# Jackson の第2 種q-Bessel 関数の精度保証付き数値計算法

金泉, 大介
早稲田大学基幹理工学部

丸野, 健一
早稲田大学理工学術院

https://doi.org/10.15017/1957507

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 29AO-S7 (1), pp.49-54, 2018-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University
バージョン：

応用力学研究所研究集会報告 No.29AO-S7
「非線形波動研究の新潮流ー理論とその応用ー」（研究代表者　辻本　諭）

**Reports of RIAM Symposium No.29AO-S7**

***New trends in nonlinear waves - theory and applications -***

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 9 - November 11, 2017

**Article No. 07** (pp. 49 - 54)

# Jackson の第 2 種 $q$-Bessel 関数の精度保証付き数値計算法

**金泉 大介（KANAIZUMI Daisuke），丸野 健一（Maruno Ken-ichi）**

（Received 12 February 2018; Accepted 13 March 2018）

**Research Institute for Applied Mechanics**
**Kyushu University**
**March, 2018**

# Jacksonの第2種$q$-Bessel関数の精度保証付き数値計算法

早稲田大学大学院基幹理工学研究科　金泉大介 (Daisuke KANAIZUMI)
早稲田大学理工学術院　丸野健一 (Ken-ichi MARUNO)

**概 要**

これまで様々な特殊関数の精度保証付き数値計算法が開発されてきたが, 可積分系などの数理物理で現れる $q$-特殊関数の精度保証付き数値計算法はまだ開発されていない. 本稿では $q$-特殊関数の一つである Jackson の第2種 $q$-Bessel 関数の精度保証付き数値計算法として，交代級数の性質を用いる方法, 積分を用いる方法, 二重指数関数型積分公式 (DE 公式) を用いる方法と漸近展開を用いる方法を提案し，その有効範囲を議論する.

## 1　はじめに

可積分系などの数理物理の世界には，多様な特殊関数が住んでいるが, それらの中には性質 (零点, 特異点など) が十分に理解されていないものも多くある．多様な特殊関数の性質を探索する手段の一つとして，力学系分野など様々な問題に適用され強力なツールとなりつつある精度保証付き数値計算が考えられる.

精度保証付き数値計算とは近似値の計算をすると同時に計算結果の (数学的に) 厳密な誤差評価も行う数値計算のことである [1]. 計算する際は数を区間に置き換えて計算し, 真値を含む区間を結果として出力する. これにより真値が含まれる区間がわかるだけでなく, 区間幅から計算に混入した誤差を把握できる. このような演算を区間演算とよび, 演算規則は次のように定義される ($\overline{x}$ が上限, $\underline{x}$ が下限, $[x]=[\underline{x},\overline{x}]$ とする).

- 加算: $[x]+[y]=[\underline{x}+\underline{y},\overline{x}+\overline{y}]$
- 減算: $[x]-[y]=[\underline{x}-\overline{y},\overline{x}-\underline{y}]$
- 乗算: $[x]\times[y]=[\min(\underline{x}\underline{y},\underline{x}\overline{y},\overline{x}\underline{y},\overline{x}\overline{y}),\max(\underline{x}\underline{y},\underline{x}\overline{y},\overline{x}\underline{y},\overline{x}\overline{y})]$
- 除算: $[x]/[y]=[\min(\underline{x}/\underline{y},\underline{x}/\overline{y},\overline{x}/\underline{y},\overline{x}/\overline{y}),\max(\underline{x}/\underline{y},\underline{x}/\overline{y},\overline{x}/\underline{y},\overline{x}/\overline{y})]$
  (ただし $[y]$ は 0 を含まない区間とする)

精度保証付き数値計算では主に次の誤差を扱う.

- 丸め誤差: 実数を計算機で表現可能な数に置き換えたことによる誤差.
- 打切り誤差: 無限回の操作を有限で打ち切ったことによる誤差.
- 離散化誤差: 数理モデルを多項式や漸化式に変換した際の誤差.

ただし, モデル誤差 (数理モデルそのものの誤差) は扱わない.

これまで様々な特殊関数の精度保証付き数値計算法が開発されてきたが [2, 3, 4], 可積分系などの数理物理で現れる $q$-特殊関数の精度保証付き数値計算法はまだない. $q$-特殊関数は以下の $q$-Pochhammer 記号 [5]:

$$(a;q)_n:=\prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k),\quad (a;q)_0:=1,\quad (a;q)_\infty:=\lim_{n\to\infty}(a;q)_n,\quad (a\in\mathbb{C},\ |q|<1) \tag{1}$$

及び $q$-超幾何関数 [5]:

$$ {}_r\phi_s(\alpha_1,\cdots,\alpha_r;\beta_1,\cdots,\beta_s;q,z):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{r}(\alpha_i;q)_n\left[(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}\right]^l z^n}{\displaystyle\prod_{j=1}^{s}(\beta_j;q)_n(q;q)_n},\quad r,s\in\mathbb{Z}_{\geq 0},\quad l=1+s-r \tag{2} $$

を用いて定義される．$(a;q)_\infty$ は $|a|<\infty,\ |q|<1$ のとき収束する．$q$-特殊関数の精度保証付き数値計算法を確立するための第 1 歩として Jackson の第 2 種 $q$-Bessel 関数の精度保証付き数値計算法について検討する．Jackson の第 2 種 $q$-Bessel 関数は次のように定義される [5]:

$$ J_\nu^{(2)}(x;q)=\frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\ {}_0\phi_1\left(\text{-};q^{\nu+1};q,-\frac{q^{\nu+1}x^2}{4}\right). \tag{3} $$

この関数は $\mathrm{Re}\,\nu>0$ のとき以下の積分表示を持つ [6]:

$$ J_\nu^{(2)}(x;q)=\frac{(q^{2\nu};q)_\infty}{2\pi(q^\nu;q)_\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\int_0^\pi\frac{\left(e^{2\mathrm{i}\theta},e^{-2\mathrm{i}\theta},f_+,f_-;q\right)_\infty}{(e^{2\mathrm{i}\theta}q^\nu,e^{-2\mathrm{i}\theta}q^\nu;q)_\infty}\mathrm{d}\theta, \tag{4} $$

$$ (a_1,\cdots,a_n;q)_\infty:=(a_1;q)_\infty\cdots(a_n;q)_\infty,\quad f_\pm:=-\frac{\mathrm{i}xq^{(\nu+1)/2}}{2}e^{\pm\mathrm{i}\theta}. $$

本稿では交代級数の性質を用いる方法 [2], 積分を用いる方法 [4], 二重指数関数型積分公式（DE 公式）を用いる方法 [7] と漸近展開を用いる方法 [3] を提案し, その有効範囲を議論する．

# 2 Jackson の第 2 種 $q$-Bessel 関数の精度保証付き数値計算法

## 2.1 交代級数を用いる方法

本手法は [2] の拡張に相当し, 交代級数に関する次の性質を用いる．これらの性質は交代級数の打切り誤差に関するものである．

**定理 1.** (Leibniz) [8] 数列 $\{p_n\}_{n=0}^\infty$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n=0$ を満たす単調減少な正数列ならば, $\sum_{n=0}^\infty(-1)^n p_n$ は収束する．

**系 2.** (交代級数の打切り誤差) [8] $s:=\sum_{n=0}^\infty(-1)^n p_n,\ s_N:=\sum_{n=0}^N(-1)^n p_n$ とおくと次が成り立つ:

$$ |s-s_N|\leq p_{N+1}. $$

Jackson の第 2 種 $q$-Bessel 関数:

$$ J_\nu^{(2)}(x;q):=\frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}\left(\frac{x}{2}\right)^\nu\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n q^{n(n-1)}\left(\frac{x^2q^{\nu+1}}{4}\right)^n}{(q^{\nu+1};q)_n(q;q)_n} $$

に現れる $\sum_{n=0}^\infty\frac{(-1)^n q^{n(n-1)}\left(\frac{x^2q^{\nu+1}}{4}\right)^n}{(q^{\nu+1};q)_n(q;q)_n}$ に対しては,

$$ \begin{cases} 0<q<1 \\ x,\nu\in\mathbb{R} \\ |q^\nu|<1,\quad x^2<4q \end{cases} \tag{5} $$

に制限すれば系 2 が適用できる．後は $\frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}$ の打切り誤差を評価できれば Jackson の第 2 種 $q$-Bessel 関数を精度保証付き数値計算できる．交代級数の性質が適用できるように $\frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}$ を変形していく．ここで $q$-指数関数 [5]:

$$ e_q(z):=\sum_{n=0}^\infty\frac{z^n}{(q;q)_n}=\frac{1}{(z;q)_\infty},\quad |z|<1 \tag{6} $$

を補助的に使う．$q$-指数関数については次が成り立つ．

**定理 3.** (Karpelevich) [9] $|z|<1$ のとき (7) が成り立つ:

$$\frac{(z;q)_\infty}{(q;q)_\infty} = 1/\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+1)/2}}{(q;q)_n(1-zq^n)}. \tag{7}$$

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n q^{n(n+1)/2}}{(q;q)_n(1-zq^n)}$ については系 2 を適用できる. $z=q^{\nu+1}$ とすれば Jackson の第 2 種 $q$-Bessel 関数で現れた $\frac{(q^{\nu+1};q)_\infty}{(q;q)_\infty}$ の打切り誤差を評価できる.

こうして 交代級数の性質と $q$-指数関数の変換公式により Jackson の 第 2 種 $q$-Bessel 関数を精度保証付き数値計算できた. しかしこの手法は制限 (5) がないと適用できない. 以下では $x,\nu$ に関する制限を緩めて精度保証付き数値計算する手法を考えていく.

## 2.2 積分を用いる方法

積分表示 (4) に現れる $(z;q)_\infty$ の精度保証付き数値計算には次の定理を使う.

**定理 4.** [10]
$z\in\mathbb{C}$, $0<q<1$ とする. ある $n\in\mathbb{N}$ に対して $0<\frac{|z|q^n}{1-q}<\frac{1}{2}$ であるとき, 以下が成り立つ:

$$\frac{(z;q)_\infty}{(z;q)_n} = 1 + r(z;n), \quad |r(z;n)| \le \frac{2|z|q^n}{1-q}. \tag{8}$$

さらに, 被積分関数を数値積分しやすい形に変えることを考える. 変形には定理 4 に加えて次を使う.

**定理 5.** [10] 定理 4 と同じ仮定で以下が成り立つ:

$$\frac{(z;q)_n}{(z;q)_\infty} = 1 + r(z;n), \quad |r(z;n)| \le \frac{2|z|q^n}{1-q}. \tag{9}$$

定理 4, 5 より,

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \frac{\left(e^{2\mathrm{i}\theta}, e^{-2\mathrm{i}\theta}, -\frac{\mathrm{i}xq^{(\nu+1)/2}}{2}e^{\mathrm{i}\theta}, -\frac{\mathrm{i}xq^{(\nu+1)/2}}{2}e^{-\mathrm{i}\theta}; q\right)_\infty}{(e^{2\mathrm{i}\theta}q^\nu, e^{-2\mathrm{i}\theta}q^\nu; q)_\infty}\mathrm{d}\theta \\
\in\quad & \left[1\pm\frac{2|q^{\nu+n}|}{1-q}\right]^2 \left[1\pm\frac{2q^n}{1-q}\right]^2 \left[1\pm\frac{|xq^{(\nu+1)/2}|q^n}{1-q}\right]^2 \\
\times\quad & \int_0^\pi \frac{\left(e^{2\mathrm{i}\theta}, e^{-2\mathrm{i}\theta}, -\frac{\mathrm{i}xq^{(\nu+1)/2}}{2}e^{\mathrm{i}\theta}, -\frac{\mathrm{i}xq^{(\nu+1)/2}}{2}e^{-\mathrm{i}\theta}; q\right)_n}{(e^{2\mathrm{i}\theta}q^\nu, e^{-2\mathrm{i}\theta}q^\nu; q)_n}\mathrm{d}\theta
\end{aligned} \tag{10}$$

と変形できる. ただし $n\in\mathbb{N}$ は

$$\frac{|q^{\nu+n}|}{1-q}<\frac{1}{2}, \quad \frac{q^n}{1-q}<\frac{1}{2}, \quad \frac{|xq^{(\nu+1)/2}|q^n}{2(1-q)}<\frac{1}{2} \quad (\text{定理 4, 5 の仮定}) \tag{11}$$

を満たすものであり, 記号 $[1\pm|b|]$ を

$$\begin{cases} [1-b, 1+b] \ (b\in\mathbb{R}) \\ \text{中心 } 1, \text{ 半径 } |b| \text{ なる } \mathbb{C} \text{ 上の近傍 } (b\in\mathbb{C}-\mathbb{R}) \end{cases} \tag{12}$$

と定める. 変形後の積分には [4] に組み込まれている精度保証付き数値積分パッケージを使う. その仕組みは以下のようになっている [11]:

1. 積分区間を分割する (実験では 10 個に分割).
2. 被積分関数 $f$ に対して剰余項付き Taylor 展開を行う.
3. 各区分で $f$ の像を係数が区間である多項式として得る (実験では 10 次に指定).
4. 各区分で得られた多項式を不定積分して原始関数を得る.
5. 各区分で区間端の値を代入して定積分の値を区間として得る.

上記のアルゴリズムと (10) による被積分関数の包含により, 得られた区間に真値が存在することが保証される. 今回扱う積分は被積分関数が複素関数なので, 被積分関数を実部と虚部に分けて精度保証付き数値積分を行う.

## 2.3 二重指数関数型積分公式（DE 公式）を用いる方法

二重指数関数型積分公式 (DE 公式) とは, 二重指数関数型の変数変換 (DE 変換) と台形公式を組み合わせた数値積分法である [7]. どのような DE 変換を施すかは積分区間と被積分関数 $f$ の持つ優関数, つまり

$$|f(z)| \leq |F(z)| \quad (\forall z \in \mathcal{D}_d := \{z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < d < \pi/2\}) \tag{13}$$

なる関数 $F(z)$ の種類に応じて使い分けがされている. DE 公式を (4) に適用することを考える. 具体的には (4) で $\theta$ を下記の $\psi_{DE}(t)$ に変換する. ここでは

$$\psi_{DE}(t) := \frac{b-a}{2} \tanh\left(\frac{\pi}{2}\sinh(t)\right) + \frac{a+b}{2}, \quad a < b \tag{14}$$

という変換を扱う. この変換について次の定理が知られている.

**定理 6.** [12]

$$\mathcal{D}_{DE}(d) := \{z = \psi_{DE}(w) : w \in \mathcal{D}_d\}, \quad h := \frac{\log(4dN)}{N}, \quad N \geq e/(4d) \tag{15}$$

とする. $f$ が $\mathcal{D}_{DE}(d)$ ($d \in (0, \frac{\pi}{2})$) で正則で, 定数 $K$ に対して

$$|f(z)| \leq K \quad (\forall z \in \mathcal{D}_{DE}(d)) \tag{16}$$

が成り立つなら, 次が成り立つ (ただし $C = \frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\sin d\right)\cos d}$):

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - h\sum_{k=-N}^{N} f(\psi_{DE}(kh))\psi_{DE}'(kh)\right| \leq K(b-a)\left(e^{\pi/2} + \frac{2C}{1-e^{-\pi e/2}}\right)\exp(-2\pi d/h). \tag{17}$$

上の不等式は台形公式の打切り誤差を評価するものである. いま, 被積分関数はすべて収束する無限積なので有界であり, (16) を満たす. 定数 $K$ は定理 4, 5 を使えば決定できるので DE 公式により精度保証付き数値計算できる.

## 2.4 漸近展開による方法

ここでは Jackson の第 2 種 $q$-Bessel 関数の持つ次の漸近展開を用いる [13]:

$$J_\nu^{(2)}(x;q) = \frac{(x/2)^\nu(\sqrt{q};q)_\infty}{2(q;q)_\infty}[f(x/2, q^{(\nu+1/2)/2};q) + f(-x/2, q^{(\nu+1/2)/2};q)], \tag{18}$$

$$f(x,a;q) := (\mathrm{i}ax;\sqrt{q})_\infty \ {}_3\phi_2\left(a, -a, 0; -\sqrt{q}, \mathrm{i}ax; \sqrt{q}, \sqrt{q}\right).$$

$(z;q)_\infty$ と $q$-超幾何関数を精度保証付き数値計算すれば漸近展開により精度保証付き数値計算できる. $(z;q)_\infty$ の精度保証付き数値計算には定理 4 を使う. $q$-超幾何関数の精度保証付き数値計算には以下の定理を用いる. この定理は $q$-超幾何関数の打切り誤差を評価するものである.

**定理 7.**

$$T(n) := \frac{\displaystyle\prod_{i=1}^{r}(\alpha_i;q)_n\left[(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}\right]^l z^n}{\displaystyle\prod_{j=1}^{s}(\beta_j;q)_n(q;q)_n} \tag{19}$$

とおくと, $r \leq s+1$, $|\beta_j| \leq q^{-N}$ のとき以下が成り立つ:

$$\left|\sum_{n=N}^{\infty} T(n)\right| \leq \sum_{n=N}^{\infty}|T(n)| \leq C|T(N)|, \tag{20}$$

$$C = \begin{cases} \frac{1}{1-D} & (D<1) \\ \infty & (D \geq 1) \end{cases}, D = \prod_{i=1}^{r}\left(1 + \frac{|\beta_i - \alpha_i|q^N}{|1-\beta_i q^N|}\right)E,$$

$$E = \begin{cases} \displaystyle\prod_{i=r+1}^{s+1}\frac{|z|q^{Nl}}{|1-\beta_i q^N|} & (\text{if } r \leq s) \\ 1 + \frac{q^N|q-\alpha_{s+1}|}{|1-q^{N+1}|} & (\text{if } r = s+1) \end{cases}, \quad \beta_{s+1} := q.$$

証明には次の補題を用いる．

**補題 8.** $n, N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $n \geq N$, $0 < q < 1$, $c \in \mathbb{C}$ とする．$|c| \leq q^{-N}$ のとき次が成り立つ:

$$\frac{q^n}{|1 - cq^n|} \leq \frac{q^N}{|1 - cq^N|}. \tag{21}$$

漸近展開 (18) を用いなくとも定理 4,7,9 を使うことで Jackson の第 2 種 $q$-Bessel 関数を精度保証付き数値計算することもできる．

**定理 9.** [14]

$$(w;q)_\infty \ {}_0\phi_1(-;w;q,wz) = \ {}_1\phi_1(z;0;q,w) \tag{22}$$

より, Jackson の第 2 種 $q$-Bessel 関数は次の別表現を持つ:

$$J_\nu^{(2)}(x;q) = \frac{(x/2)^\nu}{(q;q)_\infty} \ {}_1\phi_1(-x^2/4;0;q,q^{\nu+1}). \tag{23}$$

級数の中身に $x^n$ を持たないような別表現である．

定理 9 を用いる方法と漸近展開 (18) を用いる方法はどちらも $(z;q)_\infty$ と $q$-超幾何関数を精度保証付き数値計算する点は同じである．これらの違いは $\nu < 0$ としたときの挙動にある．定理 9 を用いる方法では $\nu < 0$ としたとき級数の中身にある $(q^\nu)^n$ が影響してゼロ除算が発生してしまう．漸近展開を用いる方法ではゼロ除算をある程度防げるが, $\nu \to -\infty$ としたとき, 得られる結果の区間幅が `inf` (ゼロ除算やオーバーフローなど, 通常の浮動小数点数値として表すには大きすぎる値 [1]) になってしまう．これは $q$-超幾何関数内の $q$-Pochhammer 記号にある $q^\nu$ が影響している．

# 3 数値実験

Jackson の第 2 種 $q$-Bessel 関数を DE 公式と漸近展開によって精度保証付き数値計算し, Mathematica 11 を使って計算する方法と比較した．実装には kv ライブラリ [4] (バージョン 0.4.43) を使用した．計算環境は Ubuntu14.04LTS, CPU: Intel Xeon(R) CPU E3-1241 v3 @ 3.50GHz × 8, メモリ: 15.6GB, gcc 4.8.4 コンパイラーを使用している．Mathematica 11 では関数 `QHypergeometricPFQ` を使用した．

数値例: $q = 0.1, \nu = 1.4, x = 6000 + 1000\mathrm{i}$(この数値例では交代級数による方法は適用できない)
**精度保証付き数値計算の結果 (積分 [4])**:[$-$**8119036**14675.55958, $-$**8119036**06004.70812]+
i[$-$**3282263**160705.7828, $-$**3282263**152005.5209].
**精度保証付き数値計算の結果 (DE 公式)**:[$-$**8119036103**41.59888, $-$**8119036103**38.72387]+
i[$-$**3282263156357**.3467, $-$**3282263156354**.1054].
**精度保証付き数値計算の結果 (漸近展開)**:[$-$**8119036103**40.45716, $-$**8119036103**39.47705]+
i[$-$**32822631563**56.6651, $-$**32822631563**55.2021].
**Mathematica の結果 (近似)**: $-8.119036103401538 \times 10^{11}$ $-3.2822631563556987 \times 10^{12}$i.

数値例: $q = 2^{-53}$, $x = 2^{-53}$, $\nu = 2$
**精度保証付き数値計算の結果 (交代級数)**:[**3.0814879110**18969×$10^{-33}$,**3.0814879110**201631×$10^{-33}$].
**精度保証付き数値計算の結果 (積分 [4])**:[**3.0814879110**044665 × $10^{-33}$, **3.0814879110**346906 × $10^{-33}$]+
i[$-1.469128504022636 \times 10^{-44}$, $1.4691284493772653 \times 10^{-44}$].
**精度保証付き数値計算の結果 (DE 公式)**:[**3.0814879110**186132 × $10^{-33}$, **3.0814879110**204197 × $10^{-33}$]+
i[$-9.2380320625533862 \times 10^{-47}$, $9.2444715835654248 \times 10^{-47}$].
**精度保証付き数値計算の結果 (漸近展開)**: [**3.0814879110**19242 × $10^{-33}$, **3.0814879110**204197 × $10^{-33}$]+
i[$-2.6664348032491181 \times 10^{-82}$, $2.6664348032491181 \times 10^{-82}$].

**Mathematica の結果 (近似)**:$3.081487911019578\times10^{-33}$.

DE 公式と漸近展開による結果は Mathematica による計算結果を包含している．Mathematica11 を使って Jackson の第 2 種 $q$-Bessel 関数を計算する際は `QHypergeometricPFQ` の代わりに `Sum` を使うこともできる． この場合, $q=2^{-53}$, $x=2^{-53}$, $\nu=2$ としたときの計算結果は次のようになる:
**Mathematica の結果 (近似, `Sum` を使用)**: $3.081487911019578\times10^{-33}-1.67385337691597\times10^{-561}$i.
Mathematica による計算結果では虚部方向のずれが生じているが, そのずれも精度保証付き数値計算の結果に包含されている．

## 4　本研究のまとめと今後の課題

本研究では Jackson の第 2 種 $q$-Bessel 関数を 4 通りの方法 (交代級数による方法, 漸近展開 (18) による方法, kv ライブラリ [4] の数値積分パッケージを使う方法と DE 公式を使う方法) によって精度保証付き数値計算した．各手法の性能を表にまとめると以下のとおりである．なお本稿の実験環境において計算時間はどの手法を用いても数秒以内で終わる．

| 状況 | 交代級数 | 漸近展開 | 積分 (kv & DE) |
|---|---|---|---|
| $\|x\|\to\infty$ | 制限 (5) より不可 | $x^\nu$ が `inf` にならない限り有効 | $x^\nu$ が `inf` にならない限り有効 |
| $\nu\to\infty$ | $x^\nu$ が `inf` にならない限り有効 | $x^\nu$ が `inf` にならない限り有効 | $x^\nu$ が `inf` にならない限り有効 |
| $\nu\to-\infty$ | 制限 (5) より不可 | $q^\nu$ でゼロ除算が発生しない限り有効 | 積分表示が成立しないので不可 |

漸近展開 (18) を用いても $\nu\to\pm\infty$ のときはうまくいかない時がある．この点を克服できるかは今後の課題となる．

## 参考文献

[1] 大石進一 (2000): 精度保証付き数値計算, コロナ社.

[2] N. Yamamoto and N. Matsuda (2005): Trans. Jap. Soc. Indust. Appl. Math., **15**, 347-359.

[3] 大石進一 (2008): 電子情報通信学会技術研究報告. NLP, 非線形問題, **108**, 55-57.

[4] 柏木雅英, kv-C++による精度保証付き数値計算ライブラリ, `http://verifiedby.me/kv/`.

[5] G. Gasper and M. Rahman (2004): Basic Hypergeometric Series, Cambridge University Press.

[6] M. Rahman (1987): J. Math. Anal. Appl., **125**, 58-71.

[7] H. Takahashi and M. Mori (1974): Publ. Res. I. Math. Sci., **9**, 721-741.

[8] 杉浦光夫 (1980): 解析入門 I, 東京大学出版会.

[9] M. Olshanetsky and V. Rogov (1995): arXiv preprint q-alg/9509013.

[10] R. Zhang (2008): Adv. Math., **217**, 1588-1613.

[11] 柏木雅英, ベキ級数演算について, `http://verifiedby.me/kv/psa/psa.pdf`.

[12] T. Okayama, T. Matsuo and M. Sugihara (2009): METR, 2009-01.

[13] Y. Chen, M. Ismail and K. Muttalib (1994): J. Comput. Appl. Math., **54**, 263-272.

[14] H. Koelink (1993): J. Math. Anal. Appl., **175**, 425-437.