり非常にシンプルで，それが故に背後の数学的構造が逆によく見えない．従って，LAC を空間曲線や曲面などに拡張しようとしても，よい指導原理がわからない．本稿では LAC の枠組みとして相似幾何に基づく定式化を提案する．

2.2 相似幾何における平面曲線

本稿の主題である相似幾何を論じる．詳細は [4] を参照．相似幾何における曲線の不変径数は方向角 $\theta = \int \kappa(s) ds$ である． θ で径数表示された平面曲線 $\gamma(\theta)$ の相似 Frenet 標構 $F = (T, N)$ を

$$T = \frac{d\gamma}{d\theta}, \quad N = J \frac{d\gamma}{d\theta}, \quad (2.2)$$

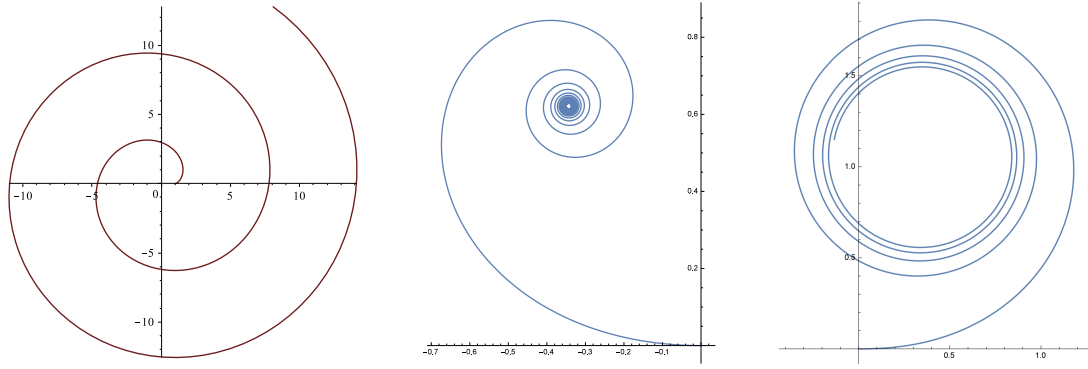


図 1: 対数型美的曲線の例. 左: $\alpha = 2$, 中央: $\alpha = 0$, 右: $\alpha = -\frac{1}{4}$.

で定める. F は相似 Frenet 公式

$$\frac{dT}{d\theta} = -uT + N, \quad \frac{dN}{d\theta} = -T - uN, \quad (2.3)$$

に従う. 関数 $u(\theta)$ を相似曲率とよぶ. Euclid 幾何において平面曲線が Euclid 曲率で決まったように, 相似幾何においては, 平面曲線が相似曲率で決まる. また, 曲率半径 q を θ の関数と見なしたとき, $q(\theta)$ と相似曲率は Cole-Hopf 変換で結びついている:

$$u = -\frac{1}{q} \frac{dq}{d\theta}. \quad (2.4)$$

2.3 Burgers 方程式による可積分変形と Riccati 方程式

相似幾何における不変径数である方向角を不変に保つ平面曲線の等角変形を考える. もっとも簡単な自明でない変形は次の形で与えられる [1]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \gamma = (b - u)T - N, \quad b \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

相似 Frenet 標構の満たす相似 Frenet 公式と (2.5) から従う変形方程式

$$F^{-1} \frac{\partial F}{\partial s} = -uE + J, \quad F^{-1} \frac{\partial F}{\partial t} = \left(-\frac{\partial u}{\partial \theta} + u^2 + 1 - bu \right) E + bJ, \quad (2.6)$$

の両立条件より, 相似曲率は Burgers 方程式に従うことが示される:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - 2u \frac{\partial u}{\partial \theta} + b \frac{\partial u}{\partial \theta}. \quad (2.7)$$

特に, 径数 b は幾何学的には方向角 θ の reparametrization で吸収できるので [6], 一般性を失わずに $b = 0$ としてよい. さらに, Cole-Hopf 変換 (2.4) により Burgers 方程式は以下のように線型化される.

$$\frac{\partial q}{\partial t} = \frac{\partial^2 q}{\partial \theta^2}. \quad (2.8)$$

弾性曲線と mKdV 方程式の関連を参考に Burgers 方程式の定常解 (stationary solution) を考察する. 定常という条件下で (2.7) は定常 Burgers 方程式

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} = 2u \frac{du}{d\theta}, \quad (2.9)$$

または一度積分して Riccati 方程式

$$\frac{du}{d\theta} = u^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad (2.10)$$

に簡約される。

2.4 相似幾何による対数型美的曲線の特徴づけ

注目すべきことに、LAC の概念は相似幾何学で意味をもち、LAC の定義 (2.1) は次のように書き直すことができる [5, 11] :

定義 相似平面曲線 $\gamma(\theta)$ が傾き α の対数型美的曲線であるとは相似曲率 $u(\theta)$ が Bernoulli 方程式 :

$$\frac{du}{d\theta} = (\alpha - 1)u^2, \quad (2.11)$$

に従うときをいう。

とくに $\alpha = 2$ の場合、LAC の相似曲率は定常 Burgers 方程式 (2.9) もしくは Riccati 方程式 (2.10) の解である。この定式化に基づき、準美的曲線が定義される [12] :

定義 相似平面曲線 $\gamma(\theta)$ の相似曲率 $u(\theta)$ が Riccati 方程式 :

$$\frac{du}{d\theta} = (\alpha - 1)u^2 + c, \quad c \in \mathbb{R}, \quad (2.12)$$

に従うとき、 γ を傾き α の準美的曲線 (quasi aesthetic curve, qAC) とよぶ。すなわち、LAC および qAC は相似幾何における可積分変形の定常流 (と相似曲率のスケール変換) として特徴づけられることになる。なお、 $\alpha = 1$ の場合 (対数螺旋) は相似曲率が定数となるため、以下の議論では除外する。

2.5 フェアリングエネルギー

本節では LAC と qAC の変分原理による定式化を考察する。まず、フェアリングエネルギー $\mathcal{F}^{\lambda,a}$ を次式で導入する。

$$\mathcal{F}^{\lambda,a}(\gamma) = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{1}{2} \left\{ a^2 u(\theta)^2 + \lambda \left(\frac{q_1 q_2}{q(\theta)^2} \right)^a \right\} d\theta, \quad (2.13)$$

ここで $a = \alpha - 1$, $q_i = q(\theta_i)$ ($i = 1, 2$), λ は任意定数である。 $\mathcal{F}^{\lambda,a}(\gamma)$ は相似変換について不変で、フェアリングエネルギーという名称は工業意匠設計におけるフェアリング (整形) の工程に由来する。 γ の変分を $\delta\gamma = \xi(\theta)T(\theta) + \eta(\theta)N(\theta)$ と表す。標準的な変分計算によって $\delta q/q = \phi - \psi'$, $\delta u/u = -(u\psi' + \phi - \psi')$ および $\delta\theta = \psi$ がわかる。ただし、 $\phi(\theta) = \xi' - \xi u - \eta$, $\psi(\theta) = \eta' - \eta u + \xi$, $' = d/d\theta$ である。これらのデータを用いてフェアリングエネルギーの第一変分公式を得る。

$$\delta \mathcal{F}^{\lambda,a}(\gamma) = -\frac{1}{2} \left[a^2 u(\tilde{\phi} - \tilde{\psi}') + H(\gamma) \tilde{\psi} \right]_{\theta_1}^{\theta_2} + \frac{a}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \left\{ a u' - \lambda \left(\frac{q_1 q_2}{q^2} \right)^a \right\} (\tilde{\phi} - \tilde{\psi}' + u \tilde{\psi}) d\theta. \quad (2.14)$$

ここで、 $\tilde{\phi} = \phi - \frac{\phi(\theta_1) + \phi(\theta_2)}{2}$, $\tilde{\psi} = \psi - \frac{\psi(\theta_1) + \psi(\theta_2)}{2}$, および $H(\gamma) = a^2 u(\theta)^2 - \lambda \left(\frac{q_1 q_2}{q^2} \right)^a$ である。

第一変分公式より、もし γ が適切な境界条件の下でのフェアリングエネルギー変分に対して臨界点であるならば、 γ の相似曲率 u は

$$a u' - \lambda \left(\frac{q_1 q_2}{q^2} \right)^a = 0, \quad (2.15)$$

を満たす。これは Cole-Hopf 変換 (2.4) と合わせて qAC に対する Riccati 方程式 (2.12) と等価である。次に境界項を調べよう。まず、 $H(\gamma)$ は定常 Burgers 方程式 (2.9) の第一積分で定数であることから、全方向角の保存 $\delta(\theta_2 - \theta_1) = 0$ を要請すれば境界項の第 2 項は 0 である。従って境界項は $\phi(\theta_1) - \psi'(\theta_1) = \phi(\theta_2) - \psi'(\theta_2)$ のとき、またそのときに限り 0 になることがわかる。これは、 $\frac{q_2}{q_1}$ すなわち両端点における接ベクトルの長さの比が変形で保たれることを意味する。この条件は相似変換で不変であるので、相似幾何において意味を持つ。以上の議論をまとめて、次の定理を得る。

定理 平面曲線 γ が全方向角および両端点での接ベクトルの長さが保存されるという条件の下で、フェアリングエネルギー $\mathcal{F}^{\lambda,a}$ (2.13) の臨界点となるならば、相似曲率 u は c を任意定数として $u' = au^2 + c$ を満たす。従って、傾き $\alpha \neq 1$ の準美的曲線はフェアリングエネルギーの臨界点である。

3 対数型美的曲線の離散化

3.1 相似幾何における離散曲線と離散 Burgers 流

$\gamma_n \in \mathbb{R}^2$ ($n \in \mathbb{Z}$) を離散平面曲線とする。離散接ベクトル T_n と離散法線ベクトル N_n を

$$T_n = \gamma_{n+1} - \gamma_n, \quad N_n = JT_n, \quad (3.1)$$

で導入し、

$$q_n = |T_n| = \sqrt{\langle T_n, T_n \rangle}, \quad (3.2)$$

とする。相似 Frenet 標構を $F_n = (T_n, N_n)$ と定義すれば、 F_n は相似 Frenet の公式を満たす。

$$F_{n+1} = F_n L_n, \quad L_n = u_n R(\kappa_{n+1}), \quad R(\kappa_{n+1}) = \begin{pmatrix} \cos \kappa_{n+1} & -\sin \kappa_{n+1} \\ \sin \kappa_{n+1} & \cos \kappa_{n+1} \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

$$u_n = \frac{q_{n+1}}{q_n}, \quad \kappa_n = \angle(T_{n-1}, T_n).$$

ここで、 u_n は相似変換に対して不変であり、連続曲線の場合の相似曲率の離散類似の役割を果たす。簡単のため $\kappa_n = \kappa$ (定数) とおき、 γ_n の κ を保存する変形 (等角変形) を考える。もっとも簡単な変形は次のように与えられる [6]。

$$\gamma_n^{m+1} = -\gamma_n^m + \frac{\delta}{\kappa^2} \left\{ \left(\frac{1}{u_{n-1}^m} - \cos \kappa \right) T_n^m + \sin \kappa N_n^m \right\}, \quad (3.4)$$

Frenet 標構 F_n^m は

$$F_{n+1}^m = F_n^m u_n^m R(\kappa), \quad F_n^{m+1} = F_n^m H_n^m E, \quad H_n^m = 1 + \frac{\delta}{\kappa^2} \left(u_n^m - 2 \cos \kappa + \frac{1}{u_{n-1}^m} \right), \quad (3.5)$$

を満たし、両立条件から離散 Burgers 方程式

$$\frac{u_n^{m+1}}{u_n^m} = \frac{1 + \frac{\delta}{\kappa^2} \left(u_{n+1}^m - 2 \cos \kappa + \frac{1}{u_n^m} \right)}{1 + \frac{\delta}{\kappa^2} \left(u_n^m - 2 \cos \kappa + \frac{1}{u_{n-1}^m} \right)}, \quad (3.6)$$

が得られる。(3.6) は q_n^m に関して線形化され、 q_n^m は

$$\frac{q_n^{m+1} - q_n^m}{\delta} = \frac{q_{n+1}^m - 2 \cos \kappa q_n^m + q_{n-1}^m}{\kappa^2}, \quad (3.7)$$

に従う。離散 Burgers 方程式 (3.6) は連続極限

$$u_n^m = 1 - \kappa u, \quad \theta = n\kappa, \quad \kappa \rightarrow 0, \quad (3.8)$$

で Burgers 方程式 (2.7) の $b=0$ の場合に帰着する。また、離散相似 Frenet の公式と変形方程式 (3.5) もそれぞれ連続曲線の相似 Frenet の公式と変形方程式 (2.6) に帰着する。逆に、幾何の制約から連続極限の径数づけ (3.8) は一意的に定まってしまうことに注意しておく。

さて、離散 Burgers 方程式の定常条件 $u_n^{m+1} = u_n^m$ を課し、添字 m を無視すると、離散定常 Burgers 方程式

$$u_{n+1} + \frac{1}{u_n} = u_n + \frac{1}{u_{n-1}}, \quad (3.9)$$

が得られる。(3.9) は連続極限 (3.8) によって定常 Burgers 方程式 (2.9) に帰着する。(3.9) を積分すると、離散 Riccati 方程式を得る：

$$u_{n+1} + \frac{1}{u_n} = C. \quad (3.10)$$

(3.10) において $C = 2 - c\kappa^2$ とおき連続極限 (3.8) を適用すれば Riccati 方程式 (2.10) を得る。さて、(2.11) と (2.12) の離散類似を構成するには、(3.9) と (3.10) で u_n を $(u_n)^a$ ($a = \alpha - 1 \neq 0$) で置き換えればよく、それぞれ

$$(u_{n+1})^a + \frac{1}{(u_n)^a} = (u_n)^a + \frac{1}{(u_{n-1})^a}, \quad (3.11)$$

$$(u_{n+1})^a + \frac{1}{(u_n)^a} = C, \quad (3.12)$$

が得られる。この a 依存性は、幾何学的な制約から得られる連続極限の径数づけ (3.8) と整合的である。実際、 $(u_n)^a = (1 - \kappa u)^a = 1 - a\kappa u + O(\kappa^2)$ に注意し、 $C = 2 - ac\kappa^2$ と選ぶと、(3.11) と (3.12) はそれぞれ (2.11) と (2.12) に帰着することがわかる。

次に、(3.12) の解について議論する。(3.12) は $u_n = (p_{n+1}/p_n)^{1/a}$ とおくと

$$\frac{p_{n+1} - 2p_n + p_{n-1}}{\kappa^2} = -acp_n, \quad (3.13)$$

と線形化される。 $c=0$ の場合、(3.13) の解は $p_n = c_1 n + c_2$ (c_1, c_2 : 任意定数) となり、それから

$$u_n = \left(1 + \frac{a\lambda\kappa}{a\lambda\kappa n + 1}\right)^{\frac{1}{a}}, \quad (3.14)$$

が得られる。ただし、 $\lambda = c_1/(\kappa ac_2)$ である。明らかに (3.14) は連続極限 (3.8) で LAC の相似曲率を再現する：

$$u = -\frac{\lambda}{a\lambda\theta + 1}. \quad (3.15)$$

以上の議論から、離散対数型美的曲線 (dLAC) と離散準美的曲線 (dqAC) を次のように定義する。相似幾何の枠組みで離散平面曲線 γ_n に対し、 u_n が

$$(u_{n+1})^a + \frac{1}{(u_n)^a} = 2, \quad a = \alpha - 1 \neq 0, \quad (3.16)$$

に従うとき、 γ_n を傾き α の離散対数型美的曲線と呼ぶ。同様に、 u_n が

$$(u_{n+1})^a + \frac{1}{(u_n)^a} = 2 - ac\kappa^2, \quad (3.17)$$

に従うとき、 γ_n を傾き α の離散準美的曲線と呼ぶ。

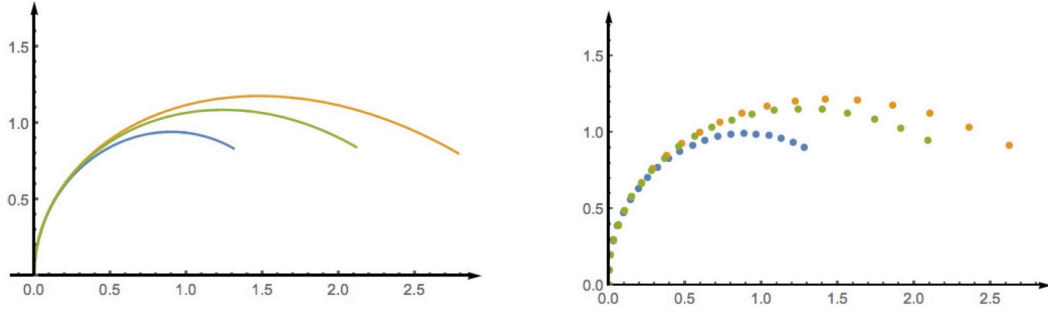


図 2: 対数型美的曲線と離散対数型美的曲線. 青: $(a, c) = (1, 0)$, 緑: $(1.5, -1.5)$, 橙: $(3, -2)$.

3.2 離散フェアリングエネルギー

離散フェアリングエネルギー $\Phi^{\lambda, a}$ を次のように導入する.

$$\Phi^{\lambda, a}(\gamma) = \sum_{n=n_1}^{n_2-1} \left\{ (u_n)^a + \frac{1}{(u_n)^a} + \lambda \left(\frac{q_{n_1} q_{n_2}}{q_n q_{n+1}} \right)^a \right\}. \quad (3.18)$$

$\Phi^{\lambda, a}$ は相似変換に対して不変で幾何学的に意味がある量である. γ_n の変分を

$$\delta \gamma_n = \xi_n T_n + \eta_n N_n, \quad (3.19)$$

と書くことにすると, 相似 Frenet 標構の変分と離散相似 Frenet の公式との整合性を用いて q_n, u_n, κ_n の変分が

$$\frac{\delta q_n}{q_n} = \phi_n, \quad \frac{\delta u_n}{u_n} = \phi_{n+1} - \phi_n, \quad \delta \kappa_{n+1} = \psi_{n+1} - \psi_n, \quad (3.20)$$

ただし,

$$\phi_n = \xi_{n+1} u_n \cos \kappa_{n+1} - \eta_{n+1} u_n \sin \kappa_{n+1} - \xi_n, \quad \psi_n = \xi_{n+1} u_n \sin \kappa_{n+1} + \eta_{n+1} u_n \cos \kappa_{n+1} - \eta_n, \quad (3.21)$$

と計算でき, これを用いて $\Phi^{\lambda, a}$ の第一変分は

$$\begin{aligned} \delta \Phi^{\lambda, a}(\gamma) &= -a \sum_{n=n_1+1}^{n_2-2} \left\{ 1 + \frac{1}{(u_{n-1} u_n)^a} \right\} \left\{ (u_n)^a - (u_{n-1})^a + \lambda \left(\frac{q_{n_1} q_{n_2}}{q_{n-1} q_n} \right)^a \right\} \tilde{\phi}_n \\ &+ a \left[(u_{n_2-1})^a - \frac{1}{(u_{n_2-1})^a} + (u_{n_1})^a - \frac{1}{(u_{n_1})^a} - \lambda \left(\frac{q_{n_1}}{q_{n_2-1}} \right)^a + \lambda \left(\frac{q_{n_2}}{q_{n_1+1}} \right)^a \right] \frac{\phi_{n_2} - \phi_{n_1}}{2}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

となる. ただし,

$$\tilde{\phi}_n = \phi_n - \frac{\phi_{n_1} + \phi_{n_2}}{2}, \quad (3.23)$$

である. 第一変分公式 (3.22) より, もし γ_n が適当な境界条件の下で離散フェアリング汎関数の臨界点であれば, γ_n は

$$(u_n)^a - (u_{n-1})^a + \lambda \left(\frac{q_{n_1} q_{n_2}}{q_{n-1} q_n} \right)^a = 0, \quad n = n_1 + 1, \dots, n_2 - 1, \quad (3.24)$$

を満たす. これは $u_n = q_{n+1}/q_n$ と合わせて (3.11) または (3.12) と等価である. 境界項は $\phi_{n_1} = \phi_{n_2}$ であるとき, またそのときに限り 0 となる. (3.20) より, これは $\delta(q_{n_1}/q_{n_2}) = 0$, すなわち, 両端点のセグメント (接ベクトル) の長さの比は変分で保たれることを意味する. これは連続曲線の場合と全く同じ境界条件である. 以上の議論をまとめて, 以下の定理を得る.

定理 もし離散平面曲線 γ_n が両端点での接ベクトルの長さが保存されるという条件の下で, 離散フェアリングエネルギー $\Phi^{\lambda,a}$ (3.18) の臨界点となるならば, u_n は c を任意定数として $(u_{n+1})^a + 1/(u_n)^a = 2 - ac\kappa^2$ を満たす. 従って, 傾き $\alpha \neq 1$ の離散準美的曲線は離散フェアリングエネルギーの臨界点である.

参考文献

- [1] K.-S. Chou and C.-Z. Qu, Integrable equations arising from motions of plane curves, *Phys. D* **162** (2002) 9–33.
- [2] R. Goldstein and D. M. Petrich, The Korteweg-de Vries hierarchy as dynamics of closed curves in the plane, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991), no. 23, 3203–3206.
- [3] T. Harada, F. Yoshimoto, M. Moriyama, An aesthetic curve in the field of industrial design, in *Proceedings of the IEEE Symposium on Visual Language* (1999) 38–47.
- [4] 井ノ口順一, 曲線とソリトン, 朝倉書店 (2010).
- [5] J. Inoguchi, Attractive plane curves in differential geometry, in: *Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis III*, Mathematics for Industry vol 24, Springer Tokyo, pp. 121–135, 2016.
- [6] K. Kajiwara, T. Kuroda and N. Matsuura, Isogonal deformation of discrete plane curves and discrete Burgers hierarchy, *Pac. J. Math. Ind.* **8** (2016), Article Number 3, 14 pages.
- [7] G. L. Lamb Jr., Solitons and the motion of helical curves, *Physical Review Letters* **37** (1976), no. 5, 235–237.
- [8] J. Langer and D. A. Singer, The total squared curvature of closed curves, *J. Differential Geom.* **20** (1984) 1–22.
- [9] K. T. Miura and R.U. Gobithaasan, Aesthetic design with log-aesthetic curves and surfaces, Y. Dobashi and H. Ochiai (eds.), *Mathematical Progress in Expressive Image Synthesis III*, Mathematics for Industry 24, 107–120, DOI 10.1007/978-981-10-1076-7_12.
- [10] D. Mumford, *Elastica and computer vision*, in: *Algebraic Geometry and its Applications* (C. L. Bajaj eds.), Springer Verlag, 1994, pp. 491–506.
- [11] M. Sato and Y. Shimizu, Log-aesthetic curves and Riccati equations from the viewpoint of similarity geometry, *JSIAM Letters* **7** (2015), 21–24.
- [12] M. Sato and Y. Shimizu, Generalization of log-aesthetic curves by Hamiltonian formalism, *JSIAM Letters* **8** (2016), 49–52.