

## DKP 方程式のソリトン解のロンスキ型パフィアン表示とネットワーク

城戸, 真弥  
早稲田大学基幹理工学部

渡邊, 靖之  
早稲田大学基幹理工学研究科

田中, 悠太  
早稲田大学基幹理工学研究科

笥, 三郎  
立教大学数学科

他

<https://doi.org/10.15017/1957506>

---

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 29A0-S7 (1), pp.42-48, 2018-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

バージョン：

権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.29AO-S7  
「非線形波動研究の新潮流—理論とその応用—」 (研究代表者 辻本 諭)

Reports of RIAM Symposium No.29AO-S7

*New trends in nonlinear waves - theory and applications -*

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,  
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 9 - November 11, 2017

Article No. 06 (pp. 42 - 48)

# DKP 方程式のソリトン解のロンスキ 型パフィアン表示とネットワーク

城戸 真弥 (Kido Shinya), 渡邊 靖之 (Watanabe Yasuyuki),  
田中 悠太 (Tanaka Yuta), 笥 三郎 (KAKEI Saburo), 丸野  
健一 (Maruno Ken-ichi)

(Received 9 February 2018; Accepted 20 March 2018)



Research Institute for Applied Mechanics  
Kyushu University  
March, 2018

# DKP 方程式のソリトン解のロンスキ型パフィアン表示とネットワーク

早稲田大学基幹理工学部 城戸 真弥 (Shinya Kido)

早稲田大学基幹理工学研究科 渡邊 靖之 (Yasuyuki Watanabe)

早稲田大学基幹理工学研究科 田中 悠太 (Yuta Tanaka)

立教大学数学科 笥 三郎 (Saburo Kakei)

早稲田大学理工学術院 丸野 健一 (Ken-ichi Maruno)

## 概要

KP 方程式のソリトン相互作用の数理構造は、完全置換やネットワークと密接に関係することが知られている。それに対して、KP 方程式を拡張して得られる DKP 方程式のソリトン相互作用の数理構造はまだ十分に理解できていない。そこで、反対称行列の標準化とそのネットワーク表示を用いることによって、DKP 方程式の解とネットワークを結びつける。

## 1 イントロダクション

Kadomtsev-Petviashvili(KP) 方程式は代表的な  $(2+1)$  次元可積分方程式の一つであり、2次元弱非線形浅水波を記述する [1]。KP 方程式のソリトン解はロンスキアン表示を持ち、そのソリトン相互作用についての解析が詳細になされている。また、DKP(coupled KP) 方程式は KP 方程式の拡張として提案されたソリトン方程式であるが、DKP 方程式は KP 方程式のすべての厳密解を含みつつ、KP 方程式にはない多様な厳密解を持っている [2,3]。DKP 方程式の厳密解は、グラム型パフィアン、ロンスキ型パフィアンの形で表示することができる [3,4]。Isojima らは広田の方法を用いて DKP 方程式のソリトン解を求め、spider-web 解と呼ばれる蜘蛛の巣状パターンを示すソリトン解を発見した [5]。この spider-web 解の発見の後、Biondini と Kodama は KP 方程式も spider-web 解を持つことを発見し [6]、これがきっかけとなり 2次元ソリトンの相互作用の研究が活発化することとなった。近年、KP ソリトン解の分類(ソリトンの相互作用が示すパターンの分類)は置換やネットワークと密接に関係し、組み合わせ論的手法を用いて詳細な解析を行うことができることがわかってきた [7-10]。Chakravarty-Kodama は KP 方程式のソリトン解のロンスキアン表示に対して Cauchy-Binet の公式を適用し、KP ソリトン解の分類に成功した [7]。Kodama-Maruno は DKP 方程式のソリトン解のロンスキ型パフィアン表示に対して石川・若山のパフィアンの和公式を適用し、DKP ソリトン相互作用の詳細な解析を行ったが、DKP ソリトン相互作用は KP ソリトン相互作用に比べて非常に複雑であり、ソリトン解の分類にまでは至っていない [11]。本研究の目標は、Kodama-Maruno による DKP 方程式のソリトン相互作用の研究をさらに前進させ、DKP 方程式のソリトン解の分類を行いソリトン相互作用の詳細を理解することである。さらに、KP 方程式に対する Le-diagram や完全置換といった組合せ論的対応物を DKP 方程式の場合に見つけることである。KP 方程式はあるネットワークと対応がつけられることが示されているが、本稿では反対称行列の標準化という手法によって DKP 方程式の場合もネットワークと対応づける。

## 2 KP 方程式のロンスキアン解とネットワーク

KP 方程式

$$(-4u_t + 6uu_x + u_{xxx})_x + 3u_{yy} = 0$$

は変数変換  $u = 2(\log \tau)_{xx}$  により

$$(D_x^4 - 4D_x D_t + 3D_y^2)\tau \cdot \tau = 0 \tag{1}$$

となる。ここで、 $D_x, D_y, D_t$  は広田の D-オペレータ

$$\begin{aligned} & D_x^k D_y^l D_t^m f(x, y, t) \cdot g(x, y, t) \\ &= \lim_{x', y', t' \rightarrow 0} \frac{\partial^k}{\partial x'^k} \frac{\partial^l}{\partial y'^l} \frac{\partial^m}{\partial t'^m} f(x + x', y + y', t + t') g(x - x', y - y', t - t') \end{aligned}$$

を表す。そして、双線形方程式 (1) は次のようなロンスキアン解を持つ:

$$\begin{aligned} \tau &= \begin{vmatrix} f_1 & \cdots & f_1^{(N-1)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_N & \cdots & f_N^{(N-1)} \end{vmatrix}, \quad f_i^{(n)} := \frac{\partial^n}{\partial x^n} f_i, \\ & \frac{\partial f_i}{\partial y} = \frac{\partial^2 f_i}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial f_i}{\partial t} = \frac{\partial^3 f_i}{\partial x^3}. \end{aligned} \quad (2)$$

分散関係式 (2) を満たす  $f_i$  として

$$f_i = \sum_{j=1}^M a_{ij} e^{\theta_j}, \quad \theta_j = k_j x + k_j^2 y + k_j^3 t \quad (k_1 < \cdots < k_M)$$

を選ぶと,

$$\tau = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{N1} & \cdots & a_{NM} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\theta_1} & \cdots & k_1^{N-1} e^{\theta_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{\theta_M} & \cdots & k_M^{N-1} e^{\theta_M} \end{pmatrix} \right| = |\hat{A}E|$$

と表せる。行列  $\hat{A}$  とパラメータ  $k_j$  によりソリトンの相互作用は決定されるが、KP 方程式のソリトン解の場合、相互作用のパターンに関しては、行列  $\hat{A}$  の分類が本質的である。以下では行列  $\hat{A}$  の分類と完全置換やネットワークとの関係について説明する。行列  $\hat{A}$  とネットワークや置換が密接に関係していることを説明するため Le-diagram を導入する。Le-diagram とはヤング図形の箱の中にあるルールに従って白丸を配置したものである。そのルールとは以下である:

- 白丸が入った箱の上の箱はすべて白丸、または左の箱がすべて白丸となる。
- 白丸だけの行や列は存在しない。

このルールのことを Le-property と呼ぶ。例えば、図 1 は Le-diagram である。

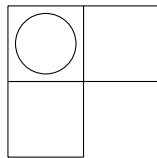


図 1: Le-diagram の例

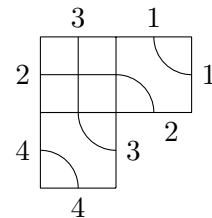


図 2: 書き換え後の Le-diagram

Le-diagram は完全置換と一対一に対応する。ここで完全置換とは  $M$  次置換群の元  $\pi$  で  $\pi(i) \neq i, (i = 1, \dots, M)$  を満たす置換である。まず Le-diagram を図 3 に従って書き換える。さらに、Le-diagram の右下枠に上から順に  $1, \dots, M$  を並べる。図 3 のように数字が移ると考えて、左上枠に対応する数字を書き

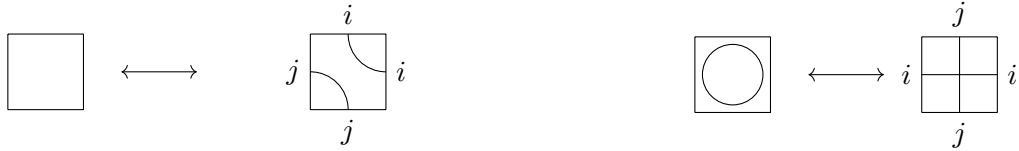


図 3: Le-diagram の書き換え

込んでいく．書き換えた後の向かい合う辺どうしの数字の入れ替えが対応する完全置換となる．図 1 を書き換えたものが図 2 であり，例えば図 2 の場合，

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

が対応する完全置換である．さらに Le-diagram からネットワークを構成することができる．図 4 のような対応を下の行から順に，同じ行の中では右から順に対応させ，ネットワークを右につなげていくと Le-diagram に対応するネットワークを構成することができる．例えば図 2 に対応するネットワークは図 5 である．そして，このようなネットワークはさらに行列の積として表現することができる．

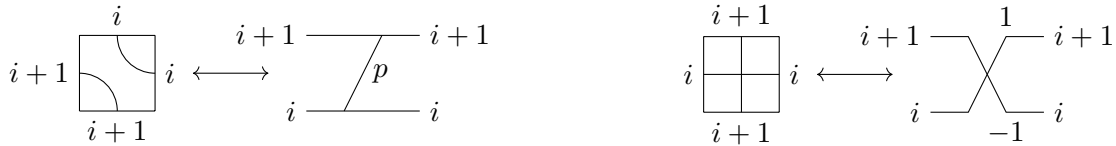


図 4: Le-diagram とネットワークの対応

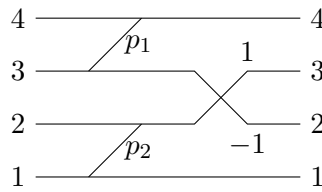


図 5: 図 1 に対応するネットワーク

$\phi_i: \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathrm{SL}_M(\mathbb{R})$  ( $i = 1, \dots, M$ ) を

$$\phi_i \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a & b & \\ & & c & d & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

として， $y_i: \mathbb{R} \rightarrow \mathrm{SL}_M(\mathbb{R})$  および  $s_i \in \mathrm{SL}_M(\mathbb{R})$  を  $\phi_i$  を用いて

$$y_i(p) = \phi_i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p & 1 \end{pmatrix}, s_i = \phi_i \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

と定める．ネットワークと  $y_i(p), s_i$  の関係は図 6 である．

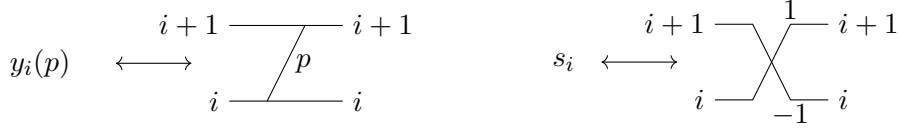


図 6:  $y_i(p), s_i$  とネットワークの関係

ネットワークによって得られる正方行列を  $A$  とする, すなわち  $A$  は  $y_i(p), s_i$  の積で表されているとする. 例えば, 図 5 に対応する行列  $A$  は

$$A = y_3(p_1)y_1(p_2)s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p_1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

である. この行列  $A$  から

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1M} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{MM} \end{pmatrix} \mapsto \hat{A} = \begin{pmatrix} a_{MN} & \cdots & a_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{M1} & \cdots & a_{11} \end{pmatrix}$$

として  $\hat{A}$  を得る. ここで,  $N$  は完全置換  $\pi$  のピボットの個数, すなわち  $\pi(i) > i$  となる  $i$  の個数を表す. したがって, 式 (3) の  $A$  から対応する  $\hat{A}$  は次のように与えられる:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} p_2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_1 & 1 \end{pmatrix}$$

### 3 DKP 方程式とロンスキ型パフィアン解

DKP(coupled KP) 方程式 [3]:

$$\begin{cases} (4u_t - 6uu_x - u_{xxx})_x - 3u_{yy} + 24(v\hat{v})_{xx} = 0, \\ 2v_t + 3uv_x + v_{xxx} + 3(v_{xy} + v \int^x u_y dx) = 0, \\ 2\hat{v}_t + 3u\hat{v}_x + \hat{v}_{xxx} - 3(\hat{v}_{xy} + \hat{v} \int^x u_y dx) = 0 \end{cases}$$

は変数変換  $u = 2(\log \tau)_{xx}, v = \sigma/\tau, \hat{v} = \hat{\sigma}/\tau$  により,

$$\begin{cases} (D_x^4 - 4D_x D_t + 3D_y^2)\tau \cdot \tau = 24\sigma\hat{\sigma}, \\ (D_x^3 + 2D_t + 3D_x D_y)\sigma \cdot \tau = 0, \\ (D_x^3 + 2D_t - 3D_x D_y)\hat{\sigma} \cdot \tau = 0 \end{cases} \quad (4)$$

に変形される. さらに双線形方程式 (4) の  $\tau$  関数は次のようなロンスキ型パフィアン表示の解を持つ [3]:

$$\tau = \text{Pf}[Q] = \sum_{\Omega} \sigma(i_1, j_1, \dots, i_n, j_n) Q_{i_1, j_1} Q_{i_2, j_2} \cdots Q_{i_n, j_n}.$$

ただし,  $Q$  は  $2n$  次反対称行列で各成分  $Q_{i,j}$  は

$$\frac{\partial}{\partial t_k} Q_{i,j} = Q_{i+k,j} + Q_{i,j+k}$$

を満たす。また、 $\Omega = \{1 = i_1 < \dots < i_{2n} \leq 2n, i_k < j_k, k = 1, \dots, 2n\}$  であり、

$$\sigma = \text{sign} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & 2n-1 & 2n \\ i_1 & j_1 & \dots & i_n & j_n \end{pmatrix}$$

である。今、 $Q$  を  $M$  次反対称パラメータ行列  $B$  を用いて、

$$Q = \mathcal{E} B \mathcal{E}^T$$

と選ぶ。ここで、 $\mathcal{E}$  は

$$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} E_1 & E_2 & \dots & E_M \\ E_1^{(1)} & E_2^{(1)} & \dots & E_M^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E_1^{(2n-1)} & E_2^{(2n-1)} & \dots & E_M^{(2n-1)} \end{pmatrix}, E_i^{(j)} = k_i^j \exp(k_i x + k_i^2 y + k_i^3 t)$$

である。よって、 $\tau$  関数が

$$\tau = \text{Pf}[Q] = \text{Pf}[\mathcal{E} B \mathcal{E}^T] \quad (5)$$

と計算される。式 (5) のようなロンスキ型パフィアン表示については石川・若山のパフィアンの和公式を用いて以下のように展開される [11]:

$$\tau = \text{Pf}[\mathcal{E} B \mathcal{E}^T] = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{2n} \leq M} \text{Pf}[B_{i_1, \dots, i_{2n}}^{i_1, \dots, i_{2n}}] \det[\mathcal{E}_{i_1, \dots, i_{2n}}].$$

ここで、 $B_{i_1, \dots, i_{2n}}^{i_1, \dots, i_{2n}}$  は行列  $B$  の  $i_1, \dots, i_{2n}$  行および  $i_1, \dots, i_{2n}$  列を抜き出した小行列を表し、 $\mathcal{E}_{i_1, \dots, i_{2n}}$  は  $\mathcal{E}$  の  $i_1, \dots, i_{2n}$  列を抜き出した小行列を表す。

## 4 DKP 方程式のソリトン解とネットワーク

本節では  $\tau$  関数 (5) における  $B$  行列が与えられたとき、ある手続きを踏むことで対応するネットワークを構成できることを簡単に説明する。 $J_M^{2n}(q_1, \dots, q_n)$  を  $M \times M$  行列で

$$J_M = J_M^{(2n)}(q_1, q_2, \dots, q_n) = \left( \begin{array}{cccc|cc} 0 & q_1 & & & & \\ -q_1 & 0 & & & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & & & 0 \\ & & & & 0 & q_n \\ & 0 & & & -q_n & 0 \\ \hline & & & & & 0 \end{array} \right)$$

により定める。この  $J_M^{2n}(q_1, \dots, q_n)$  を反対称行列の標準形と呼ぶことにする。さらに KP 方程式の場合の  $y_i(p), s_i$  に加えて、 $x_i(p)$  を導入する。 $x_i(p)$  とネットワークの関係は図 7 である。 $B$  を  $M$  次反対称行列とする。 $A$  を  $x_i(p), y_i(p), s_i$  の積として

$$B = A J_M^{2n}(q_1, \dots, q_n) A^T$$

$$x_i(p) = \phi_i \begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad x_i(p) \longleftrightarrow \begin{array}{ccc} i+1 & \text{---} & i+1 \\ & \diagdown & \\ & p & \\ & \diagup & \\ i & \text{---} & i \end{array}$$

図 7:  $x_i(p)$  とネットワークの関係

の形にすることを反対称行列の標準化と呼ぶ.  $A$  は  $x_i(p), y_i(p), s_i$  の積であるから,  $A$  をネットワークを用いて表示することが出来る. 例えば,

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ -1 & -2 & 0 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

を考えよう. この時,  $A_1 = y_1(3)y_3(2)s_2$  として  $B_1 = A_1 J_4^{(2)}(1) A_1^T$  と分解されるからネットワークは図 8 になる. 実はこのネットワークは KP 方程式のある場合に現れるものと一致する. すなわち, KP 方程式のネットワークは DKP 方程式の中では, 反対称行列の標準化に対応するネットワークを表している.

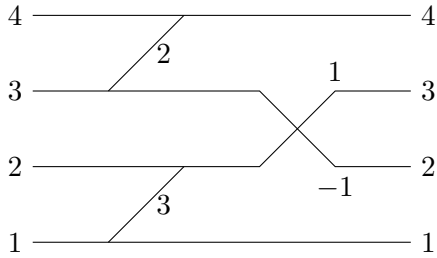


図 8:  $A_1$  に対応するネットワーク

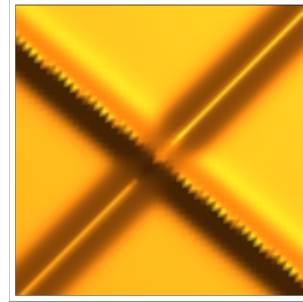


図 9:  $B_1$  に対応するソリトンのグラフ

DKP 方程式の多様なソリトン解の中にはもちろん KP 方程式に現れない解が存在する. 例えば,  $B_2$  が次のように与えられた時,  $A_2 = y_2(1)$  によって,  $B_2 = A_2 J_4^{(4)}(1,1) A_2^T$  と標準化される. それを表すネットワークは図 10 である. 非常に簡単な場合であるが, 図 11 と図 12 のようにパラメータ  $k$  に依存し

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

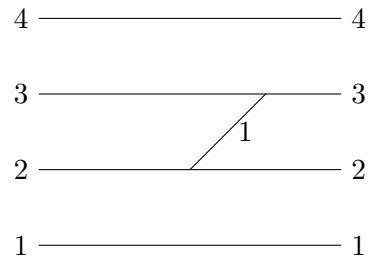


図 10:  $A_2$  に対応するネットワーク

て Y 字の向きが入れ替わる, すなわち相互作用のパターンがパラメータ  $k$  の値によって変わってしまうという現象が観察された. KP 方程式の場合, 行列  $\hat{A}$  によってのみ対応する完全置換などが定まるため, このような相互作用がパラメータ  $k$  によって変化する現象は現れない. この例から, DKP 方程式のソリトン相互作用を分類するためには, パラメータ  $k$  についても考慮しなければならないと考えられる.



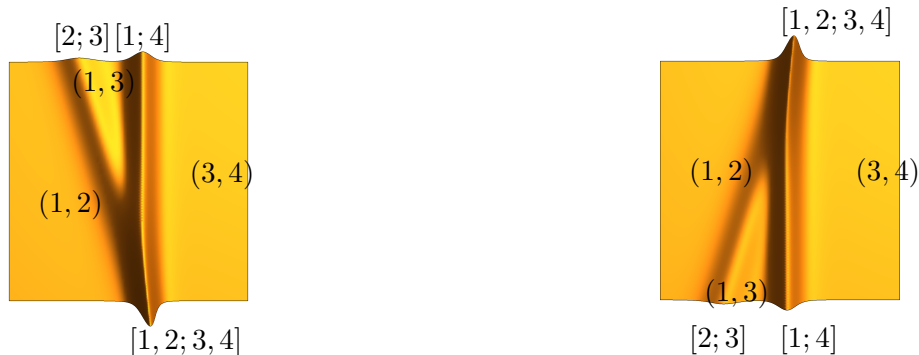


図 11:  $k_1 = -1, k_2 = -0.5, k_3 = 0.8, k_4 = 1$

図 12:  $k_1 = -1, k_2 = -0.5, k_3 = 0.2, k_4 = 1$

## 5 まとめ

KP 方程式のソリトン解の分類は解のロンスキアン表示を用いてネットワークと密接に関係することがわかっているが、DKP 方程式のソリトン解に対しても解のロンスキ型パフィアン表示および反対称行列の標準化という手法を用いてネットワークと関連付けることに成功した。このアプローチを用いると KP 方程式のソリトン解のロンスキ型パフィアン表示を簡単に得ることができ、さらに DKP 方程式の (KP 方程式の解にはならない) 一般のソリトン解に対してもネットワークと結びつけることができる。今後、本研究で提案した手法を用いることによって DKP 方程式のソリトン相互作用についてより詳しい解析を行うことができると考えられる。

## 参考文献

- [1] B. B. Kadomtsev, V. I. Petviashvili, 1970, Sov. Phys. Dokl., **15**.
- [2] M. Jimbo, T. Miwa, 1983, Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ., **19**, 943-1001.
- [3] R. Hirota, Y. Ohta, 1990, J. Phys. Soc. Jpn., **60**, 798-809.
- [4] S. Kakei, 2000, Phys. Lett. A., **264**, 449-458.
- [5] S. Isojima, R. Willox, J. Satsuma, 2003, J. Phys. A: Math. Gen., **36**, 9533-9552.
- [6] G. Biondini, Y. Kodama, 2003, J. Phys. A: Math. Gen., **36**, 10519-36.
- [7] S. Chakravarty, Y. Kodama, 2008, J. Phys. A: Math. Theor., **41**, 275209.
- [8] S. Chakravarty, Y. Kodama, 2009, Stud. Appl. Math., **123**, 83-151.
- [9] Y. Kodama, L. K. Williams, 2011, PNAS, **108**, 8684-8989.
- [10] Y. Kodama, 2017, *KP solitons and the Grassmanians – combinatorics and geometry of two-dimensional wave patterns*, Springer, Singapore.
- [11] Y. Kodama, K. Maruno, 2006, J. Phys. A: Math. Gen., **39**, 4063-4086.