対称平面分割の母関数のパフィアン表示

上岡, 修平
京都大学大学院情報学研究科

https://doi.org/10.15017/1957508

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 29AO-S7 (1), pp.55-60, 2018-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.29AO-S7
「非線形波動研究の新潮流－理論とその応用－」（研究代表者　辻本　諭）

Reports of RIAM Symposium No.29AO-S7

New trends in nonlinear waves - theory and applications -

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 9 - November 11, 2017

Article No. 08 (pp. 55 - 60)

対称平面分割の母関数のパフィアン表示

上岡 修平（KAMIOKA Shuhei）

（Received 13 January 2018; Accepted 26 March 2018）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2018

対称平面分割の母関数のパフィアン表示

京都大学大学院情報学研究科　上岡修平 (KAMIOKA Shuhei)

概要　対称平面分割のある分配関数 (重み和) に対して平易なパフィアン表示を与える．具体的には, 非交叉径路に対する Ishikawa–Wakayama の補題から得られるパフィアンを適当に変形することで, 成分に和を含まないパフィアン表示を導く．この分配関数は, 対称平面分割に対する既知の母関数の一般化を与えると予想される．

1　平面分割の母関数

有限の大きさの非負整数の配列 $\pi = (\pi_{i,j})$ で各行, 各列について単調非増加なものを平面分割 (plane partition) という．例えば

$$\pi = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

は 3×4 型の平面分割である．$a \times b$ 型の平面分割 $\pi = (\pi_{i,j})$ で成分が c を超えない ($\Leftrightarrow \pi_{1,1} \le c$) ものの全体を $\mathrm{PP}(a,b,c)$ と書く．また $a \times b$ 型の平面分割の全体を $\mathrm{PP}(a,b,\infty)$ と書く．平面分割には次のような積表示を持つ母関数が存在する．

- MacMahon 母関数 [6]:

$$\sum_{\pi \in \mathrm{PP}(a,b,c)} q^{|\pi|} = \prod_{i=1}^{a} \prod_{j=1}^{b} \frac{1 - q^{c+i+j-1}}{1 - q^{i+j-1}}. \tag{2}$$

  ただし $|\pi| = \sum_{i,j} \pi_{i,j}$ (成分の総和) であり, これを平面分割 π の大きさという．

- トレース母関数 [7]:

$$\sum_{\pi \in \mathrm{PP}(a,b,\infty)} y^{\mathsf{tr}(\pi)} q^{|\pi|} = \prod_{i=1}^{a} \prod_{j=1}^{b} (1 - yq^{i+j-1})^{-1}. \tag{3}$$

  ただし $\mathsf{tr}(\pi) = \sum_i \pi_{i,i}$ (対角成分の総和) であり, これを平面分割 π のトレースという．

本稿の著者は最近, 可積分系のひとつである離散二次元戸田分子を用いて, 2 つの母関数 (2), (3) を同時に一般化する次の分配関数を導いた [4]:

$$\sum_{\pi \in \mathrm{PP}(a,b,c)} y^{\mathsf{tr}(\pi)} q^{|\pi|} \prod_{i=1}^{\min\{a,b\}} \prod_{k=1}^{\pi_{i,i}} \frac{1 - q^{c+i-k}}{1 - yq^{c+i-k}} = \prod_{i=1}^{a} \prod_{j=1}^{b} \frac{1 - yq^{c+i+j-1}}{1 - yq^{i+j-1}}. \tag{4}$$

分配関数 (4) は $y = 1$ のとき MacMahon 母関数 (2) に, $c \to \infty$ のときトレース母関数 (3) にそれぞれ帰着する．

本稿で考える対称平面分割 (symmetric —) は主対角に関して対称 ($\Leftrightarrow \forall i, j,\ \pi_{i,j} = \pi_{j,i}$) な平面分割である．例えば

$$\pi = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

は 4×4 型の対称平面分割である．$a \times a$ 型の対称平面分割で成分が c を超えないものの全体を $\mathrm{PP}^{\mathrm{sym}}(a, c)$ と書く．また $a \times a$ 型の対称平面分割の全体を $\mathrm{PP}^{\mathrm{sym}}(a, \infty)$ と書く．対称平面分割にも積表示を持つ母関数が存在し, 次の 2 つは平面分割の母関数 (2)–(3) の「対称版」に相当する．

- MacMahon 型母関数 [1, 5]:

$$\sum_{\pi \in \mathrm{PP}^{\mathrm{sym}}(a,c)} q^{|\pi|} = \prod_{i=1}^{a} \frac{1 - q^{c+2i-1}}{1 - q^{2i-1}} \prod_{1 \le i < j \le a} \frac{1 - q^{2(c+i+j-1)}}{1 - q^{2(i+j-1)}}. \tag{6}$$

- トレース母関数 [2]:

$$\sum_{\pi \in \mathrm{PP}^{\mathrm{sym}}(a,\infty)} y^{\mathsf{tr}(\pi)} q^{|\pi|} = \prod_{i=1}^{a} (1 - yq^{2i-1})^{-1} \prod_{1 \le i < j \le a} (1 - y^2 q^{2(i+j-1)})^{-1}. \tag{7}$$

本稿の著者らは, 平面分割の分配関数 (4) の「対称版」として次の予想式を得た．

予想 1 (上岡–森居 [8])**.**

$$\sum_{\pi \in \mathrm{PP}^{\mathrm{sym}}(a,c)} y^{\mathsf{tr}(\pi)} q^{|\pi|} \prod_{i=1}^{a} \prod_{k=1}^{\pi_{i,i}} \frac{1 + (-1)^i q^{c+i-k}}{1 + (-1)^i y q^{c+i-k}} = \prod_{i=1}^{a} \frac{1 - yq^{c+2i-1}}{1 - yq^{2i-1}} \prod_{1 \le i < j \le a} \frac{1 - y^2 q^{2(c+i+j-1)}}{1 - y^2 q^{2(i+j-1)}}. \tag{8}$$

予想式 (8) は $y = 1$ のとき MacMahon 型母関数 (6) に, $c \to \infty$ のときトレース母関数 (7) にそれぞれ帰着する．予想式 (8) の左辺の分配関数には Ishikawa–Wakayama の補題に基づくパフィアン表示がある [8]．本稿では予想式 (8) の証明に向けて, (8) の左辺の分配関数に対してより平易なパフィアン表示を与える．

2 Ishikawa–Wakayama の補題

本節では, パフィアンの組合せ論的解釈のひとつである Ishikawa–Wakayama の補題 [3] について復習する．D を閉路を持たない有向グラフとする．ただし D の節点に対して全順序が定義されていると仮定する．D の節点集合と枝集合をそれぞれ $V(D)$, $E(D)$ と書く．枝重み関数 $w : E(D) \to \mathbb{K}$ ($\mathbb{K}$: 任意の体) により D の各枝は重み付けられているとする．D 上の径路 (path) P に対して, P の重み $w(P)$ を

$$w(P) = \prod_{e \in E(P)} w(e) \tag{9}$$

(P の通る枝の重みの積) により定める．さらに任意の 2 節点 $u, v \in V(D)$ に対して, u–v 径路 (u から v に至る径路) の重み和を $g(u, v)$ と書く:

$$g(u, v) = \sum_{P : u\text{–}v} w(P). \tag{10}$$

次の補題で用いる記法を説明する．歪対称行列 A に対して, A の第 $k_1, \ldots, k_m$ 行と第 $k_1, \ldots, k_m$ 列からなる歪対称行列を $A(k_1, \ldots, k_m)$ と書く．D 上の径路 P に対して P の終点を $t(P)$ と書く．

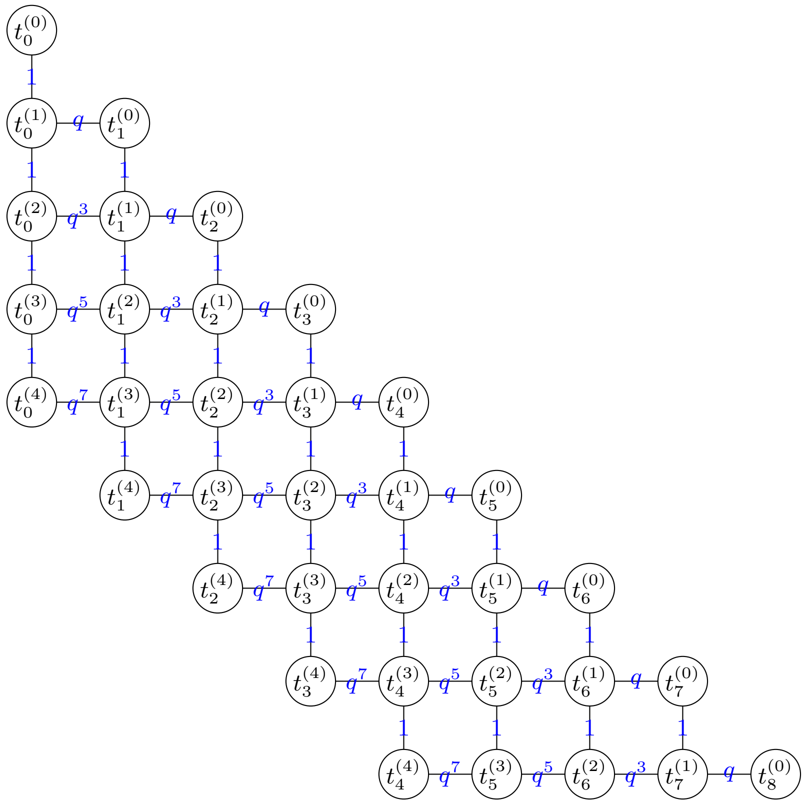

図 1　有向グラフ $D(a,c)$ $(a=4,\ c=5)$. 左端にある節点 $t_0^{(n)}$ は $a+1$ 個, 左斜め下側にある節点 $t_k^{(a)}$ は c 個ある.

補題 2 (Ishikawa–Wakayama [3])**.** $m \geq 0$ を偶整数, N を整数とする. $\boldsymbol{s}=(s_1,\dots,s_m)$ を D の節点の m 個組, $T=\{t_1<\cdots<t_N\}$ を D の節点の N 集合とする. 今 $\boldsymbol{s}$ と T は次を満たすと仮定する: $i<j$ かつ $k>\ell$ のとき, 任意の s_i–t_k 径路と任意の s_j–t_ℓ 径路は D 上の節点で交わる. $A=(a(t_k,t_\ell))$ を T により添字付けられた N 次歪対称行列とする. このとき

$$\sum_{(P_1,\dots,P_m)} \operatorname{Pf} A(t(P_1),\dots,t(P_m)) \prod_{i=1}^{m} w(P_i) = \operatorname*{Pf}_{1\leq i,j\leq m}\left(\sum_{1\leq k<\ell\leq N} a(t_k,t_\ell)\cdot\det\begin{pmatrix} g(s_i,t_k) & g(s_i,t_\ell) \\ g(s_j,t_k) & g(s_j,t_\ell)\end{pmatrix}\right). \tag{11}$$

ただし左辺の和は D 上の径路の m 個組 $(P_1,\dots,P_m)$ で次の条件を満たすものすべてにわたる:

(i) P_i の始点は s_i で, 終点は $t_1,\dots,t_N$ のいずれかである.

(ii) $P_1,\dots,P_m$ はどの 2 つも D 上の節点で交わらない.

3　非交叉格子路とパフィアン

図 1 のような格子状の有向グラフ $D(a,c)$ を考える. ただし縦枝は上向き, 横枝は右向きである. (従って $D(a,c)$ 上の径路は左下から右上の向きに進む.) また各枝に付けられたラベル (1 または q のべき) はその枝の重みである.

対称平面分割 $\pi\in\mathrm{PP}^{\mathrm{sym}}(a,c)$ は, $D(a,c)$ 上の径路の c 個組 $(P_0,\dots,P_{c-1})$ で次の条件を満たすものと一

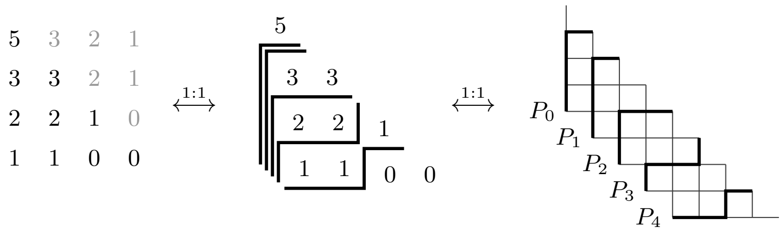

図 2　対称平面分割と非交叉格子路の組の一対一対応 ($a = 4$, $c = 5$).

対一に対応する (図 2):

(i) P_i の始点は $t_i^{(a)}$ で, 終点は $t_0^{(0)}, \ldots, t_{a+c-1}^{(0)}$ のいずれかである.

(ii) $P_0, \ldots, P_{c-1}$ はどの 2 つも $D(a, c)$ 上の節点で交わらない.

Ishikawa–Wakayama の補題 (補題 2) より:

命題 3. $c \geq 0$ を偶数とする. $a + c - n$ 次歪対称行列 $A^{(n)} = (a(t_k^{(n)}, t_\ell^{(n)}))_{0 \leq k, \ell < a+c-n}$ の成分は次の漸化式を満たすとする:

$$a(t_k^{(n+1)}, t_\ell^{(n+1)}) = a(t_k^{(n)}, t_\ell^{(n)}) + q^{2n+1} a(t_{k+1}^{(n)}, t_\ell^{(n)}) + q^{2n+1} a(t_k^{(n)}, t_{\ell+1}^{(n)}) + q^{2(2n+1)} a(t_{k+1}^{(n)}, t_{\ell+1}^{(n)}). \tag{12}$$

このとき上記 (i)–(ii) を満たす $D(a, c)$ 上の格子路の c 個組 $(P_0, \ldots, P_{c-1})$ に対して

$$\sum_{(P_0, \ldots, P_{c-1})} \mathrm{Pf}\, A^{(0)}(t(P_0), \ldots, t(P_{c-1})) \prod_{i=0}^{c-1} w(P_i) = \mathrm{Pf}\, A^{(a)}. \tag{13}$$

Proof. 補題 2 より (13) の左辺の和はパフィアン

$$\mathop{\mathrm{Pf}}_{0 \leq i, j < c} \left(\sum_{0 \leq k < \ell < a+c} a(t_k^{(0)}, t_\ell^{(0)}) \cdot \det \begin{pmatrix} g(t_i^{(a)}, t_k^{(0)}) & g(t_i^{(a)}, t_\ell^{(0)}) \\ g(t_j^{(a)}, t_k^{(0)}) & g(t_j^{(a)}, t_\ell^{(0)}) \end{pmatrix} \right) \tag{14}$$

に等しい. グラフ $D(a, c)$ の構造より $g(t_i^{(a)}, t_k^{(n)}) = g(t_i^{(a)}, t_k^{(n+1)}) + q^{2n+1} g(t_i^{(a)}, t_{k-1}^{(n+1)})$ が成り立つので, (12) より

$$x_{i,j}^{(n)} := \sum_{0 \leq k < \ell < a+c-n} a(t_k^{(n)}, t_\ell^{(n)}) \cdot \det \begin{pmatrix} g(t_i^{(a)}, t_k^{(n)}) & g(t_i^{(a)}, t_\ell^{(n)}) \\ g(t_j^{(a)}, t_k^{(n)}) & g(t_j^{(a)}, t_\ell^{(n)}) \end{pmatrix} \tag{15}$$

は n に依らない. 特に $n = a$ のときは $g(t_i^{(a)}, t_k^{(a)}) = \delta_{i,k}$ より $x_{i,j}^{(a)} = a(t_i^{(a)}, t_j^{(a)})$. ゆえにパフィアン (14) すなわち $\mathrm{Pf}_{0 \leq i,j < c}(x_{i,j}^{(0)})$ は $\mathrm{Pf}_{0 \leq i,j < c}(x_{i,j}^{(a)}) = \mathrm{Pf}\, A^{(a)}$ に等しい. □

注意. $g(t_i^{(a)}, t_k^{(0)}) = q^{(k-i)^2} \begin{bmatrix} a \\ k-i \end{bmatrix}_{q^2}$ であり, パフィアン (14) は本稿の著者らが [8] で得たものと本質的に同じである.

さらに:

命題 4. 命題 3 の歪対称行列 $A^{(a)}$ に対して

$$\operatorname{Pf} A^{(a)} = \frac{\operatorname{Pf}\begin{pmatrix} A^{(0)} & Q \\ -Q^{\mathsf{T}} & O \end{pmatrix}}{\prod_{i=0}^{a-1} q^{i^2}(q^2;q^2)_i}. \tag{16}$$

ただし $Q = ((-q^{2j+1})^{a+c-i-1})_{0\le i<a+c,\ 0\le j<a}$. また $(a;q)_i = \prod_{j=0}^{i-1}(1-aq^j)$ (q-Pochhammer 記号).

Proof. 漸化式 (12) を (16) の右辺のパフィアンに対する基本変形とみなせばよい. □

4 対称平面分割とパフィアン

命題 3–4 を併せると, $c \ge 0$ が偶数のとき, 任意の $a+c$ 次歪対称行列 $A^{(0)}$ に対して

$$\sum_{(P_0,\ldots,P_{c-1})} \operatorname{Pf} A^{(0)}(t(P_0),\ldots,t(P_{c-1})) \prod_{i=0}^{c-1} w(P_i) = \frac{\operatorname{Pf}\begin{pmatrix} A^{(0)} & Q \\ -Q^{\mathsf{T}} & O \end{pmatrix}}{\prod_{i=0}^{a-1} q^{i^2}(q^2;q^2)_i}. \tag{17}$$

この左辺は, 有向グラフ $D(a,c)$ 上の非交叉格子路の組 $(P_0,\ldots,P_{c-1})$ に対する分配関数 (重み和) である. この分配関数は, 前節で述べた一対一対応を通して, 対称平面分割に対する分配関数と見なせる.

以降では歪対称行列 $A^{(0)} = (a(t_k^{(0)}, t_\ell^{(0)}))_{0\le k,\ell<a+c}$ が

$$\begin{aligned} a(t_k^{(0)}, t_\ell^{(0)}) &= \alpha(t_k^{(0)})\beta(t_\ell^{(0)}) && (k<\ell), \\ &= -\alpha(t_\ell^{(0)})\beta(t_k^{(0)}) && (k>\ell), \\ &= 0 && (k=\ell) \end{aligned} \tag{18}$$

の場合を考える. ただし

$$\alpha(t_k^{(0)}) = y^k \prod_{i=1}^{k} \frac{1+(-q)^i}{1+y(-q)^i}, \qquad \beta(t_k^{(0)}) = y^k \prod_{i=1}^{k} \frac{1-(-q)^i}{1-y(-q)^i}. \tag{19}$$

定理 5. $c \ge 0$ が偶数のとき

$$\sum_{\pi\in \mathrm{PP}^{\mathrm{sym}}(a,c)} y^{\mathrm{tr}(\pi)} q^{|\pi|} \prod_{i=1}^{a}\prod_{k=1}^{\pi_{i,i}} \frac{1+(-1)^i q^{c+i-k}}{1+(-1)^i y q^{c+i-k}} = \frac{\operatorname{Pf}\begin{pmatrix} A^{(0)} & Q \\ -Q^{\mathsf{T}} & O \end{pmatrix}}{\prod_{i=0}^{a-1} q^{i^2}(q^2;q^2)_i \times \prod_{k=0}^{\frac{c-2}{2}} \alpha(t_{2k}^{(0)})\beta(t_{2k+1}^{(0)})}. \tag{20}$$

ただし $A^{(0)} = (a(t_k^{(0)}, t_\ell^{(0)}))_{0\le k,\ell<a+c}$ は (18)–(19) により決まる $a+c$ 次歪対称行列であり, $Q = ((-q^{2j+1})^{a+c-i-1})_{0\le i<a+c, 0\le j<a}$.

Proof. $A^{(0)}$ が (18) の形のとき $\operatorname{Pf} A^{(0)}(t(P_0),\ldots,t(P_{c-1})) = \prod_{k=0}^{\frac{c}{2}-1} \alpha(t_{2k}^{(0)})\beta(t_{2k+1}^{(0)})$ が成り立つ. これを (17) に代入して整理すればよい. □

以上の議論は c が奇数の場合でも (phantom vertex を適当に追加すれば) 同様に行える. 結果として:

定理 6. $c \geq 0$ が奇数のとき

$$\sum_{\pi \in \mathrm{PP}^{\mathrm{sym}}(a,c)} y^{\mathsf{tr}(\pi)} q^{|\pi|} \prod_{i=1}^{a} \prod_{k=1}^{\pi_{i,i}} \frac{1+(-1)^i q^{c+i-k}}{1+(-1)^i y q^{c+i-k}} = \frac{\mathrm{Pf}\begin{pmatrix} A^{(0)} & \boldsymbol{\alpha} & Q \\ -\boldsymbol{\alpha}^{\mathsf{T}} & 0 & \mathbf{0}^{\mathsf{T}} \\ -Q^{\mathsf{T}} & \mathbf{0} & O \end{pmatrix}}{\prod_{i=0}^{a-1} q^{i^2}(q^2;q^2)_i \times \alpha(t_{c-1}^{(0)}) \prod_{k=0}^{\frac{c-3}{2}} \alpha(t_{2k}^{(0)}) \beta(t_{2k+1}^{(0)})}. \tag{21}$$

ただし $A^{(0)} = (a(t_k^{(0)}, t_\ell^{(0)}))_{0 \leq k,\ell < a+c}$ は (18)–(19) により決まる $a+c$ 次歪対称行列であり, $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha(t_0^{(0)}), \dots, \alpha(t_{a+c-1}^{(0)}))^{\mathsf{T}}$, $Q = ((-q^{2j+1})^{a+c-i-1})_{0 \leq i < a+c, 0 \leq j < a}$.

定理 5–6 は, 予想式 (8) の左辺の分配関数 (重み和) に対するパフィアン表示を与えている. このパフィアン表示は, パフィアンの成分に和を含まない分, 著者らが以前に得たパフィアン表示 [8] よりも平易である. 予想式 (8) の証明は, (20) と (21) の右辺にあるパフィアンの計算に帰着したが, これは今後の課題である.

謝辞

本研究は JSPS 科研費 JP16K05058 の助成を受けたものです.

参考文献

[1] G. E. Andrews, *Plane partitions. I. The MacMahon conjecture*, Studies in Foundations and Combinatorics, Adv. in Math. Suppl. Stud., 1, Academic Press, New York–London, 1978, pp. 131–150.

[2] E. R. Gansner, *The Hillman–Grassl correspondence and the enumeration of reverse plane partitions*, J. Combin. Theory Ser. A **30** (1981), 71–89.

[3] M. Ishikawa and M. Wakayama, *Applications of minor summation formula. III. Plücker relations, lattice paths and Pfaffian identities*, J. Combin. Theory Ser. A **113** (2006), 113–155.

[4] S. Kamioka, *A triple product formula for plane partitions derived from biorthogonal polynomials*, Proceedings of FPSAC 2016 (Vancouver, Canada), 2016, pp. 671–682.

[5] I. G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials, Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1979.

[6] P. A. MacMahon, Combinatory Analysis, volume 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1916.

[7] R. P. Stanley, *Theory and application of plane partitions, I, II*, Studies in Appl. Math. **50** (1971), 167–188, 259–279.

[8] 上岡修平, 森居数広, 平面分割に関連するパフィアンについて, 九州大学応用力学研究所研究集会報告 No.28AO-S6「非線形波動研究の深化と展開」, 2017, pp. 67–72.