# 符号付き超離散パンルヴェ第二方程式とその解について

竹村, 剛一
中央大学理工学部数学科

https://doi.org/10.15017/1957505

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 29AO-S7 (1), pp.35-41, 2018-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

応用力学研究所研究集会報告 No.29AO-S7
「非線形波動研究の新潮流ー理論とその応用ー」（研究代表者　辻本　諭）

**Reports of RIAM Symposium No.29AO-S7**

***New trends in nonlinear waves - theory and applications -***

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 9 - November 11, 2017

**Article No. 05** (pp. 35 - 41)

# 符号付き超離散パンルヴェ第二方程式とその解について

竹村 剛一（**TAKEMURA Kouichi**）

（Received 17 January 2018; Accepted 12 March 2018）

**Research Institute for Applied Mechanics**
**Kyushu University**
**March, 2018**

# 符号付き超離散パンルヴェ第二方程式とその解について

中央大学理工学部数学科　竹村剛一　(TAKEMURA Kouichi)

**概　要**　符号付き超離散パンルヴェ第二方程式を連立方程式として再定式化し、より平易な形の式を提示する。これの２パラメーター解をいくつか導出し、$q$-パンルヴェ第二方程式の行列式型の解の超離散極限との関係を論じる。本研究は五十嵐光（中大理工修士修了）との共同研究に基づく。

## 1　$q$-パンルヴェ第二方程式と符号付き超離散パンルヴェ第二方程式

パンルヴェ方程式はいわゆるパンルヴェ性（動く特異点は極のみであること）で特徴付けられる２階非線形常微分方程式であり、数理物理のいくつかの場面で現れる。そのうちの一つであるパンルヴェ第二方程式は次の形の微分方程式である。

$$\frac{d^2y}{dt^2} = 2y^3 + 2ty + c.$$

これの $q$ 変形として $q$-パンルヴェ第二方程式 **($q$-PII)** があり、ここでは以下の表示のものを考える。

$$(z(q\tau)z(\tau)+1)(z(\tau)z(q^{-1}\tau)+1) = \frac{a\tau^2 z(\tau)}{\tau - z(\tau)}.$$

極限 $q \to 1$ によりパンルヴェ第二方程式が復元される ([7])。また、$q \to 0$ という超離散極限をとると、超離散パンルヴェ第二方程式や符号付き超離散パンルヴェ第二方程式が得られる。符号付き超離散パンルヴェ第二方程式は、符号変数 $\zeta_m \in \{+1,-1\}$ と通常の変数 $Z_m \in \mathbb{R}$ に対し、$S(\omega) = \begin{cases} 0 & (\omega = +1) \\ -\infty & (\omega = -1) \end{cases}$ で定義される符号関数 $S$ を用いて以下のように定義される ([5])。

$$\begin{aligned}
&\max\Big[Z_{m+1}+3Z_m+Z_{m-1}+S(\zeta_{m+1}\zeta_m\zeta_{m-1}), Z_{m+1}+2Z_m+S(\zeta_{m+1}), \\
&\quad 2Z_m+Z_{m-1}+S(\zeta_{m-1}), Z_m+S(\zeta_m), Z_m+A+2mQ+S(\zeta_m), \\
&\quad Z_{m+1}+2Z_m+Z_{m-1}+mQ+S(-\zeta_{m+1}\zeta_{m-1}), \\
&\quad Z_{m+1}+Z_m+mQ+S(-\zeta_{m+1}\zeta_m), Z_m+Z_{m-1}+mQ+S(-\zeta_m\zeta_{m-1})\Big] \\
&= \max\Big[Z_{m+1}+3Z_m+Z_{m-1}+S(-\zeta_{m+1}\zeta_m\zeta_{m-1}), Z_{m+1}+2Z_m+S(-\zeta_{m+1}), \\
&\quad 2Z_m+Z_{m-1}+S(-\zeta_{m-1}), Z_m+S(-\zeta_m), Z_m+A+2mQ+S(-\zeta_m), \\
&\quad Z_{m+1}+2Z_m+Z_{m-1}+mQ+S(\zeta_{m+1}\zeta_{m-1}), \\
&\quad Z_{m+1}+Z_m+mQ+S(\zeta_{m+1}\zeta_m), Z_m+Z_{m-1}+mQ+S(\zeta_m\zeta_{m-1}), mQ\Big].
\end{aligned} \tag{1}$$

ここで $Q$ は負の数と仮定しておく。

超離散方程式は、多くの設定では解は整数値を取り続けるので数値計算で誤差が生じることがないという利点をもつが、符号付きの超離散方程式では解の時間発展がきちんと決まらない場合もある。例えば、$m=-10, Q=-1, A=-9, (\zeta_{-11}, Z_{-11}) = (-1,3), (\zeta_{-10}, Z_{-10}) = (+1,5)$ から $(\zeta_{-9}, Z_{-9})$ を決定できるかを考えよう。超離散方程式に代入すると $\max[Z_{-9}+18+S(-\zeta_{-9}), Z_{-9}+23+S(\zeta_{-9}), 18] =$

$\max[Z_{-9}+18+S(\zeta_{-9}), Z_{-9}+23+S(-\zeta_{-9}), 13]$ が成り立つ。$\zeta_{-9}=+1$ のときは $\max[Z_{-9}+23, 18] = \max[Z_{-9}+18, 13]$ となるが、$Z_{-9}+23 > Z_{-9}+18$, $18>13$ となって適合する $Z_{-9}$ の値は存在しない。$\zeta_{-9}=-1$ のときは $\max[Z_{-9}+18, 18] = \max[Z_{-9}+23, 13]$ から $18 = Z_{-9}+23$ のときは等式が成り立つ。まとめると、$(\zeta_{-9}, Z_{-9}) = (-1, -5)$ と時間発展が定まる。しかし、時間発展が唯一に定まらない場合があり、このときは不定発展と呼ばれる。例えば、$(\zeta_{-11}, Z_{-11}) = (-1, 3), (\zeta_{-10}, Z_{-10}) = (+1, -3)$ の場合は不定発展となってしまう。

本稿では、符号付き超離散パンルヴェ第二方程式の表示の簡易化、不定発展でないための明示的な条件の記述、２パラメーターの厳密解、$q$-PII の行列式解からの超離散極限との比較について、解説していく。詳しくは、[4] を参照のこと。

## 2 連立 $q$-パンルヴェ第二方程式と連立符号付き超離散パンルヴェ第二方程式

$q$-PII において $\tau = q^m$ として $y(q^{m+1}) = z(q^{m+1})z(q^m)+1$ とおくことにより、次の連立 $q$-差分方程式が得られる。

$$y(q^{m+1})y(q^m) = \frac{aq^{2m}z(q^m)}{q^m - z(q^m)}, \quad y(q^{m+1}) = z(q^{m+1})z(q^m)+1.$$

ここでの $y(q^m)$ の導入は、符号無しの超離散パンルヴェ第二方程式を導入する際に村田 [6] により本質的になされている。これを符号付きで超離散化することにより、以下の連立符号付き超離散パンルヴェ第二方程式 **(連立 p-ud PII)** が得られる。

$$\begin{aligned}
&\max[mQ - Z_m + Y_{m+1} + Y_m + S(\eta_{m+1}\eta_m), Y_{m+1}+Y_m+S(-\zeta_m\eta_{m+1}\eta_m), A+2mQ+S(-\zeta_m)] \\
&= \max[mQ - Z_m + Y_{m+1} + Y_m + S(-\eta_{m+1}\eta_m), Y_{m+1}+Y_m+S(\zeta_m\eta_{m+1}\eta_m), A+2mQ+S(\zeta_m)], \\
&\max[Y_{m+1}+S(\eta_{m+1}), Z_m+Z_{m+1}+S(-\zeta_{m+1}\zeta_m)] = \max[Y_{m+1}+S(-\eta_{m+1}), Z_m+Z_{m+1}+S(\zeta_{m+1}\zeta_m), 0].
\end{aligned} \tag{2}$$

このままでは式の解析をしにくいが、次の命題により取り扱いがしやすくなる。

**Proposition 1** 連立 p-ud PII が不定発展にならないための条件は $(\zeta_m, Z_m) \neq (+1, mQ)$ かつ $(\eta_{m+1}, Y_{m+1}) \neq (+1, 0)$ である。そして、不定発展でない場合、式 *(2)* は以下の式に書き換えられる。

$$\begin{aligned}
&Y_{m+1}+Y_m = A+2mQ - \max[mQ - Z_m, 0],\ Z_{m+1}+Z_m = \max[Y_{m+1}, 0], \\
&\zeta_{m+1}\zeta_m = \begin{cases} \eta_{m+1} & (Y_{m+1}>0) \\ -1 & (Y_{m+1}\le 0) \end{cases},\quad \eta_{m+1}\eta_m = \begin{cases} \zeta_m & (Z_m < mQ) \\ -1 & (Z_m \ge mQ) \end{cases}.
\end{aligned} \tag{3}$$

(1) での単独 p-ud PII においても、Proposition 1 に対応する命題が [4] で得られている。

## 3 ２パラメーター解

超離散方程式の一つの利点として数値解が誤差なしの厳密解として求められることがある。以下でいくつかの２パラメーター解を紹介する。ここで紹介するのは、$m$ の範囲に制限がある局所解である。任意の整数 $m$ に対して成り立つ解は、各局所解の２パラメータ同士の関係を求めてこれらの局所解を接続することにより構成できることがある。

以下において、$Q<0$ を常に仮定しておく。まず、 $m$ が十分大きい場合の解を記述する。

**Proposition 2**（**Type** $++$）
$d_1$ と $d_2$ は定数とし $\eta,\zeta\in\{\pm1\}$ とする。整数 $m'$ は

$$m'Q<\min(d_1,-d_1-Q),\ 2m'Q<-Q-A+\min(d_2,-d_2-2Q)$$

を満たすとする。このとき、$m\geq m'$ において

$$\begin{aligned}(\eta_m,Y_m)&=((-1)^{m-m'}\eta,\frac{(2m-1)Q+A}{2}+d_2(-1)^{m-m'}),\\(\zeta_m,Z_m)&=((-1)^{m-m'}\zeta,d_1(-1)^{m-m'})\end{aligned}$$

は 連立 p-ud PII の解となる。

ここでの解は $m\geq m'$ で $Y_m<0, Z_m>mQ$ をみたしている。
　次に $-m$ が十分大きい場合の解を記述する。

**Proposition 3**（**Type** $--$）
$c_m$ は $c_{m-2}+c_{m-1}+c_m=0$ をみたす定数 *(*とくに $c_{m-3}=c_m$ が成り立っている*)* とし、$\eta,\zeta\in\{\pm1\}$ とする。整数 $m'$ は

$$\begin{aligned}2m'Q&>Q-2A+\max(3c_{m'+1},3c_{m'}+2Q,3c_{m'-1}+4Q),\\2m'Q&>2Q+A+\max(3c_{m'-1},3c_{m'+1}+2Q,3c_{m'}+4Q)\end{aligned}$$

をみたすと仮定する。このとき、

$$\begin{aligned}&Z_m=\frac{mQ+A}{3}+c_m,\quad Y_m=\frac{(2m-1)Q+2A}{3}-c_{m+1},\\&\zeta_{m'-3k}=\zeta,\ \eta_{m'-3k}=\eta,\ \zeta_{m'-3k-1}=\zeta\eta,\ \eta_{m'-3k-1}=\zeta,\ \zeta_{m'-3k-2}=\eta,\ \eta_{m'-3k-2}=\zeta\eta,\ (k\in\mathbb{Z}_{\geq0})\end{aligned}$$

から定められる $(\zeta_m,Z_m)$, $(\eta_m,Y_m)$ は連立 p-ud PII の解となる。

ここでの解は $m\leq m'$ で $Y_m>0, Z_m<mQ$ をみたしている。
　他の２パラメーター解についても考えてみる。$K\in\mathbb{Z}_{\geq0}$ とし、以下の不等式が成り立っていると仮定する。

$$\begin{aligned}&Z_m<mQ,\ (m'\leq m\leq m'+3K+2),\\&Y_{m'+3k+1}>0,\ Y_{m'+3k+2}>0,\ Y_{m'+3k+3}<0,\ (k=0,1,\dots,K).\end{aligned}\tag{4}$$

このとき、式 (3) は

$$\begin{aligned}&Y_{m+1}+Y_m=Z_m+A+mQ,\ (m'\leq m\leq m'+3K+2),\\&Z_{m+1}+Z_m=Y_{m+1},\ (m=m'+3k+1,\ m'+3k+2,\ k=0,1,\dots,K),\\&Z_{m+1}+Z_m=0,\ (m=m'+3k+3,\ k=0,1,\dots,K)\end{aligned}$$

となり、符号変数についても明示的な式が得られる。

**Proposition 4**（**Type** $-A$）
$K\in\mathbb{Z}_{\geq0}$, $C'$, $D'$ は定数とし、$\eta,\zeta\in\{\pm1\}$ とする。定数 $C'$, $D'$ が *(4)* の条件をみたすとき、 $k=$

$0,1,\ldots,K$ に対して

$$
\begin{aligned}
&(\eta_{m'+3k}, Y_{m'+3k}) = (\eta, 2kQ + D'),\\
&(\zeta_{m'+3k}, Z_{m'+3k}) = (\zeta(-\eta)^k, -k^2Q - C' - kD'),\\
&(\eta_{m'+3k+1}, Y_{m'+3k+1}) = (\eta\zeta(-\eta)^k, (m' - k^2 + k)Q + A - C' - (k+1)D'),\\
&(\zeta_{m'+3k+1}, Z_{m'+3k+1}) = (\eta, (m'+k)Q + A - D'),\\
&(\eta_{m'+3k+2}, Y_{m'+3k+2}) = (\zeta(-\eta)^k, m' + k^2 + 3k + 1)Q + A + C' + kD'),\\
&(\zeta_{m'+3k+2}, Z_{m'+3k+2}) = (\eta\zeta(-\eta)^k, (k+1)^2Q + C' + (k+1)D')
\end{aligned}
$$

は連立 p-ud PII の解となる。

他の場合として、$K \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対して不等式

$$
\begin{aligned}
&Y_m > 0,\ (m'+1 \leq m \leq m'+3K+3) \qquad (5)\\
&Z_{m'+3k+1} < (m'+3k+1)Q,\ Z_{m'+3k+2} < (m'+3k+2)Q,\ Z_{m'+3k+3} > (m'+3k+3)Q,\ (k = 0,1,\ldots,K)
\end{aligned}
$$

が成り立っている場合を考える。

**Proposition 5** (**Type** $-B$)
$K \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, $C'$, $D'$ は定数とし、$\eta, \zeta \in \{\pm 1\}$ とする。定数 $C'$, $D'$ が *(5)* の条件をみたすとき、 $k = 0,1,\ldots,K$ に対して

$$
\begin{aligned}
&(\zeta_{m'+3k}, Z_{m'+3k}) = (\zeta, (m'+k)Q + D'),\\
&(\eta_{m'+3k+1}, Y_{m'+3k+1}) = (-\eta(-\zeta)^k, (m' + k(k+3))Q - kD' + C'),\\
&(\zeta_{m'+3k+1}, Z_{m'+3k+1}) = (-\eta\zeta(-\zeta)^k, k(k+2)Q - (k+1)D' + C'),\\
&(\eta_{m'+3k+2}, Y_{m'+3k+2}) = (\zeta, (2k+1)Q + A - D'),\\
&(\zeta_{m'+3k+2}, Z_{m'+3k+2}) = (-\eta(-\zeta)^k, (-k^2+1)Q + A + kD' - C'),\\
&(\eta_{m'+3k+3}, Y_{m'+3k+3}) = (\eta(-\zeta)^{k+1}, (m' - (k+1)(k-2))Q + A + (k+1)D' - C')
\end{aligned}
$$

は連立 p-ud PII の解となる。

## 4 $q$-PII の行列式型の解に対する超離散極限

濱本・梶原・Witte ([1]) は $q$-PII において $a = q^{2N+1}$ $(N \in \mathbb{Z})$ の場合に $q$-Airy 関数を成分にもつ行列式の形の特殊解を求めた。五十嵐・礒島と著者 ([3]) は $N \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ の場合に行列式解の超離散極限を考察した。また、五十嵐は修士論文 ([2]) で $N \in \mathbb{Z}_{\leq -1}$ の場合に行列式解の超離散極限を考察しており、ここでその結果を紹介する。$A = (2M+1)Q, M \in \mathbb{Z}_{\leq -1}$ とおき、$Q < 0$ を仮定する。$\chi \in \{+1, -1\}$ とし、定数 $m_0$ は $m_0 \leq \min(3M+1, -M(M+1)/2 - 1)$ をみたすとする。$k_0 \in \{0, 1, \cdots, -M-1\}$ とし、$C$ は以下をみたす定数とする。

$$
\begin{aligned}
&-m_0Q - (M+k_0+1)(M+k_0)Q \leq C < -m_0Q - (M+k_0)(M+k_0-1)Q, \quad (k_0 \neq 0),\\
&-m_0Q - M(M+1)Q < C < (m_0+1)Q, \quad (k_0 = 0).
\end{aligned}
$$

次の命題での関数は、行列式解の超離散極限により得られる。

**Proposition 6** *([2])* 以下の関数は、式 *(1)* での p-ud PII の解である。
*(i)* $m \le m_0 + M$ ならば

$$(\zeta^{(M)}(m), Z^{(M)}(m)) = (+1, mQ).$$

*(ii)* $m_0 + M + 1 \le m \le m_0 - 2M - 3k_0$ $(k_0 \neq 0)$ または $m_0 + M + 1 \le m \le m_0 - 2M - 1$ $(k_0 = 0)$ ならば

$$(\zeta^{(M)}(m), Z^{(M)}(m)) = \begin{cases} (+1, (m_0 + M + j)Q) & (m = m_0 + M + 3j - 2), \\ ((-1)^{j-1}\chi, C + (j^2 + M)Q) & (m = m_0 + M + 3j - 1), \\ ((-1)^{j-1}\chi, -C + (-j^2 + 2j + M)Q) & (m = m_0 + M + 3j). \end{cases}$$

*(iii)* $m_0 - 2M - 3k_0 + 1 \le m \le m_0 - 2M - 2$ かつ $k_0 \neq 0$ ならば

$$(\zeta^{(M)}(m), Z^{(M)}(m)) = \begin{cases} ((-1)^{j-1}\chi, C + (2m_0 + j^2 + M)Q) & (m = m_0 + M + 3j - 2), \\ ((-1)^{j-1}\chi, -C + (-2m_0 - j^2 + 2j + M)Q) & (m = m_0 + M + 3j - 1), \\ (+1, (m_0 + M + j)Q) & (m = m_0 + M + 3j). \end{cases}$$

*(iv)* $m_0 - 2M - 1 \le m \le M + 1$ $(k_0 \neq 0)$ または $m_0 - 2M \le m \le M + 1$ $(k_0 = 0)$ ならば

$$(\zeta^{(M)}(m), Z^{(M)}(m)) = (+1, (-m - 2M - 1)Q).$$

ここでの超離散極限で得られた $(\zeta^{(M)}(m), Z^{(M)}(m))$ に対して、$m_0 + M + 2 \le m \le m_0 - 2M - 3k_0$ の範囲で連立 p-ud PII をみたすように $(\eta^{(M)}(m), Y^{(M)}(m))$ を決めることができる。詳しくは [4] を参照のこと。また、$m \ge M + 2$ に対しては行列式解からの超離散解の計算を行っていないが、解であり続けるように $(\zeta^{(M)}(m), Z^{(M)}(m))$ を構成することは可能であろう。

例を挙げる。Proposition 6 において $M = -3$, $Q = -2$, $m_0 = -10$, $k_0 = 1$, $C = -10$, $\chi = +1$ とすると、$(\zeta_m, Z_m)$ は次のように記述される。

$$(\zeta_m, Z_m) = \begin{cases} (+1, -2m) & (m \le -13) \\ (+1, 24) & (m = -12) \\ (+1, -6) & (m = -11) \\ (+1, 14) & (m = -10) \\ (+1, 22) & (m = -9) \\ (-1, -12) & (m = -8) \\ (-1, 16) & (m = -7) \\ (+1, 18) & (m = -6) \\ (+1, 2m - 10) & (-5 \le m \le -2) \end{cases}$$

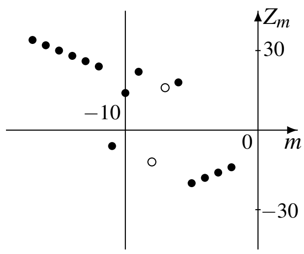


図 1

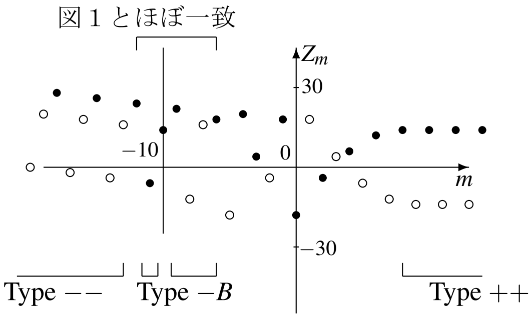
ここで、● は符号 $\zeta_m = +1$ に対応する $Z_m$ を表しており、○ は符号 $\zeta_m = -1$ に対応する $Z_m$ を表している。$-11 \le m \le -5$ での $(\eta_m, Y_m)$ で連立 p-ud PII をみたすものは

$$(\eta_m, Y_m) = (+1, 18), (+1, 8), (+1, 36), (-1, 10), (+1, 4), (-1, 34), (+1, 0)$$

$(m = -11, -10, -9, -8, -7, -6, -5)$ である。

## 5 初期値を微小にずらしたときの解の安定性

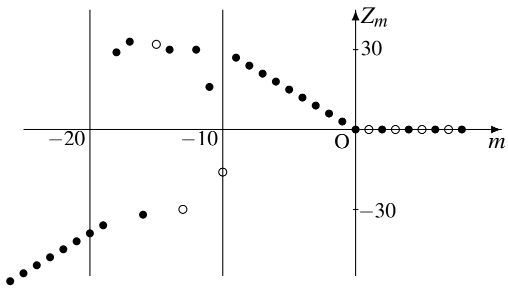
さきほどの例の解に対して、超離散方程式の解のある時刻での値（初期値）を微小にずらしたときの解を考察する。初期値として $(\zeta_{-11}, Z_{-11}) = (+1, -6 - \varepsilon)$, $(\eta_{-11}, Y_{-11}) = (+1, 18)$ $(0 < 3\varepsilon < 1)$ を与えておく。連立 p-ud PII を用いて時間発展させると、$(\zeta_m, Z_m)$ において次が得られる。



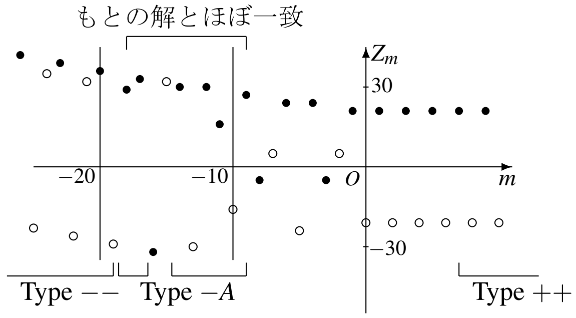

この解において、$-12 \le m \le -6$ ではもとの解 (図１) とほぼ一致しているが、$m \le -13, m \ge -5$ においては解の挙動が全く異なる。原因としては、$m = -12$ および $m = -5$ において不定発展が起こっていることが挙げられる。また、$m \le -13$ においては Type −− の２パラメーター解が現れ、$-12 \le m \le -6$ においては Type $-B$ の２パラメーター解が現れている。時刻 $m$ を正の方向に発展させると、$m \ge 8$ においては Type ++ の２パラメーター解となる。

## 6　別の例

濱本・梶原・Witte ([1]) による $q$-PII の行列式解からの超離散極限で得られる別の例について述べる。以下のグラフで記述される関数は、$q$-PII の行列式解からの超離散極限で得られた p-ud PII における $Q = -3, A = 7Q$ $(N = 3)$ の場合の $(\zeta_m, Z_m)$ であり、[3] で取りあげた例である。




これに対して初期値（例えば $m = -18$ での値）を微小にずらし、連立 p-ud PII を用いて時間発展させると、$(\zeta_m, Z_m)$ において次が得られる。




この解において、$-18 \le m \le -9$ ではもとの解とほぼ一致しているが、$m \le -19, m \ge -8$ においては解の挙動が全く異なる。また、$m \le -19$ においては Type −− の２パラメーター解が現れ、$-18 \le m \le -9$ においては Type $-A$ の２パラメーター解が現れている。時刻 $m$ を正の方向に発展させると、$m \ge 7$ においては Type ++ の２パラメーター解となる。

## 謝辞

査読者から有益なコメントを頂戴しました。感謝申し上げます。本研究は JSPS 科研費 26400122 の助成を受けたものです。

## 参考文献

[1] Hamamoto T., Kajiwara K., Witte S., Hypergeometric Solutions to the q-Painlevé Equation of Type $(A_1+A_1')^{(1)}$, *Int. Math. Res. Not.* **2006** (2006), 84619.

[2] 五十嵐 光, 符号付き超離散化による q-パンルヴェ第二方程式の解析, 中央大学大学院理工学研究科修士論文, 2016.

[3] Igarashi H., Isojima S., Takemura K., New Airy-type solutions of the ultradiscrete Painlevé II equation with parity variables, *J. Phys. A* **49** (2016), 145207, 17 pages.

[4] Igarashi H., Takemura K., On solutions of ultradiscrete Painleve II equation with parity variables, arXiv:1611.05385

[5] Isojima S., Konno T., Mimura N., Murata M., Satsuma J., Ultradiscrete Painlevé II equation and a special function solution, *J. Phys. A* **44** (2011), 175201, 10 pages.

[6] Murata M., Exact Solutions with Two Parameters for an Ultradiscrete Painlevé Equation of Type $A_6^{(1)}$, *SIGMA* **7** (2011), 059, 15 pages.

[7] Ramani A., Grammaticos B., Discrete Painlevé equations: coalescences, limits and degeneracies, *Physica A* **228** (1996), 160–171.