q-Airy方程式の解の超超越性

西岡, 斉治
山形大学理学部

https://doi.org/10.15017/1956708

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 29AO-S7 (1), pp.9-14, 2018-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.29AO-S7
「非線形波動研究の新潮流ー理論とその応用ー」（研究代表者　辻本　諭）

Reports of RIAM Symposium No.29AO-S7

New trends in nonlinear waves - theory and applications -

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 9 - November 11, 2017

Article No. 02 (pp. 9 - 14)

q-Airy 方程式の解の超超越性

西岡 斉治（NISHIOKA Seiji）

（Received 12 January 2018; Accepted 21 February 2018）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2018

q-Airy 方程式の解の超超越性

山形大学理学部　　西岡斉治 (NISHIOKA Seiji)

概要 差分リッカチ方程式の解が代数的微分方程式をみたすかどうかを調べた Tietze の研究手法を代数化し，q 差分リッカチ方程式にも通用する定理を得た．これを用いた，q-Airy 方程式の解が代数的微分方程式をみたさないこと（解の超超越性）の証明を紹介する．

1　導入

q-Airy 方程式は Airy 方程式の q 差分版であり，

$$y(q^2t) + qty(qt) - y(t) = 0$$

という形をしている．q-Painlevé II の特殊解でこの方程式（のリッカチ化）をみたすものがあり，その連続極限には Airy 関数が現れることが濱本，梶原，Witte [3] により示されている．Painlevé II は Airy 関数で表される特殊解をもっていた．また，Airy 方程式は非可解であることが知られているが，q-Airy 方程式も非可解である[*1][6]．q 差分における非可解の意味は，$y(qt) = y(t) + b(t)$ を解く和分 $\sum b(t)$ や $y(qt) = a(t)y(t)$ を解く $\prod a(t) = \exp \sum \log a(t)$ によっては方程式が解けないというようなことである．

このように q-Airy 方程式は名称にふさわしい性質をもつ．それだけでなく，ガンマ関数のように解が代数的微分方程式をみたさないこと（解の超超越性）もわかる[*2]．これが本報告の話題である．証明はティーツェの先行研究 [9] にもとづく．

なお，ガロア理論による解の超超越性の研究もある．2 階線形差分方程式に関するものは，Arreche, Singer [1]，Dreyfus, Hardouin, Roques [2]，Hardouin, Singer [4] などがある．

2　リッカチ方程式とティーツェの定理

q-Airy 方程式は $z(t) = y(qt)/y(t)$ とおくと

$$z(qt) = -qt + \frac{1}{z(t)}$$

[*1] q が 1 のベキ根でないとき．

[*2] 解は微分と差分（の変換）が自然な関係のもとで定義された体の元とする．

のようにリッカチ化される．差分リッカチ方程式とはこのような 1 次分数変換の形の差分方程式である．さらに $w(t) = 1 - 1/qtz(t)$ とおくと

$$w(qt) = 1 + \frac{1}{q^3t^2w(t)} = 1 + \frac{r(t)}{w(t)} \tag{1}$$

となる．この形をティーツェの標準形という．ティーツェの先行研究から，差分リッカチ方程式

$$y(x+1) = \frac{a(x)y(x) + b(x)}{c(x)y(x) + d(x)}$$

はアルゴリズムにより標準形

$$y(x+1) = 1 + \frac{r(x)}{y(x)}, \quad r \neq 0 \tag{2}$$

または $y(x+2) = y(x)$ に変形されるが，q 差分でも全く同様である [8].

定理 1 (ティーツェの定理 [9]) $r(x)$ は有理関数であって $\lim_{x\to\infty} r(x) = 0$ をみたすものとする．このとき差分方程式 (2) は，有理関数解をもたないなら代数的微分方程式をみたす解ももたない．

ここで $\lim_{x\to\infty} r(x) = 0$ は $r(x)$ の $x = \infty$ におけるベキ級数展開の位数が正であることと同値である．また，このとき $r(x+1), r(x+2), \ldots$ も同じ正の位数であることに注意する．

3 ティーツェの定理の q 差分化と q-Airy 方程式の解

ティーツェの定理を q 差分を含む一般の差分にも適用できるものにするため，著者の論文 [8] では，差分代数や 1 変数代数関数体の理論を用いた一般的な定理を与えている．しかし，係数体を有理関数体に制限すれば素朴な記述が可能である．

まず，$\tau y(x) = y(u(x))$, $u(x) \in \mathbb{C}(x) \setminus \mathbb{C}$ とする．通常の差分では $u(x) = x + 1$，q 差分では $u(x) = qx$ である．D を微分とすると，合成関数の微分より $D\tau y = u'\tau Dy$ が成り立つ．リッカチ方程式 $\tau y = (ay + b)/(cy + d)$ に対して

$$\tau^2 y = \frac{a^{(2)}y + b^{(2)}}{c^{(2)}y + d^{(2)}}, \quad \tau^3 y = \frac{a^{(3)}y + b^{(3)}}{c^{(3)}y + d^{(3)}}, \quad \cdots$$

と表し，これらを反復リッカチ方程式という[*3].

[*3] 細かいことをいうと，最初の方程式は τ^2 に関するリッカチ方程式とみなす．他も同様である．

定理 2 (論文 [8] の主定理を制限したもの) $\mathbb{C}(x)$ を有理関数体とする．ティーツェの標準形 $\tau y = 1 + r/y$, $r \in \mathbb{C}(x) \setminus \{0\}$ について，$r, \tau r, \tau^2 r, \ldots$ をある共通の点でベキ級数展開したとき，位数がすべて正であるとする．さらに反復リッカチ方程式が代数関数解をもたないとする．このとき，代数的微分方程式をみたす解が存在すれば，次の 3 階線形差分方程式をみたす有理関数 g が存在する．

$$\begin{aligned}\tau^2(u'r)\tau(u')u'\tau^3(g) + (\tau(r)+1)\tau(u')u'\tau^2(g)\\ - (\tau(r)+1)u'\tau(g) - rg + u'\tau(D(r)/r) = 0.\end{aligned}$$

この定理を用いて，q が 1 のベキ根でないとき，q-Airy 方程式の解が超超越的であることを示そう．このとき q-Airy 方程式の反復リッカチ方程式は代数関数解をもたないから [7]，q-Airy 方程式の標準形 (1) の反復リッカチ方程式も代数関数解をもたない．また，$r = 1/q^3t^2$ に対して $r, \tau r, \tau^2 r, \ldots$ は $t = \infty$ において位数 2 である．したがって，q-Airy 方程式が代数的微分方程式をみたす解をもてば，標準形 (1) も代数的微分方程式をみたす解をもち，

$$\frac{1}{q^4t^2}\tau^3(g) + \left(\frac{1}{q^3t^2} + q^2\right)\tau^2(g) - \left(\frac{1}{q^4t^2} + q\right)\tau(g) - \frac{1}{q^3t^2}g - \frac{2}{t} = 0$$

をみたす有理関数 g が存在する．$g = \sum_{i=m}^{\infty} a_i/t^i$ と表そう．ここで $a_i \in \mathbb{C}$, $a_m \neq 0$ とする．$m \neq 1$ のとき $1/t^m$ の項の係数を比較すると

$$q^2\frac{a_m}{q^{2m}} - q\frac{a_m}{q^m} = 0$$

を得るが，$q^{m-1} = 1$ となり矛盾．$m = 1$ のときも $1/t^m$ の項の係数を比較すると

$$q^2\frac{a_m}{q^{2m}} - q\frac{a_m}{q^m} - 2 = 0$$

を得るが，$-2 = 0$ となり矛盾．以上より q-Airy 方程式の解は超超越的である．

4 ティーツェの定理の再導出

最後に，定理 2 からティーツェの定理が導かれることを確かめておく．ティーツェの定理の仮定のもと，示すべきは下記の 2 点である．

(1) 標準形 (2) が有理関数解をもたないなら，その反復リッカチ方程式が代数関数解をもたないこと．

(2) 次をみたす有理関数 g が存在しないこと．

$$\tau^2(r)\tau^3(g)+(\tau(r)+1)\tau^2(g)-(\tau(r)+1)\tau(g)-rg+\tau(r'/r)=0. \qquad (3)$$

(1) **の証明** r の $x=\infty$ におけるベキ級数展開の位数を $\rho>0$ とおく．i 回反復リッカチ方程式の係数 $a^{(i)},b^{(i)},c^{(i)},d^{(i)}$ を，$x=\infty$ におけるベキ級数展開が次の形になるようにとれる．これは帰納的にわかる．

$$a^{(1)}=1,\ b^{(1)}=r=\frac{\beta}{x^\rho}+\cdots,\ c^{(1)}=1,\ d^{(1)}=0,$$

$$\begin{cases} a^{(i)}=1+\cdots, \\ b^{(i)}=\dfrac{\beta}{x^\rho}+\cdots, \\ c^{(i)}=1+\cdots, \\ d^{(i)}=\dfrac{\beta}{x^\rho}+\cdots, \end{cases} \qquad \beta\in\mathbb{C}^\times \quad (i\geq 2).$$

したがって，i 回反復リッカチ方程式

$$(c^{(i)}y+d^{(i)})\tau^i(y)=a^{(i)}y+b^{(i)}$$

の $x=\infty$ におけるベキ級数解は $\sum_{j=0}^\infty e_j/x^j$, $\sum_{j=\rho}^\infty e_j/x^j$ の形のもののみであり，それぞれ一意的に存在する．特に $i=1$ の場合である標準形 (2) は 2 つのベキ級数解 y_1,y_2 をもつ．これらは i 回反復リッカチ方程式もみたすから，i 回反復リッカチ方程式のただ 2 つのベキ級数解と一致する．そもそも標準形 (2) は有理関数解をもたないから，y_1,y_2 は有理関数ではない．したがって，反復リッカチ方程式は有理関数解をもたない．さらに，差分 $\tau\colon y(x)\mapsto y(x+1)$ の場合は反復リッカチ方程式に有理関数以外の代数関数解は存在しないから[*4]，主張 (1) を得る． □

(2) **の証明** 等式 (3) をみたす有理関数 g が存在すると仮定する．r と g を

$$r=\sum_{i=\rho}^\infty \frac{c_i}{x^i}, \quad c_\rho\neq 0,\ \rho>0,$$

$$g=\sum_{i=m}^\infty \frac{a_i}{x^i}, \quad a_m\neq 0$$

[*4] これは差分方程式の一般論である．論文 [5] を参照せよ．

と表す．このとき，

$$\frac{r'}{r} = -\frac{\rho}{x} + \cdots$$

である．等式 (3) において位数を比較すると $m \leq 0$ がわかる．

$$\tau g = \frac{a_m}{x^m} + \frac{a_{m+1} - ma_m}{x^{m+1}} + \cdots, \quad \tau^2 g = \frac{a_m}{x^m} + \frac{a_{m+1} - 2ma_m}{x^{m+1}} + \cdots$$

であるから，$1/x^{m+1}$ の項の係数を比較すると

$$\begin{aligned} &c_1 a_m + \{c_1 a_m + (a_{m+1} - 2ma_m)\} - \{c_1 a_m + (a_{m+1} - ma_m)\} - c_1 a_m \\ &\quad + \left\{ \begin{matrix} -\rho & (m=0), \\ 0 & (m<0) \end{matrix} \right\} = 0 \end{aligned}$$

を得る．したがって

$$-ma_m = \begin{cases} \rho & (m=0), \\ 0 & (m<0) \end{cases}$$

が成り立つことになり，矛盾． □

謝辞 本研究は JSPS 科研費 26800049 の助成を受けたものである．

参考文献

[1] Arreche, C. E., Singer, M. F., *Galois groups for integrable and projectively integrable linear difference equations*, J. Algebra 480 (2017), 423–449.

[2] Dreyfus, T., Hardouin, C., Roques, J., *Hypertranscendence of solutions of Mahler equations.* arXiv:1507.03361

[3] Hamamoto, T., Kajiwara, K., Witte, N. S., *Hypergeometric solutions to the q-Painlevé equation of type* $(A_1 + A_1')^{(1)}$, Int. Math. Res. Not. 2006 (2006), Article ID 84619.

[4] Hardouin, C., Singer, M. F., *Differential Galois theory of linear difference equations*, Math. Ann., 342 (2008), 333-377.

[5] Nishioka, S., *Transcendence of Solutions of q-Painlevé Equation of Type* $A_7^{(1)}$, Aequat. Math., 79 (2010), 1–12.

[6] Nishioka, S., *Solvability of Difference Riccati Equations by Elementary Operations*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, 17 (2010), 159–178.

[7] Nishioka, S., *Transcendence of solutions of q-Airy equation*, Josai Mathematical Monographs, Vol. 10 (2017), 129–137.

[8] Nishioka, S., *Differential transcendence of solutions of difference Riccati equations and Tietze's treatment*. Preprint. arXiv:1707.08702

[9] Tietze, H., *Über Funktionalgleichungen, deren Lösungen keiner algebraischen Differentialgleichung genügen können.*, Monatsh. für Math. 16 (1905), 329–364.