九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

アインシュタインのドップラー効果の式を高校物理で考えてみる

成清, 修
九州大学大学院理学研究院物理学部門 : 准教授

https://hdl.handle.net/2324/1955687

出版情報：2018-03-03. Kyushu Branch, The Physics Education Society of Japan
バージョン：
権利関係：

アインシュタインのドップラー効果の式を高校物理で考えてみる *

九州大学　成清 修

キーワード：　アインシュタイン，鏡，ドップラー効果，波，粒子

1　めあて

高校物理の「探究活動」の教材を提案する。アインシュタインが相対性理論（ローレンツ変換）を用いて導いたドップラー効果の式に対して，高校物理の範囲で別解を考えてみる。考察の対象は，動く鏡による光の反射である。

2　おさらい

最初に，入試問題でよくありそうなドップラー効果の問題を光の波について考えてみる。光の速さを c とする。波源が静止していて，波源から一定の速さ v で遠ざかる平面鏡で光が反射される場合を考える。このとき，光の入射と反射は鏡に垂直であり，鏡の運動もこの方向とする。

波源から出た波の振動数を f_0，波長を λ_0 とすると，鏡に届く波の振動数 f は関係式 $c-v=f\lambda_0$ を満たすように f_0 より少なくなる。同時に，反射波の振動数も f となる。反射波の波長 λ は関係式 $c+v=f\lambda$ を満たすように λ_0 より長くなる。これらの二つの関係式から，$\lambda/\lambda_0=(c+v)/(c-v)$ である。これで正解であるが，ちょっとひねりが必要な解法である。これに比べると後で述べる二つ（波または粒子による）の解法は，考え方としては素直である。

次に，斜めの入反射を考え，入射角を α，反射角を β とする。入反射方向の鏡の速さを用いて，先程と同じ議論を行うと，振動数の減少として $c-v\cos\alpha=f\lambda_0$，波長の増加として $c+v\cos\beta=f\lambda$ の関係が成り立つ。よって，

$$\lambda/\lambda_0=(c+v\cos\beta)/(c-v\cos\alpha) \tag{1}$$

である。

入試問題としてはここまでしか問えないが，入射角 α を指定すれば，反射角は決まるので，α と β の関係が気になる。以下では，この関係を探る。今の時点

*日本物理教育学会九州支部研究大会 (2018 年 3 月 3 日) での講演内容に特殊相対性理論による議論を行った 7 節「大学生以上の人のために」を加えた。

で考察してみてほしいのは，α と β の大小関係である。後で導く関係式で答え合わせができる。また，導出過程を見れば，理由も明らかになる。

3　波として

波としての考察を上記よりも精密に行ってみる。

まず，引用文献 [1] を入手するところから始める。Google 等で「arxiv.physics.0409014」を検索してみると，出版された論文の原稿を pdf ファイルでダウンロードすることができる。以下の議論は，この原稿をテキストとして行う。

原稿の Fig. 1 を見てみよう。光は平面波として鏡に入反射する。入射角が α，反射角が β である。図に，時刻 t_0 と時刻 t における鏡の位置が示してある。鏡は速さ v で右に動き，時間 $t-t_0$ の間に距離 $v(t-t_0)$ だけ移動する。

以下の議論が簡単になるように，ひとつ工夫して，線分 AB の長さを入射波の波長 λ_0 にとる。時刻 t_0 に点 B で反射された光が時刻 t に点 B′ まで進むとする。また，時刻 t_0 に点 A にあった光は，時刻 t に点 A′ まで進むとする。注目すべき事実はたったこれだけである。以下では，この事実を数式で表現する。

入射波も反射波も同じ速さ c で進むので，線分 AA′ の長さと線分 BB′ の長さは等しい。これを式で表すと $\lambda_0 + v(t-t_0)/\cos\alpha = c(t-t_0)$ となる。反射波の波長を λ とすると，λ は点 A′ を通る反射波の波面と点 B′ を通る反射波の波面の距離に等しく，$\lambda = c(t-t_0) + v(t-t_0)\cos(\alpha+\beta)/\cos\alpha$ となる。これら二つの式から時間を消去すると，

$$\lambda/\lambda_0 = (c+vb)/(c-va) \tag{2}$$

を得る。ここに，$a = 1/\cos\alpha$ および $b = \cos(\alpha+\beta)/\cos\alpha$ である。

(2) は $\lambda > \lambda_0$ であることを示しているが，このことは，(2) を導いた二つの式においても，$\lambda > c(t-t_0) > \lambda_0$ として明らかである。この大小関係は，鏡が光から逃げているという状況を考えれば自明でもある。ここで，高校教科書の波の屈折の議論を思い出してみる。波長（波面の間隔）の大小と入射角と屈折角の大小の関係と同様の議論により，今の問題では，$\lambda > \lambda_0$ から $\beta > \alpha$ が結論される。

(2) は (1) と同じことを語っているはずだが，一見したところでは，そのようには見えない。しかし，２節の最後に指摘したように，β と α は独立ではなく，適当な関係を見つければ，等しいことが示せるはずである。そこで問題になるのは，α と β の関係のつけ方である。

以下では，有効反射面という補助線を導入することによって，α と β を関係づける。

Figure 1 は引用文献 [1] の Fig. 1 のうち，有効反射面の導入に必要な部分を切り取り，情報をつけたしたものである。ここに，線分 AA′ は入射光の光線であり，線分 PP′ は反射光の光線である。また，線分 AP は時刻 t_0 における入射光の波面の一部であり，線分 A′P′ は時刻 t における反射光の波面の一部である。光線 PP′ は時刻 t_0 に点 P で反射したものであり，光線 AA′ は時刻 t に点 A′ で反射する。P や A′ のような点を反射点と呼ぶことにする。線分 AP 上の点を通る光線の反射点を集めると線分 A′P となる。これらの反射点がホイヘンスの素元波の出発点となるが，そのとき，線分 A′P を含む平面を静止した鏡と見なすことができる。この鏡の平面を有効反射面と呼ぶことにする。この鏡に対する光の入射角と反射角は，鏡が静止しているので，通常の高校教科書の議論（△APA′ と △P′A′P

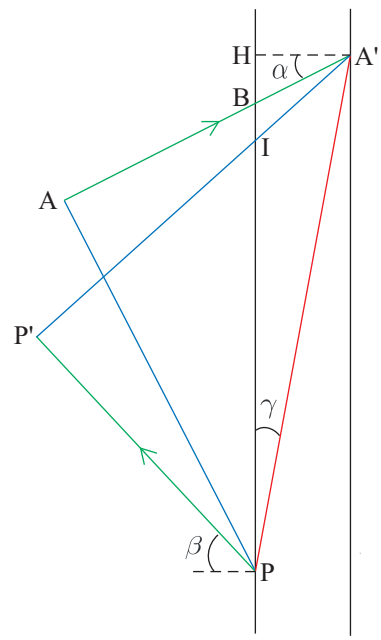

Figure 1: 有効反射面

の合同）により等しくなる。図中に導入した角度 γ を用いて，入射角と反射角が等しいことを表せば，$\alpha+\gamma=\beta-\gamma$ である。この式は $\alpha<\beta$ であることを教えている。

ここからしばらくは，幾何学の問題として γ を消去することを考える。頻出するので $t-t_0$ を τ とおく（$\tau=t-t_0$）。$\triangle$A′PH に着目すると $\tan\gamma=v\tau/\mathrm{PH}$ である。PH の表現を二とおり考える。それらにより α と β の関係が見つかる。

まず，$\mathrm{PH}=\mathrm{PB}+\mathrm{BH}$ と見る。$\triangle$PAB に着目すると $\sin\alpha=\mathrm{AB}/\mathrm{PB}$ であり，$\triangle$A′BH に着目すると $\tan\alpha=\mathrm{BH}/v\tau$ である。さらに，$\mathrm{AB}=c\tau-\mathrm{A'B}$ であり，$\triangle$A′BH に着目すると $\cos\alpha=v\tau/\mathrm{A'B}$ である。これらを用いて，$\mathrm{PH}=(c-v\cos\alpha)\tau/\sin\alpha$ を得る。よって，$\tan\gamma=v\sin\alpha/(c-v\cos\alpha)$ となる。

次に，$\mathrm{PH}=\mathrm{PI}+\mathrm{IH}$ と見る。$\triangle$IPP′ に着目すると $\sin\beta=c\tau/\mathrm{PI}$ であり，$\triangle$A′IH に着目すると $\tan\beta=v\tau/\mathrm{IH}$ である。これらを用いて，$\mathrm{PH}=(c+v\cos\beta)\tau/\sin\beta$ を得る。よって，$\tan\gamma=v\sin\beta/(c+v\cos\beta)$ となる。

上の二つの $\tan\gamma$ の表現から，$\sin\alpha/(c-v\cos\alpha)=\sin\beta/(c+v\cos\beta)$ という関係式が得られる。この関係式を用いれば，(1) と (2) が等しいことを示せる（計算の詳細は 6 節に記す）。また，この関係式をがんばって変形する（計算の詳細は 6 節に記す）と

$$\cos\beta=\frac{\left(1+\dfrac{v^2}{c^2}\right)\cos\alpha-2\dfrac{v}{c}}{\left(1+\dfrac{v^2}{c^2}\right)-2\dfrac{v}{c}\cos\alpha}$$

となり，目標としていた，β を α で表すことが達成された。アインシュタインは

ローレンツ変換の応用例としてこの関係式を導いており，動く鏡による反射光のドップラー効果の議論において中心的な役割をはたす式である。

このアインシュタインの $\cos\beta$ を (1) に用いて（計算の詳細は 6 節に記す），入射角 α のドップラー効果は

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}{1 - 2\dfrac{v}{c}\cos\alpha + \dfrac{v^2}{c^2}}$$

となる。引用文献 [1] ではアインシュタインの $\cos\beta$ を既知として，この結果を得たが，ここでは，有効反射面という補助線を導入することによって最終結果を得た。

4　粒子として

これまでとは全く別の解法として，光を粒子として考えてみる。

まず，引用文献 [2] を入手するところから始める。Google 等で「arxiv.1207.0998」を検索してみると，出版された論文の原稿を pdf ファイルでダウンロードすることができる。以下の議論は，この原稿をテキストとして行う。

ひとつの光子と鏡の衝突を考える。鏡をひとかたまりの物として考えると，コンプトン効果の問題と全く同じになる。コンプトン効果の計算の詳細は引用文献 [2] に譲る。

エネルギー保存則と運動量保存則から三つの関係式が要求される。そのうち，エネルギー保存則と鏡の運動方向の運動量保存則から (1) が得られる。鏡の平面に沿った方向の（光子の）運動量保存則から

$$\lambda \sin\alpha = \lambda_0 \sin\beta \tag{3}$$

が得られる。

光子の鏡への衝突は，鏡の運動を後押しすることになり，その結果，光子のエネルギーおよび運動量は減少する。よって，得られた (1) が示すように，光子の波長は長くなる。また，3 節で，$\lambda > \lambda_0$ から $\beta > \alpha$ を導く議論を行ったが，(3) は，その議論の数式による表現になっている。

(1) と (3) から λ/λ_0 を消去すれば，$\sin\alpha/(c - v\cos\alpha) = \sin\beta/(c + v\cos\beta)$ となる。この関係式は，波としての考察では見つけ難かったが，ここでは，比較的簡単に見つかった。

しかし，ここでの粒子としての考察では，アインシュタインの $\cos\beta$ に至るまでの計算が，なかなか大変である。それでも，がんばって計算すれば，3 節と同じ結果を得ることができる（計算の詳細は 6 節に記す）。

得られた $\cos\beta$ を (1) に用いることによって，3 節の最後と同じ，ドップラー効果の式を得る。

5　つけたし

光の速さ（本論考で必要なのは真空中での光の速さ）について少しコメントする。高校教科書のドップラー効果で考察の対象とする波は，媒質を伝播するものであ

り，波源の運動とは関係なく一定の速さとすることに抵抗はない。３節の波としてのドップラー効果の考察において，実は，アインシュタインの相対性理論によるものと同じ結果を得るためにいちばん重要なポイントは，入射波と反射波が同じ速さで進むということであった。これは,（大学物理では，相対性理論もしくはマクスウェル方程式によって説明されるが）高校物理の範囲では，光の性質として認めてやる必要がある。高校教科書の記述をたどってみると，光は電磁波であり光子でもあると書いてある。そこで，後者の光子の方についてさらにたどってみると，すでに４節で行ったコンプトン効果の記述に行き当たる。その議論では，衝突の前後で光子の速さは変わらないことが当然の事実として用いられている。これは，それ以前に光の速さが一定不変の定数として導入されており，光子において可変なのは，振動数または波長のみということになっているので，当たり前ではある。いずれにせよ，鏡による反射の前後で，光の速さは一定であるということになる。

光を粒子として行った４節の議論において，鏡の運動を非相対論的に扱っても，結果の大事な部分が正しく得られる理由についてコメントする。そのためには，コンプトン効果の計算を相対論的に行って，高校教科書にある非相対論的な計算と比べてみればよい。静止した粒子に光子が衝突する場合を考える。エネルギー保存則は，$hc/\lambda_0 + E_0 = hc/\lambda + E$，運動量保存則は，$h/\lambda_0 = (h/\lambda)\cos\theta + p\cos\varphi$ および $0 = (h/\lambda)\sin\theta - p\sin\varphi$ となる。高校教科書でも,「発展」として，$p = mv/\sqrt{1-(v/c)^2}$ と $E = mc^2/\sqrt{1-(v/c)^2}$ が紹介されているので，これらを用いることにする。また，$E_0 = mc^2$ とした。$1 = (\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2$ に運動量保存則を用いれば、$p^2 = (h/\lambda)^2 + (h/\lambda_0)^2 - 2(h/\lambda)(h/\lambda_0)\cos\theta$ を得る。p と E の定義より，$E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$ なので，この式にエネルギー保存則を用いれば，$\{(hc/\lambda_0) - (hc/\lambda) + mc^2\}^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$ となるが，さらに，先に求めた関係から p^2 を消去して整理すると，$\lambda - \lambda_0 = (h/mc)(1-\cos\theta)$ を得る。これは，高校教科書で，非相対論的近似を用いて得られる結果と一致する。よって，光子の波長の変化を求めるにあたって，鏡を非相対論的に扱っても構わない。光子の速さが常に c であるという点において，すでに，相対論的効果の要点が考慮されている。

6　計算の詳細

(1) と (2) が等しいことを示す計算は以下のようになる。$\sin\alpha/(c - v\cos\alpha) = \sin\beta/(c + v\cos\beta)$ と加法定理を用いて，$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\alpha(c + v\cos\beta)/(c - v\cos\alpha)$ を得る。これを (2) に用いると，$\lambda/\lambda_0 = (c + v\cos\beta)\{\cos\alpha(c - v\cos\alpha) - v\sin\alpha\sin\alpha\}/(c\cos\alpha - v)(c - v\cos\alpha)$ となり，(1) に等しい。

$\cos\beta$ を $\cos\alpha$ で表すために，$\beta = \alpha + 2\gamma$ を活用する。加法定理を用いると，$\cos\beta = \cos\alpha(\cos\gamma\cos\gamma - \sin\gamma\sin\gamma) - \sin\alpha(2\sin\gamma\cos\gamma)$ である。$\tan\gamma = v\sin\alpha/(c - v\cos\alpha)$ より，$\cos\gamma = (c - v\cos\alpha)/R$ と $\sin\gamma = v\sin\alpha/R$ であることを用いれば，$\cos\beta = \{\cos\alpha(c^2 + v^2) - 2cv\}/R^2$ となる。ここに，$R^2 = (c - v\cos\alpha)^2 + (v\sin\alpha)^2 = c^2 + v^2 - 2cv\cos\alpha$ である。よって，３節のアインシュタインの $\cos\beta$ が得られる。

$\cos\beta$ を (1) に代入する際は，

$$c + v\cos\beta = \frac{\left(1-\dfrac{v^2}{c^2}\right)\left(c - v\cos\alpha\right)}{\left(1+\dfrac{v^2}{c^2}\right) - 2\dfrac{v}{c}\cos\alpha}$$

と変形してから代入した。

$\sin\alpha/(c - v\cos\alpha) = \sin\beta/(c + v\cos\beta)$ からアインシュタインの $\cos\beta$ を導く計算は，なかなか大変である。この式を自乗した，x についての 2 次方程式 $(1+vx)^2(1-k^2) = (1-vk)^2(1-x^2)$ を解くことを考える。ここに，$\cos\beta = x$ および $\cos\alpha = k$ とおいた。また，計算の見やすさのため，$c = 1$ とした。x について整理すると，$(1-2kv+v^2)x^2 + 2v(1-k^2)x - (k^2 - 2kv + k^2v^2) = 0$ となる。これに，解の公式を用いると，$x = \{-v(1-k^2) \pm \sqrt{D}\}/(1-2kv+v^2)$ となる。ただし，$D \equiv v^2(1-k^2)^2 + (1-2kv+v^2)(k^2-2kv+k^2v^2)$ である。$v = 0$ のときは，$\alpha = \beta$ より $x = k$ なので，$\sqrt{D}$ の前の複合は，$+$ に限られる。ここで，$D = (kv^2 + pv + k)^2$ のようになっていると好都合であるが，実際，$D = k^2v^4 - 2k(1+k^2)v^3 + (1+4k^2+k^4)v^2 - 2k(1+k^2)v + k^2$ なので，$p = -(1+k^2)$ となっている。よって，$\{-v(1-k^2) + \sqrt{D}\} = kv^2 - 2v + k$ であり，解 x は，アインシュタインの $\cos\beta$ となる。

7　大学生以上の人のために

ここまでの議論の結果はアインシュタインが特殊相対性理論（ローレンツ変換）を用いて導いたものと一致する。と言われると，音（非相対論的）と光（相対論的）のドップラー効果は異なるので，その違いがあるように見えない，ここまでの議論に疑いを抱かれるかもしれない。そこで，アインシュタインの議論をパウリの教科書[1] に拠って紹介してみる。

まず，二つの座標系（K 系と K′ 系）を考える。K′ 系の原点は K 系の x 軸上を正の向きに一定の速さ v で運動している。K′ 系の x' 軸をこの向きにとる。K 系の時刻を t，K′ 系の時刻を t' とすると，ローレンツ変換は，$x' = \gamma(x - vt)$ および $t' = \gamma(t - vx/c^2)$ となる。ここに，$\gamma \equiv 1/\sqrt{1-(v/c)^2}$ である。

この設定において，平面波の進行を考える。平面波の位相はローレンツ・スカラーであり，ローレンツ変換によって値が変わらず，$\omega't' - k'_x x' - k'_y y' - k'_z z' = \omega t - k_x x - k_y y - k_z z$ である。いま，$y' = y$ および $z' = z$ なので，$k'_y = k_y$ および $k'_z = k_z$ でもある。よって，位相不変の関係式は，ローレンツ変換の逆変換 $x = \gamma(x' + vt')$ および $t = \gamma(t' + vx'/c^2)$ を用いて，$\omega't' - k'_x x' = \omega\gamma(t' + vx'/c^2) - k_x\gamma(x' + vt')$ となる。両辺の t' の係数を等置して，振動数のローレンツ変換 $\omega' = \gamma(\omega - vk_x)$ を得る。x' の係数を等置して，波数のローレンツ変換 $k'_x = \gamma(k_x - v\omega/c^2)$ を得る。

K 系と K′ 系で見た平面波の進む向きをそれぞれ $k_x = (\omega/c)\cos\alpha$ と $k'_x = (\omega'/c)\cos\alpha'$ とする。これらを振動数と波数のローレンツ変換の式に用いて，α' と α の関係をつけると，$\cos\alpha' = (c\cos\alpha - v)/(c - v\cos\alpha)$ を得る。

以下では，K 系は光源とともに静止した座標系，K′ 系は鏡とともに運動する座標系とする。(1) を導いたのと同じ状況を考えると，K′ 系では入射波と反

[1] パウリ「相対性理論」（講談社）

射波の振動数は同じであるが，K 系では異なり，入射波の振動数を ω_0，反射波の振動数を ω とする。まず，入射波について，$\omega' = \omega_0\gamma\{1-(v/c)\cos\alpha\}$ である。反射波については，α を $\pi-\beta$ に置き換えて，$\omega' = \omega\gamma\{1+(v/c)\cos\beta\}$ となる。特殊相対性理論の効果は因子 γ によって考慮されているが，比をとると，$\omega/\omega_0 = (c-v\cos\alpha)/(c+v\cos\beta)$ となって，(1) と等価な式が得られる。

前の段落と同じ状況で更に話を進める。K 系での入射角を α，反射角を β とし，K$'$ 系での入射角を α'，反射角を β' とする。入射波については，すでに，$\cos\alpha' = (c\cos\alpha - v)/(c-v\cos\alpha)$ であることを導いた。反射波については，α' を $\pi-\beta'$ に，α を $\pi-\beta$ に置き換えて，$\cos\beta' = (c\cos\beta+v)/(c+v\cos\beta)$ を得る。これらは，(P-16) である[2]。K$'$ 系では $\beta' = \alpha'$ なので，$(c\cos\alpha - v)/(c-v\cos\alpha) = (c\cos\beta+v)/(c+v\cos\beta)$ である。これは，(P-257) の下の式である。これを $\cos\beta$ について解いて，

$$\cos\beta = \frac{\left(1+\dfrac{v^2}{c^2}\right)\cos\alpha - 2\dfrac{v}{c}}{\left(1+\dfrac{v^2}{c^2}\right) - 2\dfrac{v}{c}\cos\alpha}$$

を得る[3]。これは，(P-257a) である。

以上のように，前節までの結果は，特殊相対性理論の結果と一致する。

References

[1] A. Gjurchinovski : The Doppler effect from a uniformly moving mirror, European Journal of Physics 26-4 (2005), 643-646.

[2] A. Gjurchinovski : Reflection from a moving mirror: A simple derivation using the photon model of light, European Journal of Physics 34-1 (2013), L1-L4.

[2] (P-16) はパウリの教科書の (16) 式の意味。

[3] K$'$ 系では，$0<\alpha'<\pi/2$ ならば $\beta'=\alpha'$ より $0<\beta'<\pi/2$ である。ところが，K 系においては，$\beta>\pi/2$ となりうる。

光が鏡に追いつける条件は，$c\cos\alpha > v$ であるが，これは，$\cos\alpha' > 0$ と合致し，このとき $\beta'=\alpha'$ より $\cos\beta' > 0$ をも意味する。$\cos\beta' > 0$ は $c\cos\beta + v > 0$ を要求するが，この不等式は $\beta > \pi/2$ でも成り立ちうる。

$\beta > \pi/2$ となる状況は，K 系における有効反射面（Figure 1 の赤い線）の傾きを見れば明らかである。有効反射面で見た入射角 $\alpha+\gamma$ と反射角 $\beta-\gamma$ が等しくなるように光線は反射する。この反射角については $0<\beta-\gamma<\pi/2$ であり，$\cos(\beta-\gamma) > 0$ でなければならない。すなわち，$\cos\beta + \sin\beta\tan\gamma > 0$ でなければならないが，これに $\tan\gamma = v\sin\beta/(c+v\cos\beta)$ を用いると $c\cos\beta + v > 0$ が得られ，前の段落での要求と一致する。