

無補強およびリング補強円筒殻のせん断荷重および外圧荷重下での座屈強度に関する研究

和泉, 徳喜

<https://doi.org/10.15017/1931866>

出版情報：九州大学, 2017, 博士（工学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：

無補強およびリング補強円筒殻のせん断荷重
および外圧荷重下での座屈強度に関する研究

2018年2月

和 泉 徳 喜

目次

第 1 章 緒 言	1
第 2 章 円筒殻の座屈解析理論の概要	7
2.1 緒言	7
2.2 無補強円筒殻の座屈に関する基礎理論の概要	8
2.2.1 軸圧縮	8
2.2.2 捩り	9
2.2.3 外圧	10
2.3 軸対称荷重を受ける軸対称殻の非軸対称座屈解析理論の概要	11
2.3.1 軸対称殻の弾塑性大変形解析	12
2.3.2 軸対称殻の非軸対称座屈解析	14
2.3.3 解析手順	14
2.3.4 変位－ひずみ関係の非線形項の簡略化が座屈圧力に及ぼす影響	17
2.3.5 座屈時の従動荷重が座屈圧力の推定におよぼす影響	20
2.4 非軸対称荷重・非軸対称初期不整を有する円筒殻の弾塑性大変形解析の概要	22
2.4.1 弧長増分法の概要	22
2.5 結言	23
第 3 章 せん断荷重を受ける短い円筒殻のせん断座屈強度	25
3.1 緒言	25
3.2 従来研究の概要	27
3.3 短い無補強円筒殻の捩りおよびせん断荷重下での弾塑性座屈解析	29
3.3.1 解析モデル	29
3.3.2 材料物性	31
3.3.3 形状初期不整の付与	31
3.4 弾塑性座屈強度の推定方法に関する検討	33
3.4.1 手法 1（非線形座屈強度推定法）の適用性検討	33
3.4.2 手法 2（面外変形の急激な増加位置を基に推定する方法）の適用性検討	37
3.5 パラメータスタディ	38
3.5.1 塑性化パラメータ β の設定	38
3.5.2 塑性化パラメータ β を変えたパラメータスタディ結果	38
3.5.3 Batdorf Parameter Z を変えたパラメータスタディ結果	43
3.6 リング補強材がせん断座屈強度におよぼす影響	45

3.7	球形タンクがタンクスカートのせん断座屈強度に及ぼす影響	48
3.8	結言	51
第 4 章	外圧を受けるリング補強円筒殻の胴板座屈強度	53
4.1	緒言	53
4.2	従来研究の概要	55
4.2.1	無補強円筒殻の胴板座屈圧力	55
4.2.2	リング補強円筒殻の胴板座屈圧力	56
4.3	補強リングの影響を考慮した胴板座屈圧力の簡易推定式の提案	57
4.4	胴板座屈圧力の簡易推定式の精度検証	60
4.4.1	検討対象	60
4.4.2	FEM 解析	60
4.4.3	提案した推定式と FEM 解析結果との比較	63
4.5	胴板座屈圧力の塑性修正について	70
4.5.1	FEM 解析	71
4.5.2	材料の降伏応力の影響	71
4.6	結言	73
第 5 章	外圧を受けるリング補強円筒殻の全体座屈強度	75
5.1	緒言	75
5.2	従来研究の概要	77
5.2.1	リング補強円筒殻の全体座屈圧力	77
5.2.2	胴板有効幅 b_e	79
5.2.3	リング補強円筒殻の全体座屈圧力におよぼす初期不整の影響	80
5.2.4	内外リング補強の違いが全体座屈強度におよぼす影響	81
5.3	胴板の応力比の影響を考慮した新たな全体座屈圧力簡易推定式の提案	82
5.4	内外リング補強が全体座屈強度におよぼす影響調査	85
5.4.1	内外フレームの違いによる Krenzke の式と FEM 解析結果との比較	85
5.4.2	曲り梁効果による中性軸位置変化が補強リングの曲げ剛性におよぼす影響	88
5.4.3	ウェブの面内せん断変形が補強リングの曲げ剛性におよぼす影響	92
5.4.4	FEM 解析結果との比較検証	95
5.5	提案した全体座屈圧力推定式の精度検証	97
5.5.1	検討対象	97
5.5.2	FEM 解析	98
5.5.3	提案した推定式と FEM 解析結果との比較	99

5.6 全体座屈圧力の塑性修正について.....	102
5.7 結言.....	104
第 6 章 外圧を受けるリング補強円筒殻の補強リング横倒れ座屈強度.....	105
6.1 緒言.....	105
6.2 従来研究の概要.....	107
6.3 新しい推定法の提案.....	111
6.3.1 基礎式.....	111
6.3.2 胴板の面内力作用下での曲げ剛性低下の影響を考慮したバネ定数算出式.....	114
6.3.3 補強リングの横倒れ座屈圧力の簡易推定式.....	117
6.4 簡易推定式の精度検証.....	118
6.4.1 検討対象, 検討パラメータおよび FEM 解析モデル.....	118
6.4.2 提案した推定式と FEM 解析結果との比較.....	119
6.5 結言.....	127
第 7 章 結 言.....	129
付録 1 無補強円筒殻の座屈に関する基礎理論 ^{20) 21)}	133
付録 2 軸対称荷重を受ける軸対称殻の非軸対称座屈解析理論 ²⁴⁾	151
付録 3 3次元板殻要素を用いた弾塑性大変形解析理論 ²⁶⁾	169
謝 辞.....	179
参 考 文 献.....	181

第1章 緒言

我が国の各造船会社は、世界（特に韓国や中国）との過酷な競争にさらされながらも、例えば LNG 運搬船や潜水船といった、高度な設計および建造技術を要する高付加価値船や高品質船を建造している。LNG 運搬船（特に Moss 型 LNG 船）や潜水船においては、その主要構造部材に円筒殻が用いられており、軸圧縮およびせん断荷重作用下での円筒殻の座屈強度や外圧作用下での円筒殻の座屈強度を精度よく推定することは設計上極めて重要となる。

軸圧縮およびせん断荷重作用下での円筒殻の代表例として、Moss 型 LNG 船のタンクスカートがあげられる¹⁾。Moss 型 LNG 船のカーゴタンクは、球形タンクとそれを支えるタンクスカートから構成されている。タンクスカートの上端部で球形タンクの赤道部と、下端部で船体と結合されており、タンクスカートには主にリング補強円筒殻が用いられている。タンクスカート補強リング間の半径と高さの関係は、円筒殻の長さを表す Batdorf Parameter Z でみると 2.0~5.0 程度であることから、円筒殻としては短いものに分類される。ここで、Batdorf Parameter Z は $Z = \sqrt{1 - \nu^2}(L^2/Rt)$ で算出される。但し、 L は円筒殻の長さ、 R は円筒殻の半径、 t は円筒殻の板厚、 ν はポアソン比である。

タンクスカートは球形タンクを支えるためにあることから、まずはタンクの自重およびタンク内に搭載される LNG の重量に耐える必要がある。そのためタンクスカートは上記重量に対し軸方向に圧縮荷重を受けることになる。さらに、船体運動により LNG を搭載した球形タンクは種々の方向に加速度を受けることから、それに伴う荷重をタンクスカートは支える必要がある。タンクスカートに作用する力は、大きく分けて船体運動に起因した上下方向加速度による軸方向荷重と、水平方向加速度によるせん断荷重の 2 種類がある。LNG 船の大型化に伴う球形タンクのサイズアップによりタンクスカートに作用する軸方向荷重およびせん断荷重も大きくなることから、合理的な設計を実現するためには、軸方向荷重およびせん断荷重に対する座屈強度を高い精度で推定することが重要となる。

大別した 2 種類の荷重のうち、軸圧縮荷重を受ける円筒殻の座屈強度については、初期不整が座屈強度におよぼす影響も含めて Koiter, Hutchinson, Almroth, 等数多くの研究がなされている^{2),3),4),5)}。さらに、タンクスカート相当の寸法に対する短い円筒殻に対する弾塑性座屈強度については、安川・川上・吉川によって、座屈前変形の影響を考慮した高精度な推定方法、および初期不整による座屈強度の低下の影響等について、系統的に研究が実施されている^{6),7)}。

一方、せん断荷重に対するタンクスカートの座屈強度評価に関しては、これまでせん断荷重下で円筒殻に生じる最大せん断応力と同じ大きさのせん断応力を生じさせる振り荷重に置き換えて座屈強度を評価する手法¹⁾⁸⁾が提案されそれが主に用いられている。また、円筒殻に振り荷重が

作用する場合の座屈強度および初期不整が座屈強度に及ぼす影響についても、Yamaki ら⁹⁾ や中村・安川ら¹⁾ によって系統的に研究が実施されている。しかしながら、Yamaki らが検討対象とした円筒殻の大きさは Z が 20 以上となっていること、中村・安川らは Koiter 理論に基づいた弾性域での検討であることから、タンクスカートと同等の Z に対するせん断荷重下の弾塑性座屈強度評価に関する研究が充分になされているとはいえない。さらに、補強リングを有する円筒殻のせん断座屈強度におよぼす補強リング寸法の影響、球形タンクを有する場合のスカート上端部の境界条件の影響についても解明されていない。

また、外圧作用下での円筒殻構造の代表例として潜水船がある。潜水船にはリング補強円筒殻構造が数多く用いられており、それらの設計を行う際には外圧を受けるリング補強円筒殻の座屈強度を精度よく推定することが重要となる。外圧作用下のリング補強円筒殻の座屈形態としては、大きく以下の4つに分類できる。

- (1) 胴板座屈 : 補強リング間の円筒殻の座屈 (非軸対称もしくは軸対称座屈)
- (2) 全体座屈 : 補強リングを巻き込む形で全長又は隔壁間長にわたり起こる座屈
- (3) 補強リングの横倒れ座屈 : 補強リングが波打つ (もしくは一様に倒れる) 座屈
- (4) 補強リングの局部座屈 : 補強リングのウェブ或いはフランジ自身が波打つ座屈

外圧を受けるリング補強円筒殻では、大きな断面変形が生じないようにある間隔で隔壁が設けられることが多い。リング補強円筒殻の基本設計では、(2)~(4)の座屈に対して(1)の胴板座屈が先行するように、隔壁の間隔、胴板の板厚、および補強リングの寸法などが決定されている。

外圧を受けるリング補強円筒殻の弾性座屈強度を簡易的に推定する手法として、(1)胴板座屈、(2)全体座屈に対しては数多くの研究がなされている。

まず(1)の胴板座屈に対しては、補強リングを支持点とすることで Tokugawa¹⁰⁾ および Mises¹¹⁾ によって提案された無補強円筒殻に対する座屈強度推定式をそのまま用いる方法が主に用いられている。しかしながら、リング補強円筒殻に外圧が作用する場合の胴板に生じる周方向応力 σ_θ と長手方向応力 σ_s の比率は、無補強円筒殻の場合の比率とは必ずしも一致しない。この理由は、補強リングが胴板に作用する圧力荷重の一部を分担するためであり、胴板に生じる周方向応力 σ_θ と長手方向応力 σ_s の比率は無補強円筒殻のそれに場合に比べて相対的に小さくなる可能性がある。

また、(2)の全体座屈に対しては、Tokugawa¹⁰⁾ および Bryant¹²⁾ によって提案された分離剛性 (座屈圧力に対する胴板の寄与分と補強リングの寄与分をそれぞれ求めその合計を座屈圧力とする考え方) に基づいた算定式がある。さらに、それらの算定式において重要となる補強リングの断面2次モーメント算出における胴板の有効幅の算定方法については、寺田・島本ら¹³⁾、Pulosら¹⁴⁾、大坪ら¹⁵⁾、および吉村・吉川¹⁶⁾ の研究がある。特に吉村・吉川¹⁶⁾ は、上記の分離剛性を

用いて評価する際の補強リングの寄与分を求める際に必要となる胴板の有効幅に関して、Pulos が提案した軸対称となる座屈前変形の影響と座屈時の周方向波数を持つモードとなる座屈変形の両者の影響を考えた算定方法を提案し、FEM 解析結果と比較することでその精度を検証している。

一方、寸法の大きな、すなわち背の高い補強リングを採用した場合には、それ自身の横倒れ座屈強度が低下する。このような円筒殻の設計においては、(1)胴板座屈、および(2)全体座屈、に加えて、(3)の補強リングの横倒れ座屈に対する座屈強度についても十分に注意を払う必要がある。

外圧作用下のリング補強円筒殻に対する補強リングの横倒れ座屈強度の簡易的推定手法に関する研究は、胴板座屈および全体座屈のそれに比較して極めて少なく、古くは Kennard¹⁷⁾ による推定式が、また、補強リングの横倒れ座屈におよぼす胴板の面内圧縮力作用下での曲げ剛性の低下の影響についても考慮した推定式が Faulkner¹⁸⁾、Morandi ら¹⁹⁾ により提案されている程度である。ただし、これらの推定式では、補強リングの横倒れ座屈におよぼす胴板の面内圧縮力作用下での曲げ剛性の低下の影響を表わす方法として、Tokugawa および Mises によって提案された無補強円筒殻に対する胴板座屈強度推定式、すなわち、外圧が作用する場合の胴板に生じる周方向応力 σ_θ と長手方向応力 σ_s の比率が ($\sigma_\theta : \sigma_s = 2:1$) として定式化された胴板座屈強度推定式が用いられている。

近年、経済性ならびに機能性の観点から隔壁間長をより長くしたいとの要望がある。この場合には全体座屈強度が相対的に低下することから、その対策の1つとして比較的寸法の大きい補強リングを採用して全体強度を胴板強度より大きくすることが考えられる。その場合、胴板に生じる周方向応力 σ_θ と長手方向応力 σ_s の比率の低下はさらに顕著になると考えられる。

したがって、隔壁間長を長くすべく比較的寸法の大きい補強リングを採用した場合、Tokugawa および Mises によって提案された無補強円筒殻に対する胴板座屈強度推定式では胴板座屈強度および補強リングの横倒れ座屈強度を精度よく推定できない可能性がある。

さらに、補強リングが胴板の内側に配置された場合と外側に配置された場合では、同じ補強リング寸法諸元に対する全体座屈強度が異なることはよく知られている。隔壁間長を長くすべく比較的寸法の大きい補強リングを採用した場合、補強配置によって全体座屈強度の違いが大きくなると考えられるが、この原因は完全には解明されていない。

そこで、本研究では、まず Moss 型 LNG 船タンクスカートに作用するせん断荷重に対する弾塑性座屈強度評価を対象として、せん断および捩り荷重作用下での短い無補強円筒殻の弾塑性座屈強度における形状初期不整等の影響、およびリング補強材の寸法および球形タンク構造がリング円筒殻のせん断座屈強度に及ぼす影響、について明らかにする。

さらに、潜水船等に用いられるリング補強円筒殻を対象として、外圧作用下のリング補強円筒殻に対し、補強リングの影響による胴板の周方向応力の低下の影響を考慮した胴板座屈強度、全

体座屈強度，および補強リングの横倒れ座屈強度，の推定方法の高精度化を図るべく，弾性域での各座屈強度における新たな推定式を提案しその精度を FEM にて検証するとともに，その塑性修正方法について検討する．

これらの研究成果をまとめた本論文は 7 章より構成されている．

第 1 章の緒言に続き，第 2 章では本論文で用いた基礎理論および数値解析理論について概説する．具体的には，2.1 節で第 2 章の概要を示したうえで，2.2 節では円筒殻の座屈に関する基礎理論を概説する．次に，2.3 節では座屈前変形の影響を考慮した軸対称殻の非軸対称弾塑性座屈解析手法について概説し，変位－ひずみ関係の非線形項の簡略化が座屈圧力の推定におよぼす影響，および座屈時の従動荷重が座屈圧力の推定におよぼす影響について簡単な例題を基に検証する．さらに，2.4 節では任意形状殻の弾塑性大変形解析手法について，特に後座屈挙動を考慮できる解法である弧長増分法について概説し，2.5 節で第 2 章の結論を示している．なお，2.2 節から 2.4 節における基礎理論の詳細については付録 1～付録 3 に記載している．

第 3 章では，Moss 型 LNG 船タンクスカートに作用するせん断荷重に対する弾塑性座屈強度評価を主眼として，せん断および振り荷重作用下での短い無補強円筒殻の弾塑性座屈強度における形状初期不整等の影響，およびリング補強材の寸法および球形タンク構造がリング円筒殻のせん断座屈強度に及ぼす影響について，FEM 解析による数値シミュレーションを基に明らかにする．具体的には，3.1 節で第 3 章の研究目的を示したうえで，3.2 節では軸圧縮，せん断および振り荷重作用下での円筒殻の座屈強度に関するこれまでの研究の概要について述べる．次にせん断および振り荷重作用下での短い無補強円筒殻の弾塑性座屈強度における形状初期不整等の影響について調べる．3.3 節で解析モデルを示し，3.4 節で弾塑性座屈強度推定手法について調査したうえで，3.5 節にて降伏応力および板厚を変更したパラメトリックスタディを実施する．さらに，3.6 節ではリング補強材の寸法がリング円筒殻のせん断座屈強度に及ぼす影響について，3.7 節では球形タンク構造がリング円筒殻のせん断座屈強度に及ぼす影響について調べる．3.8 節では第 3 章での研究結果のまとめを記している．

第 4 章から第 6 章では，潜水船等に用いられる外圧を受けるリング補強円筒殻の座屈強度評価を対象として，外圧作用下のリング補強円筒殻に対し，補強リングの影響による胴板の周方向応力低下の影響を考慮した胴板座屈強度，全体座屈強度，および補強リングの横倒れ座屈強度，の推定方法の高精度化を図るべく，弾性域での各座屈強度における新たな推定式を提案しその精度を FEM にて検証するとともに，その塑性修正方法について検討する．

第 4 章では，外圧作用下の弾性域における胴板座屈圧力に対する新たな推定式を提案しその精

度を **FEM** にて検証するとともに、その塑性修正方法について検討する。具体的には、4.1 節で第 4 章の研究目的を示したうえで、4.2 節では外圧を受ける無補強円筒殻の胴板座屈強度に関するこれまでの研究の概要について述べる。次に、4.3 節にて補強リングがあることによる胴板に生じる応力比の影響を考慮したリング補強円筒殻の胴板座屈圧力に対する新しい推定式を提案し、4.4 節にて推定式と **FEM** 解析結果と比較検討し推定式の精度について検証する。さらに、4.5 節では胴板座屈圧力の塑性修正方法として **Johnson** の塑性修正法を適用するに当たり参照すべき応力の算出位置と算出方法について調べる。4.6 節では第 4 章での研究結果のまとめを記している。

第 5 章では、外圧作用下の弾性域における全体座屈圧力に対する新たな推定式を提案しその精度を **FEM** にて検証するとともに、その塑性修正方法について検討する。具体的には、5.1 節で第 5 章の研究目的を示したうえで、5.2 節では外圧を受けるリング補強円筒殻の全体座屈強度に関するこれまでの研究の概要について述べる。次に、5.3 節にて補強リングがあることによる胴板に生じる応力比の影響を考慮したリング補強円筒殻の全体座屈圧力に対する新しい推定式を提案する。5.4 節では 5.3 節にて定式化した推定式に用いるべきリングの曲げ剛性について、曲り梁効果やウェブの面内せん断変形の影響を考慮した新たな定式化を行なう。5.5 節では推定式と **FEM** 解析結果と比較検討し推定式の精度について検証する。さらに、5.6 節では全体座屈圧力の塑性修正方法として **Johnson** の塑性修正法を適用するに当たり参照すべき応力の算出位置と算出方法について調べる。5.7 節では第 5 章での研究結果のまとめを記している。

第 6 章では、外圧作用下の弾性域における補強リングの横倒れ座屈圧力に対する新たな推定式を提案しその精度を **FEM** にて検証する。具体的には、6.1 節で第 6 章の研究目的を示したうえで、6.2 節では外圧を受けるリング補強円筒殻の補強リングの横倒れ座屈強度に関するこれまでの研究の概要について述べる。次に、6.3 節にて、補強リングの横倒れ座屈におよぼす胴板の面内圧縮力作用下での曲げ剛性の低下の影響、および補強リングがあることによる胴板に生じる応力比の影響をそれぞれ考慮した、リング補強円筒殻の補強リングの横倒れ座屈圧力に対する新しい推定式を提案する。6.4 節にて推定式と **FEM** 解析結果と比較検討し推定式の精度について検証する。6.5 節では第 6 章での研究結果のまとめを記している。

第 7 章では本論文の研究結果をまとめて総括する。

第 2 章 円筒殻の座屈解析理論の概要

2.1 緒言

本研究は、Moss 型 LNG 船タンクスカートに作用するせん断荷重に対する弾塑性座屈強度評価を対象として、せん断および振り荷重作用下での短い無補強円筒殻の弾塑性座屈強度における形状初期不整等の影響、およびリング補強材の寸法および球形タンク構造がリング円筒殻のせん断座屈強度に及ぼす影響について、有限要素法 (Finite Element Method : FEM) による数値解析を用いて明らかにしたものである。さらに、潜水船等に用いられるリング補強円筒殻を対象として、外圧作用下のリング補強円筒殻に対し、補強リングの影響による胴板の周方向応力の低下の影響を考慮した胴板座屈強度、全体座屈強度、および補強リングの横倒れ座屈強度、の推定方法の高精度化を図るべく、弾性域での各座屈強度における新たな推定式を提案し、その精度を FEM にて検証するとともに、その塑性修正方法について検討したものである。

本章では、まず、円筒殻の座屈に関する基礎理論²⁰⁾²¹⁾²²⁾²³⁾について、次に座屈前変形の影響を考慮した軸対称殻の非軸対称弾塑性座屈解析手法²⁴⁾について概説したうえで、座屈前変形および非線形座屈解析における変位 - ひずみ関係式²³⁾²⁵⁾の設定、および外圧作用時の非軸対称座屈時の圧力作用方向の変化(いわゆる従動力の効果)の考慮の有無²²⁾が座屈強度に及ぼす影響について、簡単な例題を基に検証する。その後、3次元板殻要素を用いた弾塑性大変形解析手法²⁶⁾について概説する。

2.2 無補強円筒殻の座屈に関する基礎理論の概要

補強のない円筒殻に軸圧縮、振りおよび外圧等の種々の荷重が作用する場合の座屈応力および座屈圧力については、例えば Timoshenko²⁰⁾ らによって定式化がなされている。以下、2.2.1～2.2.3 に各荷重に対する座屈応力および座屈圧力の定式化の概要について説明する。定式化の詳細は付録1を参照されたい。

なお、定式化にあたり、Fig. 2-1 のように x, y および z 座標系および各方向に対する変位 u, v および w を定義する。また、円筒殻の半径を a 、板厚を t 、円筒殻の長さを l とする。

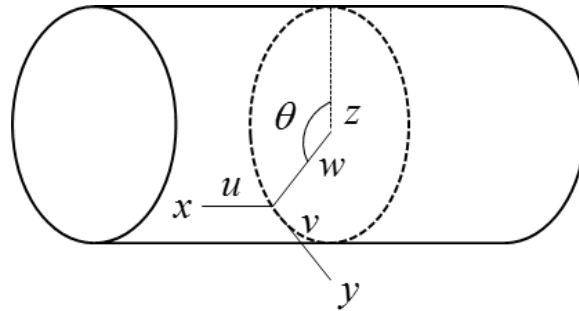


Fig. 2-1 Coordinate system for circular cylindrical shell

2.2.1 軸圧縮

軸圧縮を受ける無補強円筒殻の座屈に関する釣合方程式は(2-1)式のように表わせる。

$$\begin{aligned}
 & a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \nu a \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \\
 & \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{a^2(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{a(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial \theta} \\
 & + \alpha \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + a^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + a^2(1-\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right\} - \phi a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \\
 & -a^2 \phi \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu a \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{a \partial \theta} - \frac{w}{a} \right) - \alpha \left\{ \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} + (2-\nu) a^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + a^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + 2a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} \right\} = 0
 \end{aligned} \tag{2-1}$$

ただし、 $\alpha = (1/12)(t/a)^2$ 、 $\phi = N_x(1-\nu^2)/Et$ である。

変位 u, v および w の変位関数を(2-2)式のように仮定する。

$$u = A \sin(n\theta) \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right), \quad v = B \cos(n\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right), \quad w = C \sin(n\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) \tag{2-2}$$

ここに、 m は円筒軸方向への半波数（以降軸方向半波数と標記）、 n は円周方向への波数（以降周方向波数と表記）である。なお、円筒殻の両端部では、撓み w がゼロ、かつモーメントがゼロ（すなわち $(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})$ がゼロ）となる単純支持条件を課している。

(2-2)式を(2-1)式に代入し、 $\lambda = m\pi a/l$ とすると、 A, B, C についての3つの線形同次方程式が得られ、その係数で作った行列式がゼロとなる N_x が臨界座屈圧縮力である。これを整理することにより、軸圧縮を受ける円筒殻に対する座屈応力 σ_{xcr} は(2-3)式にて与えられる。

$$\sigma_{xcr} = \frac{N_{xcr}}{t} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left\{ \frac{\alpha(n^2 + \lambda^2)^2}{\lambda^2} + \frac{(1-\nu^2)\lambda^2}{(n^2 + \lambda^2)^2} \right\} \quad (2-3)$$

σ_{xcr} が最小となる軸方向半波数 m および周方向波数 n を決定すればよい。ただし m および n はゼロ以上の値を持つ整数である。

2.2.2 振り

振りを受ける無補強円筒殻の座屈に関する釣合方程式は(2-4)式のように表わせる。

$$\begin{aligned} & a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{a(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \nu a \frac{\partial w}{\partial x} + \phi a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} - a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = 0 \\ & \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{a^2(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{a(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ & + \alpha \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + a^2(1-\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right\} + \phi a \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0 \\ & \frac{\partial v}{\partial \theta} + \nu a \frac{\partial u}{\partial x} - w - \alpha \left\{ a^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + (2-\nu)a^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} \right\} \\ & + 2\phi a \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) = 0 \end{aligned} \quad (2-4)$$

ここに、 $\alpha = (1/12)(t/a)^2$ 、 $\phi = M(1-\nu^2)/(2\pi a E t) = \tau(1-\nu^2)/E$ である。

振りモーメントを受ける円筒殻の座屈モードは螺旋上になると予測されることから、 u, v および w の変位関数として(2-5)式のように与える。

$$u = A \cos\left(\frac{\lambda x}{a} - n\theta\right), \quad v = B \cos\left(\frac{\lambda x}{a} - n\theta\right), \quad w = B \sin\left(\frac{\lambda x}{a} - n\theta\right) \quad (2-5)$$

ここに、 m は軸方向半波数、 n は周方向波数、 $\lambda = m\pi a/l$ である。また、(2-5)式に対応する

座屈モードは円周方向に n 個の波があり円筒に沿って螺旋形をしている。

短い円筒では、端部拘束条件を無視することができなくなる。Donnell²⁷⁾は、短い円筒殻と長い円筒殻に対して、固定端に対して(2-6)式を、単純支持端に対して(2-7)式を導出している。

$$\tau_{cr} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{t}{l}\right)^2 \left\{ 4.6 + \sqrt{7.8 + 1.67 \left(\frac{l^2 \sqrt{1-\nu^2}}{2at}\right)^{\frac{3}{2}}} \right\} \quad (2-6)$$

$$\tau_{cr} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{t}{l}\right)^2 \left\{ 2.8 + \sqrt{2.6 + 1.40 \left(\frac{l^2 \sqrt{1-\nu^2}}{2at}\right)^{\frac{3}{2}}} \right\} \quad (2-7)$$

さらに、(2-6)式および(2-7)式の妥当性を検証するために、数十体の試験を実施しそれまでの試験結果とあわせて比較している。その結果、試験結果は(2-6)式および(2-7)式にて得られた値より少し小さめとなることを確認している。

2.2.3 外圧

外圧を受ける無補強円筒殻の座屈に関する釣合方程式は(2-8)式のように表わせる。

$$\begin{aligned} & a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \nu a \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_1 a \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \\ & \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{a^2(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{a(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial \theta} \\ & + \alpha \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + a^2(1-\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right\} - \phi_2 a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \\ & \frac{\partial v}{\partial \theta} + \nu a \frac{\partial u}{\partial x} - w - \alpha \left\{ a^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + (2-\nu)a^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} \right\} \\ & - \phi_1 \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - a^2 \phi_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \quad (2-8)$$

ここに、 $\alpha = (1/12)(t/a)^2$ 、 $\phi_1 = qa(1-\nu^2)/Et$ である。無補強円筒殻の場合、 $-\phi_2 = (1/2)\phi_1$ となる。但し、 q は外圧である。

(2-2)式を(2-8)式に代入し、 $\lambda = m\pi a/l$ とすると、 A 、 B 、 C についての3つの線形同次方程式が得られる。これらの係数で作った行列式がゼロとおくと、圧力の臨界値を計算する方程式が得ら

れ、板厚が薄いと仮定し整理すると(2-9)式が得られる。

$$q_{cr} = \frac{Et}{a} \frac{1}{n^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi a}{l}\right)^2} \left[\frac{1}{\left\{n^2 \left(\frac{l}{\pi a}\right)^2 + 1\right\}^2} + \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{a}\right)^2 \left\{n^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi a}{l}\right)^2\right\}^2 \right] \quad (2-9)$$

(2-9)式は、Mises¹¹⁾ が提案した外圧を受ける円筒殻に対する座屈圧力の定式化に一致する。

2.3 軸対称荷重を受ける軸対称殻の非軸対称座屈解析理論の概要

軸圧縮や外圧といった軸対称荷重が作用する軸対称殻に座屈が生じる場合、座屈前変形は軸対称変形となるが、座屈時には分岐座屈が生じて非軸対称モードが生じるか、もしくはそのまま軸対称モードで座屈するかのいずれかになる。外圧を受ける円筒殻に座屈が生じる例を Fig. 2-2 に示す。さらに、殻構造の座屈現象の特徴として、Fig. 2-3 に示すように、形状初期不整等の存在により座屈荷重が大きく低下することがある。そのため、殻構造物の座屈荷重を精度良く求めるためには、座屈直前までの変形を正確に追跡し、その状態での変形・応力状態を用いた座屈解析（以下非線形座屈解析という）を実施する必要がある。

そこで、本節では軸対称殻に軸対称荷重が作用する場合の非線形座屈解析手法²⁴⁾ について概説する。定式化の詳細は付録2を参照されたい。

なお、市販汎用プログラムにおいて軸対称殻要素を用いて非線形座屈解析を実施できるソフトウェアは見当たらない。また、In-house プログラムとして知られているものとしては、著者の知る限り Bushnell が開発した差分法を用いた解析プログラムである BOSOR²⁸⁾、吉川が開発した有限要素法を用いた解析ソフトである Axis-BUCK²⁴⁾ と少ない。

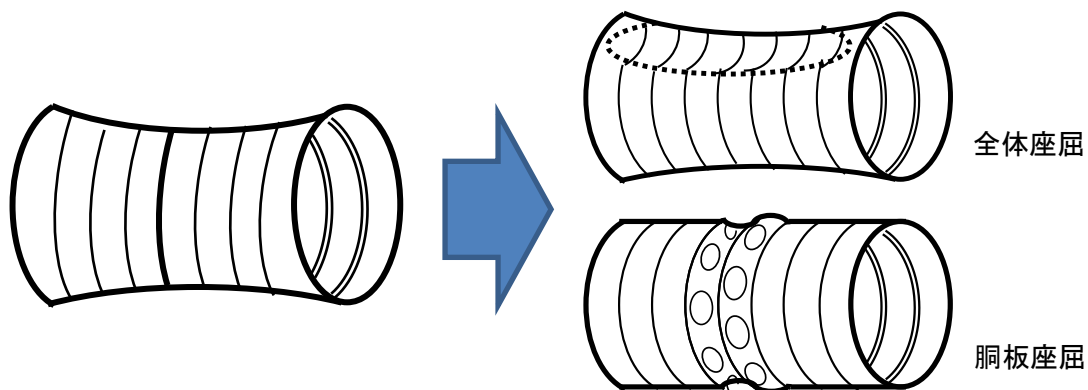


Fig. 2-2 Asymmetric bifurcation buckling mode for cylindrical shell under external pressure

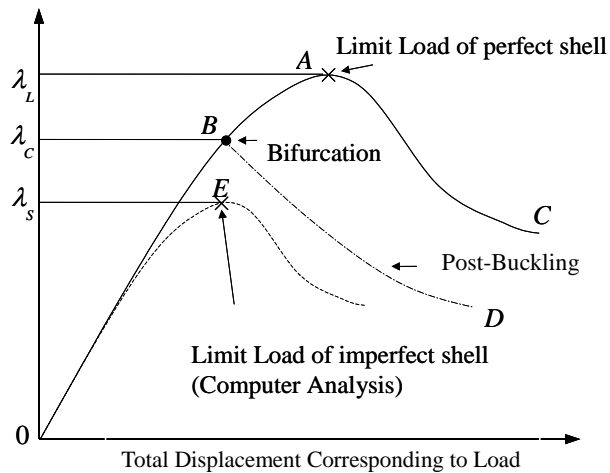


Fig. 2-3 Relation between load and deflection for axisymmetric shell

2.3.1 軸対称殻の弾塑性大変形解析

軸対称殻が軸対称荷重を受け軸対称変形する場合について、有限要素法に基づく解析手法について概説する。詳細は付録2を参照されたい。

まず、軸対称殻を Fig. 2-4 に示すような2節点の円錐台シェル要素の集合としてモデル化し、仮想仕事の原理により要素の剛性行列、等価節点力を求め、それを合成して構造全体の平衡方程式を作成する。さらに、大変形解析を行うために荷重増分法に基づく解析理論の定式化を行っている。特に塑性域ではひずみは板厚方向に直線状に分布するが応力はさらに複雑な分布になると考えられる。これを解決するため、要素を板厚方向に仮想的に等分割したうえで各層では応力を一定として解析を実施する。降伏および除荷の判定は層ごとに実施する。板厚方向に仮想的に分割した場合の応力の板厚方向への分布イメージを Fig. 2-5 に示す。計算精度を確保するためには、仮想的な分割点は10点以上あることが望ましい。また、降伏条件としてミーゼスの降伏条件を用い、塑性域についてはひずみ増分理論に基づく Plandtl-Reuss の式を採用する。

なお、圧力荷重については大変形解析では次の点を考慮する必要がある。すなわち、各荷重段階で変形前と変形後でシェルの形状が変化するため、Fig. 2-6 に示すように圧力の作用方向が少し変化する。したがって、不平衡量の計算時に内力のみならず増分外力の総和についても修正し、収束計算を実施する必要がある。また、非線形問題を処理する方法として荷重増分法を用いる。また、本研究では非線形性の強いシェルの問題を取り扱うため、不平衡力の収束方法として Fig. 2-7 に示す Newton-Raphson 法を採用する。

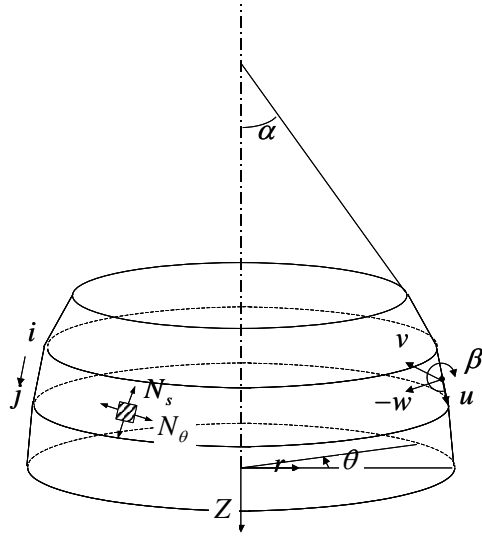


Fig. 2-4 Coordinate of axisymmetric shell segment

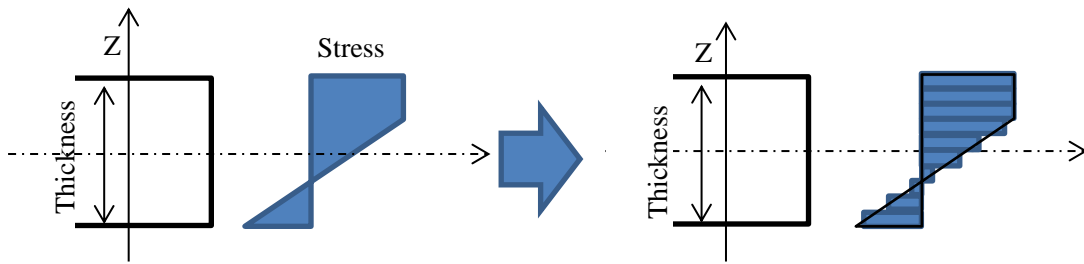


Fig. 2-5 Image of approximation of stress distribution

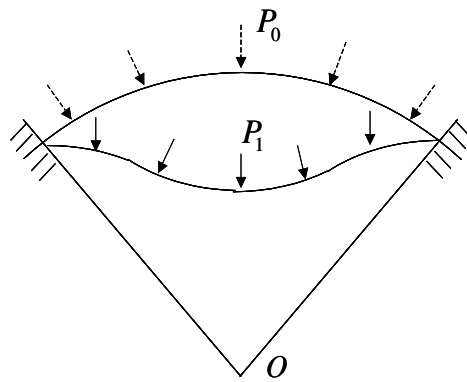


Fig. 2-6 Pressure loading

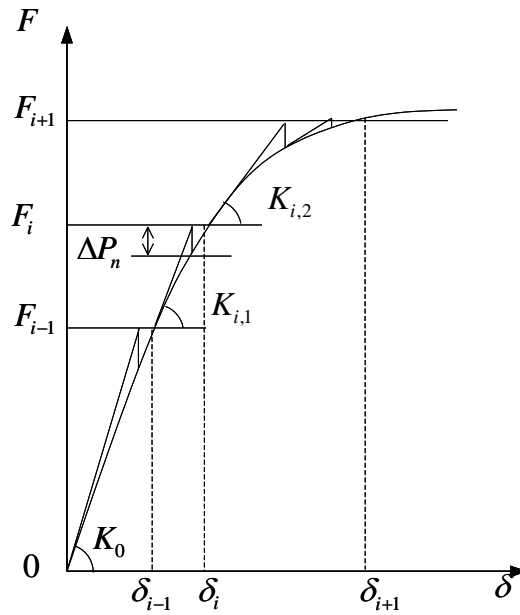


Fig. 2-7 Newton-Raphson Method

2.3.2 軸対称殻の非軸対称座屈解析

前項では、軸対称殻要素を用いて軸対称荷重を受ける軸対称殻が軸対称変形をする場合の解析手法を述べたが、座屈については荷重が軸対称であっても分岐座屈が生じ非軸対称モードの変形が生じる可能性がある。本項では、軸対称殻要素を用いて非軸対称の座屈モードを算出する手法について概説する。詳細は付録2を参照されたい。

まず、Fig. 2-4 に示す要素について要素内の座屈増分変位をフーリエ級数に展開する。このとき子午線方向膜応力、周方向膜応力のほかに剪断応力も考える必要がある。さらに、非線形座屈解析では座屈直前の応力状態に対する応力増分とひずみ増分の関係式が必要である。そして座屈前の応力は軸対称変形により生じたものであるから剪断応力は零である。また、座屈に関しては除荷の生じる部分がないと仮定する。

座屈直前の荷重による応力、座屈後の応力増分、座屈による節点の変位増分の変分から導かれるひずみ増分を用い、仮想仕事の原理によりフーリエ級数の項別に独立な式を得る。固有値解析手法を用いてこれを解くことにより、座屈固有値 λ および座屈モードベクトル $\{\Delta \bar{d}_n\}$ を得る。

2.3.3 解析手順

本項では、軸対称殻に軸対称荷重が作用する場合の座屈前変形および応力状態を荷重増分法にて求める大変形解析と、大変形解析にて得られた座屈前変形および応力状態を基にして行なう非線形座屈解析の手順を述べる。非線形座屈解析のイメージを Fig. 2-8 に、解析フローを Fig. 2-9

にそれぞれ示す。

まず、軸対称殻に軸対称荷重が作用する場合の座屈前変形および応力状態を荷重増分法にて求める大変形解析について説明する。座屈前の大変形を求める場合の剛性行列は応力と形状(座標)の関数となり、形状変化は節点座標に変位増分をたし込むことにより考慮している。したがって、行列の要素が荷重の増分と共に刻々と変化していく。これが微小変形解析と本質的に異なることである。荷重増分法では、ある荷重増分ステップでは、前のステップまでに求められた応力と変形を基準として要素の剛性行列を作成し、平衡方程式を組み立てて増分変位と増分応力を求める。すなわち、増分内で荷重増分と変位増分の関係を線形化し、次の段階を線形予測していることになる。このため次に到達した応力状態は外力と完全に平衡していない。そこで剛性行列を修正して外力と平衡するように反復計算で収束させている。

大変形解析にて得られた座屈前変形および応力状態を基にして行なう非線形座屈解析について説明する。座屈解析では、非軸対称変形を考慮するために、変形をフーリエ級数に展開して取り扱う。この場合座屈の基礎式はフーリエ級数の項ごとに別個に成立する。フーリエ級数の項毎に与えられた荷重に対する最小座屈荷重係数 $\lambda_i (i=0,1,2,\dots,n)$ を求め、それらの最小値を λ_{min} とする。これを大変形解析での荷重ステップ毎に実施する。そのときの λ_{min} は荷重の小さいうちは1.0より大きな値になるが荷重の増加に伴う座屈前変形や板の塑性化等により値は減少する。そして $\lambda_{min}=1.0$ となる時の荷重が座屈荷重である。なお、フーリエ級数の項が2以上となる場合は、作用荷重と座屈荷重が等しくなる箇所で軸対称荷重が作用する軸対称殻は非軸対称モードに分岐座屈を起こすことを意味している。

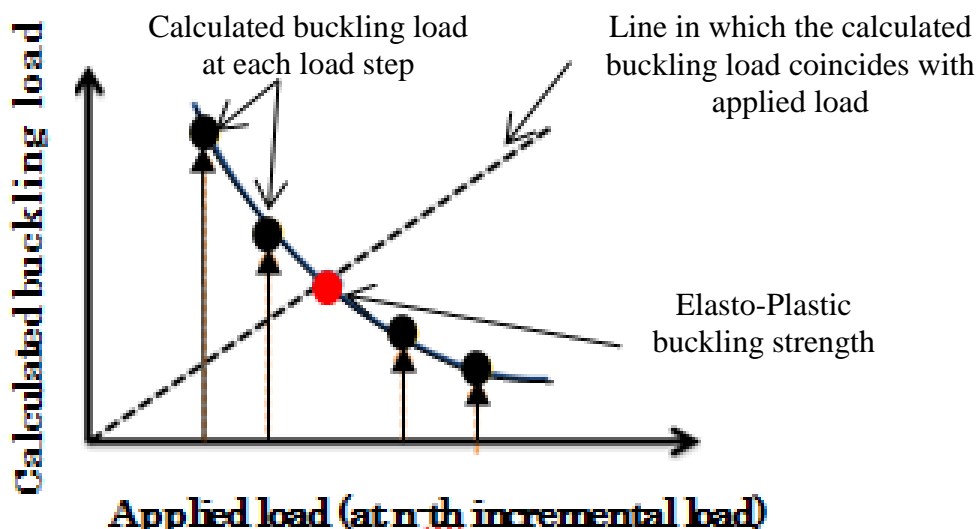


Fig. 2-8 Relationship between buckling load and applied load

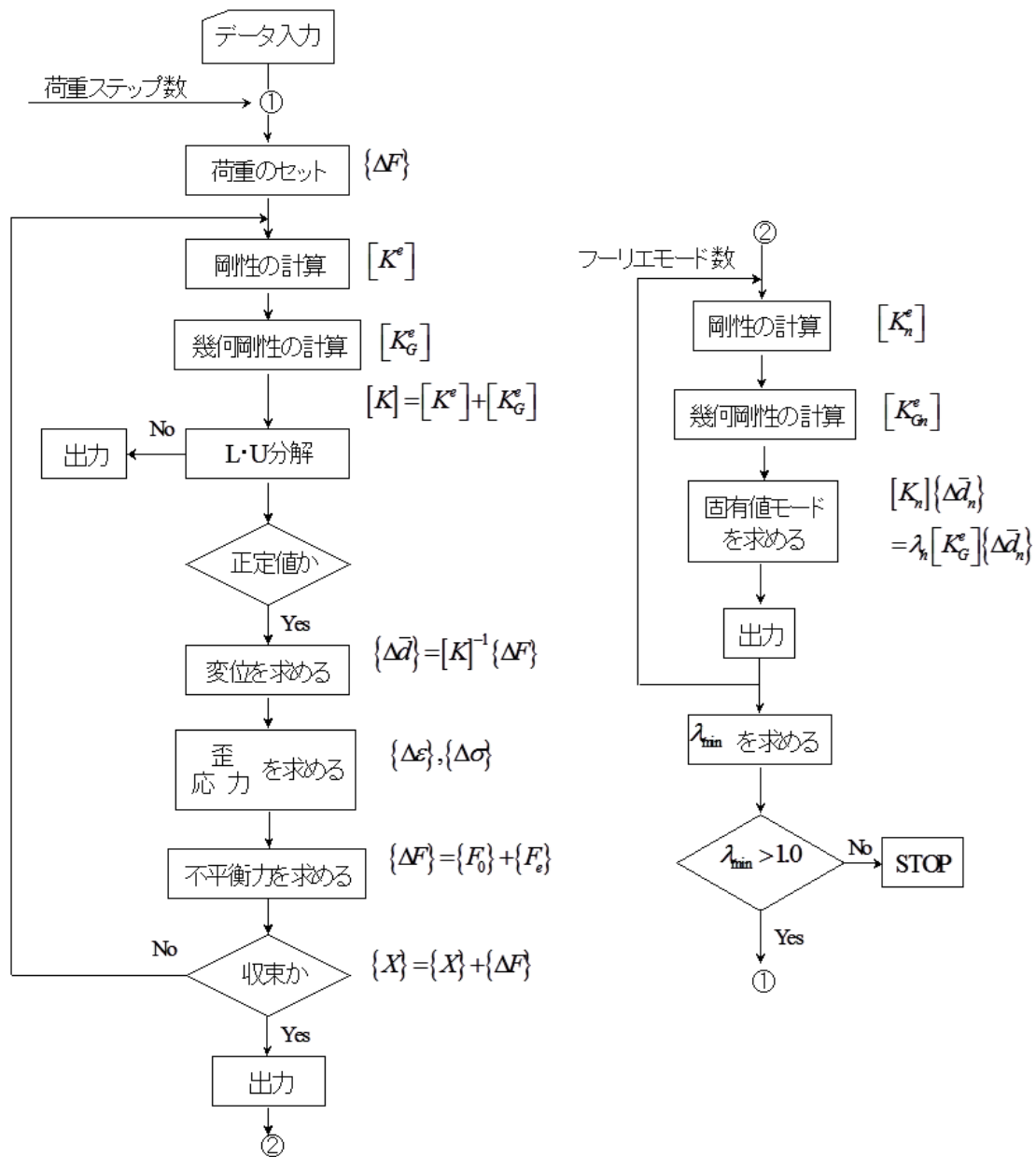


Fig. 2-9 Flowchart of Non-linear buckling analysis method

2.3.4 変位－ひずみ関係の非線形項の簡略化が座屈圧力に及ぼす影響

大撓みの効果を考慮したシェルの板厚中央面の変位とひずみの関係式は、近似もしくは簡略化の考え方によって種々の定式化がある。本研究では主に外圧作用下でのリング補強円筒殻の胴板・全体およびフレーム横倒れ座屈圧力の簡易推定式および塑性修正に対する精度検証として軸対称殻要素を用いた解析を用いている。

リング補強円筒殻においては、胴板とだけではなく補強リング（特にウェブ）の面内および面外の挙動についても表現できるように定式化を図る必要がある。

吉川が開発した有限要素法を用いた解析ソフトである Axis-BUCK²⁴⁾ では、大撓みの効果を考慮したシェルの板厚中央面の変位とひずみの関係式として、これまでは(2-10)式を用いている。

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_s &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 \\
 \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \sin \alpha + w \cos \alpha \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \cos \alpha \right)^2 \\
 \varepsilon_{s\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\sin \alpha}{r} v \\
 \kappa_s &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \\
 \kappa_\theta &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \alpha}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\sin \alpha}{r} \frac{\partial w}{\partial s} \\
 \kappa_{s\theta} &= 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} + \frac{\sin \alpha}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\cos \alpha}{r} \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r^2} v \right)
 \end{aligned} \tag{2-10}$$

この場合、座屈の基礎式は仮想仕事の原理より(2-11)式となる。

$$\frac{1}{2} \int \delta \left[N_s \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + N_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \cos \alpha \right)^2 \right] r d\theta ds + \int \delta \{ \varepsilon_L \}^T [D] \{ \varepsilon_L \} r d\theta ds = 0 \tag{2-11}$$

ただし、(2-11)式の左辺第一項は幾何剛性を、左辺第二項は剛性を表す。但し $\{ \varepsilon_L \}$ はひずみ及び曲率の線形項である。

一方、小林らは、大撓みの効果を考慮したシェルの板厚中央面の変位とひずみの関係式として、(2-10)式の ε_s および ε_θ について高次項を追加した(2-12)式を用いている²⁵⁾。

$$\varepsilon_s = \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{2} \beta^2$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{\theta} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \sin \alpha + w \cos \alpha \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \cos \alpha \right)^2 + \frac{1}{2} \beta^2 \\
\varepsilon_{s\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\sin \alpha}{r} v \\
\kappa_s &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \\
\kappa_{\theta} &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \alpha}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\sin \alpha}{r} \frac{\partial w}{\partial s} \\
\kappa_{s\theta} &= 2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} + \frac{\sin \alpha}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\cos \alpha}{r} \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r^2} v \right)
\end{aligned} \tag{2-12}$$

ここで、 β は(2-13)式で与えられる。

$$\beta = \frac{1}{2r} \left(r \frac{\partial v}{\partial s} + v \sin \alpha - \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \tag{2-13}$$

この場合、座屈の基礎式は(2-14)式となる。

$$\frac{1}{2} \int \delta \left[N_s \left\{ \left(\frac{\partial w}{\partial s} \right)^2 + \beta^2 \right\} + N_{\theta} \left\{ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \cos \alpha \right)^2 + \beta^2 \right\} \right] r d\theta ds + \int \delta \{ \varepsilon_L \}^T [D] \{ \varepsilon_L \} r d\theta ds = 0 \tag{2-14}$$

(2-14)式の左辺第一項に β^2 が含まれているのが(2-11)式とは異なる点である。

(2-10)式と(2-12)式それぞれの定式化に対してリング補強円筒殻の全体座屈圧力を算出した。寸法諸元およびFEM解析結果をTable 2-1に示す。なお、FEM解析結果は模型試験結果にて無次元化している。

Table 2-1より、(2-12)式を用いた方が模型試験結果に近い値が得られている。これは、(2-12)式のひずみの高次項 β を考慮することによって、ウェブの面内曲げに対する幾何剛性をより精度よく考慮できるためだと考える。イメージをFig. 2-10に示す。

そこで、本研究において、(2-12)式および(2-14)式の定式化をAxis-BUCKに新たに組み込んだうえで、それを用いて第3章以降の解析を実施している。

Table 2-1 Comparison of buckling pressure between Eq.(2-10) and Eq.(2-12)

(a) Analysis model

Case	Ring Stiffener Position	Ring Shape	Outer Diameter [mm]	Shell Thickness [mm]	Length [mm]	Ring Thickness [mm]	Ring Height [mm]	Ring Space [mm]
1	Inside	I-Shape	300	2.5	600	2.5	8	25
2	Outside				1,050		11.5	25

(b) Analysis results

Case	Test Results		FE-Analysis Results			
			By using Eq.(2-10)		By using Eq.(2-12)	
	Buckling Pressure ¹⁾	Wave number	Buckling Pressure ¹⁾	Wave number	Buckling Pressure ¹⁾	Wave number
1	1.00	3	1.21	3	1.06	3
2	1.00	2	1.26	2	1.05	2

1) non-dimensional value obtained by

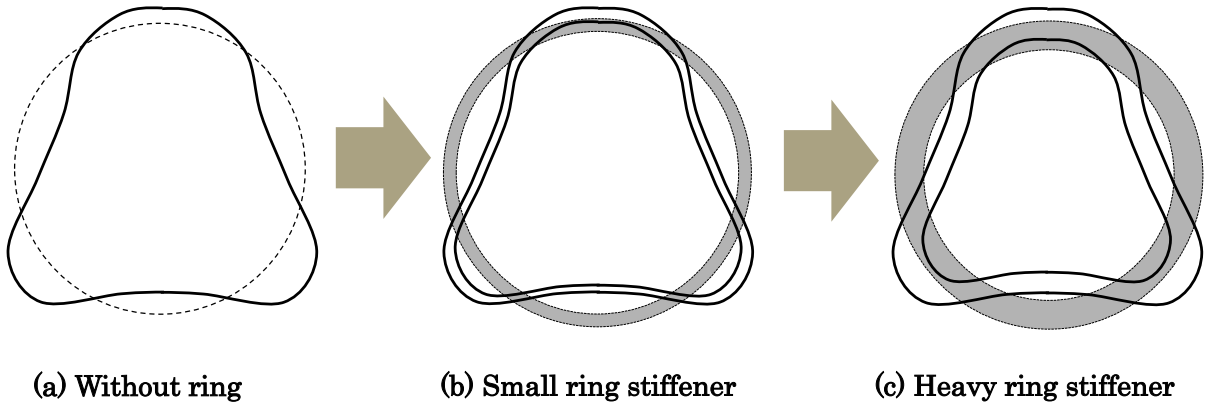


Fig. 2-10 Image of bucking mode shape of ring stiffener for ring-stiffened cylindrical shell

2.3.5 座屈時の従動荷重が座屈圧力の推定におよぼす影響

座屈時の圧力荷重の取り扱い方法としては大きく以下の2つが考えられる。

- (a) Dead Loaded Lateral Pressure : 座屈波形に伴って荷重の作用方向が変化しない
- (b) Uniform Fluid Pressure : 座屈波形に伴って荷重の作用方向も変化する

イメージを Fig. 2-11 に示す。

(a)に対する作用荷重のポテンシャルの変化は(2-15)式で与えられる²²⁾。

$$\Omega = -pa \iint w dr d\theta \quad (2-15)$$

但し、(2-16)式中の a は円筒殻の半径を表す。

一方、(b)に対する荷重のポテンシャルの変化は(2-16)式で与えられる²²⁾。

$$\Omega = -pa \iint \left[w + \frac{1}{2a} \left\{ v^2 - v \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \theta} w + w^2 \right\} \right] dr d\theta \quad (2-16)$$

(2-16)式の積分内の第二項 $\left(\frac{1}{2a} \left\{ v^2 - v \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \theta} w + w^2 \right\} \right)$ は、円筒殻の変形に伴う受圧面積の変化を表している。(2-16)式の第二変分をとると(2-17)式が得られる。

$$\delta^2 \Omega = -p \iint \left\{ v^2 - v \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial \theta} w + w^2 \right\} dr d\theta \quad (2-17)$$

水圧等の圧力荷重を受ける構造物においては、変形に伴い圧力荷重の作用する方向が変化することから、初期応力行列の作成時に(2-17)式から得られる付加項を考慮する必要がある。

付加項の考慮の有無による座屈圧力の違いについて、簡単なリングモデルを想定し確認した。リングの場合、座屈時の圧力荷重の取り扱いに対して、それぞれ(2-18)式および(2-19)式のように与えられる。なお、 E はヤング率、 I はリングの断面2次モーメント、 a はリングの半径である。さらに、 n は座屈時の周方向波数であり、リングの場合2波が最低次となる。

$$(a) \text{ Dead Loaded Lateral Pressure : } q_{cr} = n^2 \frac{EI}{a^3} \quad (2-18)$$

$$(b) \text{ Uniform Fluid Pressure : } q_{cr} = (n^2 - 1) \frac{EI}{a^3} \quad (2-19)$$

FEM 解析については、(2-18)式および(2-19)式と比較できるように、解析モデルのヤング率は 200,000 N/mm²、ポアソン比はゼロとした。寸法諸元および結果を Table 2-2 に示す。Table 2-2 より、座屈時の従動荷重が座屈圧力の推定におよぼす影響は大きいことがわかる。したがって、数値解析においては座屈時の従動荷重を考慮した定式化を行なう必要がある。

**Table 2-2 Comparison of buckling pressure
between dead loaded lateral pressure and uniform fluid pressure**

(a) Analysis model

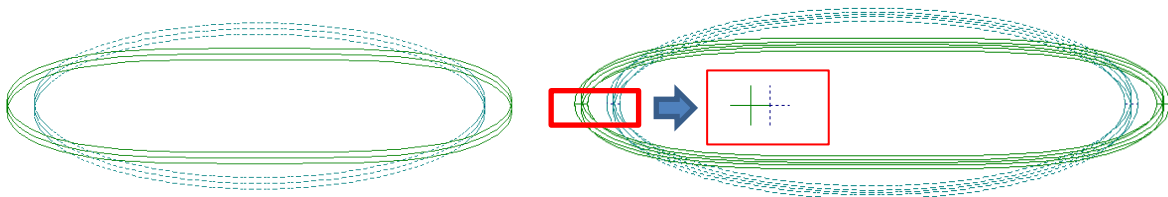
Case	Ring Position	Ring Shape	Outer Diameter [mm]	Shell Thickness [mm]	Length [mm]	Ring Thickness [mm]	Ring Height [mm]
1	—	—	400	2.0	100	—	—
2	In/Out	I-Shape		2.0		2.0	5.0

(b) Analysis results

Case	Formula (N/mm)			FEM (N/mm)			Formula/FEM	
	(a)	(b)	(a)/(b)	(a)	(b)	(a)/(b)	(a)	(b)
1	6.67	5.00	1.33	6.67	5.00	1.33	1.00	1.00
2	172	129	1.33	173	130	1.33	0.99	0.99

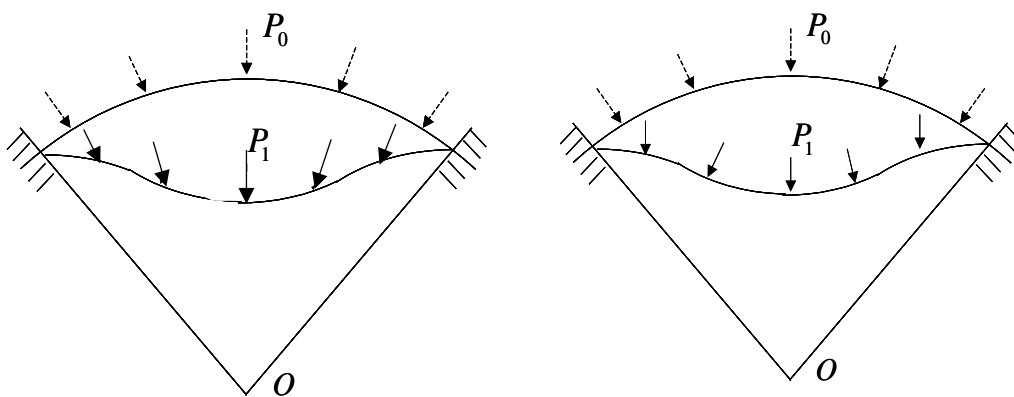
(a) Dead Loaded Lateral Pressure

(b) Uniform Fluid Pressure



Buckling mode (Case 1)

Buckling mode (Case 2)



(a) Dead Loading

(b) Fluid Pressure Loading

Fig. 2-11 Image of dead loading and fluid pressure loading

2.4 非軸対称荷重・非軸対称初期不整を有する円筒殻の弾塑性大変形解析の概要

せん断荷重といった非軸対称荷重が作用する場合は荷重に対する軸対称性が崩れること、また非軸対称の初期不整を付与した場合は形状に対する軸対称性が崩れることから、2.3にて示した軸対称殻要素を用いた弾塑性大変形解析および非線形座屈解析を実施することはできない。

そのため、軸対称殻要素ではなく3次元板殻要素にてモデル化し解析を実施する必要がある。3次元板殻要素を用いた座屈固有値解析および弾塑性大変形解析については、市販の汎用有限要素法プログラムに組み込まれており、その精度についても充分検証されている。

そこで、弾塑性大変形解析についての基本的な定式化は付録3に記載することとし、本節では、座屈後の不安定挙動等を追跡するのに適した手法である弧長増分法について概説する²⁶⁾。

2.4.1 弧長増分法の概要

弧長増分法は、静的問題における弾塑性大変形解析の解法の1つであり、特に座屈後の不安定挙動等を追跡するのに適した手法である。

特に円筒殻が座屈した後は急激に荷重が低下することが良く知られている。このとき、座屈が発生した個所については局所的に変形が進行するが、座屈が生じていない箇所は荷重の低下に伴いひずみが解放され初期形状に戻ろうとする。このような挙動を荷重増分型や変位増分型の解析では正確に追跡することはできない。しかしながら、弧長増分法であれば荷重の低下と変位の減少を同時に考慮した解析を実施することが可能である。Fig. 2-12にイメージを示す。

具体的には、予測子ステップと修正子ステップを1サイクルとして、非線形な釣合経路を逐次追跡していく方法である。すなわち剛性方程式をFig. 2-7に示すNewton-Raphson法で解く際に、1回の予測子と数回の修正子を1サイクルとして、変位だけでなく荷重も未知数として非線形な曲線を追跡する方法である。予測子はFig. 2-12に示すように非線形な釣合経路の接線方向に解を前に押し進める役割を果たす。

荷重や変位の折り返し点で、釣合経路を後戻りする事なく追跡するためには、予測子の荷重増分の符号の選択を的確に行う必要がある。予測子によって釣合経路から逸脱した点を、Fig. 2-12のように修正子による反復計算により再び釣合経路へと引き戻す。さらに、1つ前の釣合点における変位および荷重に、予測子と修正子を加えて更新することにより、次の釣合点を求めることができる。

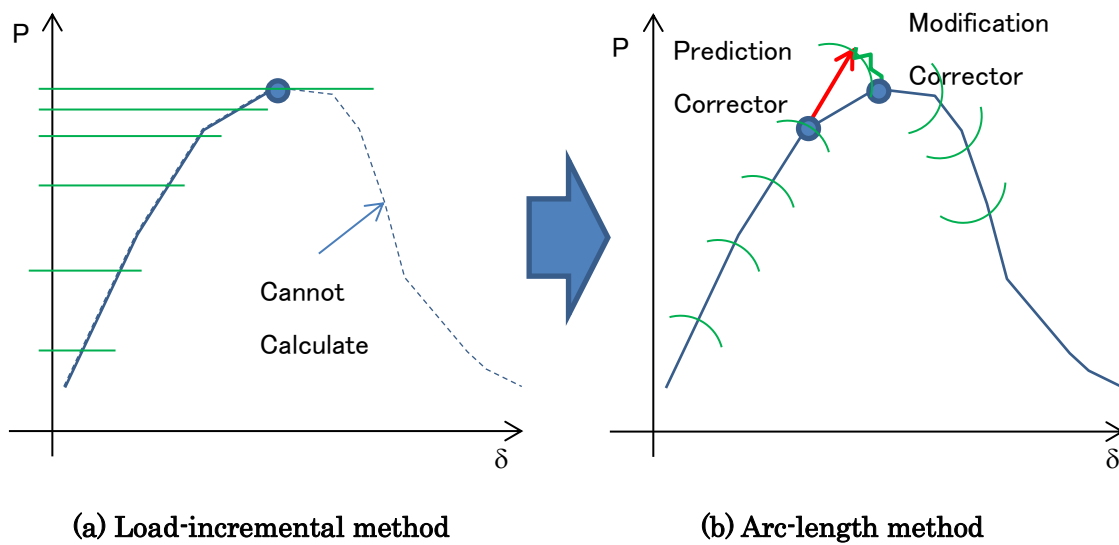


Fig. 2-12 Comparison of post-buckling analysis method between load-incremental method and arc-length method

2.5 結言

第2章では本論文で用いた基礎理論および数値解析理論について概説した。あわせて、変位—ひずみ関係の非線形項の簡略化が座屈圧力の推定におよぼす影響、および座屈時の従動荷重が座屈圧力の推定におよぼす影響について簡単な例題を基に検証した。

第3章 せん断荷重を受ける短い円筒殻のせん断座屈強度

3.1 緒言

Moss 型 LNG 船 (Fig. 3-1 参照) のカーゴタンクは, Fig. 3-2¹⁾ に示すように, 球形タンクをその赤道において円筒型のタンクスカートで支える構造となっている. すなわち, タンクスカート上端部は球形タンクの赤道部と, タンクスカート下端部は船体と結合されている. このため, タンクスカートは球形タンクの自重および搭載された LNG の重量を支持するとともに, 船体運動や船体変形, および LNG 搭載時のタンクの熱収縮に伴う熱変形に対し十分な強度を有する必要がある. それらを満足しつつより経済的な構造とするために, タンクスカートには主にリング補強円筒殻が採用されている. タンクスカート補強リング間の半径と高さの関係は, 円筒殻の長さを表す Batdorf Parameter Z でみると 2.0~5.0 程度であることから, 円筒殻としては短いものに分類される. ここで, Batdorf Parameter Z は $Z = \sqrt{1 - \nu^2}(L^2/Rt)$ で算出される. 但し, L は円筒殻の長さ, R は円筒殻の半径, t は円筒殻の板厚, ν はポアソン比である.

タンクスカートは球形タンクを支えるためにあることから, まずはタンクの自重およびタンク内に搭載される LNG の重量に耐える必要がある. そのためタンクスカートは上記重量に対し軸方向に圧縮荷重を受けることになる. さらに, 船体運動により LNG を搭載した球形タンクは種々の方向に加速度を受けることから, それに伴う荷重をタンクスカートは支える必要がある.

タンクスカートに作用する力は, 大きく分けて, 搭載する LNG を含めたタンクの自重および船体運動に起因した上下方向加速度による軸方向荷重と, 水平方向加速度によるせん断荷重の 2 種類がある. LNG 船の大型化に伴う球形タンクのサイズアップによりタンクスカートに作用する軸方向荷重およびせん断荷重も大きくなることから, 合理的な設計を実現するためには, 軸方向荷重およびせん断荷重に対する座屈強度を高い精度で推定することが重要となる.

大別した 2 種類の荷重のうち, 軸圧縮荷重を受ける円筒殻の座屈強度, および初期不整が座屈強度に及ぼす影響については Koiter, Hutchinson, Almroth, 等数多くの研究がなされている^{2),3),4),5)}. さらに, タンクスカート相当の寸法に対する短い円筒殻に対する弾塑性座屈強度については, 安川・川上・吉川によって, 座屈前変形の影響を考慮した高精度な推定方法, および初期不整による座屈強度の低下の影響等について, 系統的に研究が実施されている^{6),7)}.

一方, せん断荷重に対するタンクスカートの座屈強度評価に関しては, これまでせん断荷重下で円筒殻に生じる最大せん断応力と同じ大きさのせん断応力を生じさせる振り荷重に置き換えて座屈強度を評価する手法¹⁾⁸⁾が提案され, それが主に用いられている. この場合, せん断荷重下でのせん断応力は周方向に変化するのに対し, 振り荷重下でのせん断応力は周方向に一樣となるため, 最大せん断力を同じとした場合には振り荷重下での座屈強度はせん断荷重下での座屈強度

に比べて低めの値を推定することになる。

また、円筒殻に振り荷重が作用する場合の座屈強度、および初期不整が座屈強度に及ぼす影響についても、Yamakiら⁹⁾や中村・安川ら¹⁰⁾によって系統的に研究が実施されているが、Yamakiらが検討対象とした円筒殻の大きさは Z が20以上となっていること、中村・安川らはKoiter理論に基づいた弾性域での検討であることから、タンクスカートと同等の Z (2.0~5.0程度)に対するせん断荷重下の弾塑性座屈強度評価に関する研究が充分になされているとはいえない。

さらに、補強リングを有する円筒殻のせん断座屈強度に及ぼす補強リング寸法の影響、球形タンクを有する場合のスカート上端部の境界条件の影響についても解明されていない。

そこで、本章では、タンクスカートを構成する Z が2.0~5.0程度の短い円筒殻にせん断荷重が作用する場合の弾塑性座屈強度と初期不整が座屈強度に及ぼす影響、および補強リングを有する円筒殻のせん断座屈強度に及ぼす補強リング寸法の影響および球形タンクを有する場合のスカート上端部の境界条件の影響について、FEM解析による数値シミュレーションを基に明らかにする。



(<http://www.khi.co.jp/ship/product/lng/index.html>)より

Fig. 3-1 Photo of the Moss type LNG Carrier

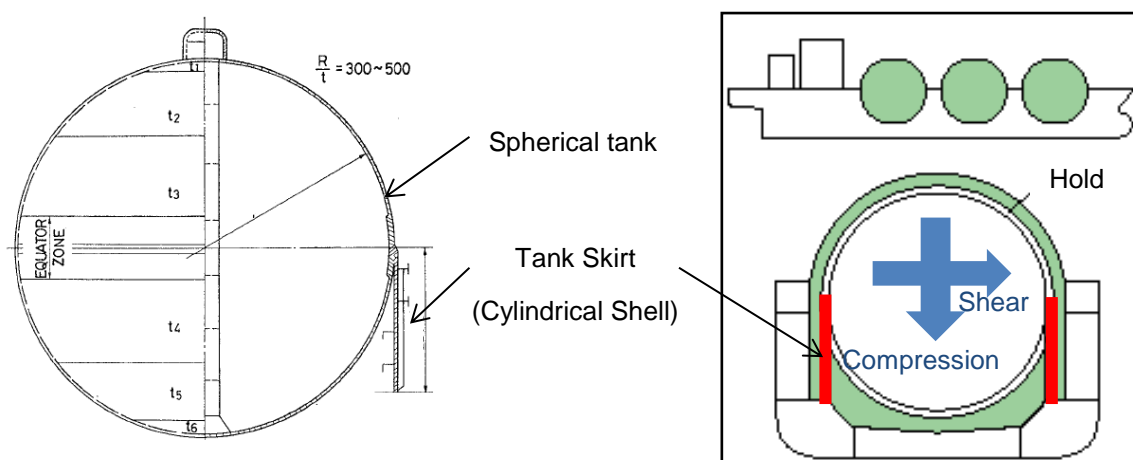


Fig. 3-2 Typical Image of Moss type LNG Cargo Containment System ¹⁾

3.2 従来研究の概要

軸圧縮荷重を受ける短い円筒殻の座屈強度，および初期不整が座屈強度に及ぼす影響については数多くの研究がなされている．まず，軸圧縮荷重が作用する初期不整のない短い無補強円筒殻に対する，両端単純支持条件での理論座屈応力 σ_b は，例えば Donnell の定式化を基に，(3-1)式にて求めることができる²¹⁾．

$$\sigma_b = \frac{K_c E \pi}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{L}\right)^2 \quad (3-1)$$

ここで， E はヤング率， ν はポアソン比， t は板厚， L は円筒殻の長さである． K_c は円筒殻の長さを表す Batdorf Parameter $Z (= \sqrt{1-\nu^2}(L^2/Rt))$ の値によって(3-2)式のように与えられる．

$$K_c = \begin{cases} 1 + \frac{12Z^2}{\pi^4} & (Z < 2.85) \\ \frac{4\sqrt{3}Z}{\pi^2} & (Z \geq 2.85) \end{cases} \quad (3-2)$$

しかしながら，例えば Horton による試験では，試験体の製作に細心の注意を払ったにもかかわらずその座屈荷重は古典座屈荷重値よりも大幅に低い値が得られる結果となっていることが示されている²⁹⁾．この原因について，まず Donnell と Wan により，試験にて得られた座屈荷重と理論座屈荷重との値の差は，試験体に初期不整が存在するために生じたことが定性的に示された³⁰⁾．さらに，Koiter²⁾は軸対称初期不整を有する円筒殻に軸圧縮荷重が作用する場合の座屈荷重を自らが展開した理論に基づいて，また，Hutchinson³⁾や Almroth⁴⁾らは数値解析的に求めている．Koiter の計算結果によると，板厚の 20%程度の初期不整が存在すると座屈荷重は古典座屈荷重の約 40%程度まで低下すること，同一の初期不整量であれば軸対称初期不整の方が非軸対称初期不整よりも座屈荷重を低下させるということが示されている．吉川・石川³¹⁾によると，この理由は，軸対称初期不整（特に内側への初期不整）の場合，軸圧縮荷重が作用することにより円筒殻の長手方向中央部はより内側に変形し，軸圧縮荷重による軸方向への圧縮応力だけでなく周方向にも圧縮応力が生じる，すなわち 2 軸圧縮状態となることが理由と考えられる．非軸対称初期不整の場合は，周方向の面内剛性が小さいことから，軸圧縮荷重が作用することにより非軸対称の曲げ変形が進行するため，周方向に圧縮応力が生じることはなく，軸圧縮荷重による軸方向への圧縮応力だけになる，すなわち 1 軸圧縮状態のままであることから，軸対称初期不整に比べて座屈強度は低下しにくくなると考えられる，ということが示されている．

さらに，安川・川上・吉川がタンクスカート相当の短い円筒殻に対する座屈前変形の影響を考慮した高精度な推定方法，および初期不整による座屈強度の低下の影響等について系統的に研究を行なっている^{6),7)}．安川・川上・吉川は，Batdorf Parameter Z が 50 より小さい円筒殻に軸対

称初期不整が存在する場合を仮定し、座屈前変形の影響を考慮した非軸対称弾塑性座屈解析により、弾性座屈強度および塑性崩壊強度に対する初期不整の影響を明らかにしている。弾性座屈強度に対しては、 Z の値が小さくなるにつれ初期不整の影響は Z が大きい場合に比べて相対的に小さくなること、塑性崩壊強度については、初期不整の向きによって崩壊形状が変わる、すなわち円筒殻の内側に初期不整がある場合は軸対称崩壊する前に分岐座屈が生じ非軸対称モードで座屈するが、円筒殻の外側に初期不整がある場合は分岐座屈の前に塑性崩壊が生じる、ことが示されている。

一方、せん断荷重に対するタンクスカートの座屈強度評価に関しては、せん断荷重下で円筒殻に生じる最大せん断応力と同じ大きさのせん断応力を生じさせる振り荷重に置き換えて座屈強度を評価する手法¹⁾⁸⁾が提案され、それが主に用いられている。振り荷重を受ける無補強円筒殻のせん断座屈応力 τ_b については、 $Z < 50$ となる円筒殻に対して Batdorf⁷⁾より(3-3)式に示す実験式が提案されている。

$$\tau_b = \left(\frac{\pi^2}{L^2 t} \right) \left\{ \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \right\} (5.35 + 0.213Z)$$

(3-3)

せん断荷重を受ける円筒殻の座屈強度に及ぼす初期不整の影響に関する研究は著者が探した限りでは見当たらない。一方、振り荷重に対する円筒殻の座屈強度に及ぼす初期不整の影響については、Yamakiら⁹⁾は、 Z が20以上の円筒殻に対し理論的および数値解析的に検討を実施しており、 Z が小さくなるにつれて初期不整が座屈強度に及ぼす影響は小さくなることが報告されている。また、 Z が20よりも小さい、すなわち短い円筒殻については中村・安川ら¹⁰⁾がKoiter理論に基づき弾性域における座屈強度の低下率を提案している。さらに、中村・安川らは Z が小さい場合は平板の挙動に近づくが、平板は初期不整が座屈強度に及ぼす影響が小さいことが知られていることから、最終強度の観点からの検討が必要であることを提示している。

しかしながら、Yamakiらが検討対象とした円筒殻の大きさは、 Z が20以上となっていること、中村・安川らはKoiter理論に基づいた弾性域での検討であることから、タンクスカートと同等の Z ($Z=2.0\sim 5.0$ 程度)に対するせん断荷重下の弾塑性座屈強度評価に関する研究が充分にはなされていないとはいいがたい。

3.3 短い無補強円筒殻の振りおよびせん断荷重下での弾塑性座屈解析

Moss 型 LNG 船の球形タンクのタンクスカート上部はリング補強円筒殻であるが、本節では、まず付与する荷重（せん断荷重と振り荷重）の違いによる円筒殻の弾塑性座屈強度の影響を確認するため、解析対象および解析領域は Fig. 3-2 に示すリング材間の 1 区画を解析領域（以後 1 リングモデルと呼ぶ）とした。1 リングモデルの寸法は、Moss 型 LNG 船のタンクスカートの実寸法を参考に、半径 $R = 20,000(\text{mm})$ 、板厚 $t = 50(\text{mm})$ 、長さ $L = 2,000(\text{mm})$ とした。

FEM 解析には汎用 FEM 解析ソフト MSC.Marc 2017 を用い、弾塑性大変形解析を実施した。増分計算においては弧長増分法を用いた。

3.3.1 解析モデル

3.3.1.1 振り荷重

解析モデルを Fig. 3-3 (a) に示す。振り荷重を作用させるため円筒殻全周分をモデル化した。使用要素は 4 節点 24 自由度の薄肉シェル要素（要素 No.139）を用い、メッシュ分割は軸方向に 16 要素、周方向に 1,008 要素の一樣分割とした。

振り荷重に対する計算では、円筒座標系を用いて境界条件を設定した。まず、円筒下端部に対し軸(z)方向変位、半径(r)方向変位および周(θ)方向変位(u_z , u_r および u_θ)を拘束した。さらに、円筒上端に対し、 r 方向変位を拘束するとともに、円筒の中心にダミー節点を設け、これと円筒上端部の各節点とを剛体結合し、ダミー節点に z 方向軸周りの強制回転変位を与えた。回転角は上下端ともに自由とした。また、 z 方向変位については、円筒上部で一樣に直線保持しつつ、 z 軸方向に引張力が生じないように自由に移動させるようにした。

3.3.1.2 せん断荷重

解析モデルを Fig. 3-3 (b) に示す。せん断荷重を受ける場合は変形が対称性を有することを考慮して半円筒モデルとした。使用要素は 4 節点 24 自由度の薄肉シェル要素（要素 No.139）を用い、メッシュ分割は軸方向に 16 要素、周方向に 504 要素の一樣分割とした。

せん断荷重に対する計算では、直交座標系を用いて境界条件を設定した。まず、円筒下部に対しては x 、 y および z 方向変位(u_x , u_y および u_z)を拘束した。円筒上端に対しては、 y 方向変位を拘束したまま x 方向に強制変位を与えた。回転角とは上下端ともに自由とし、 z 方向変位は、円筒上部で一樣に直線拘束しつつ、 z 軸方向に引張力が生じないように自由に移動させるようにした。また、 0 度および 180 度の位置に対称条件を付与した。

Center of cylinder at top end (Dummy node)

around z axis ; enforced rotational displacement

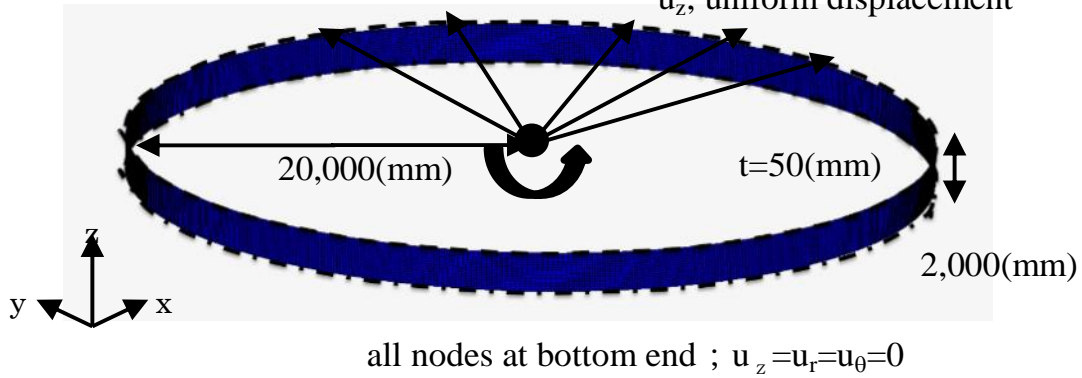
connecting with all nodes

at top end of cylinder using RBE2

all nodes at top end ;

$u_r = 0$

u_z ; uniform displacement

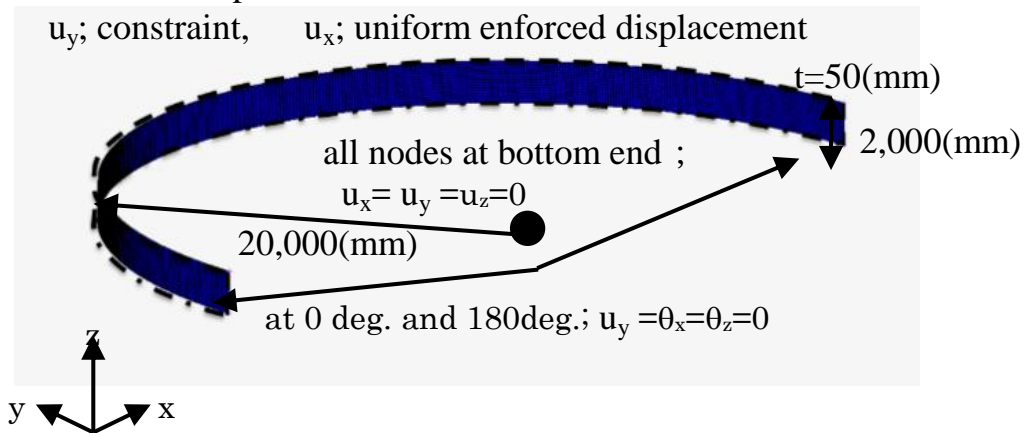


(a) For torsional load

all nodes at top end ;

u_y ; constraint,

u_x ; uniform enforced displacement



(b) For shearing load

Fig. 3-3 Calculation Model, loading condition and constraint conditions

3.3.2 材料物性

材料は Moss 型 LNG 運搬船のタンクスカート部に使用される材料である，アルミニウム合金 A5083 材を想定し，ヤング率を 70,000(MPa)，降伏応力(0.2%耐力)を 120(MPa)，ポアソン比を 0.33 とした．応力-ひずみ曲線は，国立研究法人物質・材料研究機構（NIMS）の低サイクル疲労データシート NO.61³²⁾ に記載されている Monotonic Stress Strain Property を参考に Fig. 3-4 のように作成した．

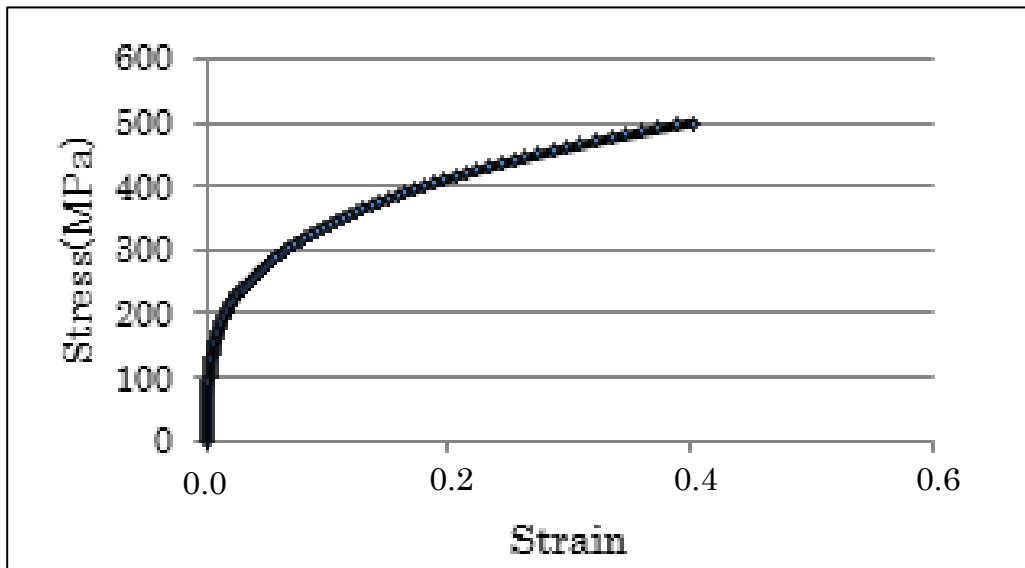


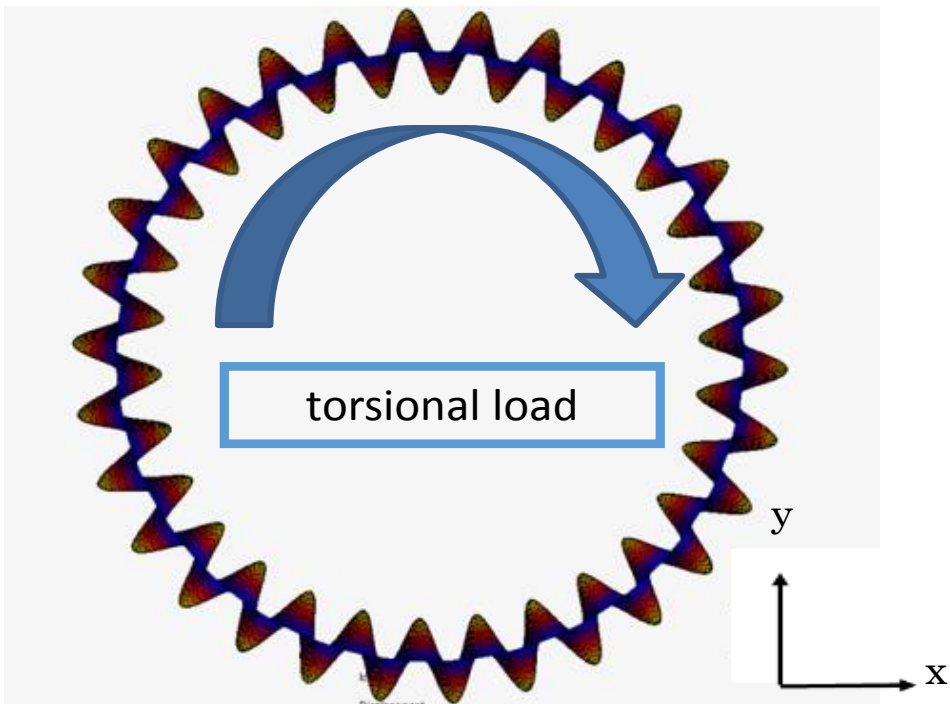
Fig. 3-4 Stress-strain curve assumed to be of AL-5083

3.3.3 形状初期不整の付与

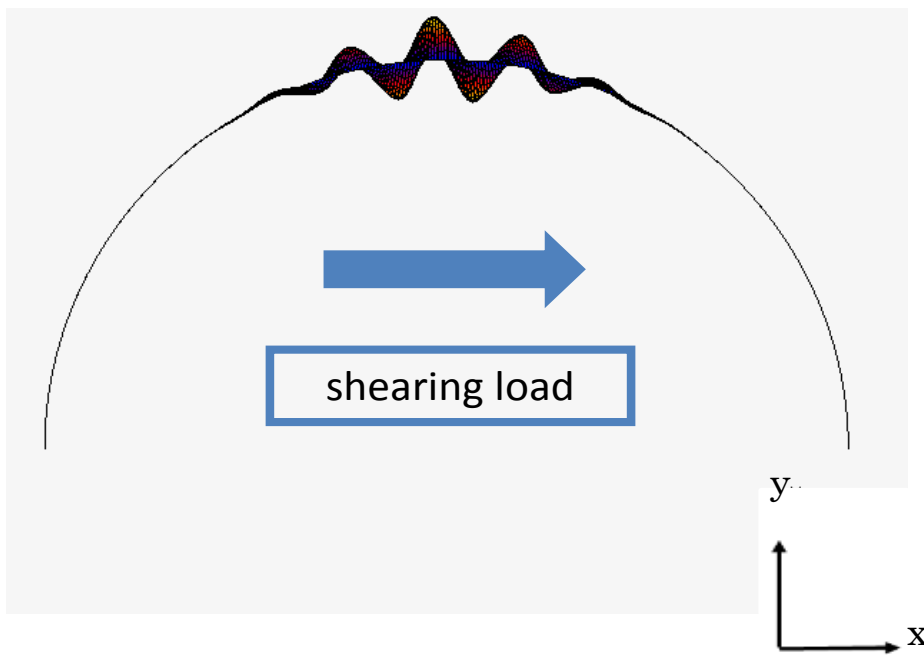
円筒殻の座屈強度の低下に及ぼす初期不整の影響因子として，「形状初期不整」と「溶接残留応力」が挙げられるが，溶接残留応力が座屈強度の低下に及ぼす影響は形状初期不整のそれに比べて小さいと考えられることから，本研究では形状初期不整が座屈強度の低下に及ぼす影響を対象とする．

形状初期不整が弾塑性座屈強度に与える影響を確認すべく，形状初期不整をあらかじめ解析モデルに付与した解析を行なう．初期不整形状は，振りおよびせん断荷重下でそれぞれ線形座屈固有値解析を行ない得られた 1 次の座屈モードとした．

Fig. 3-5 に線形座屈固有値解析により得られた 1 次座屈モードを示す．Fig. 3-5 に示す座屈モードに対して，解析モデルの各節点でのモード変位量（最大値が 1.0 となるように正規化したモード変位量）を抽出し，所定の最大初期不整量を考慮した上で，初期不整のないモデルに付与した．



(a) For torsional load



(b) For shearing load

Fig. 3-5 Initial imperfection mode

(First buckling mode obtained to the linear buckling analysis)

3.4 弾塑性座屈強度の推定方法に関する検討

LNG 船のタンクスカートは、せん断荷重作用下では、材料の弾塑性域で座屈崩壊するため、弾塑性座屈強度を推定する解析手法が必要となる。弾塑性座屈強度推定法としては以下の 2 つが挙げられる。

手法 1：作用荷重を増分ごとに作用させ、材料および幾何学的非線形性を考慮して変形を求める。次に作用荷重毎に座屈固有値解析を実施し、得られた座屈荷重と作用荷重との関係から座屈発生有無を判定する方法（本研究では、非線形座屈強度推定法と呼ぶ）

手法 2：平板の最終強度の評価方法の 1 つを参考に、応力ゼロの状態での接線を表す直線と面外変形が急激に増大する位置の接線との交点を座屈強度とみなす手法

特に殻構造の座屈問題では、座屈前変形が座屈強度に大きく影響するが、座屈前変形と座屈モードが異なる場合があることから、非線形座屈強度推定法が適用されることが多い。そこで、まずは振りおよびせん断荷重を受ける円筒殻の弾塑性座屈強度の推定に対する、非線形座屈強度推定法の適用可能性について検討を行なった。

3.4.1 手法 1（非線形座屈強度推定法）の適用性検討

3.4.1.1 非線形座屈強度推定法の概要

非線形座屈強度推定法は変形解析の途中、ある任意の変位に到達した時に線形座屈固有値解析を行ない、得られた座屈固有値を基に(3-4)式を用いて座屈せん断応力 τ_b を算出する。

$$\tau_b = \tau_{n-1} + f(\tau_n - \tau_{n-1}) \quad (3-4)$$

ここに、 τ_n は第 n 変位増分到達時のせん断応力、 f は座屈固有値である。

算出される座屈せん断応力は円筒殻の変形が進行するにつれて変化していく。よって、任意の変位到達時でのせん断応力を作用せん断応力 τ_{act} とし、作用せん断応力 τ_{act} とそれに対応する座屈せん断応力 τ_b をプロットすることで Fig. 3-6 に示す曲線を作成し、作用せん断応力 τ_{act} と座屈せん断応力 τ_b が一致するときの応力の値を非線形座屈強度として扱う。

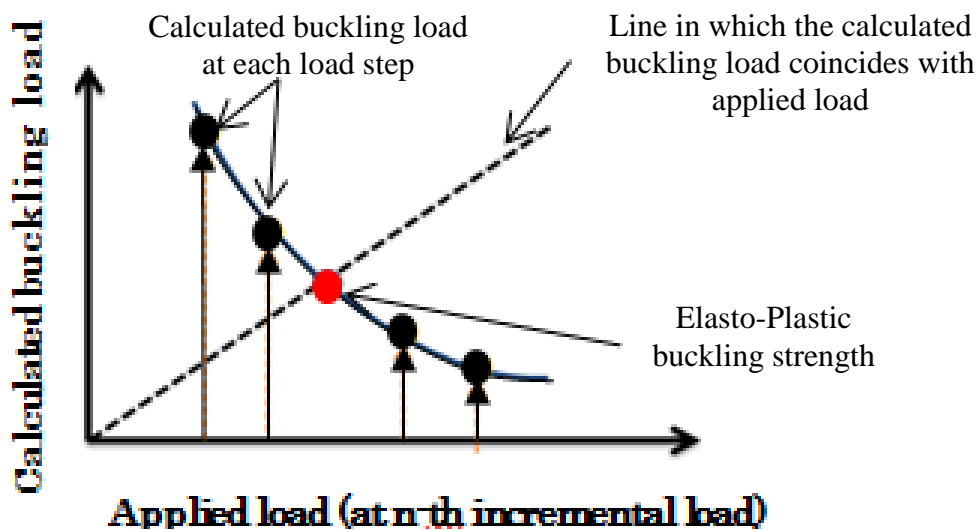


Fig. 3-6 Relationship between buckling load and applied load

3.4.1.2 非線形座屈強度推定法の適用結果（振りおよびせん断荷重付与時）

Fig. 3-3 に示す振り荷重を付与した円筒殻において、Fig. 3-5(a)に示す初期不整形を付与した場合に対し、初期不整形量 δ と円筒殻の板厚 t との比(δ/t)を変えて非線形座屈強度解析を実施した結果を Fig. 3-7 に示す。

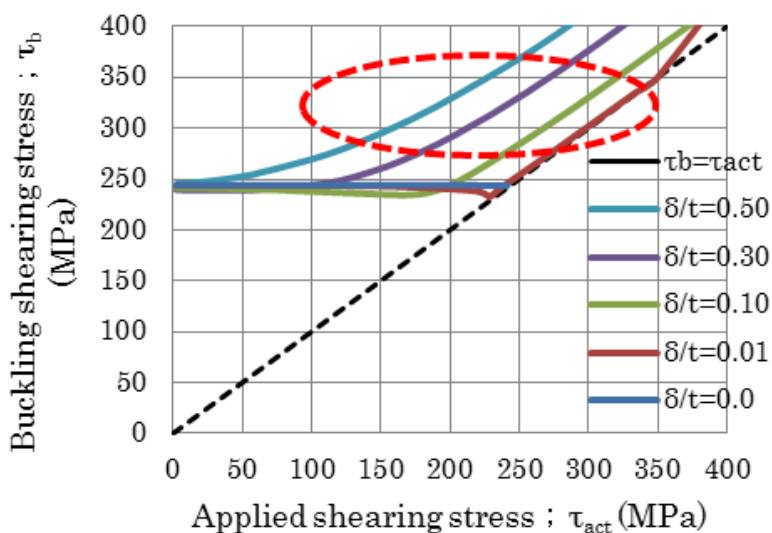


Fig. 3-7 Relationship between buckling and applied shearing stress (torsional load, elastic calculation)

Fig. 3-7 の赤丸の領域に示すように、弾性解析では、初期不整を考慮したモデルでは座屈せん断応力が作用せん断応力に一致することが無く、算出される座屈せん断応力が増加し続ける現象が確認された。なお、この現象は、最大初期不整量を変えた円筒殻にせん断荷重が作用した場合にもみられた。

この現象の原因は、面外変形の増大によって生じた円筒軸方向への引張力が座屈変形を抑制しているためであると考えられる。面外変形が生じることで座屈変形を妨げるような垂直引張力が生じるメカニズムを示す。初期不整を付与した場合、せん断荷重を加えるにつれて面外方向への変形量が増加する。この時、円筒殻には Fig. 3-8 に示すような面外変形が生じる箇所と生じない箇所ができるが、円筒殻上端の z 方向変位は一樣に直線保持されていることから、大きな面外変形が生じている箇所では軸方向に引張、面外変形が生じていない箇所では軸方向に圧縮の応力が生じていると考えられる。

僅かに初期不整を有する円筒殻にせん断荷重を付与した場合の円筒殻上端における軸方向応力分布を Fig. 3-9 に示す。面外変形が大きい個所に大きな引張応力が生じることが確認できる。さらに Fig. 3-10 に示す面外変形量と軸方向応力の関係から、面外変形量が大きくなるにつれ、円筒上端に生じる最大軸方向応力も増加することも確認できる。

したがって、非線形座屈強度推定法は、初期不整を有する短い円筒殻に振りおよびせん断荷重が作用する場合の弾塑性座屈強度の推定には不向きであると考えられる。

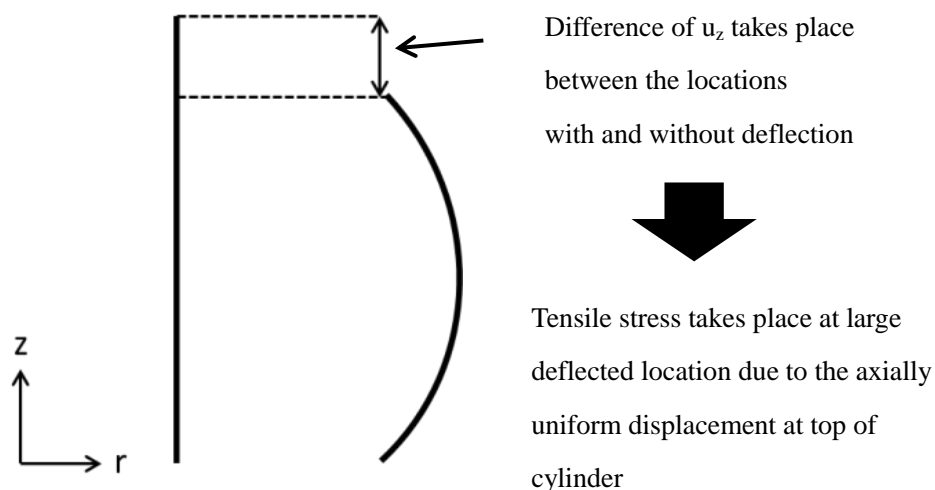


Fig. 3-8 Mechanism for occurrence of axial stress

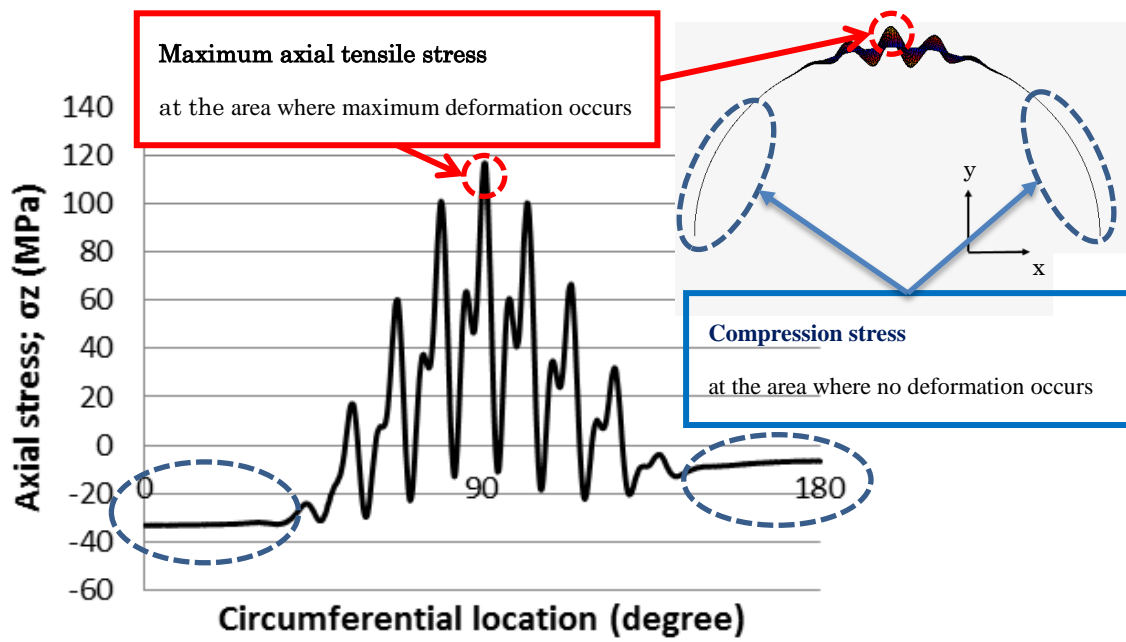


Fig. 3-9 Axial stress distribution at the upper end of cylinder (shearing load, $\delta/t=0.01$, at enforced displacement $u_x=16(\text{mm})$)

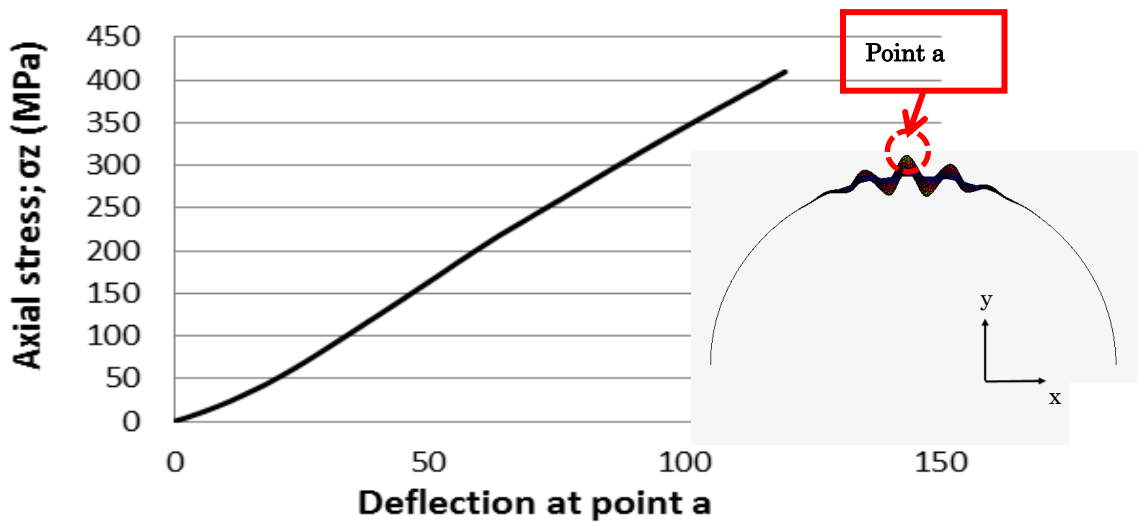


Fig. 3-10 Relationship between axial stress and deflection

3.4.2 手法2（面外変形の急激な増加位置を基に推定する方法）の適用性検討

本手法は、平板の最終強度の評価方法の1つである、応力ゼロの状態での接線を表す直線と、面外変形が急激に増大する位置の接線との交点を最終強度とみなす手法、を参考にしたものである。平板の場合、座屈が生じることで剛性が低下し変形が増大するが、平板の端部拘束の影響により座屈発生後もいくばくかの耐荷力を有する。そのため、荷重-変位曲線にて明瞭に座屈強度を推定することができないことから、それを補完するために提案された方法の一つである。

本研究では、応力ゼロの状態での接線を表す直線と、面外変形が板厚の2倍（100mm）となったときの接線を表す直線との交点を求め、その時の作用せん断応力の値を弾塑性座屈強度とした。

一例として1次座屈モードの最大初期不整量 δ_{max} が板厚 t の1%ある円筒殻が振り荷重を受けた場合のFEM解析結果を実施して得られたせん断応力と撓みの2乗との関係をFig. 3-11に示す。

また、初期不整なしでの線形座屈固有値解析結果、実験式((3-3)式)により得られたせん断座屈応力と上記手法にて求めた座屈応力との比較をTable 3-1に示す。Table 3-1より、初期不整がほとんどない場合でも、線形座屈固有値解析結果、および実験式から算出された値と本手法で得られた値が大差無いことが確認できる。そこで、以降の検討では手法2を用いて、弾塑性座屈強度を算出することとする。

Table 3-1 Comparison of shear buckling stress under torsional load

	Shear buckling stress (MPa)	Deviation (%)
Large deformation Analysis	246.9	-1.17
Elastic Eigenvalue Analysis	244.0	
Experimental Formula(Eq.(3-3))	248.5	0.66

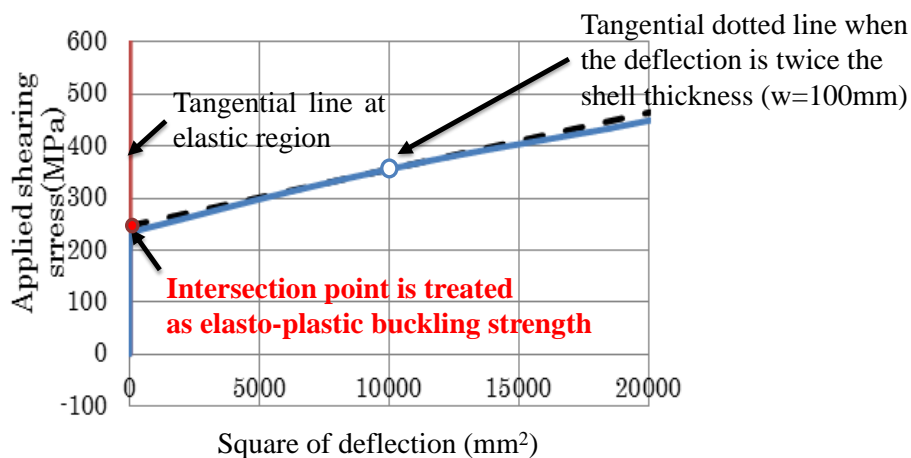


Fig. 3-11 Relationship between applied load and maximum deflection (torsional load, elastic calculation, $\delta/t=0.01$)

3.5 パラメータスタディ

3.5.1 塑性化パラメータ β の設定

座屈が生じる際の塑性化の程度を表すパラメータ β は一般的に(3-5)式で与えられる。

$$\beta^2 = \frac{P_Y}{P_b} = \frac{\tau_Y}{\tau_b} \quad (3-5)$$

ここで P_Y は降伏荷重、 P_b は座屈荷重である。 β が大きくなると、塑性の影響が小さくなり弾性座屈が主となり、逆に小さくなると塑性崩壊の影響が大きくなる。

振り変形における降伏せん断応力 τ_Y は(3-6)式で表される。

$$\tau_Y = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}} \propto \sigma_Y \quad (3-6)$$

また、振り変形における座屈せん断応力 τ_b として(3-3)式を用いる。ここで、(3-3)式の右括弧内の右項の影響を無視した場合は、パラメータ β について(3-7)式の関係が成り立つ。

$$\beta \propto \frac{L}{t} \sqrt{\frac{\sigma_Y}{E}} \quad (3-7)$$

すなわち、塑性化パラメータ β は、柱の座屈における換算細長比に相当する。

本研究では、(3-5)式において解析モデルの板厚などを変更することで塑性パラメータ β の値を変化させ、その影響を調査した。

3.5.2 塑性化パラメータ β を変えたパラメータスタディ結果

せん断荷重および振り荷重のそれぞれを受ける場合に対して、塑性化パラメータ β を変化させたパラメータスタディを行ない、弾塑性座屈強度と初期不整量との関係を整理した。 β を変化させる方法として以下2つのパターンを考えた。

パターン A：板厚(t)を変化させた場合

パターン B：降伏応力(σ_Y)を変化させた場合。

各パターンについて、初期不整量をパラメータとしてシリーズ計算を行ない、3.4節で示した方法を用いて弾塑性座屈強度を算出した。Table 3-2 にシリーズ計算に用いた円筒殻の寸法および降伏応力の値を示す。なお、アルミニウム合金 A5083 材は降伏応力が明瞭に現われない材料であることから、塑性ひずみが 0.2% となるときの応力 (0.2%耐力) を降伏応力として用いている。

また、 β を変化させるにあたっては、本研究では、Moss 型 LNG 船のタンクスカート の Z の値

が 2.0～5.0 程度であることを勘案し、(3-3)式における Batdorf Parameter Z の値は 3.5 の一定値であるものとして算出している。また、 β の変化量は、Moss 型 LNG 船のタンクスカートにおける β の値が 0.5 程度であることを考慮の上設定している。

せん断荷重および振り荷重それぞれに対する解析結果を Fig. 3-12 に示す。Fig. 3-12 の縦軸は各 β 値において、板厚の 0.05% の最大初期不整量があるときの弾塑性座屈強度を初期不整量ゼロの時の弾塑性座屈強度と近似し、この値を用いて各弾塑性座屈強度を除して無次元化を行なっている。Fig. 3-12 より、せん断荷重および振り荷重共に β 値が増加するにつれ、形状初期不整の影響は小さくなることを確認できる。また形状初期不整が小さいときに、弾塑性座屈強度が比較的大きく低下していることが確認できる。さらに、降伏応力のみおよび板厚のみをそれぞれ変化させて同じ β 値としたときの弾塑性座屈強度が概ね一致することがわかる。

板厚(t)を変化させた場合に対し、せん断荷重および振り荷重それぞれの値を比較した。Table 3-3 にシリーズ計算に用いた円筒殻の寸法および 0.2% 耐力の値を、計算結果を Fig. 3-13 に示す。Fig. 3-13 の点線はせん断荷重付与時の解析結果、実線は振り荷重付与時を解析結果である。また、Fig. 3-13 の縦軸は各 β 値において、板厚の 0.05% の最大初期不整量があるときの弾塑性座屈強度を初期不整量ゼロの時の弾塑性座屈強度と近似し、この値を用いて各弾塑性座屈強度を除して無次元化を行なっている。

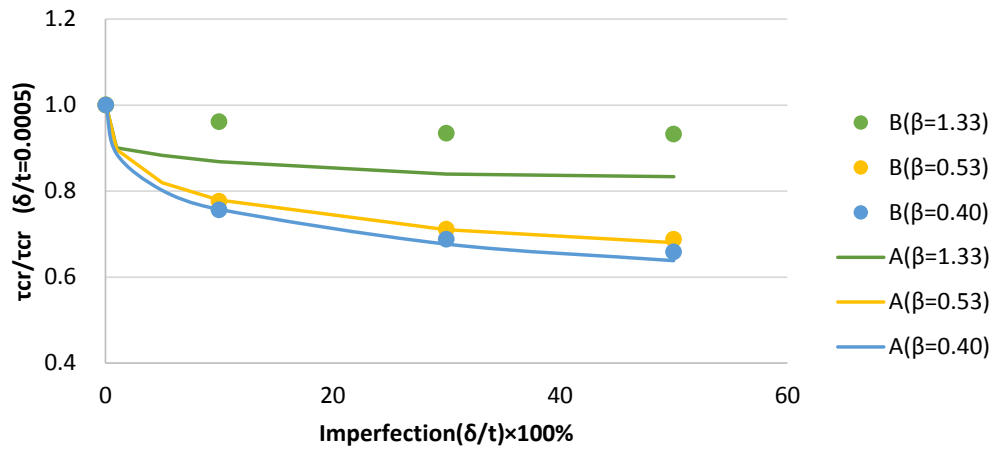
Fig. 3-13 より、各初期不整における弾塑性座屈強度の無次元量は、振り荷重よりもせん断荷重の場合の方が大きい値をとることが確認できる。また、どの β 値においても初期不整の影響は振り荷重と比べ相対的に小さいことが確認できる。

せん断荷重の方が振り荷重よりも弾塑性座屈強度が大きく、かつ初期不整の影響を受けにくい原因として、座屈モードの違いが挙げられる。すなわち、Fig. 3-5 に示したように、振り荷重の場合は円筒殻全体で座屈するのに対し、せん断荷重の場合は円筒殻の一部のみで座屈が生じる。この時、面外変形が生じることで座屈変形を妨げるような垂直引張力が生じる。振り荷重を受ける場合には垂直引張力を受ける領域が全体に広がっており垂直引張力は大きくならないのに対し、せん断荷重の場合は座屈が生じている場所 (90 度付近) にのみ座屈を妨げる垂直引張力が生じ、その値は相対的に大きい。

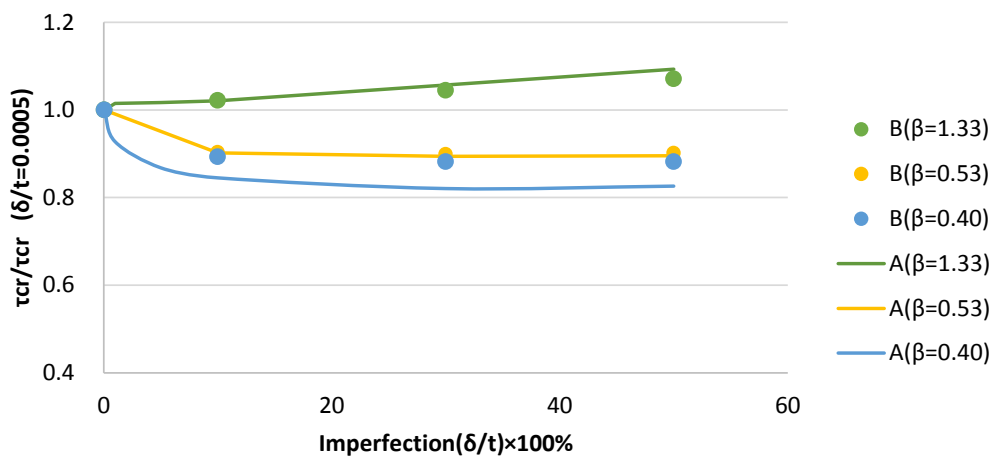
その結果、引張応力の大きな位置での座屈強度が上昇し、面外変形の増加とともに、座屈の生じる場所が初期の位置から次第に引張応力のより小さなその両側の領域へシフトしていくことになる。両側の領域では生じるせん断応力が 90 度の位置より小さいため、振り変形よりも弾塑性座屈強度が大きくなる。この様子は、Fig. 3-14 に示す各せん断荷重負荷時に得た座屈モード図を見ることにより確認できる。

Table 3-2 Principal dimensions and parameters of analysis case.

Pattern	Radius (mm)	Length (mm)	Thickness (mm)	0.2% Proof Stress (N/mm ²)	Slenderness ratio : β
A	20,000	2,000	20	120	1.33
	↓	↓	50	↓	0.53
	↓	↓	67	↓	0.40
B	↓	↓	40	480	1.33
	↓	↓	↓	77	0.53
	↓	↓	↓	43	0.40



(a) Torsional load



(b) Shearing load

Fig. 3-12 Relation between elasto-plastic buckling strength and geometrical initial imperfection

Table 3-3 Principal dimensions and parameters of analysis case.

Pattern	Radius (mm)	Length (mm)	Thickness (mm)	0.2% Proof Stress (N/mm ²)	Slenderness ratio : β
A	20,000	2,000	24	120	1.10
	↓	↓	34	↓	0.77
	↓	↓	50	↓	0.53
	↓	↓	82	↓	0.32

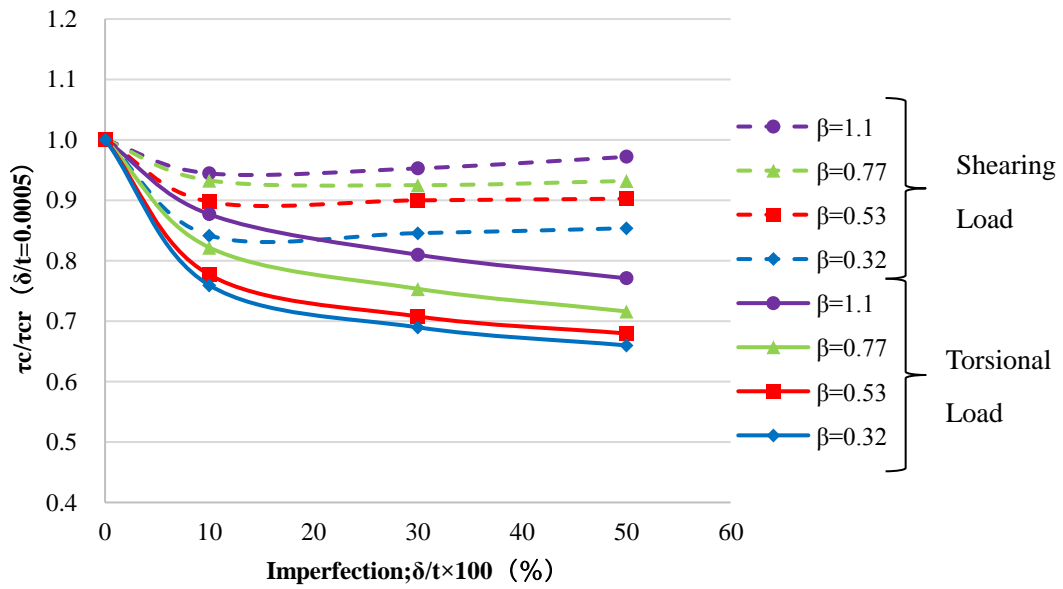
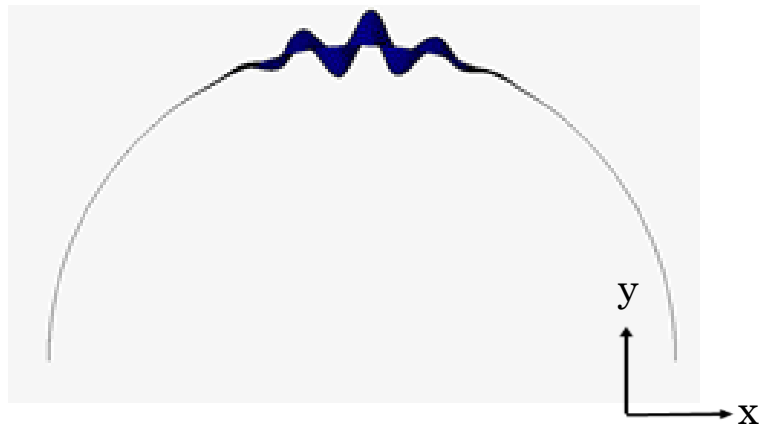
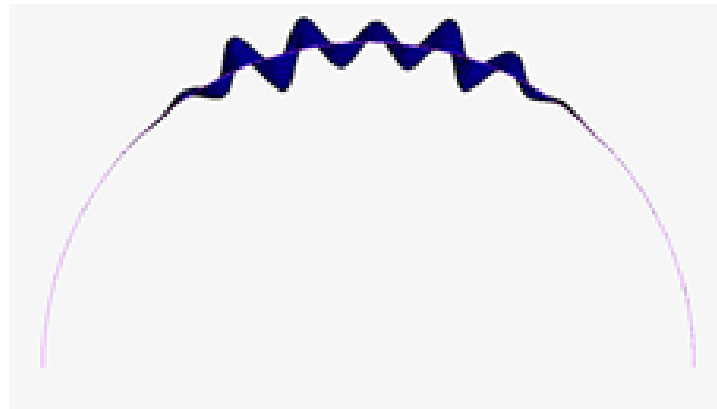


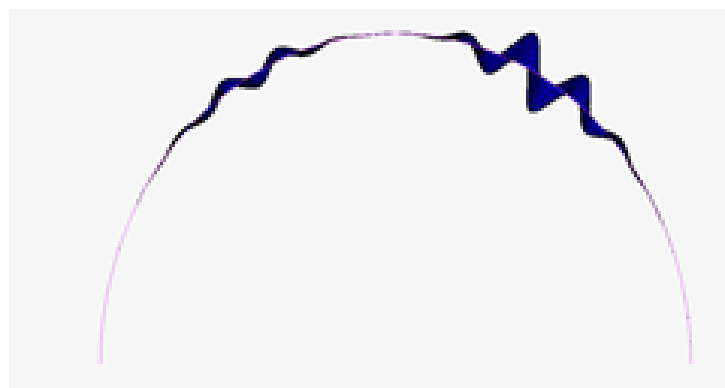
Fig. 3-13 Relationships between elasto-plastic buckling strength and initial imperfection for various slenderness ratio β .



(a) $u_x=0.1(\text{mm})$



(b) $u_x=1.3(\text{mm})$



(c) $u_x=5.9(\text{mm})$

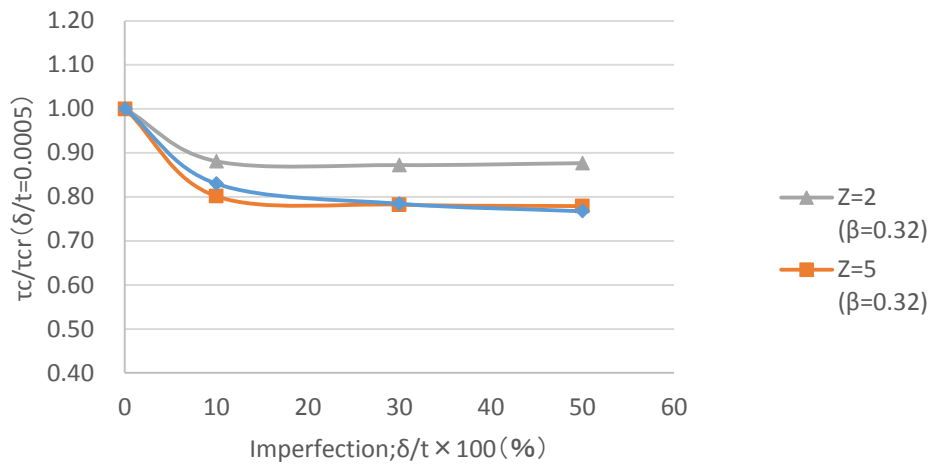
Fig. 3-14 First buckling mode at each enforced displacement

3.5.3 Batdorf Parameter Z を変えたパラメータスタディ結果

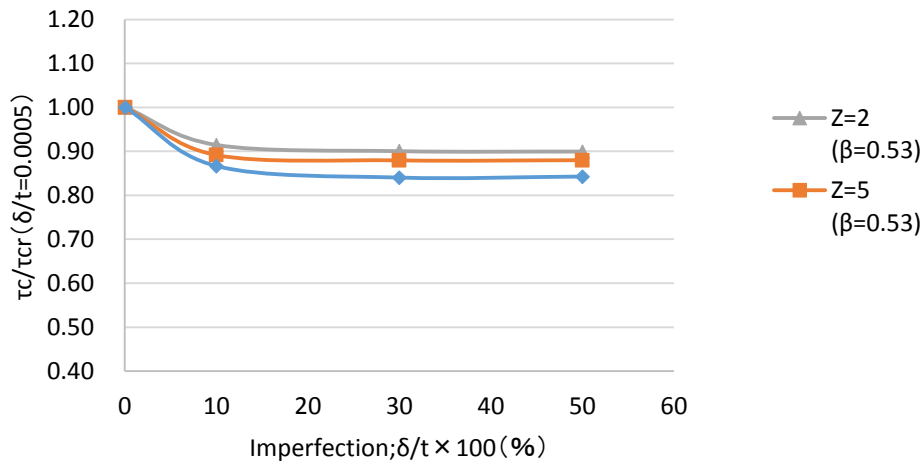
せん断座屈荷重作用下での座屈強度に及ぼす初期不整の影響が、Batdorf Parameter Z の値によってどのように変化するかを調べるため、Batdorf Parameter Z を変化させてパラメータスタディを実施した。なお、塑性化パラメータ β の値を変化させずに Z の値を変更させるために、本検討では、円筒板厚、半径、高さの 3 つのパラメータを変更している。

計算結果を Fig. 3-15 に示す。Fig. 3-15 の縦軸は、3.5.2 と同じ方法で弾塑性座屈強度の無次元化を行なった。Fig. 3-15 より、 β の値が小さい、すなわち塑性座屈が支配的な場合は、 Z の値の違いにより初期不整量がせん断座屈強度の低下に及ぼす影響に違いがみられるが、 β の値が大きくなるにつれてその差が縮まっていくことがわかる。

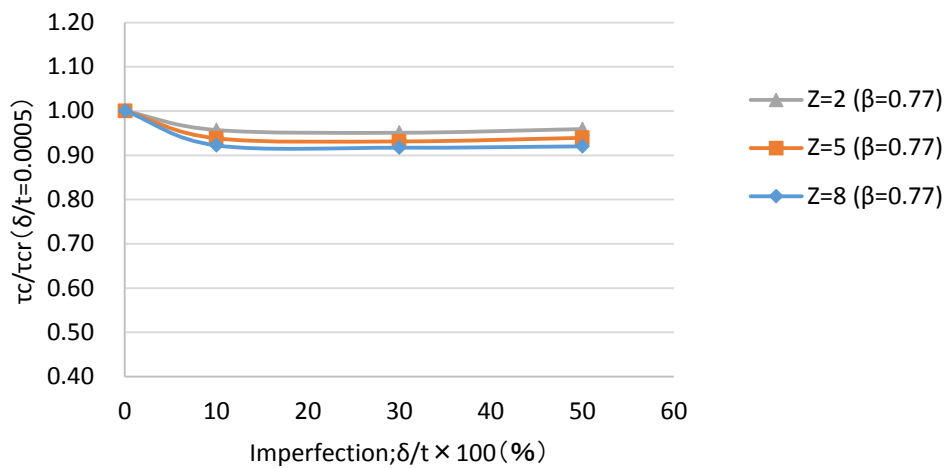
これは、 Z が小さい、すなわち短い円筒殻のほうが、長い円筒殻に比べて面外方向に変形しようとする際により端部の拘束の影響を受けることで、面外変形が抑制される傾向にあるためと考えられる。さらに、端部の塑性化の進展度合は、面外変形に伴う曲げ応力の影響を受け、面外変形が抑制される Z の小さい円筒殻では塑性化が相対的に生じにくくなり、 Z のより大きな円筒殻に比べて座屈強度に及ぼす初期不整の影響が小さくなったものと考えられる。したがって、 β の値が小さい、すなわち塑性座屈が支配的な場合のほうが、より違いがみられる結果となったと考えられる。



(a) $\beta=0.32$



(b) $\beta=0.53$



(c) $\beta=0.77$

Fig. 3-15 Relationships between elasto-plastic buckling strength and geometrical initial imperfection (Parameter : Z)

3.6 リング補強材がせん断座屈強度におよぼす影響

3.5 節では、タンクスカートを構成するリング補強円筒殻の 1 リング間をモデル化したうえで、せん断荷重を付与した場合における弾塑性座屈強度に及ぼす初期不整と塑性化パラメータ β および Batdorf Parameter Z の影響について検討を実施した。

一方、タンクスカートは複数のリング補強材にて構成されている。そこで、本章では、複数のリング補強材を有する円筒殻に、せん断荷重を付与した場合の線形座屈固有値解析を実施し、リング補強材がせん断座屈強度に及ぼす影響を確認した。リング補強材形状は Fig. 3-16 に示す T 型とし、補強リングのウェブ高さ(H_w)および板厚(t_w)、フランジ幅(B_f)および板厚(t_f)は、円筒殻に軸圧縮荷重が作用した際に全体座屈モードが生じない、すなわちリング補強材が節となるように設定した。検討に用いたリング補強材の基準寸法を Fig. 3-16 にあわせて示す。

検討モデル（本研究では、以降 5 リングモデルと呼ぶ）を Fig. 3-17 に示す。5 リングモデルの寸法は、1 リングモデルと同様、Moss 型 LNG 船のタンクスカートの実寸法を参考に、半径 $R = 20,000(\text{mm})$ 、板厚 $t = 50(\text{mm})$ 、1 リング間長さ $L = 2,000(\text{mm})$ とした。このときの Z の値は 3.77 となる。なお、円筒中央部の補強リング位置での剛性に近づけるべく、5 リングモデルは円筒上下端部にも補強リングを配している。また、円筒殻部のメッシュ分割は 1 リングモデルと同じとし、補強リングはウェブを 4 要素、フランジを 4 要素でモデル化した。また、上下端の境界条件は Fig. 3-3 (b) に示す 1 リングモデルの場合と同じとした。

基準寸法の 5 リングモデルにせん断荷重を付与した場合の座屈固有値解析にて得られた座屈モードを Fig. 3-18 に示す。Fig. 3-18 より、基準寸法の場合リングを巻き込む座屈が生じることがわかる。補強リングのフランジの板厚を 30mm、ウェブの板厚を 20mm とした場合の座屈モードを Fig. 3-19 に示す。Fig. 3-18 は、円筒殻に軸圧縮荷重時に補強リングが節となる座屈となるようにリング寸法を決めたとしても、せん断荷重時には補強リングを巻き込む座屈が生じる可能性があることを示しており、Fig. 3-19 より、リング寸法をさらに大きくすることにより、リングを巻き込まない座屈モードに移行することがわかる。

そこで、リング補強材の寸法がせん断座屈荷重および座屈モードに及ぼす影響を確認すべく、5 リングモデルのウェブおよびフランジの板厚をパラメータとしてシリーズ計算を実施した。座屈固有値解析結果を Table 3-4 に示す。なお、Table 3-4 に示す固有値の値は Base Model にて得られた値を用いて無次元化している。

Table 3-4 より、フランジのみ板厚を増加させた場合、せん断座屈荷重はほとんど変化しないが座屈モードがリングを節とするモードに転じやすくなること、ウェブのみ板厚を増加させた場合は、せん断座屈荷重は上昇するが座屈モードは変化しない可能性があること、ウェブとフランジの板厚を両方とも変化させることでせん断座屈荷重および座屈モードの変化に効果があることが分かる。

しかしながら、実構造物では軽量化の観点からウェブよりフランジの板厚のほうが大きい寸法を取ることで、仮にウェブを増厚した場合でもせん断座屈荷重の上昇率は僅かであること、3.5節での検討より、 Z が大きくなった場合でも初期不整が座屈強度に及ぼす影響は軸圧縮のそれに比べて小さいことから、円筒殻に軸圧縮荷重時に補強リングが節となる座屈となるようにリング寸法を決めることは実用上問題ないと考えられる。

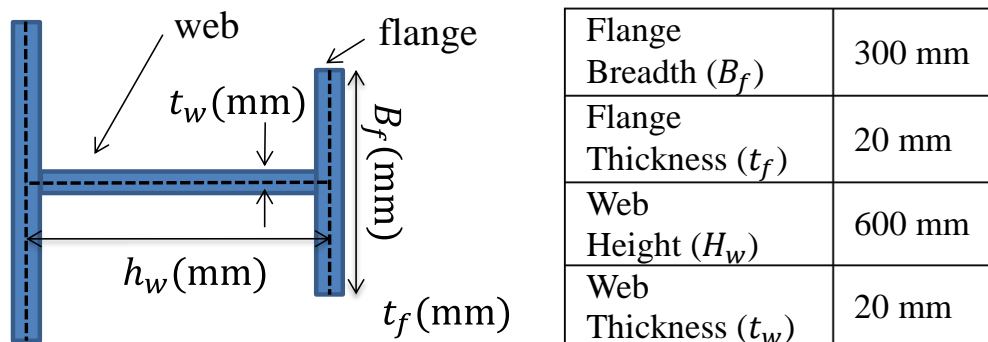


Fig. 3-16 Shape of Ring stiffener (T-Shape)

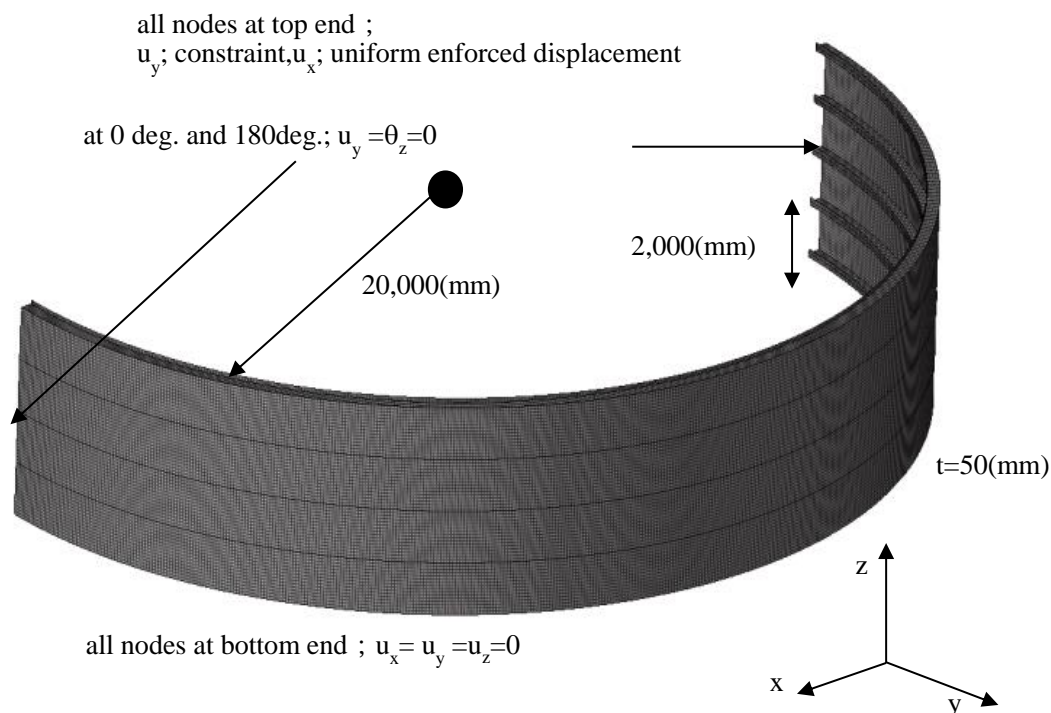


Fig. 3-17 Calculation Model with several ring stiffeners, loading condition and constraint conditions for shearing load.

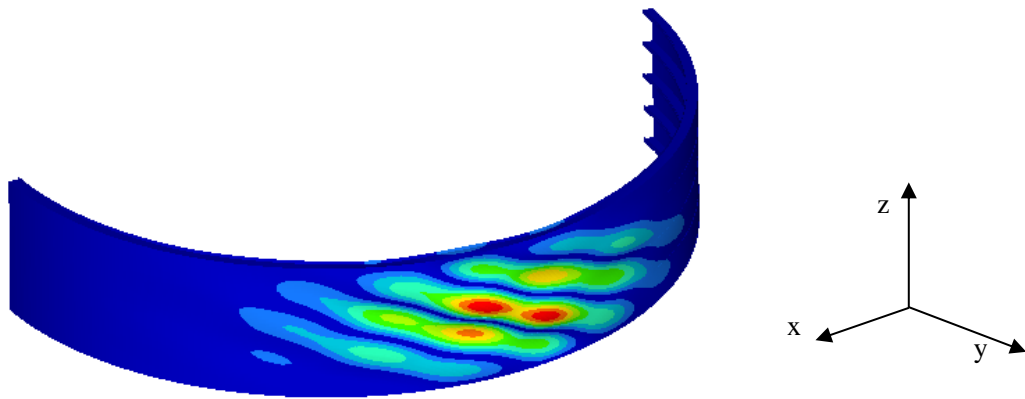


Fig. 3-18 Buckling mode under shearing load (global buckling mode)
(Base model; $t_w=t_f=20\text{mm}$, $H_w=600\text{mm}$, $B_f=300\text{mm}$)

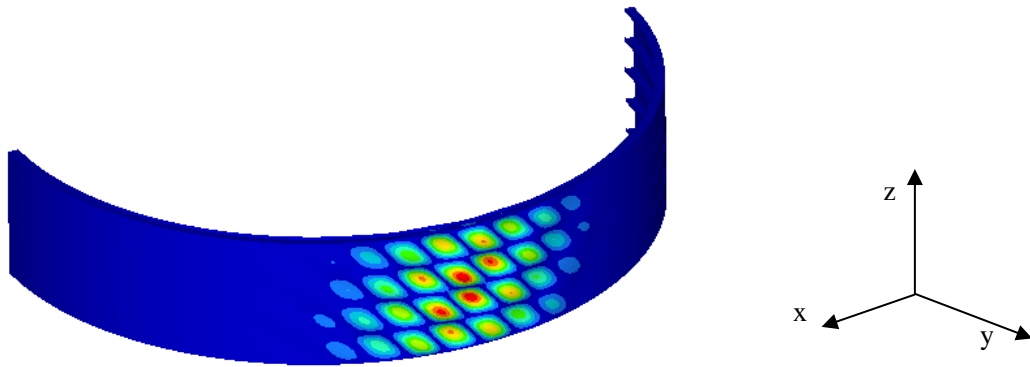


Fig. 3-19 Buckling mode under shearing load (local buckling mode)
($t_w=20\text{mm}$, $t_f=30\text{mm}$, $H_w=600\text{mm}$, $B_f=300\text{mm}$)

**Table 3-4 Buckling mode and eigenvalue for buckling strength with several ring stiffeners
($H_w=600\text{mm}$, $B_f=300\text{mm}$)**

$t_w(\text{mm})$	$t_f(\text{mm})$	Buckling Eigenvalue (non-dimensional value)	Buckling mode
20	20	1.00	Global
20	30	1.02	Local
20	40	1.02	Local
20	50	1.03	Local
30	20	1.05	Global
40	20	1.10	Global
50	20	1.13	Global
30	30	1.08	Local
40	40	1.15	Local
50	50	1.23	Local

3.7 球形タンクがタンクスカートのせん断座屈強度に及ぼす影響

3.5 節および 3.6 節での検討では、端部境界条件として上端部の平面を保持した状態で解析を実施していたが、Moss 型 LNG 船タンクスカート上端部は、Fig. 3-2 に示すように球形タンクの赤道部と極厚板を介して接続されている。そこで、3.6 節の検討に用いた 5 リングモデルの上端部に球形タンクを加えたモデルにて座屈固有値解析を行なうことで、タンクスカート上端境界条件が座屈強度に及ぼす影響を確認した。

解析モデルを Fig. 3-20 に示す。構造および荷重の対称性を考慮して球形タンクおよびスカートの 1/2 をモデル化し、端面に対称条件を課した。また、スカート下端部は単純支持とした。球形タンク半径 R_{sp} は約 20,000mm、タンク板厚 t_{sp} は中村・安川ら¹⁾を参考に、 $R_{sp}/t_{sp} = 400$ となるように設定した。また赤道部の極厚板の寸法は、実タンクの寸法を参考にタンク板厚の 3 倍に設定した。

基準寸法でのせん断荷重下での座屈固有値解析にて得られた座屈モードを Fig. 3-21 に示す。Fig. 3-21 より、球形タンク形状を考慮した場合は、基準寸法においても最低次の座屈モードはリングを節とする座屈モードとなることがわかる。これは、球形タンクおよび球形タンク赤道部極厚板の剛性により円筒上端部の面外方向回転の拘束度合いが増したことから、補強リングを巻き

込む座屈モードとなるせん断座屈荷重は上昇するが、リングを節とする座屈モードとなるせん断座屈荷重は大きく変化しないことが理由だと考えられる。

ウェブおよびフランジの板厚をパラメータとした座屈固有値解析結果を Table 3-5 に示す。なお、Table 3-5 に示す固有値の値は 4 章の 5 リングモデル Base Model（ウェブ板厚およびフランジ板厚が 20mm の場合）にて得られた値を用いて無次元化している。Table 3-5 より、せん断座屈荷重は、球形タンクをモデル化した場合と、タンクスカートのみをモデル化し上端面を平面保持とした場合とで概ね一致していることがわかる。従って、タンクスカートのみをモデル化してせん断座屈強度を評価する場合に、上端面を平面保持として検討することは安全側の条件であり問題ないと考えられる。

Table 3-5 Comparison of buckling mode and eigenvalue for buckling strength by changing boundary conditions at upper part of ring-stiffened cylindrical shell.

$t_w(\text{mm})$	$t_f(\text{mm})$	Without Spherical shell ¹⁾		With Spherical shell ²⁾	
		Buckling Eigenvalue ³⁾	Buckling mode	Buckling Eigenvalue ³⁾	Buckling mode
20	20	1.00	Global	1.03	Local
20	30	1.02	Local	1.05	Local
30	20	1.05	Global	1.09	Local
30	30	1.08	Local	1.11	Local

1) Simply supported conditions at upper end of circular cylindrical shell

2) Without constraint conditions at upper end of circular cylindrical shell

3) Non-dimensional value.

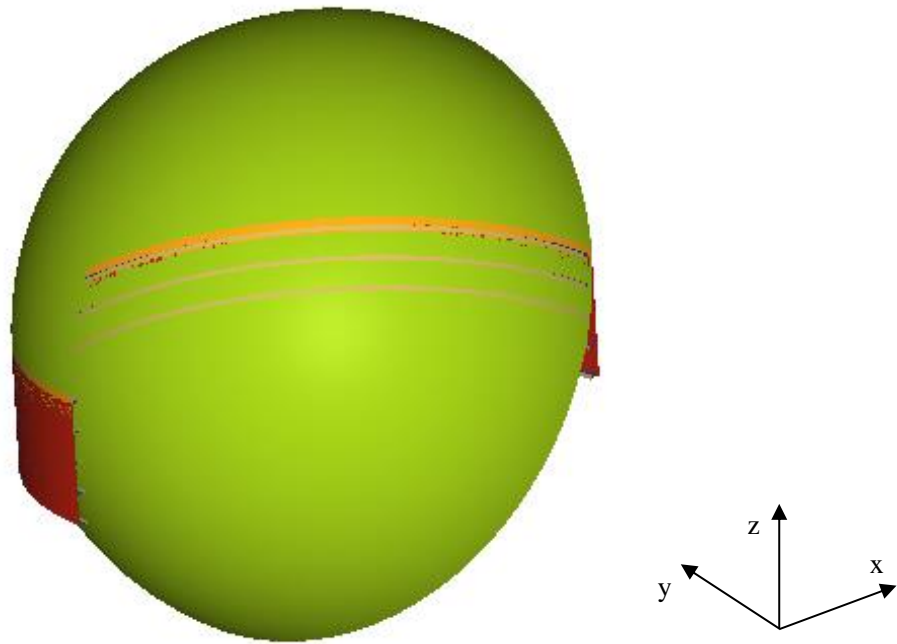


Fig. 3-20 Analysis Model with spherical cargo tank
 (Base model; $t_w=t_f=20\text{mm}$, $H_w=500\text{mm}$, $B_f=300\text{mm}$)

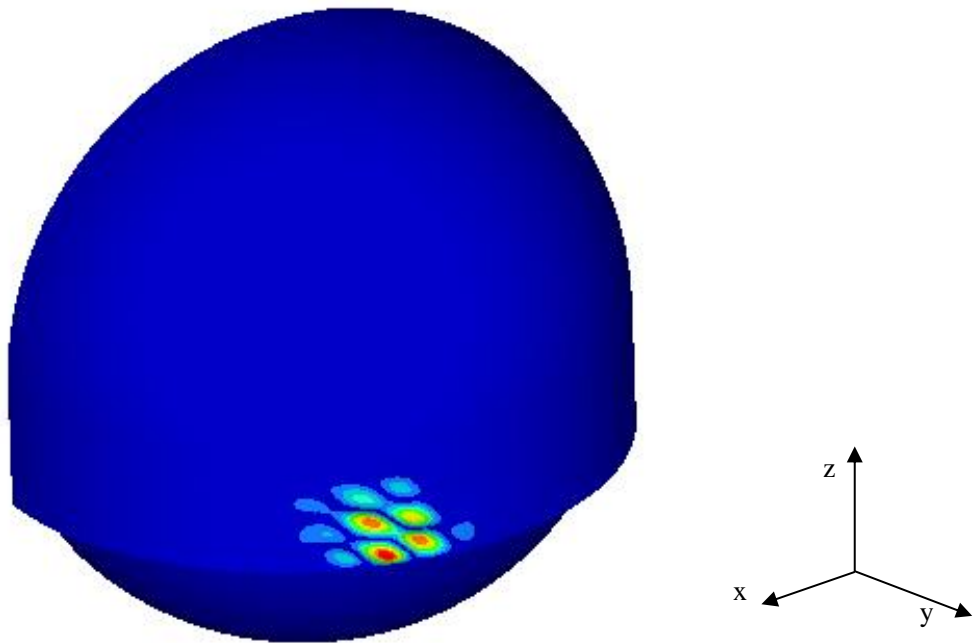


Fig. 3-21 Buckling mode under shearing load (global buckling mode)
 (Base model; $t_w=t_f=20\text{mm}$, $H_w=600\text{mm}$, $B_f=300\text{mm}$)

3.8 結言

本章では、Moss 型 LNG 船タンクスカートを構成する短い円筒殻にせん断荷重が作用する場合の弾塑性座屈強度と初期不整が座屈強度におよぼす影響、および補強リングを有する円筒殻のせん断座屈強度におよぼす補強リング寸法の影響および球形タンクを有する場合のスカート上端部の境界条件の影響について、FEM 解析による数値シミュレーションを基に検討し、以下の結論を得た。

- 1) せん断荷重を受ける短い無補強円筒殻の弾塑性座屈強度は、振り荷重の場合のそれよりも大きな値となることが分かった。これは、振り荷重の場合は円筒殻全体で座屈するのに対し、せん断荷重の場合は円筒殻の一部のみで座屈が生じることが原因と考えられる。面外変形が生じることで座屈変形を妨げるような垂直引張力が生じるが、振り荷重を受ける場合には垂直引張力を受ける領域が全体に拡がり、せん断荷重の場合は座屈が生じている場所のみ生じ、その値は相対的に大きい。その結果、引張応力の大きな位置での座屈強度が上昇し、面外変形の増加とともに、座屈の生じる場所が初期の位置から次第に引張応力のより小さなその両側の領域へシフトするが、両側の領域では生じるせん断応力が初期の位置より小さいため、振り変形よりも弾塑性座屈強度が大きくなる。
- 2) 短い無補強円筒殻の場合、せん断荷重および振り荷重ともに、最大初期不整量が大きくなるにつれて弾塑性座屈強度が低下していくが、せん断荷重については、最大初期不整量が板厚の 10%を超える場合、弾塑性座屈強度はほとんど変化しない。さらに、塑性化パラメータ β の値が大きくなる、すなわち弾性的な座屈になるにつれ、初期不整が弾塑性座屈強度に及ぼす影響は、せん断荷重および振り荷重を受ける円筒殻ともに小さくなる。
- 3) 複数のリング補強材を考慮した円筒殻にせん断荷重を付与した場合、円筒殻に軸圧縮荷重時に補強リングが節となる座屈となるようにリング寸法を決めたとしても、補強リングを巻き込む座屈が生じる可能性がある。また、複数のリング補強材を考慮した円筒殻にせん断荷重が作用する場合、フランジのみ板厚を増加させるとせん断座屈荷重はほとんど変化しないが座屈モードがリングを節とするモードに転じる。一方、ウェブのみ板厚を増加させるとせん断座屈荷重は上昇するが座屈モードは変化しない。ウェブとフランジの板厚を両方とも増加させるとせん断座屈荷重および座屈モードの変化の両方に効果がある。
- 4) 円筒殻の上端境界条件が座屈強度に及ぼす影響について、球形タンクも模擬した解析モデルを用いて確認した。その結果、円筒上端面を平面保持として検討することは安全側の条件であり問題ないと考えられる。

第4章 外圧を受けるリング補強円筒殻の胴板座屈強度

4.1 緒言

海洋構造物や潜水船等にはリング補強円筒殻構造が数多く用いられており，それらの設計を行う際には外圧を受けるリング補強円筒殻の座屈強度を精度よく推定することが重要となる．外圧作用下のリング補強円筒殻の座屈形態としては，大きく以下の4つに分類できる．

- (1) 胴板座屈 : 補強リング間の円筒殻の座屈（非軸対称もしくは軸対称座屈）
- (2) 全体座屈 : 補強リングを巻き込む形で全長又は隔壁間長にわたり起こる座屈
- (3) 補強リングの横倒れ座屈 : 補強リングが波打つ（もしくは一様に倒れる）座屈
- (4) 補強リングの局部座屈 : 補強リングのウェブ或いはフランジ自身が波打つ座屈

(1)～(3)の座屈モードのイメージを Fig. 4-1 に示す．外圧を受けるリング補強円筒殻では，大きな断面変形が生じないようにある間隔で隔壁が設けられることが多い．リング補強円筒殻の基本設計では，全体座屈や補強リングの横倒れ座屈に対して胴板座屈が先行するように，隔壁の間隔，胴板の板厚，補強リング寸法などが決定されている．また，補強リングのウェブあるいはフランジの局部座屈が生じないように，補強リングのウェブ高さウェブの板厚の比，フランジ幅とフランジ板厚の比，等が基準値以下となるように各寸法が決定され，数値解析や実験等によりこれらの局部座屈が生じないことが確認されている．

そこで，本論文では，第4章から第6章において，(1) 胴板座屈，(2) 全体座屈，(3) 補強リングの横倒れ座屈，についてそれぞれ研究を実施する．まず，第4章では(1) 胴板座屈に対する座屈強度評価手法について検討する．なお，(4) 補強リングの局部座屈，については，上術の通り，各寸法関係が基準値を満足すれば局部座屈は回避できることから本研究対象からは除外する．

外圧を受けるリング補強円筒殻の胴板座屈強度を簡易的に推定する手法として，これまで，補強リングを支持点と仮定することで Tokugawa¹⁰⁾ および Mises¹¹⁾ によって提案された無補強円筒殻に対する座屈強度推定式をそのまま用いる方法が主に用いられている．

しかしながら，リング補強円筒殻に外圧が作用する場合の胴板に生じる周方向応力 σ_θ と長手方向応力 σ_s の比率は，無補強円筒殻の場合の比率（ $\sigma_\theta : \sigma_s = 2:1$ ）とは必ずしも一致しない．この理由は，補強リングが胴板に作用する圧力荷重の一部を分担するためであり，胴板に生じる周方向応力 σ_θ と長手方向応力 σ_s の比率（ $\sigma_\theta : \sigma_s$ ）は無補強円筒殻の場合に比べて相対的に小さくなる．

近年，経済性ならびに機能性の観点から隔壁間長をより長くしたいとの要望がある．この場合には全体座屈強度が相対的に低下するため，その対策の1つとして，比較的寸法の大きい補強リ

リングを採用して全体強度を胴板強度より大きくすることが考えられる。この場合、胴板に生じる周方向応力 σ_θ と長手方向応力 σ_s の比率 ($\sigma_\theta:\sigma_s$) の低下はさらに顕著になると考えられる。

したがって、隔壁間長を長くすべく比較的寸法の大きい補強リングを採用した場合、Tokugawa および Mises によって提案された無補強円筒殻に対する胴板座屈強度推定式では精度よく算定できない可能性がある。

そこで、本章では、外圧を受けるリング補強円筒殻の弾性域における胴板座屈強度の簡易推定式として、補強リングがあることによる胴板に生じる応力比の影響を考慮した新たな推定式を提案し、推定式の精度を FEM 解析結果と比較検討することによって検証する。

さらに、胴板座屈圧力の塑性修正方法について、Johnson の塑性修正法³⁹⁾を適用するに当たり参照すべき応力算出位置と算出応力について調査する。

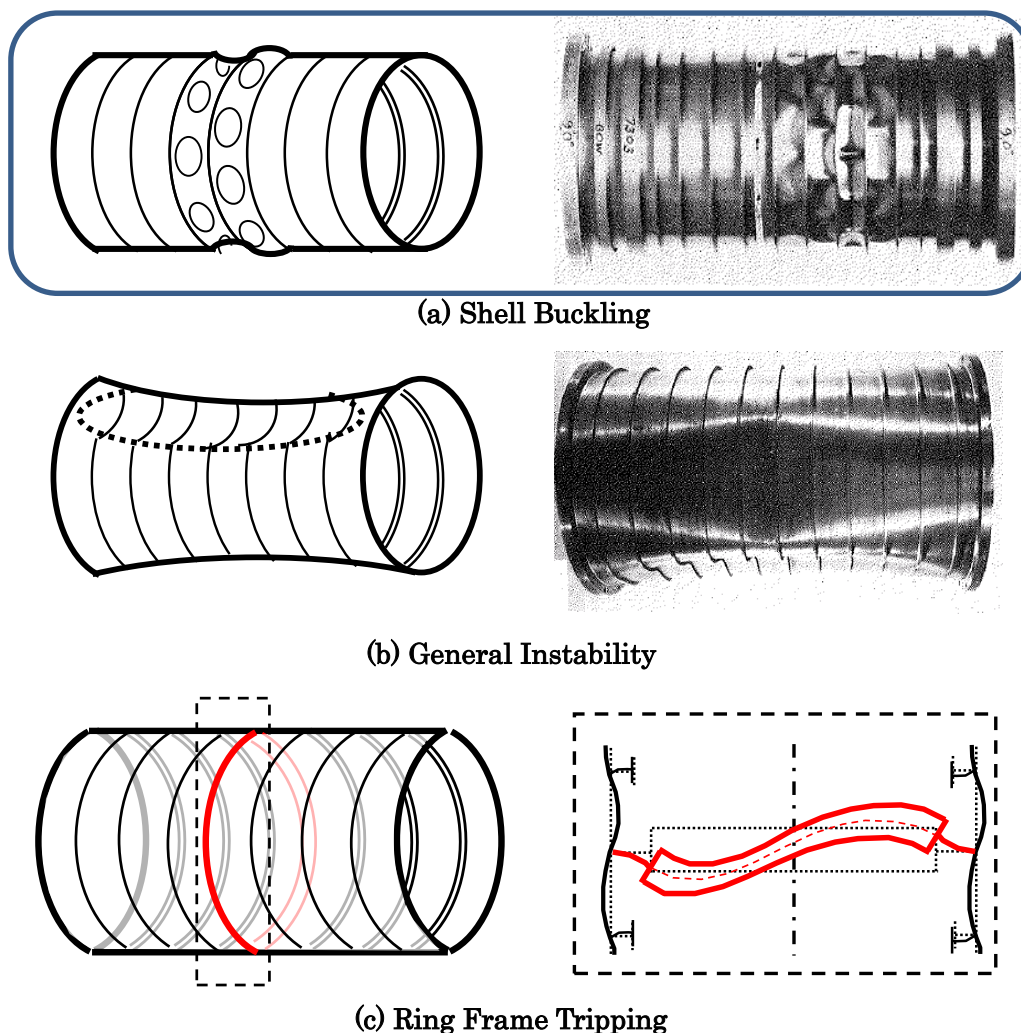


Fig. 4-1 Image of several buckling mode for ring-stiffened cylindrical shell under external pressure

4.2 従来研究の概要

4.2.1 無補強円筒殻の胴板座屈圧力

外圧を受ける無補強円筒殻の弾性域での胴板座屈圧力については、1929年に Tokugawa と Mises がほぼ同時に(4-1)式に示す推定式を導出した^{10) 11)}。

$$p_{KS} = \frac{E}{n^2 - 1 + \alpha^2/2} \left(\frac{S}{d}\right) \left[\frac{2\alpha^4}{(n^2 + \alpha^2)^2} + \frac{2}{3} \frac{1}{1 - \nu^2} \left(\frac{S}{d}\right)^2 \left\{ (n^2 + \alpha^2)^2 - \frac{n^4(2n^2 - 1)}{(n^2 + \alpha^2)^2} \right\} \right] \quad (4-1)$$

ここで、 p_{KS} は胴板座屈圧力、 E および ν は円筒殻のヤング率およびポアソン比、 d は円筒殻の外直径、 S は円筒殻胴板の板厚、 n は胴板座屈における周方向座屈波数である。さらに、 $\alpha = \pi d/2l$ であり、 l は円筒殻の長さである。

また、Tokugawa は(4-1)式において $\partial p_{KS}/\partial n = 0$ より座屈圧力の最小値を与える n を定めたいえで、 $\nu=0.3$ と仮定すると(4-2)式のように整理できることを示している。

$$p_{KS} = 2.4E \left(\frac{d}{l}\right) \left(\frac{S}{d}\right)^{2.5} \quad (4-2)$$

(4-1)式は胴板に生じる周方向応力 σ_θ と長手方向応力 σ_s の比率が 2:1 である無補強円筒殻に対し、両端を支持した場合の座屈モードを仮定して導出されている。さらに、補強リングあるいは隣接している円筒殻の存在による端部での変形拘束の影響や座屈前変形の影響は考慮されていない。したがって、リング間長の短い円筒殻の胴板座屈に対して安全側の評価を与える。

塑性域での胴板圧壊圧力 p_{KSP} の推定式として Reynolds は(4-1)式を基にして下式を得ている³⁴⁾。

$$p_{KSP} = \frac{\sqrt{E_s E_t}}{n^2 - 1 + \alpha^2/2} \left(\frac{S}{d}\right) \left[\frac{2\alpha^4}{(n^2 + \alpha^2)^2} + \frac{2}{3} \frac{1}{1 - \nu^2} \left(\frac{S}{d}\right)^2 \left\{ (n^2 + \alpha^2)^2 - \frac{n^4(2n^2 - 1)}{(n^2 + \alpha^2)^2} \right\} \right] \quad (4-3)$$

ここで、 E_s は Secant modulus、 E_t は Tangent modulus である。Secant modulus と Tangent modulus のイメージを Fig. 4-2 に示す。

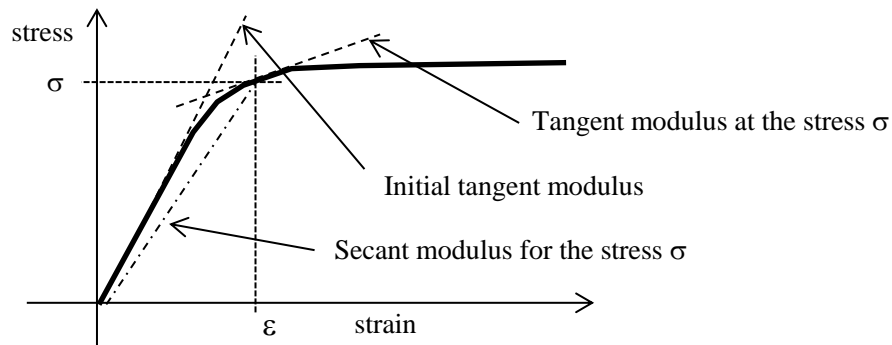


Fig. 4-2 Image of Secant modulus and Tangent modulus.

なお、塑性域での軸対称圧壊については、Sanden と Gunther はシェルに生じる最大応力が降伏応力に達するとき圧壊が生じると考え³⁵⁾、その後、吉識、山本らは軸対称圧壊が生じる円筒殻について、大きな塑性変形を伴う座屈現象として取り扱い、実験値と良く一致した結果を得ている³⁶⁾。また、Pulos は軸対称圧壊について半実験的公式を提案している³⁷⁾。Nadai は(4-1)式を塑性域に拡張し、Karman の reduced modulus を使用して圧壊圧力の推定式を導出している³⁸⁾。さらに、本間は数多くの機械加工モデルによる軸対称圧壊実験を行うとともに、FEM による弾塑性大変形解析を行い、実験値と良く一致した結果を得ている^{39) 40)}。

無補強円筒殻の胴板座屈圧力に及ぼす初期不整の影響については、弾塑性域に対して Timoshenko が(4-4)式を提案している⁵⁾。但し、(4-4)式は $n=2$ の場合についてのみ有効である。

$$p_Y^2 - \left[\frac{\sigma_Y S}{R} + \left(1 + \frac{3Re_0}{t} \right) \right] p_Y + \frac{\sigma_Y S}{R} p_{KS} = 0 \quad (4-4)$$

ここに、 p_Y は初期不整の影響を考慮した塑性座屈圧力、 σ_Y は降伏応力である。さらに、 e_0 は(4-5)式で与えられる。

$$e_0 = (R_{max} - R_{min})/R = 2e/R \quad (4-5)$$

ここに、 $e = (R_{max} - R_{min})/2$ は円筒殻の半径の偏心量であり、 R_{max} 、 R_{min} はそれぞれ円筒殻の半径の最大値と最小値である。

また、Stewart は降伏応力 26kgf/mm^2 軟鋼製円筒の胴板座屈実験を行い、初期不整による座屈圧力の低下の割合を求め、座屈圧力の推定式を提案している⁴¹⁾。その他、本間らも 59 体におよぶ胴板座屈実験に対して FEM 解析を行い、板厚の $1/2 \sim 1$ 程度の初期不整に対し座屈圧力が初期不整のない場合よりも $30 \sim 40\%$ 程度低下すると報告している⁴²⁾。

4.2.2 リング補強円筒殻の胴板座屈圧力

リング補強円筒殻の胴板座屈強度の簡易推定式として、これまでは、(4-1)式における円筒の全長を補強リングスペースに置き換えることが多かった。ただし、(4-1)式には補強リングの影響を表す項が入っておらず、主に胴板部分に関する諸寸法によって座屈圧力が決まるようになっている。リングの影響を無視することで座屈圧力は低めの値となることから安全側の評価にはなるので、補強リングの大きさが比較的小さい場合に対しては充分適用可能であったと考えられる。しかしながら、補強リングが大きくなる場合には、補強リングが胴板座屈圧力に及ぼす影響が無視できなくなると考えられ、(4-1)式では胴板座屈強度を精度よく推定できない可能性が高い。

一方、リング補強円筒殻の胴板座屈強度の簡易推定式として、Tokugawa は $\alpha = k(\pi d/2l)$ としたうえで、 k は実験により求める係数とすることでリング補強材の影響を考慮することを提案している¹⁰⁾。しかしながら、 k を決めるためには実験を行なう必要があることから、設計検討時に簡易的に推定する手法としては問題がある。

また、Reynolds⁴³⁾ は補強リングによる変形拘束の影響や座屈前変形の影響を考慮した解析を行ない実験値と良く一致した結果を得ている。しかしながら、模型試験はI型フレームで実施されており、実構造物で用いられるT型フレームではないこと、実験で用いたフレームは比較的寸法が小さいことから、補強リングが大きくなる場合への適用性には課題がある。

そのため、補強リングが大きくなる場合に対しても胴板座屈圧力が精度よく推定できる簡易推定式に対する検討する必要がある。

なお、初期不整が胴板座屈強度に及ぼす影響について、吉川は、三代らが行なったリング補強円筒殻の試験体に対しFEM解析にてシリーズ計算を行ない、座屈強度を最も低下させる初期不整形は、初期不整のない状態に対し座屈前変形を考慮して得られた非軸対称胴板座屈モードであること、胴板座屈圧力は最大初期不整量が小さい場合に比較的大きく低下すると報告している²⁴⁾。これについては、著者がこれまで実施した数値解析および模型試験の結果から、上記の考え方で問題ないことを確認している。

4.3 補強リングの影響を考慮した胴板座屈圧力の簡易推定式の提案

リング補強円筒殻の胴板座屈圧力の簡易推定式は、これまでは、(4-1)式における円筒の全長を補強リングスペースに置き換えることで用いることが多かった。ただし、(4-1)式には補強リングの影響を表す項が入っておらず、主に胴板部分に関する諸寸法によって座屈圧力が決まるようになっていた。従って、補強リングの大きさが比較的小さい場合に対しては充分適用可能であったと考えられる。ところが、補強リングの寸法が大きくなるに従い、無補強円筒殻の場合に比べ胴板に生じる周方向応力 σ_θ と長手方向応力 σ_s の比率 ($\sigma_\theta : \sigma_s$) は相対的に小さくなることから、補強リングと胴板との寸法バランスによっては、(4-1)式ではリング補強円筒殻の胴板座屈圧力の精度良い推定ができない可能性が高い。

そこで、外圧を受けるリング補強円筒殻において、補強リングがあることによる胴板に生じる応力比の影響を考慮した胴板座屈圧力推定式の定式化を行なった。

2章に示した無補強円筒殻の座屈に対する釣合方程式に対して、外力として側圧と軸圧縮を同時に受ける場合を仮定し、拘束条件として円筒殻の両端を支持とする条件となる変位関数を仮定して整理することで(4-6)式が得られることがTimoschenko²⁰⁾らによって示されている。

$$C_1 + C_2\gamma = C_3\phi_1 + C_4\phi_2 \quad (4-6)$$

ここで、 $C_1 \sim C_4$ はそれぞれ(4-7)式のように与えられる。

$$\begin{aligned} C_1 &= (1 - \nu^2)\bar{\lambda}^4 \\ C_2 &= (\bar{\lambda}^2 + n^2)^4 - 2\{\nu\bar{\lambda}^6 + 3\bar{\lambda}^4n^2 + (4 - \nu)\bar{\lambda}^2n^4 + n^6\} + 2(2 - \nu)\bar{\lambda}^2n^2 + n^4 \\ C_3 &= n^2(\bar{\lambda}^2 + n^2)^2 - 3(\bar{\lambda}^2n^2 + n^4) \\ C_4 &= \bar{\lambda}^2(\bar{\lambda}^2 + n^2)^2 + \bar{\lambda}^2n^2 \end{aligned} \quad (4-7)$$

また、 γ と $\bar{\lambda}$ はそれぞれ(4-8)式および(4-9)式のように与えられる。

$$\gamma = \frac{s^2}{12(d_{STC}/2)^2} \quad (4-8)$$

$$\bar{\lambda} = \frac{m\pi(d_{STC}/2)}{l} \quad (4-9)$$

ここで、 m は長手方向への座屈半波数、 d_{STC} は胴板の板厚中心での直径である。

また、 ϕ_1 および ϕ_2 はそれぞれ胴板に生じる周方向応力および長手方向応力に関する項でありそれぞれ(4-10)式および(4-11)式で示される。

$$\phi_1 = \frac{q(d_{STC}/2)(1 - \nu^2)}{ES} \quad (4-10)$$

$$-\phi_2 = \frac{N_x(1 - \nu^2)}{ES} \quad (4-11)$$

ただし、 q は側圧、 N_x は長手方向の単位幅あたりの断面力（引張が正）である。

外圧を受ける無補強円筒殻の場合は、胴板の周方向応力と長手方向応力の比が2:1、すなわち ϕ_1 と ϕ_2 の比が2:1であることを考慮すれば、(4-6)式は(4-1)式のように整理できる²⁰⁾。

一方、外圧が作用するリング補強円筒殻の補強リング間中央の胴板に生じる周方向応力 σ_θ は(4-12)式のように表せる⁴⁴⁾。

$$\sigma_\theta = \left(\frac{pd_{STC}}{2S}\right) \left[1 - \frac{\alpha\{1 - (\nu/2)\}\zeta}{1 + \alpha}\right] \quad (4-12)$$

ただし、 ζ は(4-13)式のように与えられる。

$$\zeta = 2 \frac{\sinh(\beta) \cos(\beta) + \cosh(\beta) \sin(\beta)}{\sinh(2\beta) + \sin(2\beta)} \quad (4-13)$$

また、 α および β はそれぞれ以下に示す(4-14)式および(4-15)式のように求められる。

$$\alpha = \frac{A_R}{l_{eo}S} \quad (4-14)$$

$$\beta = \frac{l}{1.56\sqrt{(d_{STC}/2)S}} \quad (4-15)$$

ただし、 A_R は補強リングの全断面積、 l_{eo} は補強リングに対する胴板の有効幅であり、 l_{eo} は(4-16)式のように求められる。

$$l_{eo} = \frac{l \cosh(2\beta) - \cos(2\beta)}{\beta \sinh(2\beta) + \sin(2\beta)} \quad (4-16)$$

外圧を受けるリング補強円筒殻の円筒胴に生じる長手方向応力と、(4-12)式にて得られる周方向応力を考慮して(4-10)式および式の ϕ_1 と ϕ_2 を決定すると、それぞれ(4-17)式および(4-18)式のようになる。

$$\phi_1 = \left[\left(\frac{p_{KS} d_{STC}}{2} \right) \left[1 - \frac{\alpha \{1 - (v/2)\} \zeta}{1 + \alpha} \right] \right] \left(\frac{1 - v^2}{ES} \right) \quad (4-17)$$

$$\phi_2 = \left(\frac{p_{KS} d_{STC}}{2} \right) \left(\frac{1 - v^2}{ES} \right) \quad (4-18)$$

(4-17)式および(4-18)式を(4-6)式に代入して整理すると、補強リングの影響を考慮した胴板座屈圧力 p_{KS} に対する簡易推定式として(4-19)式を得る。

$$p_{KS} = \left(\frac{E}{1 - v^2} \right) \left(\frac{2S}{d_{STC}} \right) \frac{C_1 + C_2 \gamma}{C_3 \left[1 - \frac{\alpha \{1 - (v/2)\} \zeta}{1 + \alpha} \right] + \left(\frac{1}{2} \right) C_4} \quad (4-19)$$

4.4 胴板座屈圧力の簡易推定式の精度検証

リング補強円筒殻に対する胴板座屈圧力の簡易推定式の推定精度を検証すべく、補強リングが胴板の内側に配された場合（以降、内フレーム方式と表記）、および外側に配された場合（以降、外フレーム方式と表記）について、それぞれ FEM 解析にて得られた結果との比較検証を行なった。なお、本解析では、簡易推定式との比較を行なうために、材料の降伏などの非線形性の影響は考慮していない。

4.4.1 検討対象

Yamamoto らの研究⁴⁵⁾にて用いられたリング補強円筒殻の圧壊試験模型を参考に検討対象寸法を設定した。なお、Yamamoto らの論文では補強リングはすべて I 型となっているが、本研究においてはより実構造に近づけるべく、補強リングはすべて T 型として検討を実施した。

検討対象のイメージを Fig. 4-3 に、寸法を Table 4-1 にそれぞれ示す。さらに、Table 4-1 に示す寸法をもとに、胴板、補強リングのウェブおよびフランジの寸法をそれぞれ変化させたシリーズ計算を実施した。シリーズ計算に用いた各寸法を Table 4-2 に示す。

4.4.2 FEM 解析

汎用有限要素法プログラム Abaqus Ver.6.12 にて線形座屈固有値解析を実施した。解析モデルの一例を Fig. 4-4 に示す。円筒殻および補強リングは 8 節点薄肉シェル要素 (S8R5) を用いてモデル化した。長手方向のモデル化範囲は $1/2+1+1/2$ フレームスペースとし、拘束条件として、端部は片端を対称条件、片端は一様断面保持条件と長手方向への一様変位条件を課した。周方向は 180° 分だけモデル化し、端面に対称条件を課した。荷重は胴板表面に圧力荷重を、胴板端部（一様断面保持条件を課した側）に対して円筒殻の長手方向にふさぎ板の表面に作用する圧力荷重相当の圧縮荷重を付与した。胴板の要素分割は、胴板座屈モードが充分表現できるよう、周方向に $1.0(\text{deg.})$ ピッチ、長手方向は補強リング間 12 要素とした。また、補強リングのウェブは 5 要素以上、フランジは 2 要素にて分割している。なお、要素分割が充分であることは別途分割数を変更した計算結果との比較により確認している。

Table 4-1 に示した基本寸法 (Case1-1-1) による解析結果を Fig. 4-5 に示す。

Table 4-1 Principal dimensions of analysis model.

	Notation	Value (mm)	Notes
Outer Diameter	d	980.0	
Shell Thickness	S	9.0	Parameter
Frame Space	l	163.0	
Web Height	H_w	40.0	Parameter
Web Thickness	T_w	3.0	
Face Breadth	B_f	20.0	Parameter
Face Thickness	T_f	6.0	

Table 4-2 Parameter and analysis case.

Parameter	Case	s (mm)	Ring Stiffener (T-shape)	
			Hw (mm)	Bf (mm)
Base	1-1-1	9.0	40.0	20.0
Shell Thickness (s)	2-1-1	10.0	↓	↓
	3-1-1	11.0	↓	↓
	4-1-1	12.0	↓	↓
Web Height (H_w)	1-2-1	9.0	50.0	↓
	1-3-1	↓	65.0	↓
	1-4-1	↓	90.0	↓
Face Breadth (B_f)	1-1-2	↓	40.0	16.0
	1-1-3	↓	↓	12.0
	1-1-4	↓	↓	9.0

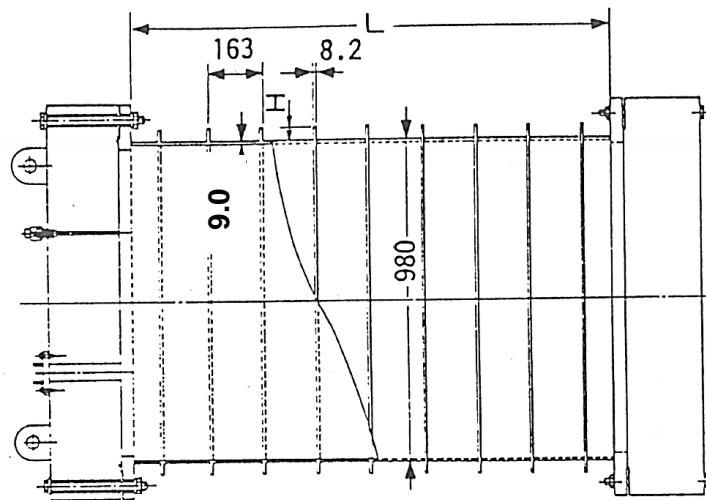


Fig. 4-3 Analysis model.

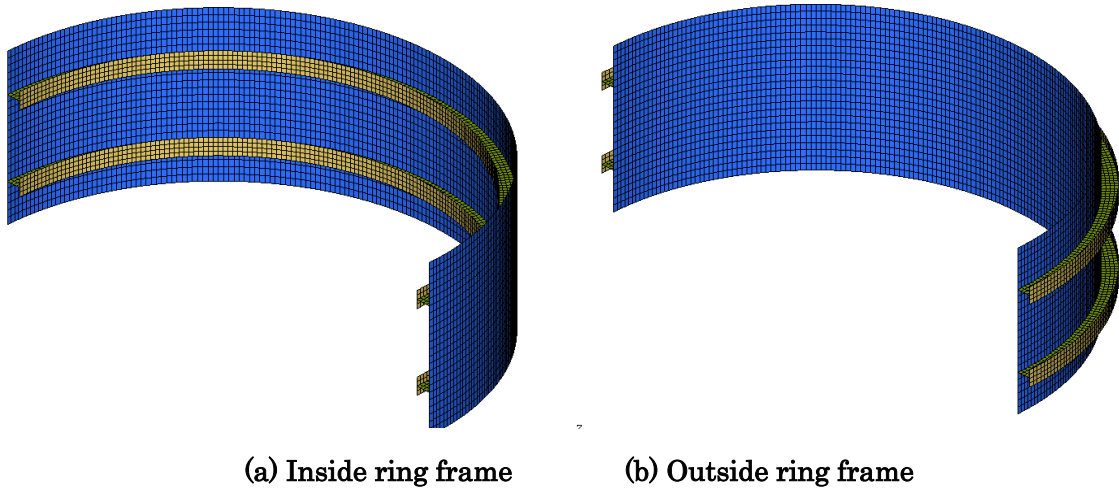
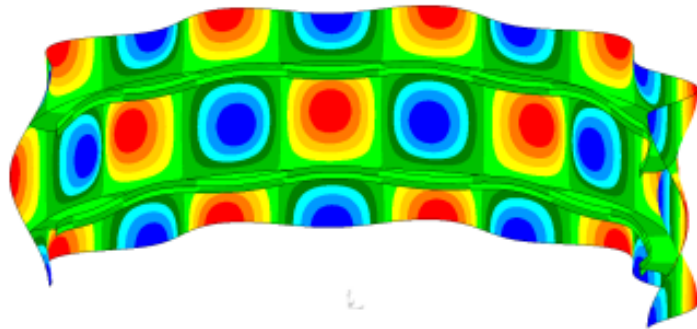
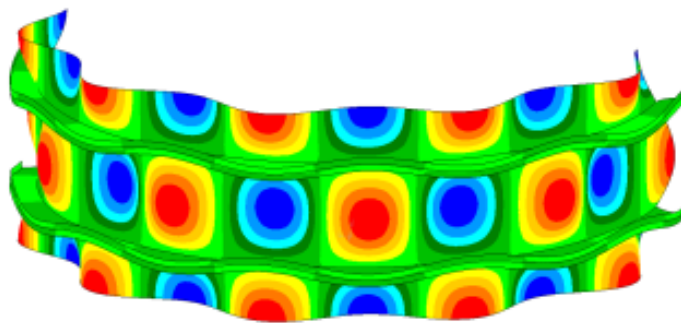


Fig. 4-4 FE-Model.



(a) Inside ring frame



(b) Outside ring frame

Fig. 4-5 Shell buckling mode under external pressure (case 1-1-1).

4.4.3 提案した推定式と FEM 解析結果との比較

ウェブ高さをパラメータとした場合の補強リング間中央の胴板に生じる周方向応力と長手方向応力の比率を Fig. 4-6 に示す。Fig. 4-6 より、本検討に用いたリング補強円筒殻の胴板部の周方向応力と長手方向応力の比率は概ね 1.8~1.9:1 となり 10%~20%の差が出ることで、ウェブ高さが高くなるにつれて若干ではあるがその差が大きくなることが確認できた。

ウェブ高さをパラメータとした場合の胴板座屈圧力および周方向への座屈波数の値の比較を Fig. 4-7 および Fig. 4-8 に示す。Fig. 4-7 は内フレーム方式の値を、Fig. 4-8 は外フレーム方式の値を示している。なお、提案式および FEM 解析にて得られた数値は、(4-1)式にて得られる無補強円筒殻の胴板座屈圧力の値で無次元化している。

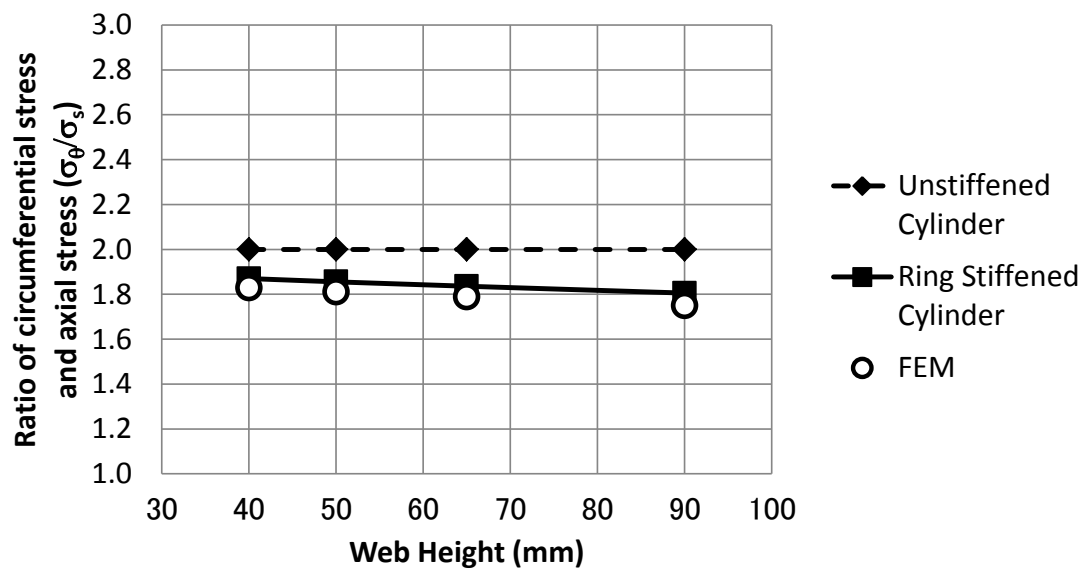
Fig. 4-7 および Fig. 4-8 より、Mises の式ではウェブ高さの違いにかかわらず同じ胴板座屈圧力となるが、提案式ではウェブが高くなるにつれて胴板座屈圧力が大きくなるのがわかる。これは、Fig. 4-6 に示すように、ウェブが高くなるにつれて胴板に生じる周方向応力が減少していくためだと考えられる。提案式と FEM 解析結果がよく一致しているのは、提案式ではその影響を考慮できているためと考えられる。

ウェブ高さ以外のパラメータも含めた胴板座屈圧力の比較を Table 4-3 に示す。なお、提案式および FEM 解析にて得られた数値は、(4-1)式にて得られた値で無次元化している。Table 4-3 より、(4-19)式および FEM 解析にて得られた胴板座屈圧力は(4-1)式よりも概ね 5%程度高い値となっていること、また、(4-19)式および FEM 解析にて得られた胴板座屈圧力は概ね一致していることが確認できる。したがって、外圧を受けるリング補強円筒殻の弾性域における胴板座屈強度については、補強リングの影響による胴板の周方向応力低下の影響を考慮した定式化を行なうことで、これまで一般的に用いられてきた無補強円筒殻に対する推定式に比べて精度の良い推定ができることが分かった。

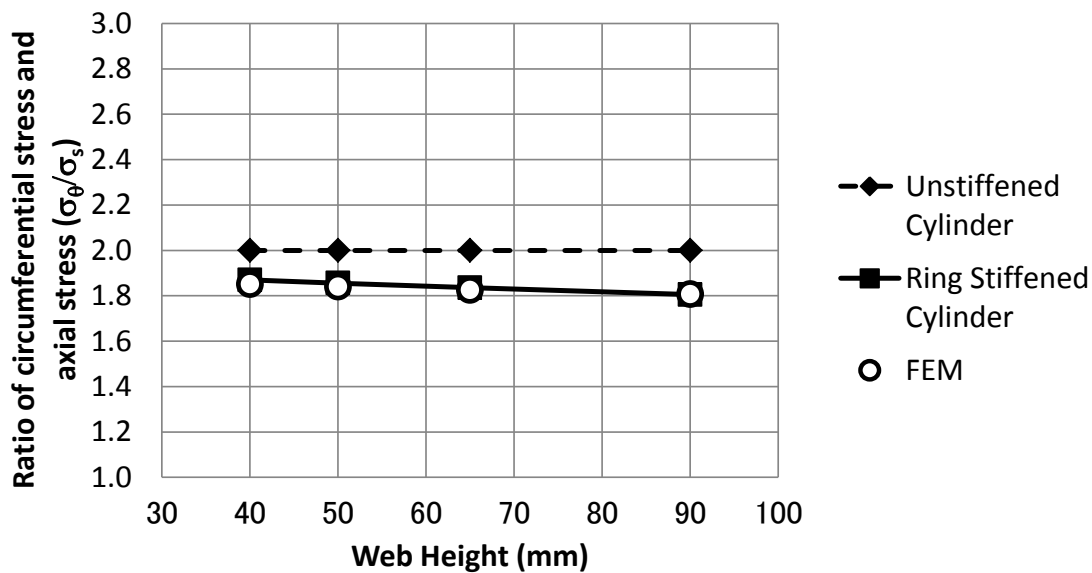
ただし、極端に補強リングのウェブが高くなる場合には、(4-19)式と FEM 解析結果とで若干の差異がみられ、その傾向は内フレーム方式と外フレーム方式で異なることがわかる。具体的には内フレーム方式はウェブが高くなるにつれて FEM 解析の方が高めの胴板座屈圧力を示す一方、外フレーム方式では FEM 解析の方が低めの胴板座屈圧力を示している。

これは、リング補強円筒殻が一様に面外圧を受けて半径が減少した場合、内フレーム方式のフランジの方が外フレーム方式のフランジよりも圧縮ひずみが大きく、ウェブが高いほどその影響が大きくなるためと考えられる。すなわち、内フレーム方式の場合、胴板が分担する荷重がフランジのそれより相対的に小さくなるため胴板座屈圧力は大きめになり、外フレーム方式の場合、胴板が分担する荷重がフランジのそれより相対的に大きくなるため胴板座屈圧力が小さめになると考えられる。ウェブ高さが 40mm (Case 1-1-1)と 90mm (Case 1-4-1)それぞれの場合について、単位圧力(1.0MPa)を胴板表面のみに作用させた場合の胴板およびフランジの要素中心での周方

向応力分布をそれぞれ Fig. 4-9 および Fig. 4-10 に示す. Fig. 4-9 および Fig. 4-10 から上記のことが確認できる.

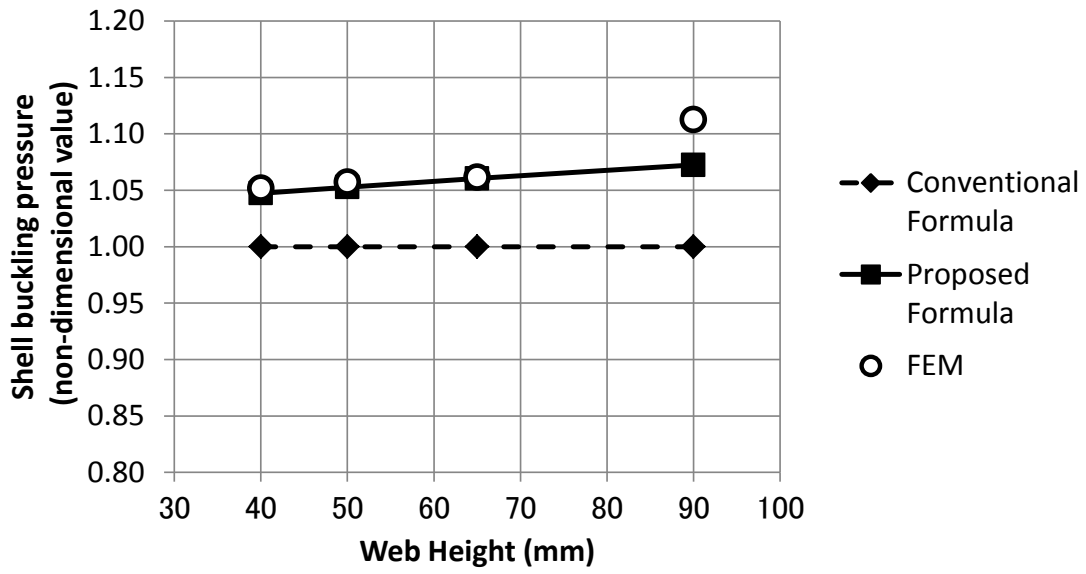


(a) Inside ring frame

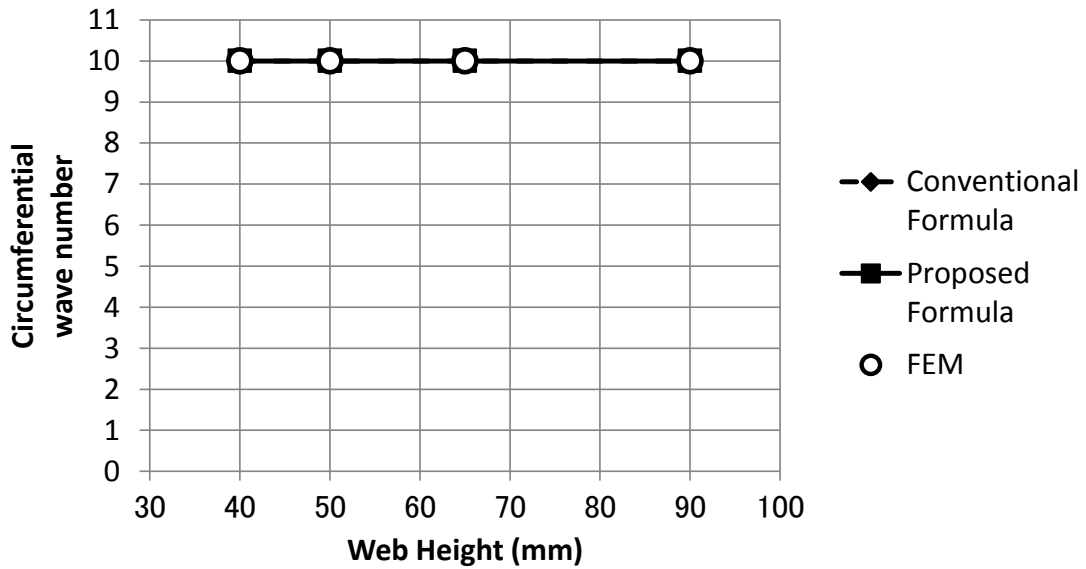


(b) Outside ring frame

Fig. 4-6 Ratio of circumferential stress and axial stress (σ_θ/σ_s) at the center of shell between ring frames (Parameter: web height).

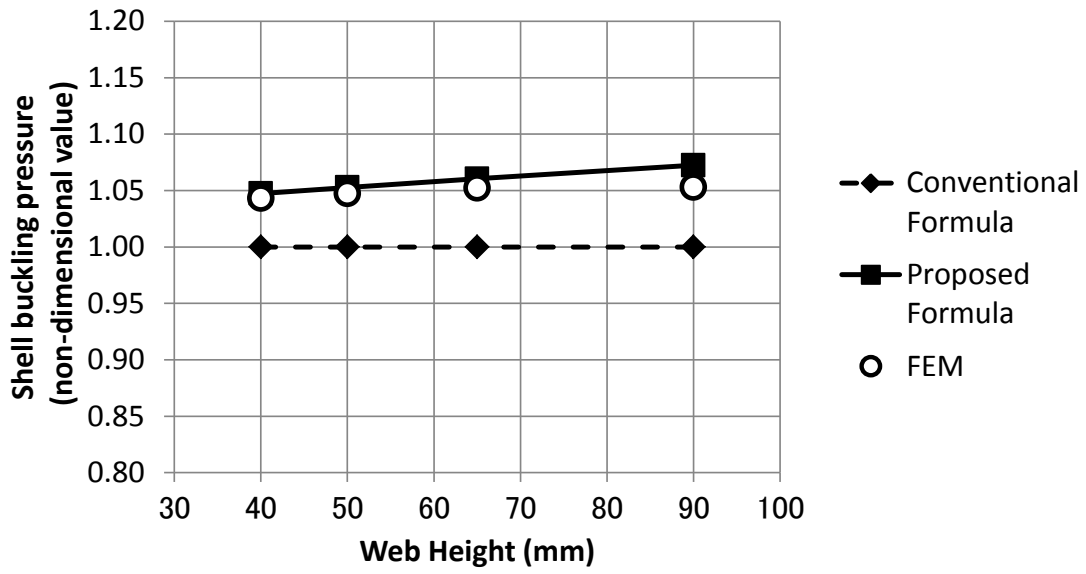


(a) Buckling pressure (non-dimensional value)

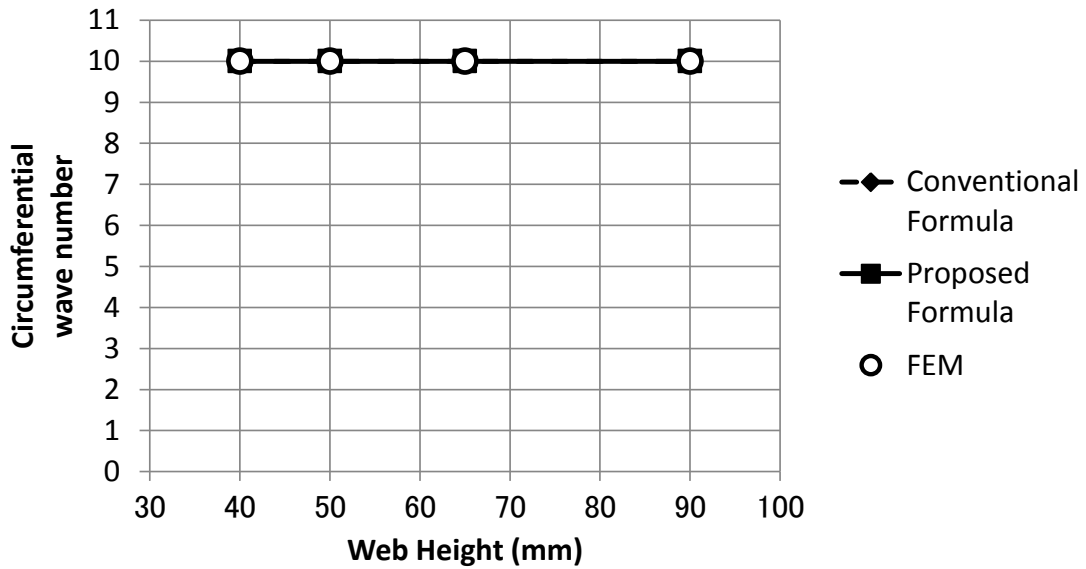


(b) Circumferential wave number

Fig. 4-7 Comparison of shell buckling pressure and circumferential wave number between proposed formula and FEM results for inside ring frame (Parameter: web height).



(a) Buckling pressure (non-dimensional value)



(b) Circumferential wave number

Fig. 4-8 Comparison of shell buckling pressure and circumferential wave number between proposed formula and FEM results for outside ring frame (Parameter: web height).

**Table 4-3 Comparison of shell buckling pressure
between proposed formula and FEM.**

(a) Inside ring frame

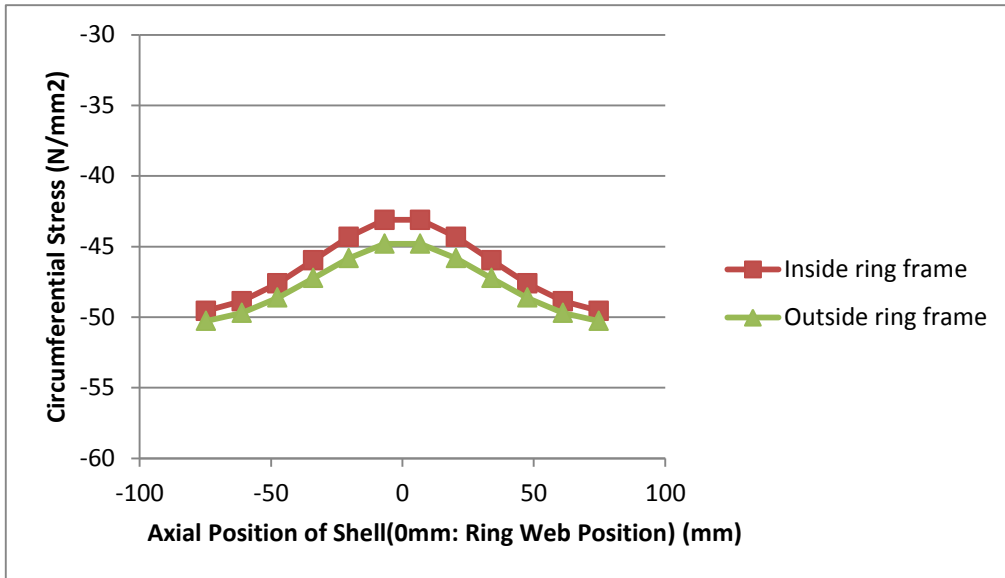
Parameter	Case	Proposed Formula		FEM		Proposed Formula / FEM
		$P_{KS}^{(1)}$	$n^{(2)}$	$P_{KS}^{(1)}$	$n^{(2)}$	
Base	1-1-1	1.047	10	1.052	10	0.996
Shell Thickness (s)	2-1-1	1.045	9	1.035	9	1.010
	3-1-1	1.044	9	1.021	9	1.023
	4-1-1	1.043	9	1.032	10	1.011
Web Height (H_w)	1-2-1	1.053	10	1.057	10	0.996
	1-3-1	1.060	10	1.062	10	0.999
	1-4-1	1.072	10	1.113	10	0.964
Face Breadth (B_f)	1-1-2	1.043	10	1.039	10	1.004
	1-1-3	1.038	10	1.034	11	1.004
	1-1-4	1.035	10	1.329	15	0.779

(b) Outside ring frame

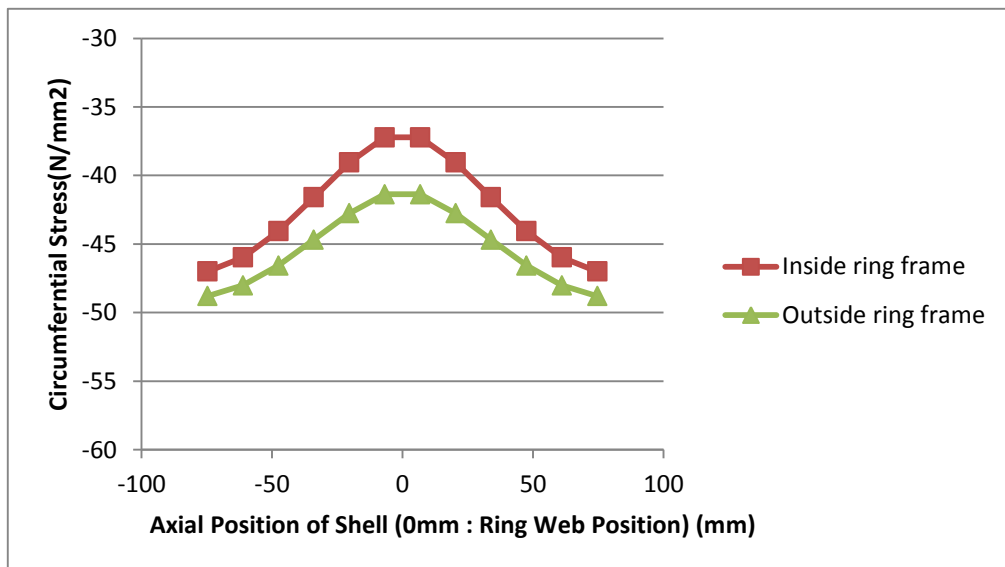
Parameter	Case	Proposed Formula		FEM		Proposed Formula / FEM
		$P_{KS}^{(1)}$	$n^{(2)}$	$P_{KS}^{(1)}$	$n^{(2)}$	
Base	1-1-1	1.047	10	1.043	10	1.004
Shell Thickness (s)	2-1-1	1.045	9	1.026	9	1.018
	3-1-1	1.044	9	1.012	9	1.032
	4-1-1	1.043	9	1.023	10	1.020
Web Height (H_w)	1-2-1	1.053	10	1.048	10	1.005
	1-3-1	1.060	10	1.052	10	1.008
	1-4-1	1.072	10	1.053	10	1.018
Face Breadth (B_f)	1-1-2	1.043	10	1.029	10	1.014
	1-1-3	1.038	10	1.131	13	0.918
	1-1-4	1.035	10	1.515	17	0.683

(1) Shell buckling pressure (non-dimensional value)

(2) Circumferential wave number

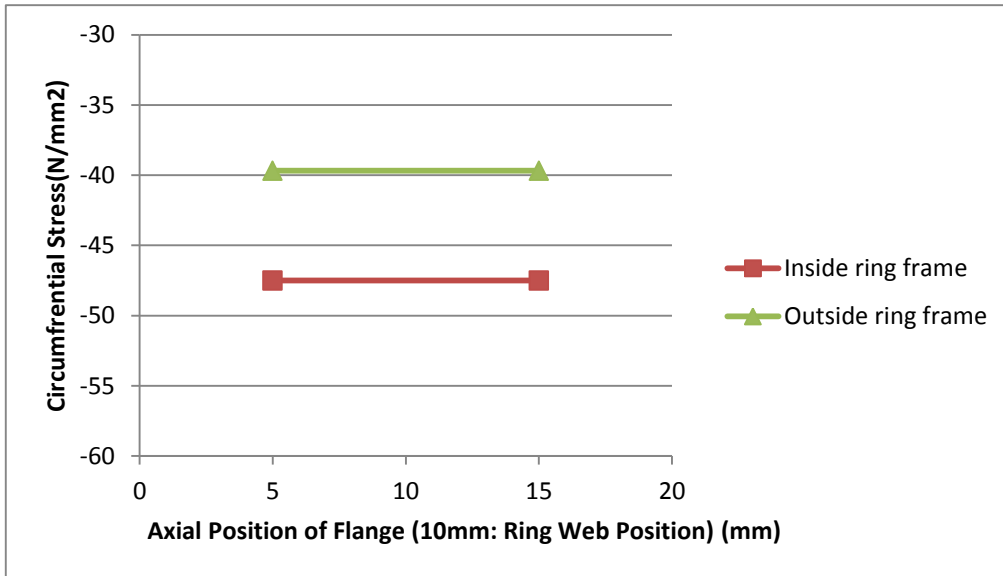


(a) Web height 40mm

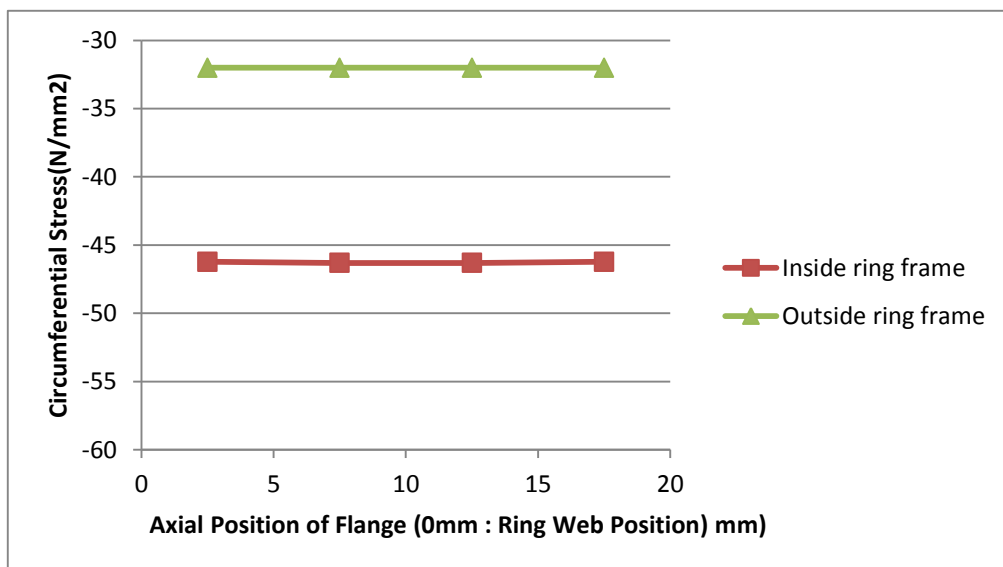


(b) Web height 90mm

Fig. 4-9 Comparison of circumferential stress distribution at shell between inside ring frame and outside ring frame under external lateral pressure



(a) Web height 40mm



(b) Web height 90mm

Fig. 4-10 Comparison of circumferential stress distribution at flange between inside ring frame and outside ring frame under external lateral pressure

4.5 胴板座屈圧力の塑性修正について

塑性域での胴板座屈圧力を求めるためには、(4-19)式にて示される胴板座屈圧力推定式(弾性解)から何らかの形で塑性修正を行なう必要がある。本研究では、胴板座屈圧力の塑性修正方法として(4-20)式で表される Johnson の式³³⁾を用いた方法を採用する。

$$\sigma_k = \sigma_Y \left(1 - \frac{\sigma_Y}{4\sigma_e} \right) \quad (4-20)$$

ただし、 σ_k は塑性座屈応力、 σ_Y は材料の降伏応力、 σ_e は弾性座屈応力である。

外圧を受けるリング補強円筒殻の場合、胴板に生じる応力は長手方向および周方向の2軸圧縮状態となる。さらに、補強リングがあることに伴い、周方向応力は補強リング間の胴板長手方向に対して分布する。そのため、(4-20)式を用いて胴板座屈圧力の塑性修正を行なうにあたっては、参照すべき構造の位置および参照すべき応力について決定しておく必要がある。

そこで、2.3節および付録2に示す解析理論を基に構築された、軸対称殻弾塑性座屈解析プログラム Axis-BUCK³⁰⁾を用いて弾塑性座屈解析を行ない、座屈固有値と塑性化による胴板の剛性の低下の関係を調べた。なお、圧縮荷重を受ける材料の応力-ひずみ関係は一般的に明瞭な降伏を示さず、高強度材においては特にその傾向がみられる。そこで、本検討では、Johnsonの塑性修正に用いる降伏応力は0.2%耐力($\sigma_{0.2}$)とした。

さらに、比例限応力(σ_{pl})を0.2%耐力の75%と仮定し、材料の0.2%耐力と一致するように応力-ひずみ線図を仮定した。仮定した応力-ひずみ線図のイメージを Fig. 4-11 に示す。

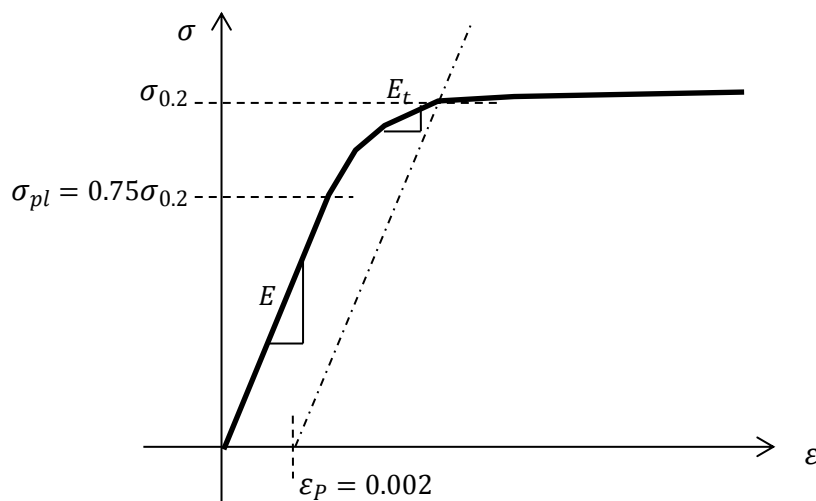


Fig. 4-11 Image of stress-strain curve

4.5.1 FEM 解析

解析対象を Table 4-4 に示す。本検討では、補強リングが負担する荷重が大きくなる内フレーム方式を対象とした。境界条件を以下に示す。

(a)変形計算・・・両端で周方向軸周りの回転および半径方向変位を固定

1ヶ所のみ軸方向および周方向変位固定

(b)座屈計算・・・両端で周方向軸周りの回転および半径方向，周方向変位固定

Fig. 4-12 に検証した部位を，Fig. 4-13 に解析結果を示す。Fig. 4-13 の左縦軸は各荷重ステップにおける各部位でのミーゼス相当応力からその部位の接線剛性 E_t を求め弾性域における剛性 E で除した値を，右縦軸は無次元化した座屈固有値を示している。

なお，補強リング位置中心および裏面については座屈直前においても塑性化による剛性低下は見られなかったことから，Fig. 4-13 では省略してある。

Fig. 4-13 より，座屈直前でもリング位置では胴板の塑性化は表面以外では進行しておらず，主として補強リング間中央の胴板の塑性化が座屈固有値に影響を与えていることが分かる。すなわち，胴板座屈の場合，外圧が塑性座屈圧力に達した際もリング位置では胴板の塑性化はほとんど進行しておらず，主としてリング間中央の塑性化が胴板座屈の座屈固有値に影響を与えていることがわかる。

したがって，胴板座屈圧力に対する塑性修正では，補強リング間中央での板厚の各層におけるミーゼス応力の平均値を用いることとした。

4.5.2 材料の降伏応力の影響

軸対称殻弾塑性座屈解析プログラム Axis-BUCK を用いて，材料の 0.2%耐力のみを変化させたシリーズ計算を行なった。

解析結果を Fig. 4-14 に示す。Fig. 4-14 より，胴板座屈圧力については各 0.2%耐力において FEM と推定式の間誤差は約 5%程度であり，比較的良好な一致を示していることがわかる。

Table 4-4 Dimension for calculation model

Outer Diameter (mm)	1,050	Length (mm)	2,100
Frame Space (mm)	150	Shell thickness (mm)	5.0
Web Height (mm)	40	Face Breadth (mm)	20
Web Thickness (mm)	8.0	Face Thickness (mm)	7.0
Young's modulus (N/mm ²)	206,000	Poisson's ratio	0.3

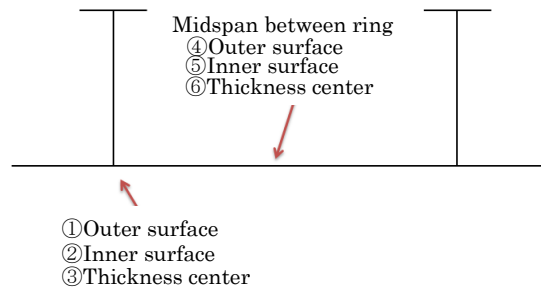


Fig. 4-12 Checking point for reduction of stiffness due to yield of shell

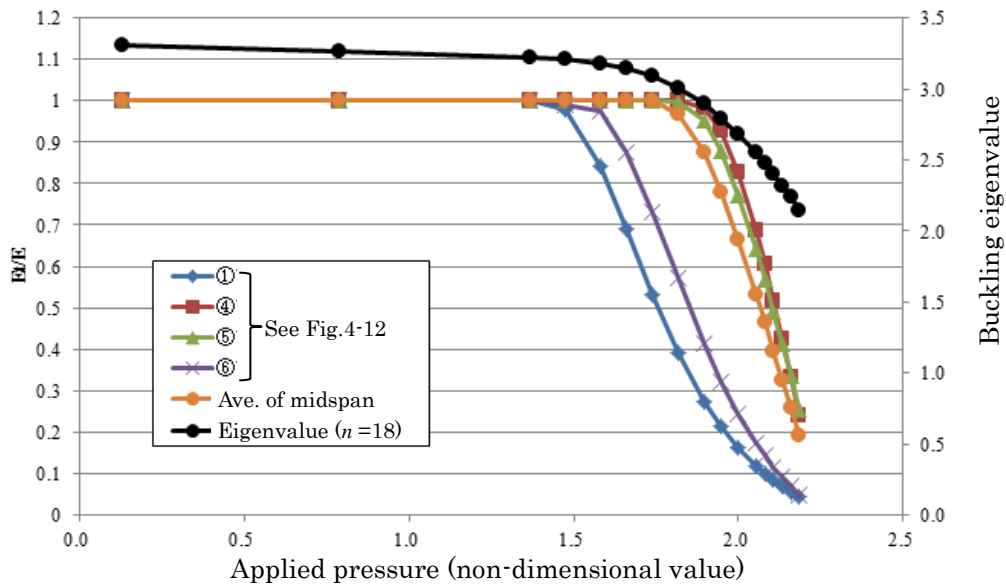


Fig. 4-13 Relation between buckling eigenvalue and reduction of stiffness due to yield of shell

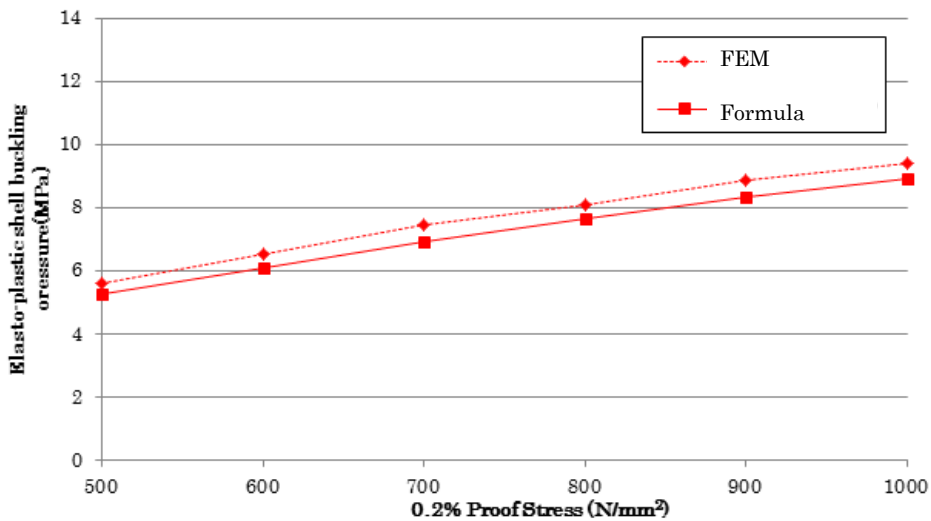


Fig. 4-14 Comparison of plastic shell buckling pressure between proposed method and FEM.

4.6 結言

本章では、潜水船等に用いられる外圧作用下のリング補強円筒殻の胴板座屈圧力評価を対象とし、補強リングの影響による胴板の周方向応力低下の影響を考慮した胴板座屈圧力の推定方法について調べ、以下の結論を得た。

- 1) 弾性域における胴板座屈強度について、補強リングの影響による胴板の周方向応力低下の影響を考慮した推定式を提案した。提案した推定式に対して FEM 解析結果と比較した結果、これまで一般的に用いられてきた無補強円筒殻に対する推定式に比べて精度の良い推定ができることを確認した。
- 2) 胴板座屈圧力の塑性修正方法について、Johnson の塑性修正法を適用するに当たり参照すべき応力算出位置と算出応力について調査した。その結果、胴板座屈圧力に対しては、リング間中央での板厚の各層におけるミーゼス応力の平均を用いることで塑性修正が適切に実施可能であることを確認した。

第5章 外圧を受けるリング補強円筒殻の全体座屈強度

5.1 緒言

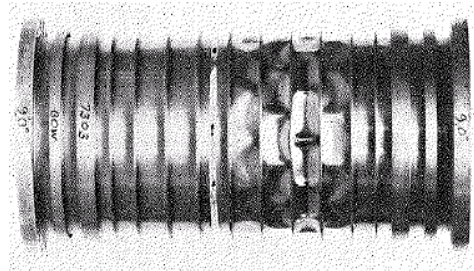
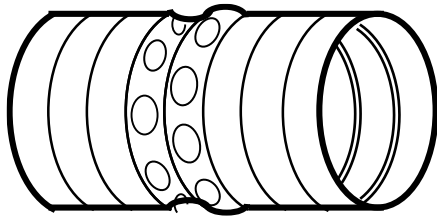
本論文では、第4章から第6章にて、(1) 胴板座屈、(2) 全体座屈、(3) 補強リングの横倒れ座屈、についてそれぞれ研究を実施する。第5章では(2) 全体座屈に対する座屈強度評価手法について検討する。(1)~(3)の座屈モードのイメージを Fig. 5-1 に示す。

外圧を受けるリング補強円筒殻の全体座屈強度を簡易的に推定する手法として、これまで、Tokugawa¹⁰⁾ および Bryant¹²⁾ によって提案された分離剛性(座屈圧力に対する胴板の寄与分と補強リングの寄与分をそれぞれ求めその合計を座屈圧力とする考え方)に基づいた算定式がある。さらに、それらの算定式において重要となるリングフレームの断面2次モーメント算出における胴板の有効幅の算定方法については、寺田、島本ら¹³⁾、Pulosら¹⁴⁾、大坪ら¹⁵⁾、及び吉村・吉川¹⁶⁾の研究がある。特に吉村・吉川は、上記の分離剛性を用いて評価する際の補強リングの寄与分を求める際に必要となる胴板の有効幅に関して、Pulosが提案した軸対称となる座屈前変形の影響と、座屈時の周方向波数を持つモードとなる座屈変形の両者の影響を考えた算定方法を提案し、FEM解析結果と比較することでその精度を検証している。

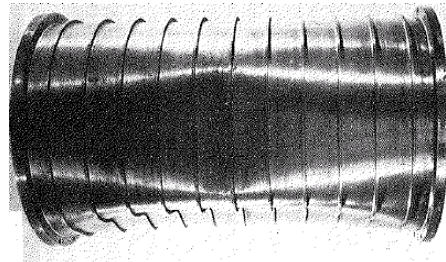
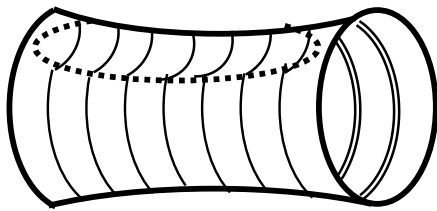
近年、重量減を目的として隔壁間長をより長くしたいとの要望がある。この場合、全体圧壊強度が相対的に低下するため補強リングの寸法を比較的大きくする必要がある。その際、補強リングが胴板の内側に配置された場合(内フレーム方式)と、外側に配置された場合(外フレーム方式)では全体圧壊強度の違いが大きくなるが、この原因は完全には解明されていない。

そこで、本章では、外圧を受ける内外リング補強円筒殻の弾性域における全体圧壊圧力簡易推定式として、4章にて示した補強リングが大きくなるほど胴板の周方向応力が低下する影響を考慮するため、初めに補強リングの項を加えた面内力およびモーメントを用い、力の釣合式から全体圧壊圧力簡易推定式を導出する。さらに、補強リングの寸法が大きくなると補強リングの曲げ変形に対する曲り梁効果が大きくなる影響およびせん断変形の影響を考慮した推定式を提案する。その簡易推定式の精度をFEM解析結果と比較検討することによって検証する。

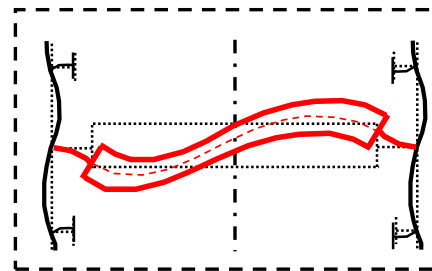
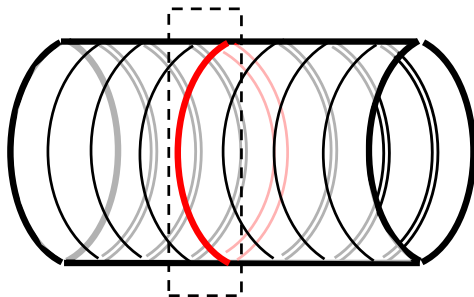
さらに、全体座屈圧力の塑性修正方法について、Johnsonの塑性修正法³⁷⁾を適用するに当たり参照すべき応力算出位置と算出応力について調査した。



(a) Shell Buckling



(b) General Instability



(c) Ring Frame Tripping

Fig. 5-1 Image of several buckling mode for ring-stiffened cylindrical shell under external pressure

5.2 従来研究の概要

5.2.1 リング補強円筒殻の全体座屈圧力

リング補強円筒殻の弾性域での全体座屈については Tokugawa が初めて分離剛性に基づいた算定式である(5-1)式を提案した¹⁰⁾.

$$p_{KB} = \frac{E}{n^2 - 1 + \alpha^2/2} \left(\frac{s}{d} \right) \left[\frac{2\alpha^4}{(n^2 + \alpha^2)^2} + \frac{2}{3} \frac{1}{1 - \nu^2} \left(\frac{s}{d} \right)^2 \beta \left\{ (n^2 + \alpha^2)^2 - \frac{n^4(2n^2 - 1)}{(n^2 + \alpha^2)^2} \right\} \right] + \frac{8EI}{d^3 l'} \gamma (n^2 - 1) \quad (5-1)$$

ここで、 p_{KB} は全体座屈圧力、 E および ν は円筒殻および補強リングのヤング率およびポアソン比、 d は円筒殻の外直径(= $2a$)、 s は円筒殻胴板の板厚、 n は全体座屈における周方向座屈波数である。さらに、 $\alpha = \pi d/2L$ であり、 L は隔壁間のリング補強円筒殻全体の長さである。また、 I は補強リングの断面2次モーメント、 l' はフレームスペースである。

(5-1)式の右辺第1項は、座屈圧力に対するシェルの寄与分、第2項は補強リングの寄与分と考えることができる。すなわち、座屈圧力に対するシェルの寄与分と補強リングの寄与分を別々に求め、その合計を座屈圧力とする考え方である。なお、(5-1)式の β 、 γ は、胴板及び補強材それぞれの中立軸と胴板および補強リングを一体とみなした場合の中立軸の相違による補正係数であり、補強リングの断面形状に依存する。

また、Kendrick は撓み形を全体変形とリング間の局部変形の和で表し、周方向の座屈波数ごとにエネルギー法を用いて陰な形で全体座屈荷重の算定式を与えている⁴⁶⁾。周方向の座屈波数ごとに圧壊圧力を求め、座屈圧力が最も小さくなる周方向波数を求めれば、その値が実際の座屈荷重および座屈波数の推定値である。一方、Flügge, Bodner, Becker らは、リング付円筒殻を直交異方性の円筒殻としてとらえて座屈圧力を求め、また Ball は Bodner の解が Kendrick の解と良く一致すると報告している⁵⁾。

Bryant はシェルとリングの座屈の相関した近似解をつくり Tokugawa の式とほぼ一致した(5-2)式を提案している¹²⁾。

$$p_{KB} = \frac{ES}{a_{STC}} \frac{\lambda^4}{(n + \lambda^2/2 - 1)(n^2 + \lambda^2)^2} + \frac{EI_e(n^2 - 1)}{a_{STC}^3 l'} \quad (5-2)$$

ここで、 a_{STC} は胴板の板厚中心半径、 $\lambda = \pi a_{STC}/L$ 、 I_e は胴板の有効幅（以降、胴板有効幅と表記）を含めた補強リングの曲げ剛性である。

また、山本⁴⁷⁾は隔壁位置で両端支持及び両端固定となる円筒殻の座屈荷重をエネルギー法で求め、実験値と良く一致した結果を得ている。

塑性域での全体座屈圧力 p_{KBP} は, Lunchick が(5-2)式を基にして(5-3)式を提案している⁴⁸⁾ .

$$p_{KBP} = \frac{E_t S}{a_{STC}} \frac{1}{(n + \lambda^2/2 - 1)} \left[\frac{\lambda^4}{(n^2 + \lambda^2)^2 \left\{ \frac{E_t}{E_s} + \frac{3}{4} \left(1 - \frac{E_t}{E_s} \right) \frac{\lambda^4}{(n^2 + \lambda^2)^2} \right\}} \right] + \frac{E_t I_e (n^2 - 1)}{a_{STC}^3 l'} \quad (5-3)$$

ここで, E_s は Secant modulus, E_t は Tangent modulus である.

また, Reynolds も塑性域での胴板圧壊圧力の推定式を基にして(5-4)式を提案している⁴⁹⁾ .

$$p_{KBP} = \frac{\sqrt{E_s E_t}}{n^2 + \lambda^2/2 - 1} \left(\frac{S}{2a_{STC}} \right) \left[\frac{2\lambda^4}{(n^2 + \lambda^2)^2} + \frac{2}{3} \frac{1}{1 - \nu^2} \left(\frac{S}{2a_{STC}} \right)^2 \left\{ (n^2 + \lambda^2)^2 - \frac{n^4(2n^2 - 1)}{(n^2 + \alpha\lambda^2)^2} \right\} \right] + \frac{E_t I_e (n^2 - 1)}{a_{STC}^3 l'} \quad (5-4)$$

寺田・島本¹³⁾ は, (5-1)式の β , γ を 1.0 としたうえで大胆に簡略化し, さらに胴板およびリング補強材で降伏応力が異なる場合の影響も考慮した(5-5)式を導出した.

$$\frac{p_{KB} d}{2S \left(1 + \frac{\sigma_{YF}}{\sigma_{YS}} \frac{F}{l'S} \right) \sigma_{YS}} = \frac{1.2}{\frac{\sigma_{YS} \left(1 + \frac{\sigma_{YF}}{\sigma_{YS}} \frac{F}{l'S} \right)}{E \left(\frac{d}{L} \right) \left(\frac{S}{d} \right)^{1.5} \left(\frac{l'S^3}{12} \right)^{3/4}}} \Rightarrow \psi = \frac{1.2}{B} \quad (5-5)$$

ここに, B は Bodily Factor, ψ は Mean Pressure Factor と呼ばれ, それぞれ(5-6)式および(5-7)式で与えられる.

$$B = \frac{\sigma_{YS} \left(1 + \frac{\sigma_{YF}}{\sigma_{YS}} \frac{F}{l'S} \right)}{E \left(\frac{d}{L} \right) \left(\frac{S}{d} \right)^{1.5} \left(\frac{l'S^3}{12} \right)^{3/4}} \quad (5-6)$$

$$\psi = \frac{p_{KB} d}{2S \left(1 + \frac{\sigma_{YF}}{\sigma_{YS}} \frac{F}{l'S} \right) \sigma_{YS}} \quad (5-7)$$

ただし, σ_{YS} は胴板の降伏応力, σ_{YF} はリング補強材の降伏応力, F は補強材自体の断面積である.

さらに, 数多くのリング補強円筒殻模型に対する圧壊試験を実施し, 横軸を B , 縦軸を ψ としたグラフに圧壊試験結果をプロットすることで, Fig. 5-2 に示すような全体座屈圧力推定曲線を得ている.

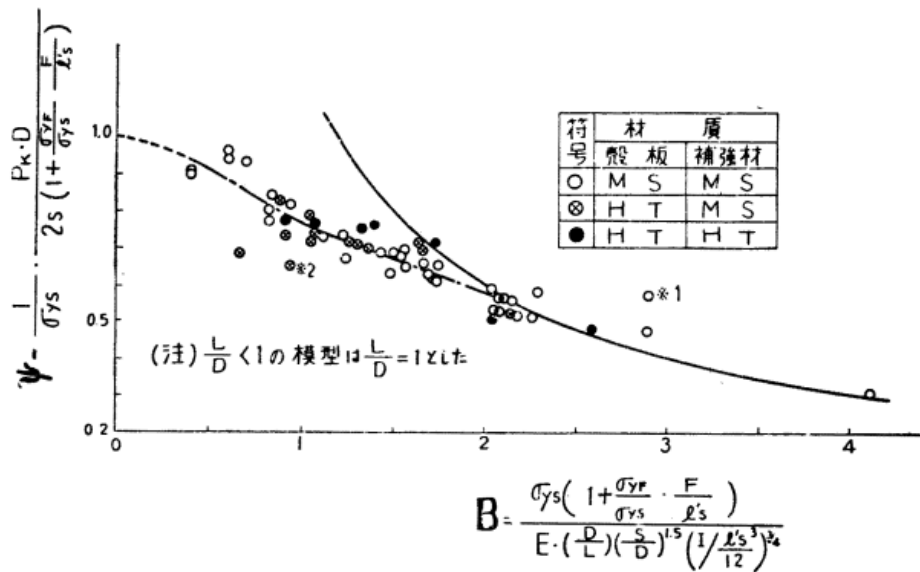


Fig. 5-2 B-ψ Curve¹³⁾.

5.2.2 胴板有効幅 b_e

(5-2)式において、 I_e の算出の際に必要な胴板有効幅 b_e を正確に評価できれば簡易推定式の精度が高まることから、全体座屈圧力推定式の Frame Term にあるリングフレームの断面2次モーメント算出の際に用いるべき胴板有効幅 b_e についての研究が実施されてきた。

まず、(5-2)式における胴板有効幅 b_e として Bryant は(5-8)式を提案している。

$$b_e = F_1 L' + t_w \quad (5-8)$$

ここで、 t_w は補強リングウェブの板厚である。また、 F_1 および L' はそれぞれ(5-9)式及び(5-10)式にて求められる。

$$F_1 = \frac{2}{\theta} \left(\frac{\cosh \theta - \cos \theta}{\sinh \theta - \sin \theta} \right) \quad \text{ただし, } \theta = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \frac{L'}{a_{STC}} \sqrt{\frac{a_{STC}}{S}} \quad (5-9)$$

$$L' = l' - t_w \quad (5-10)$$

寺田・島本は、Fig. 5-2 に示す全体座屈圧力推定曲線の導出に際し、(5-7)式を基に圧壊試験結果から胴板有効幅 b_e を逆算することで1S~3Sという胴板有効幅を得ている¹³⁾。ここで、Sは胴板の板厚である。しかしながら、寺田・島本が設定した胴板有効幅は、模型に生じる初期不整が圧壊強度に及ぼす影響を内包した値であることから、この胴板有効幅を用いて得られた b_e をそのまま(5-1)式に用いた場合、全体座屈圧力を小さめに推定する結果となる。また、初期不整が圧壊強

度に及ぼす影響は別途検討すべきであり、胴板有効幅にその影響を含めるべきではないと考える。

Pulos らは外圧を受けるリング補強円筒殻の変形が軸対称に集中荷重を受ける円筒殻の変形形状が相似になることを用いて、胴板有効幅として $b_e = 1.56\sqrt{a_{STC}S}$ を提案している¹⁴⁾。しかしながら、補強リングの寸法が大きくなるにつれ、圧壊圧力を大きく推定してしまうことが確認されている¹⁶⁾。

大坪らは、補強リングの断面形状を考慮して $b_e = l'(1 - 1.2\sqrt{I_s/A_s}/\sqrt{a_{STC}S})$ を胴板有効幅の近似式として提案している¹⁵⁾。しかしながら、補強リングの寸法次第では Pulos の提案する胴板有効幅より大きくなることが確認されている¹⁶⁾。

また、これらを改善すべく、吉村・吉川は、軸対称となる座屈前変形の影響と座屈時の周方向波数を持つモードとなる座屈変形の両者の影響を考慮した算定方法、すなわち、Pulos らの有効幅 $1.56\sqrt{a_{STC}S}$ に非軸対称座屈モード波数から算出される曲げの有効幅 (b_e/B) の両者を考慮した胴板有効幅 ($1.56\sqrt{Rs} \times b_e/B$) を提案し、数値解析によりその精度を確認している¹⁶⁾。

5.2.3 リング補強円筒殻の全体座屈圧力におよぼす初期不整の影響

全体座屈に及ぼす初期不整の影響については、Windenburg が実験式として、初期不整のない場合の座屈応力の 80%以上の座屈圧力を保証するための許容撓み量 e として(5-11)式を提案している⁵⁰⁾。

$$\frac{e}{S} = \frac{1.8}{n(50S/a)} + 0.015n \quad (5-11)$$

また、Galletly, Bart, Kendrick, Hom, Yamamoto も初期不整の影響について研究を行っている²⁴⁾。特に Yamamoto⁴⁵⁾ は、数値解析及び圧壊試験の結果より、最大初期不整量 (δ_{\max}) の算出方法については Holt が提案した方法⁵¹⁾ を用いることが適切であることを示している。

Holt が提案した手法を以下に、イメージを Fig. 5-3 に示す。

- ①円筒殻の座屈波数 (n) を仮定する
- ②座屈波数の 1 半波分の中心角 (π/n) の範囲を設定する。
- ③②で指定した範囲における両端の半径 (R_1, R_2) の平均値から、範囲内の計測点の半径 (R_3) との差 (凹入量) の極大値 (δ_i) を算出する。
- ④円筒殻全周に対して③を実施し、凹入量の極大値の中で最大のものを最大初期不整量 (δ_{\max}) とする。

なお、これについては著者がこれまで実施した数値解析及び模型試験の結果から、上記の考え方で問題ないことを確認している。

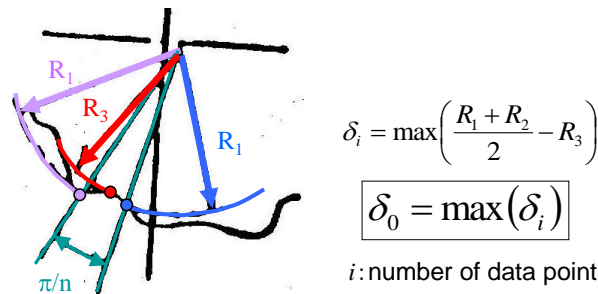


Fig. 5-3 Image of Holt's Method.

5.2.4 内外リング補強の違いが全体座屈強度におよぼす影響

内外リング補強の違いが全体座屈強度に及ぼす影響について検討した研究は著者が調べた限りでは少ない。Krenzkeらは補強リングの寸法が大きくなると補強リングの中性軸位置までの半径を考慮する必要があると考え、(5-1)式のリングの寄与分に関して修正を行った(5-12)式を提案している⁹⁾。

$$p_{KB} = \frac{ES}{a_{STC}} \frac{\lambda^4}{(n + \lambda^2/2 - 1)(n^2 + \lambda^2)^2} + \frac{EI_e(n^2 - 1)}{a_{STC}a_S^2l'} \quad (5-12)$$

ここで、 a_S は胴板有効幅を含んだ補強材の中性軸位置までの半径である。

吉川・吉村は(5-12)式に対し、胴板の寄与分として第2項を追加したMisesの無補強円筒殻の全体座屈圧力推定式を用い、リングの寄与分においては I_e' から胴板有効幅分の胴板自身の断面2次モーメント ($I_{s_self} = b_e S^3/12$) を減じた(5-13)式を提案している¹⁶⁾。

$$p_{KB} = \frac{ES}{a_{STC}} \frac{\lambda^4}{(n + \lambda^2/2 - 1)(n^2 + \lambda^2)^2} + \frac{E}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{S}{a_{STC}}\right)^3 \frac{(n^2 + \lambda^2 - 1)^2}{(n + \lambda^2/2 - 1)} + \frac{EI_e'(n^2 - 1)}{a_{STC}a_S^2l'} \quad (5-13)$$

ここで、 $I_e' = I_e - I_{s_self}$ である。しかしながら、(5-12)式および(5-13)式については、周方向応力と長手方向応力の比率は2:1と仮定されており、補強リングが大きくなるほど胴板の周方向応力が低下する影響は考慮されていない。

また、寺田・島本らは内フレーム方式は3S（但し、Sは胴板の板厚）、外フレーム方式は1Sと、内外フレーム方式で異なる胴板有効幅とすることで、内外補強の違いを考慮している¹³⁾。しかしながら、この値は、数多くのリング補強円筒殻模型に対する圧壊試験を実施し、そこで得た全体圧壊圧力と一致するように設定しており、その物理的根拠等は示されていない。

以上、リング補強円筒殻の外圧による座屈に関する従来の研究の概要について述べたが、内外リング補強の違いが全体座屈強度に及ぼす影響について十分に解明されているとはいえない。

5.3 胴板の応力比の影響を考慮した新たな全体座屈圧力簡易推定式の提案

(5-2)式、(5-12)式および(5-13)式の算出にあたっては、周方向応力と長手方向応力の比率は 2:1 と仮定されており、補強リングが大きくなるほど胴板の周方向応力が低下する影響は考慮されていない。したがって、この影響を正しく考慮した全体座屈圧力の推定式を構築する必要がある。

胴板の周方向応力が低下する影響を考慮するため、周方向の面内力およびモーメントに関して補強リングの項を追加する修正を行ない、リング補強円筒殻の全体圧壊圧力簡易推定式を力の釣合式から導出する。座標系について Fig. 5-4 に示す。

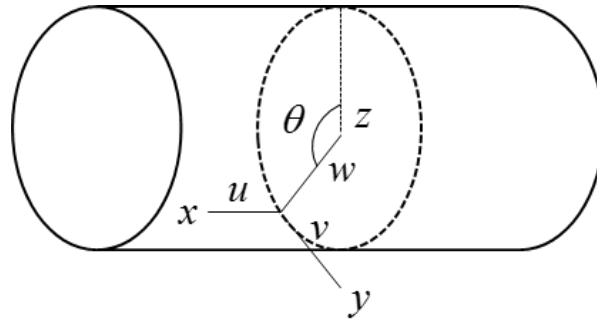


Fig. 5-4 Cylindrical coordinate system.

側圧と軸圧縮を同時に受ける無補強円筒殻の座屈に対する胴板の板厚中心での力の釣合式は、長手方向、周方向、半径方向それぞれ(5-14)式となる²⁰⁾。

$$\begin{aligned}
 a_{STC} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial \theta} - N_{y0} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) &= 0 \\
 \frac{\partial N_y}{\partial \theta} + a_{STC} \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + a_{STC} N_{x0} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{a_{STC} \partial \theta} &= 0 \\
 a_{STC} N_{x0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y + \frac{N_{y0}}{a_{STC}} \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + a_{STC} \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 M_y}{a_{STC} \partial \theta^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial \theta} &= 0
 \end{aligned}$$

(5-14)

ここで、 N_{y0} は外力から算出した周方向面内力、 N_{x0} は外力から算出した長手方向面内力である。次に、補強リングの項を追加した周方向の面内力とモーメントおよびその他の面内力とモーメントを(5-15)式に示す。

$$\begin{aligned}
 N_x &= \frac{ES}{1-\nu^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial v}{a_{STC} \partial \theta} - \frac{w}{a_{STC}} \right) \right] \\
 N_y &= \frac{ES}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{\partial v}{a_{STC} \partial \theta} - \frac{w}{a_{STC}} \right) + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{A_R}{l} \right) \left(\frac{\partial v_1}{a_{STC} \partial \theta} - \frac{w}{a_{STC}} \right) \pm \frac{EI}{a_{STC} l} \frac{1}{a_s^2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\
 N_{xy} = N_{yx} &= \frac{ES}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{a_{STC} \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_x &= -D \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{1}{a_{STC}^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \right] \\
M_y &= -D \left[\frac{1}{a_{STC}^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] - \frac{EI}{l} \frac{1}{a_s^2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) \\
M_{xy} &= -M_{yx} = D(1-\nu) \frac{1}{a_{STC}} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right)
\end{aligned} \tag{5-15}$$

ここで、 N_y の第3項において+は外フレーム方式、-は内フレーム方式を表す。 D は板の曲げ剛性、 A_R は補強リング単独の断面積である。補強リングの影響については、まず面内力 N_y に対し、補強リング単独の断面積を補強リング間長で割ったものを板厚とした項を右辺第二項に、曲げに関する項を右辺第三項に追加している。さらにモーメント M_y に対し、補強リングの曲げに関する項を右辺第二項に追加している。

また、両端支持の条件となる変位関数を(5-16)式で仮定する。ただし、周方向の面内力およびモーメントの補強リングの項の周方向変位に関しては、補強リングと胴板の変位の連続性を考慮して v_1 および v_2 で仮定する。

$$\begin{aligned}
u &= A \sin n \theta \cos \frac{m \pi x}{L} \\
v &= B \cos n \theta \sin \frac{m \pi x}{L} \\
w &= C \sin n \theta \sin \frac{m \pi x}{L}
\end{aligned} \quad \begin{aligned}
v_1 &= v + \left(\frac{a'_s}{a_{STC}} - 1 \right) \frac{\partial w}{\partial \theta} \\
v_2 &= v + \left(\frac{a_s}{a_{STC}} - 1 \right) \frac{\partial w}{\partial \theta}
\end{aligned} \tag{5-16}$$

ここで、 m は長手方向座屈半波数、 a'_s は補強リング単独の中性軸位置までの半径である。(5-15)式、(5-16)式を(5-14)式に代入し行列式を解くことで(5-17)式が得られる。

$$C_1 + C_2 \alpha + C_3 \alpha_1 = C_4 \phi_1 + C_5 \phi_2 \tag{5-17}$$

ただし、 α および α_1 は(5-18)式にて与えられる。

$$\alpha = \frac{S^2}{12 a_{STC}^2}, \quad \alpha_1 = \frac{I_e'(1-\nu^2)}{S l' a_s^2} \tag{5-18}$$

また $C_1 \sim C_5$ は(5-19)式のようになる。

$$\begin{aligned}
C_1 &= \gamma_1 \gamma_6 \gamma_{15} + \gamma_2 \gamma_4 (\gamma_9 + \gamma_{12}) - \gamma_4^2 \gamma_6 - \gamma_2^2 \gamma_{15} - \gamma_1 \gamma_9 \gamma_{12} \\
C_2 &= \gamma_1 (\gamma_6 \gamma_{16} + \gamma_7 \gamma_{15} - \gamma_9 \gamma_{13} - \gamma_{10} \gamma_{12}) + \gamma_2 \gamma_4 (\gamma_{10} + \gamma_{13}) - \gamma_4^2 \gamma_7 - \gamma_2^2 \gamma_{16} \\
C_3 &= \gamma_1 (\gamma_6 \gamma_{17} + \gamma_8 \gamma_{15} - \gamma_9 \gamma_{14} - \gamma_{11} \gamma_{12}) + \gamma_2 \gamma_4 (\gamma_{11} + \gamma_{14}) - \gamma_4^2 \gamma_8 - \gamma_2^2 \gamma_{17} \\
C_4 &= - \left[\gamma_1 \gamma_6 \gamma_{18} + \gamma_3 \gamma_4 \gamma_9 + \gamma_2 \gamma_5 \gamma_{12} - \gamma_4 \gamma_5 \gamma_6 - \gamma_2^2 \gamma_{18} - \gamma_2 \gamma_3 \gamma_{15} \right. \\
&\quad \left. + (\gamma_1 \gamma_7 \gamma_{18} + \gamma_3 \gamma_4 \gamma_{10} + \gamma_2 \gamma_5 \gamma_{13} - \gamma_4 \gamma_5 \gamma_7 - \gamma_2 \gamma_3 \gamma_{16}) \alpha \right. \\
&\quad \left. + (\gamma_1 \gamma_8 \gamma_{18} + \gamma_3 \gamma_4 \gamma_{11} + \gamma_2 \gamma_5 \gamma_{14} - \gamma_4 \gamma_5 \gamma_8 - \gamma_2 \gamma_3 \gamma_{17}) \alpha_1 \right] \\
C_5 &= \gamma_1 \gamma_5^2 (\gamma_6 + \gamma_{15}) - \gamma_5^2 (\gamma_2^2 + \gamma_4^2) + \gamma_1 \gamma_5^2 (\gamma_7 + \gamma_{16}) \alpha + \gamma_1 \gamma_5^2 (\gamma_8 + \gamma_{17}) \alpha_1
\end{aligned} \tag{5-19}$$

ここで、 $\gamma_1 \sim \gamma_{18}$ は(5-20)式のようになる。

$$\begin{aligned}
 \gamma_1 &= \lambda^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 & \gamma_{11(in)} &= 0, \gamma_{11(out)} = 2n^3 \left(\frac{a_s}{a_{STC}} \right) \\
 \gamma_2 &= \frac{1+\nu}{2} n\lambda & \gamma_{12} &= n \left(1 + \frac{A_R}{Sl} \right) \\
 \gamma_3 &= n\lambda & \gamma_{13} &= n \left[n^2 + (2-\nu)\lambda^2 \right] \\
 \gamma_4 &= \nu\lambda & \gamma_{14(in)} &= n(n^2-1), \gamma_{14(out)} = n(n^2+1) \\
 \gamma_5 &= \lambda & \gamma_{15} &= 1 + \frac{A_R}{Sl} \left[\left(\frac{a'_s}{a_{STC}} - 1 \right) n^2 + 1 \right] \\
 \gamma_6 &= \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 + n^2 \left(1 + \frac{A_R}{Sl} \right) & \gamma_{16} &= (\lambda^2 + n^2)^2 \\
 \gamma_7 &= n^2 + (1-\nu)\lambda^2 & \gamma_{17(in)} &= n^2(n^2-1) \left(\frac{a_s}{a_{STC}} \right), \gamma_{17(out)} = n^2(n^2+1) \left(\frac{a_s}{a_{STC}} \right) \\
 \gamma_{8(in)} &= 0, \gamma_{8(out)} = 2n^2 & \gamma_{18} &= 1-n^2 \\
 \gamma_9 &= n \left\{ 1 + \frac{A_R}{Sl} \left[\left(\frac{a'_s}{a_{STC}} - 1 \right) n^2 + 1 \right] \right\} \\
 \gamma_{10} &= n(n^2 + \lambda^2)
 \end{aligned} \tag{5-20}$$

また、 ϕ_1 および ϕ_2 はそれぞれ(5-21)式に示す。

$$\frac{N_{y0}(1-\nu^2)}{ES} = \phi_1 \quad \frac{N_{x0}(1-\nu^2)}{ES} = -\phi_2 \tag{5-21}$$

ただし、 N_{y0} と N_{x0} は(5-22)式のように与えられる。なお、 N_{x0} は引張が正となるように設定する。

$$N_{y0} = -pa \quad N_{x0} = -\frac{pa^2}{2a_{STC}} \tag{5-22}$$

p は円筒殻に作用する外圧、 a は胴板の外半径である。(5-17)式を p に関して展開することで、内外の補強リングがあることに伴う胴板の周方向応力が低下する影響を考慮した、リング補強円筒殻の全体座屈圧力 p_{KB} の推定式として(5-23)式を得る。

$$p_{KB} = \frac{\left\{ \frac{ES}{a(1-\nu^2)} (C_1 + C_2\alpha) + \frac{C_3 EI_e'}{aa_s l'} \right\}}{\left\{ C_4 + \frac{C_5}{2} \left(\frac{a}{a_{STC}} \right) \right\}} \tag{5-23}$$

5.4 内外リング補強が全体座屈強度におよぼす影響調査

内外リング補強円筒殻の全体座屈強度の違いについて検討する。Krenzke の式 ((5-12)式) における内外リング補強の影響は、リングの寄与分を表す右辺第二項に集約されている。そこで、問題を簡単化するために、1 リングの内外フレームのみを取り出し内外リング補強円筒殻の全体座屈強度の違いについて検討する。Krenzke の式の右辺第二項を(5-24)式に示す。

$$p_{KB} = \frac{EI_e(n^2 - 1)}{a_{STC} a_S^2 l'} \quad (5-24)$$

本節では、まず初めに 1 リングの内外フレームにて FEM 解析を行ない、得た全体座屈圧力と(5-24)式とを比較することにより従来式の精度について確認する。

次に、内外リング補強円筒殻で全体座屈強度が異なる原因となりうる影響について検証を行なう。その際、最初に、リングフレームの曲り梁効果による中性軸位置の変化が考えられる。次にウェブのせん断変形の影響が考えられる。これらを考慮した定式化を行なうとともに、FEM 解析を用いて 1 リングの内外フレームについて直接的に評価する。

5.4.1 内外フレームの違いよる Krenzke の式と FEM 解析結果との比較

FEM 解析と(5-24)式の差を確認するべく、軸対称弾塑性座屈計算システム AxisBuck¹⁷⁾にて全体座屈固有値解析を実施した。1 リングの内外フレームをモデルとし検証対象のイメージを Fig. 5-5 に、寸法を Table 5-1 に示す。実構造に近づけるべく補強リングは T 型とし寸法は実構造とほぼ相似なモデルとした。これを用いて外半径を変化させたシリーズ計算を実施した。

全体座屈モードを再現するため、変形計算、座屈計算ともに 1 節点の z 方向を拘束し、全節点の周方向軸周りの回転を拘束した。荷重は、胴板表面に圧力荷重を付与した。要素分割は前章と同様にフランジ 2 要素、ウェブ 5 要素、板 10 要素とした。

解析結果を Fig. 5-6 に示す。横軸は外半径 a 、縦軸は(5-24)式で無次元化した値を示している。また、このときの周方向波数は全て $n = 2$ である。なお、(5-24)式の I_e の算出において胴板有効幅は考慮していない。Fig. 5-6 より、内フレーム方式においては、FEM 解析値より(5-24)式の値が小さく安全側の値を推定する結果となっており、外フレーム方式においては FEM 解析値より従来の(5-24)式の値が大きく非安全側の値を推定する結果となっていることが分かる。

基本寸法である外半径 490(mm)において、(5-24)式にて得られる全体座屈圧力は、FEM 解析結果より内フレーム方式では約 4.0% 低め、外フレーム方式では約 13 % 高めに推定している。さらに、内フレーム方式では外半径が大きくなるにつれて差が大きくなり、外フレーム方式では外半径が大きくなるにつれて差が小さくなる傾向がみられる。したがって、中性軸位置の違いのみを

考慮した(5-24)式では内外フレーム方式で差の傾向は異なり,内外リング補強円筒殻の全体座屈強度の違いを完全に修正することができないことがわかる。

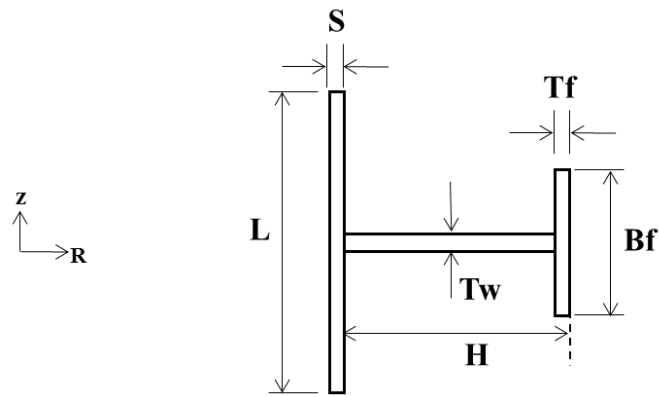
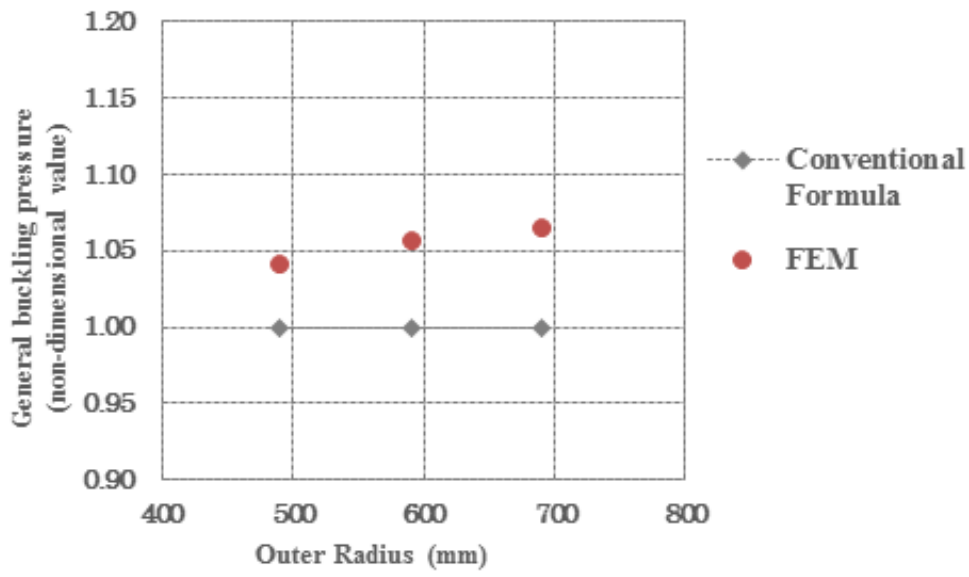


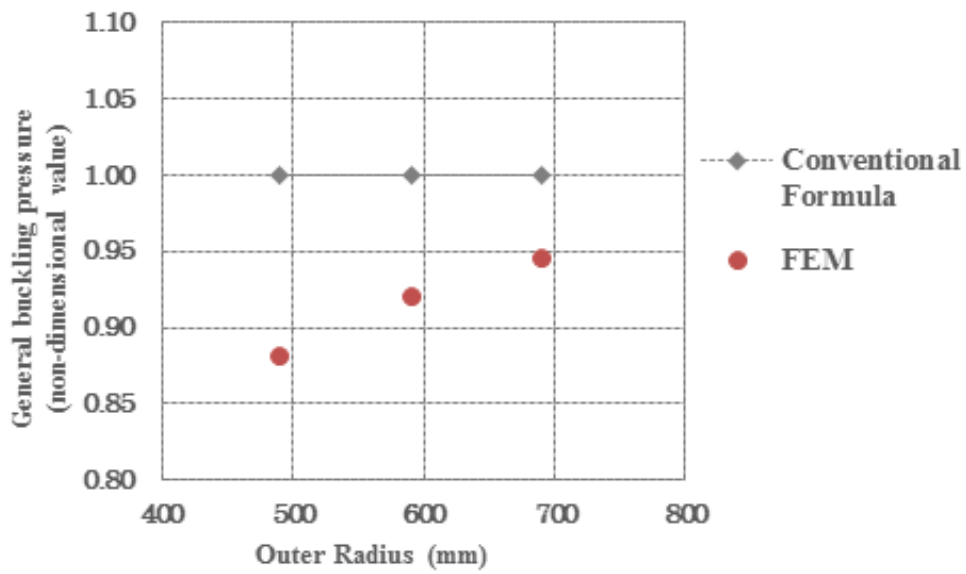
Fig. 5-5 Analysis model (outside ring frame).

Table 5-1 Principal dimensions of analysis model.

	Notation	Value(mm)	Notes
Outer Radius	a	490	Parameter
Shell Thickness	S	9	
Flame Space	l'	163	
Web Height	H_w	40	
Web Thickness	t_w	3	
Face Breadth	B_f	20	
Face Thickness	t_f	6	



(a) Inside ring frame.



(b) Outside ring frame

Fig. 5-6 Comparison between conventional formula and FEM results.

5.4.2 曲り梁効果による中性軸位置変化が補強リングの曲げ剛性におよぼす影響

曲り梁が曲げモーメントをうけるときの曲げ応力は、曲り梁がすでに曲率を有している影響により、真直梁の場合の直線的な応力分布とは異なり双曲線的な応力分布となる。そのため中性軸位置は真直梁のそれから変化する。そこで、全体座屈推定式のリングの寄与分においては、円筒が座屈したときの中性軸位置の変化を考慮する必要があると考えられる。そこで、変化した中性軸位置における等価断面2次モーメントを算出し、リングの寄与分に適用することを考える。

Fig. 5-7 に曲り梁のイメージを示す。

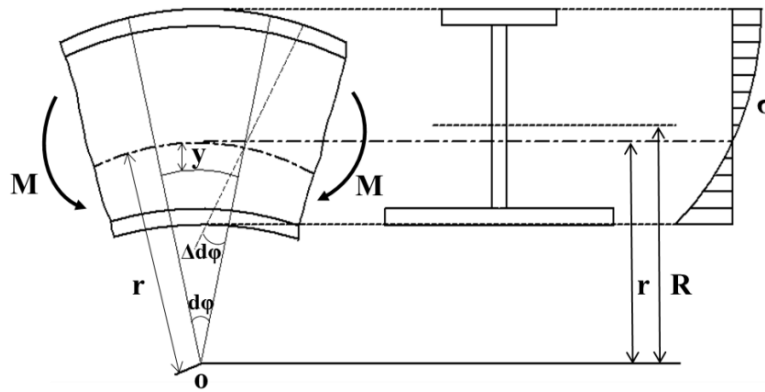


Fig. 5-7 Curved beam.

曲げを受ける曲り梁の曲げ応力は(5-25)式で表される⁵²⁾。

$$\sigma = -\frac{Ey\Delta d\phi}{(r-y)d\phi} \quad (5-25)$$

梁の軸方向に外力の作用はないため、断面に作用する応力の総和は0でなければならない。この条件より(5-26)式が導き出される。

$$\int_A \frac{y}{r-y} dA = 0 \quad (5-26)$$

(5-26)式を解くことにより、曲り梁効果により変化した中性軸位置までの半径が導き出される。

したがって、(5-26)式を用いて Fig. 5-8 に示すような T 型フレームの断面の変化した中性軸位置までの半径 r を求める。

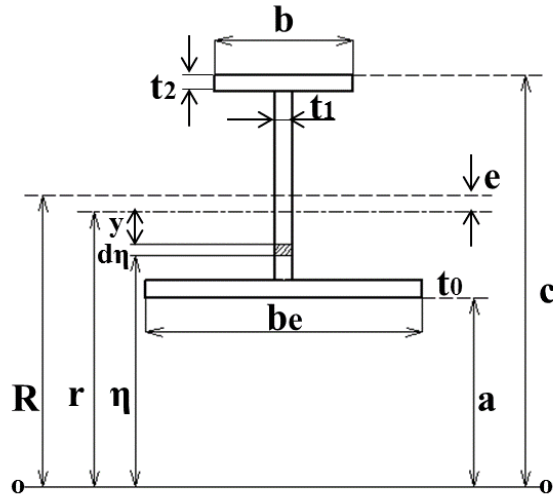


Fig. 5-8 Radius to neutral axis of curved beam bending moment acts.

Fig. 5-8 中の b_e は胴板有効幅, η は中心から微小部分までの距離である. $\eta = r - y$ より (5-26) 式を変形すると (5-27) 式になる.

$$\int_A \frac{r - \eta}{\eta} dA = 0$$

(5-27)

(5-27) 式を Fig. 5-8 のそれぞれの断面について解くと (5-28) 式になる.

$$r = \frac{A}{b_e \log \frac{a + t_0}{a} + t_1 \log \frac{c - t_2}{a + t_0} + b \log \frac{c}{c - t_0}}$$

(5-28)

したがって, (5-28) 式が理論における曲り梁の中性軸位置までの半径である.

5.4.1 項で用いた 1 リングの内外フレームの断面寸法に対する曲り梁効果を確認するため, FEM 解析を用いて, 内外フレームに曲げモーメントのみが作用するときの剛性を数値計算を用いて評価する. まず, 評価する際に必要となる曲げモーメントのみが 1 リングに作用するときの等価断面 2 次モーメントを算出する.

Fig. 5-9 に示す半円の両端部にモーメント M_0 を作用させたときのひずみエネルギーは (5-29) 式で表される.

$$U = \frac{1}{2EI} \int_0^{\pi} M_0^2 r'_{CB} d\varphi$$

(5-29)

ここで, r'_{CB} は曲り梁効果を考慮した中性軸位置までの半径であり, FEM 解析においては曲げ応力

が 0 となる位置までの中心からの距離としている。

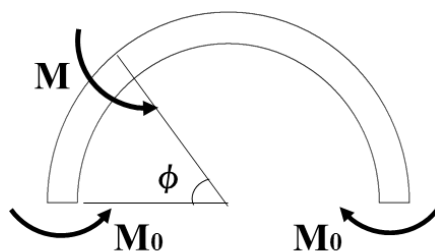


Fig. 5-9 Semicircle bending moment acts.

(5-29)式をモーメント M_0 で微分することで端部における回転角 θ が式のように導出される。

$$\frac{\partial U}{\partial M_0} = \theta = \frac{\pi M_0 r'_{CB}}{2EI} \quad (5-30)$$

(5-30)式を変形することで曲り梁の等価断面 2 次モーメントを表す(5-31)式が導き出される。

$$I'_{CB} = \frac{\pi M_0 r'_{CB}}{2E\theta} \quad (5-31)$$

1 リング内外フレームの半円をモデル化し、端部に強制回転 1(rad)を付与した解析を実施することで、端部に発生するモーメント M_0 を得ることができ、それらの値を(5-31)式に代入すると曲り梁の等価断面 2 次モーメントを直接的に得ることができる。

次に曲り梁効果を考慮して理論的に等価断面 2 次モーメント（理論等価断面 2 次モーメント）を求める。中性軸位置は変化しており曲げ応力分布は双曲線的になっていることを考慮し、(5-28)式を用いて変化した中性軸位置までの半径 r''_{CB} を求める。その半径を用いて断面の幅を双曲線的な応力分布に合うように修正した以下の(5-32)式を用いて等価断面 2 次モーメント I''_{CB} を求める。

$$I''_{CB} = \int_A \frac{r''_{CB}}{r''_{CB} + y} y^2 dA \quad (5-32)$$

汎用有限要素法プログラム MSC.Marc2016 にて解析を実施した。4 節点 24 自由度の薄肉シェル要素（要素 No.139）を用いて、5.4.1 項における Table 5-1 の断面寸法の 1 リング内外フレームの半円をモデル化した。外半径は 490(mm)である。要素分割はフランジ 2 要素、ウェブ 4 要素、板 10 要素としている。

境界条件は半円の Fig. 5-10 における両端部 2 の中性軸位置(通常の断面形状)の周方向変位を拘

束し、剛体拘束 RBE2 を使用することで断面形状を維持している。またその節点において強制回転 1(rad)を与えた。板の一端において z 方向変位，頂点 1 の断面において周方向変位，全節点の周方向軸周りの回転を拘束している。

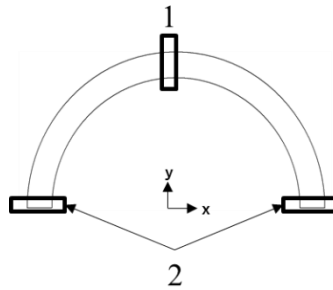


Fig. 5-10 Restraint condition.

また，今回の 1 リングの全体座屈強度解析において板とフランジが垂れないように断面の全節点の周方向軸周りの回転を拘束しているが，実際には板とフランジは垂れようとするためその拘束の影響により剛性は大きくなっていると考えられる。したがって，本研究では板とフランジの幅を $1/(1-\nu^2)$ 倍に修正することでその影響を考慮している。

Fig. 5-11 に解析結果の一例を，Table 5-2 に FEM 解析結果から求めた等価断面 2 次モーメント I'_{CB} と (5-32) 式より求めた理論等価断面 2 次モーメント I''_{CB} を，Table 5-3 に FEM 解析および (5-28) 式それぞれから得た中性軸位置までの半径を示す。

Table 5-2 より，FEM 解析から得られた等価断面 2 次モーメント I'_{CB} と，(5-32) 式より求めた理論等価断面 2 次モーメント I''_{CB} との誤差は，内フレームに関しては約 2%，外フレームに関しては約 5% となる結果が得られた。さらに，Table 5-3 より，中性軸位置までの半径はほぼ同じ値となっていることも確認した。

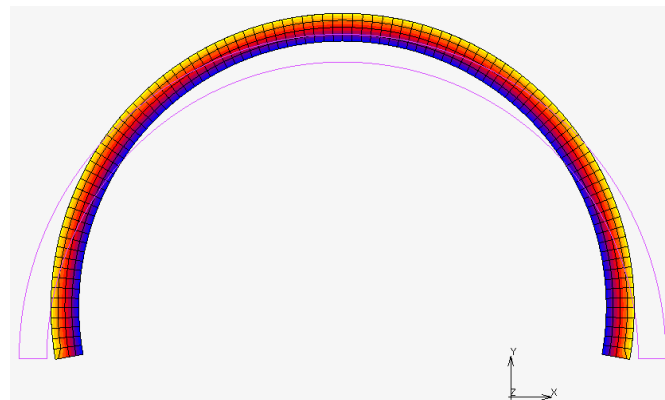


Fig. 5-11 Bending stress and deformation (outside ring).

Table 5-2 Equivalent moment of inertia.

	I_0 ¹⁾ (mm ⁴)	I'_{CB} (FEM) (mm ⁴)	I''_{CB} (Theory) (mm ⁴)	I''_{CB}/I'_{CB}	I''_{CB}/I_0
Inside ring frame	2.43×10^5	2.75×10^5	2.81×10^5	1.02	1.16
Outside ring frame	2.43×10^5	2.36×10^5	2.49×10^5	1.06	1.02

1) I_0 : Moment of inertia of straight beam

Table 5-3 Radius to neutral axis.

	r_0 ²⁾ (mm)	r'_{CB} (FEM) (mm)	r''_{CB} (Theory) (mm)	r''_{CB}/r'_{CB}	r''_{CB}/r_0
Inside ring frame	481.3	481.3	480.9	1.00	1.00
Outside ring frame	489.7	490.5	489.5	1.00	1.00

2) r_0 : Radius to neutral axis obtained by moment of inertia of straight beam

5.4.3 ウェブの面内せん断変形が補強リングの曲げ剛性におよぼす影響

Fig. 5-8 に示す断面形状の補強リングに対し、重量増を抑えつつ断面 2 次モーメントを大きくする場合、補強リングのウェブを高くすることが効率的である。しかしながら、半径に対してウェブが高くなるにつれて、断面剛性に対するウェブの面内せん断変形の影響を無視できなくなる。したがって、簡易推定式の精度を向上させるには、補強リングの等価断面 2 次モーメント算出に対しウェブの面内せん断変形の影響を考慮する必要があると考える。

Fig. 5-12 に示す 1 リングの内外フレームが一つの直径方向に P なる引張力、それに対し直角な直径方向に P なる圧縮力をうける場合を考える。このような力を与える理由は、波数 $n=2$ のときの座屈モードを表現するためである。構造・荷重および変形が対称となるので Fig. 5-12 の右図のような 1/4 リングとして考えることができる。

曲げモーメントによって生じる変形を考える。このときの曲げモーメント分布は(5-33)式となる。

$$M = \frac{Pr}{2} (\sin \phi - \cos \phi)$$

(5-33)

リングのひずみエネルギー U と外力 P のなす仕事 W を等置することによって引張方向または圧縮方向の伸び δ が(5-34)式のように求められる。

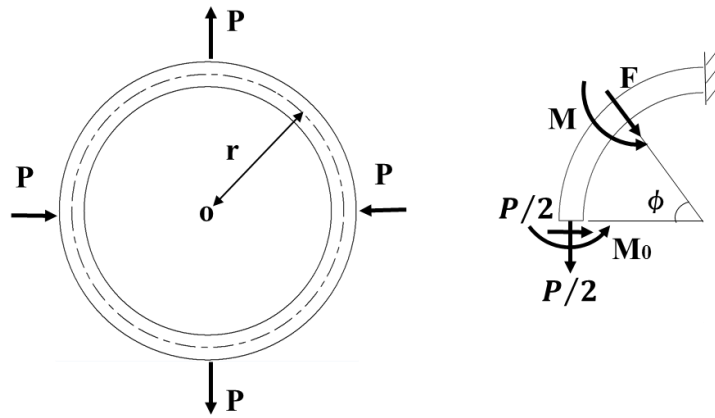


Fig. 5-12 Circular ring.

$$\delta = \frac{Pr^3}{2EI} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \quad (5-34)$$

となり, (5-34)式を変形すると(5-35)式になる.

$$I'_{eq} = \frac{Pr^3}{2E\delta} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) \quad (5-35)$$

したがって, 1 リングの円筒殻の直径方向に引張力, それに直角の圧縮力を与える FEM 解析を行うことにより, (5-35)式に P と δ を代入することで直接的に曲り梁効果とせん断変形の影響を考慮したリングの等価断面 2 次モーメントを求めることができる.

理論的に 2 つの影響を考慮したときの断面 2 次モーメントの求め方について, Fig. 5-12 に関する曲げモーメントひずみエネルギーとせん断ひずみエネルギーの和として(5-36)式を考える.

$$U = \frac{P^2 r^3}{2EI} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + \frac{P^2 r}{2GA_w} \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) \quad (5-36)$$

ここで, A_w はウェブの断面積である. (5-36)式に示すひずみエネルギーと外力がなす仕事を等置すると(5-37)式が導き出される.

$$\delta = \frac{Pr^3}{2EI} \left(\frac{\pi}{2} - 1 \right) + \frac{Pr}{2GA_w} \left(\frac{\pi}{2} + 1 \right) \quad (5-37)$$

(5-37)式を(5-35)式の形で置き換えると, 曲り梁効果とせん断変形の影響を考慮した理論等価断面 2 次モーメント I''_{eq} が(5-38)式にて求められる.

$$I''_{eq} = I''_{CB} \cdot \frac{r^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}{r^2 \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + \frac{2(1+\nu)I''_{CB}}{A_w} \left(\frac{\pi}{2} + 1\right)}$$

(5-38)

ここで、 I''_{CB} は曲り梁効果のみの理論等価断面 2 次モーメントである。(5-38)式は曲り梁効果のみの理論等価断面 2 次モーメントがせん断変形によって減少することを表している。

(5-38)式を利用した曲り梁効果と面内せん断変形の影響を同時に考慮した場合の精度を確認すべく、5.4.1 項と同じ寸法の 1 リングの半円モデルを用いて FEM 解析を行なった。

要素分割は 5.4.1 項と同じとした。境界条件は Fig. 5-10 の 2 の位置で周方向変位と半径方向回転、z 回転を拘束し固定端とした。すなわち板の一端の z 方向変位を拘束、全節点周方向軸周りの回転拘束をしている。荷重条件は、頂点と両端部に強制変位 1(mm)を与えた。強制変位を与えた節点の反力として Fig. 5-12 の P が求まる。また、直径の伸びおよび縮み δ は合計 2(mm)となる。

変形図を Fig. 5-13 に、等価断面 2 次モーメント I''_{eq} の算出結果を Table 5-4 に示す。Table 5-4 には 5.4.2 項の曲り梁効果のみの等価断面 2 次モーメント I''_{CB} を再掲している。

Table 5-4 から 1 リング内外フレームのせん断変形の影響により等価断面 2 次モーメント I''_{eq} が低下することを定量的に確認することができる。さらに、FEM 解析から得られた等価断面 2 次モーメント I''_{eq} と (5-38)式にて求めたより求めた理論等価断面 2 次モーメント I''_{eq} との誤差は内フレーム方式で約 1%、外フレーム方式で約 3%である。どちらも若干の誤差があるが、ウェブの面内せん断変形の影響を考慮することで、補強リングの等価断面 2 次モーメントの算出精度が向上する事が確認できた。

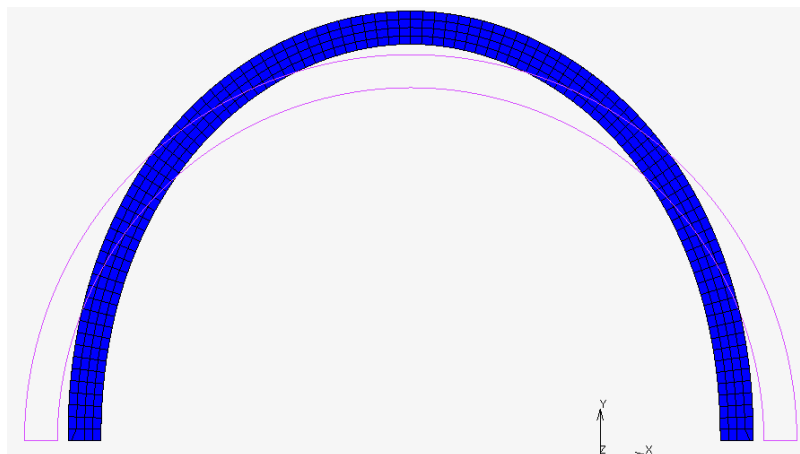


Fig. 5-13 Deformation of outside ring.

Table 5-4 Analysis results (Equivalent moment of inertia area) .

	I_0 ¹⁾ (mm ⁴)	I'_{CB} (FEM) (mm ⁴)	I''_{CB} (Theory) (mm ⁴)	I'_{eq} (FEM) (mm ⁴)	I''_{eq} (Theory) (mm ⁴)	I''_{eq}/I'_{eq}	I''_{eq}/I_0
Inside ring frame	2.43×10^5	2.75×10^5	2.81×10^5	2.49×10^5	2.46×10^5	0.99	1.01
Outside ring frame	2.43×10^5	2.36×10^5	2.49×10^5	2.15×10^5	2.22×10^5	1.03	0.91

1) I_0 : Moment of Inertia of straight beam

5.4.4 FEM 解析結果との比較検証

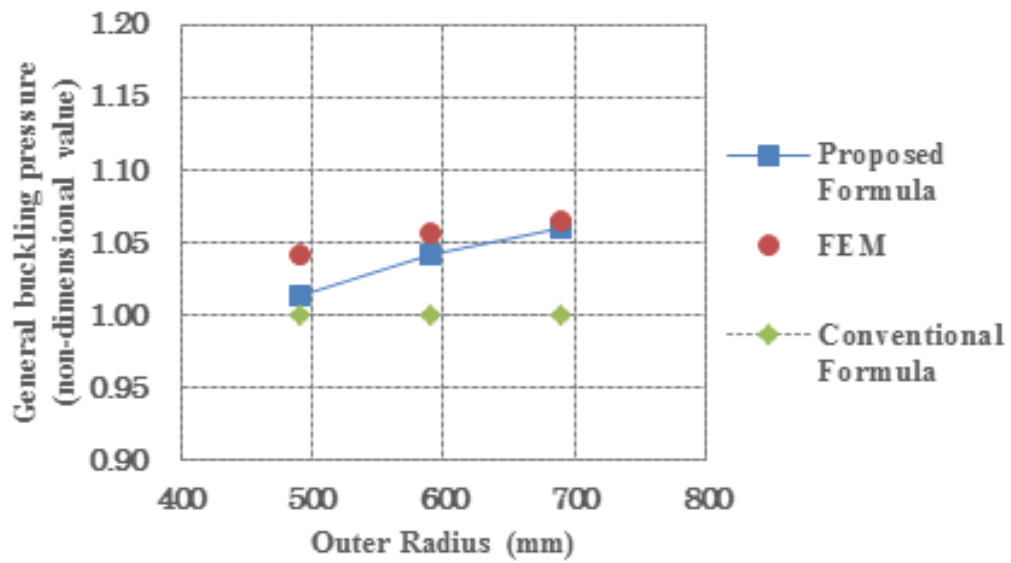
(5-24)式に示す Krenzke の式の右辺第二項に対し、断面 2 次モーメント I を曲り梁効果とせん断変形の影響を考慮した理論等価断面 2 次モーメント I''_{eq} に、中立軸までの半径 r を曲り梁効果による変化した中性軸位置までの半径 r''_{CB} に置き換えた場合の式を(5-39)式に示す。

$$p_{KB} = \frac{EI''_{eq}(n^2 - 1)}{Rr''_{CB}{}^2 l}$$

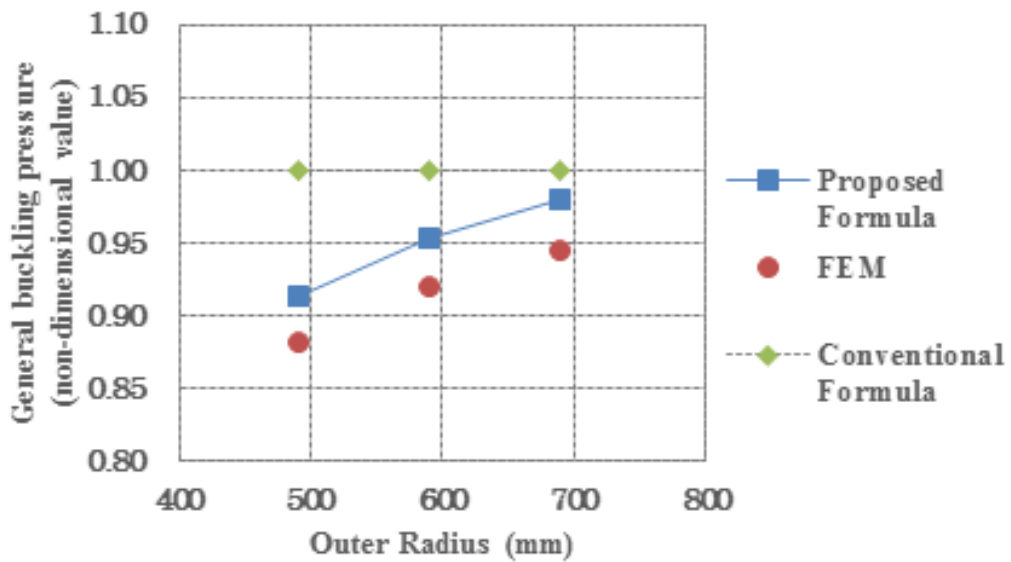
(5-39)

(5-39)式に対し、5.4.1 項で実施した外圧作用下での 1 リングの固有値解析結果との比較を行った。座屈圧力の比較結果を Fig. 5-14 に示す。Fig. 5-14 の横軸は外半径、縦軸は(5-24)式の圧壊圧力で無次元化した値を示している。

Fig. 5-14 より、依然として内外フレームで異なる傾向の誤差は存在するが、(5-39)式を用いることで内外フレームどちらも(5-24)式より推定精度が向上していることがわかる。なお、基本寸法である外半径 490(mm) において(5-39)式にて得られる全体座屈圧力は、FEM 解析結果より内フレーム方式では約 3 %程度低め、外フレーム方式では約 4 %程度高めに推定している。



(a) Inside ring frame



(b) Outside ring frame

Fig. 5-14 Comparison between proposed formula and FEM results.

5.5 提案した全体座屈圧力推定式の精度検証

5.4 節にて示した曲り梁効果を考慮した中性軸の変化, および面内せん断変形の影響を考慮した等価断面 2 次モーメントを考慮した上で, 5.3 節にて新たに提案したリング補強円筒殻に対する全体座屈圧力推定式の推定精度を検証すべく, 内外フレームについて FEM 解析にて得られた結果との比較検証を行なった.

なお, 等価断面 2 次モーメント算出に当たり, 胴板有効幅の考え方は吉村・吉川の提案⁶⁾を用いている.

5.5.1 検討対象

4.4 節と同じく, Yamamoto らの研究⁴⁹⁾にて用いられたリング補強円筒殻の圧壊試験モデルを参考に検討対象寸法を設定した. 基本寸法を Table 5-5 に示す. さらに, Table 5-5 に示した基本寸法をもとに, リング補強円筒殻の全長を変化させたシリーズ計算を実施した. シリーズ計算に用いた全長を Table 5-6 に示す.

Table 5-5 Principal dimensions of analysis model.

	Notation	Value(mm)	Notes
Diameter	d	980	
Shell Thickness	S	9	
Flame Space	l'	163	
Web Height	H_w	40	
Web Thickness	t_w	3	
Face Breadth	B_f	20	
Face Thickness	t_f	6	
Length of Cylinder	L	2.5D	Parameter

Table 5-6 Analysis case.

Parameter	Case	L (mm)	L/d
Length of Cylinder	1	2,445	2.5
	2	2,934	3.0
	3	4,890	5.0
	4	5,379	5.5
	5	5,868	6.0

5.5.2 FEM 解析

軸対称殻弾塑性座屈解析プログラム Axis-BUCK²⁴⁾ を用いた。胴板は補強リング間を 10 要素とし、補強リングウェブは 5 要素、フランジは 2 要素とした。端部のふさぎ板はモデル化から除外した。

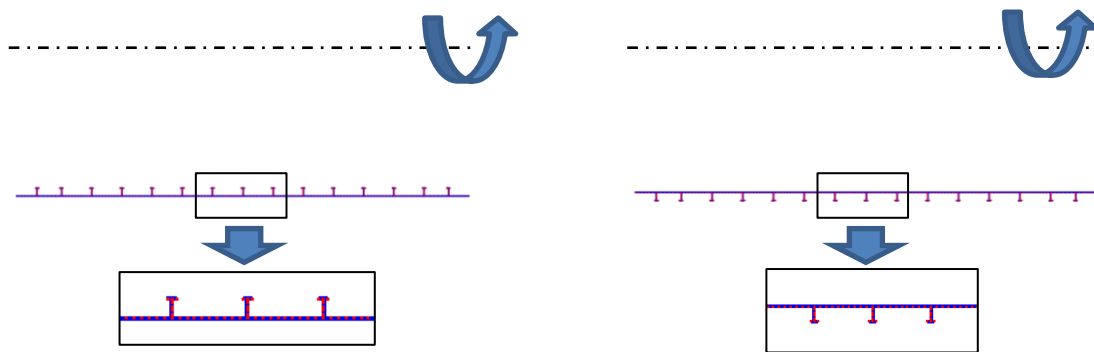
荷重条件は、胴板表面に対して圧力荷重を、胴板端部（変形計算において長手方向変位を拘束していない側）に対して円筒殻の長手方向にふさぎ板の表面に作用する圧力荷重相当の圧縮荷重を付与した。拘束条件は変形計算および座屈計算それぞれに対し以下のように設定した。

(a)変形計算・・・片端の半径方向，周方向および長手方向変位を拘束

反対側の端部は半径方向および周方向変位を拘束

(b)座屈計算・・・両端とも半径方向および周方向変位を拘束

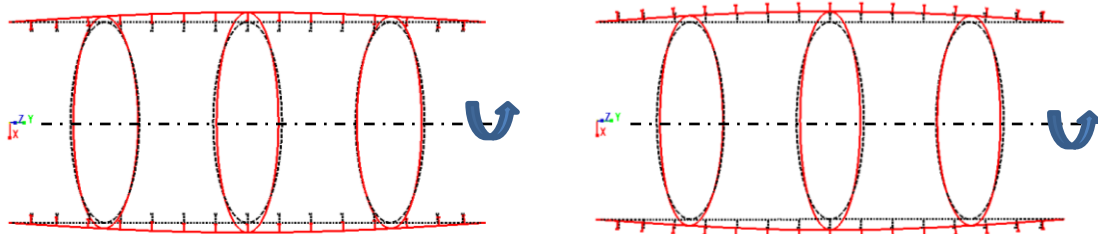
解析モデルを Fig. 5-15 に，基本寸法（Case 1）での解析結果を Fig. 5-16 にそれぞれ示す。



(a) Inside ring frame

(b) Outside ring frame

Fig. 5-15 FE-Model (axisymmetric shell element).



(a) Inside ring frame

(b) Outside ring frame

Fig. 5-16 Analysis result [buckling mode] (case 1).

5.5.3 提案した推定式と FEM 解析結果との比較

内外フレーム方式それぞれにおける全体座屈圧力および周方向座屈波数の値の比較を Table 5-7 と Fig. 5-17 および Fig. 5-18 に示す. Fig. 5-17 は内フレーム方式の値を, Fig. 5-18 は外フレーム方式の値を示している. ただし, 従来式として(5-13)式を用い, 従来式および提案式の値は, FEM 解析結果の値で無次元化している.

Fig. 5-17 および Fig. 5-18 より, 内フレーム方式について提案式の値は L/d が大きくなるにつれて小さくなっており, FEM 解析結果の値の傾向とは異なっている. また, Table 5-7 より, $L/D=6.0$ のとき提案式と FEM 解析結果で約 12%の誤差が存在することが分かる. 一方, 外フレームについては提案式の値は FEM 解析結果の傾向をとらえ, 従来式の値より精度が向上していることが分かる.

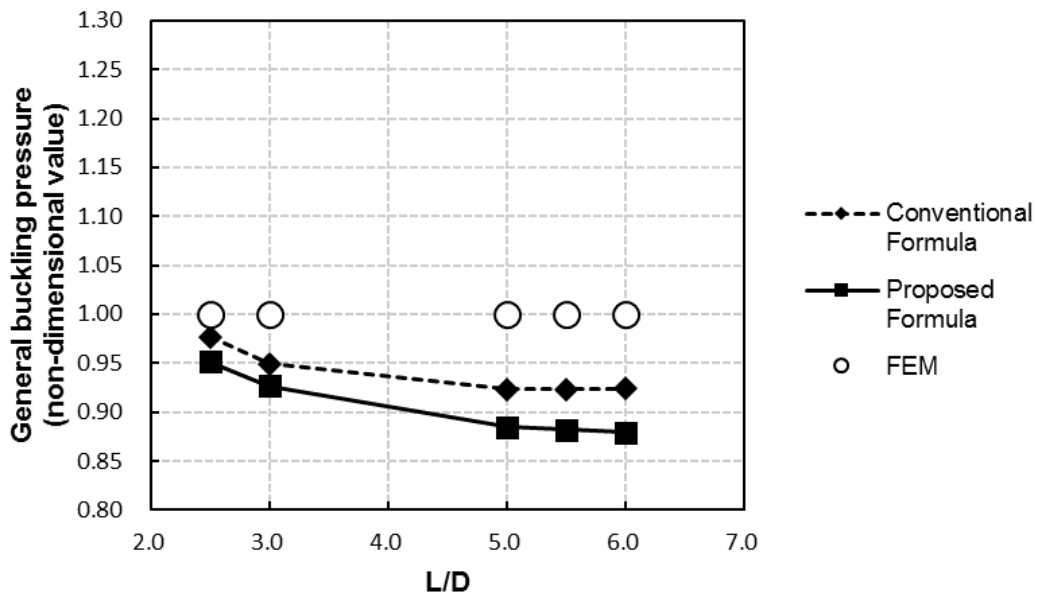
内外フレーム方式の全体圧壊圧力の比を Table 5-7 と Fig. 5-19 に示す. Table 5-7 より, すべての Case において約 10%の差が存在することが分かるが, Fig. 5-19 より, 内外フレーム方式の全体圧壊圧力の比について提案式は FEM 解析結果の傾向を捉えられていることがわかる. なお, 実際に用いられるリング補強円筒殻の長さ L と直径 d の比 (L/d) は, 概ね $L/d = 2\sim 3$ 程度の範囲内(すなわち Case 1 および Case 2) であり, これらの Case の内外フレーム方式の全体圧壊圧力の比は 8%程度であることから, 内外フレーム方式の違いを考慮した全体圧壊圧力の推定において, 提案式は従来式に比べて大幅に改善されていることがわかる.

**Table 5-7 Comparison of general buckling pressure
and circumferential wave number
between proposed formula and FEM results.**

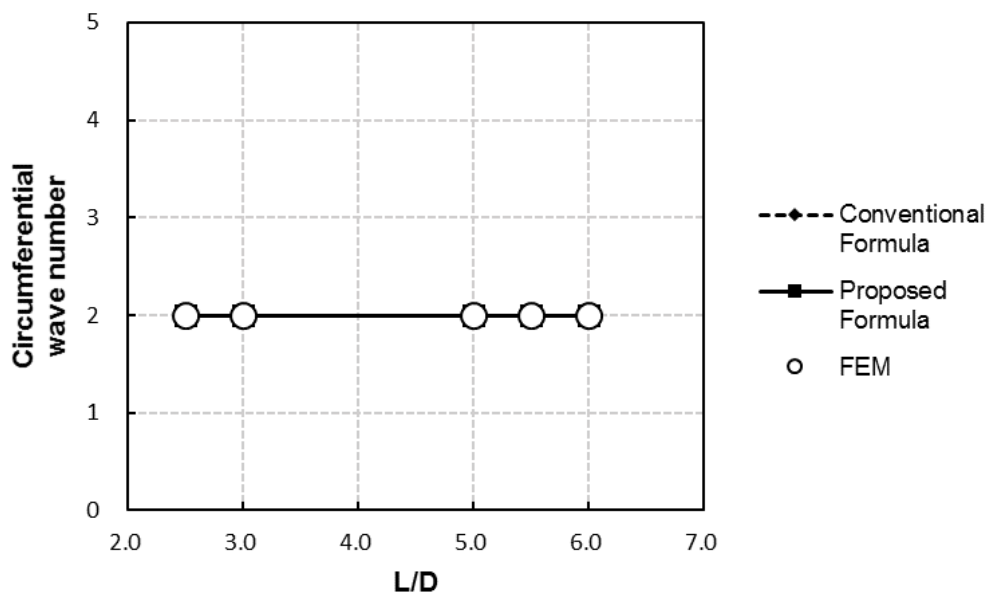
Case	L/D	Inside ring frame		Outside ring frame		In/Out
		Proposed formula / FEM	n ¹⁾ (n ²⁾	Proposed formula / FEM	n ¹⁾ (n ²⁾	Proposed Formula / FEM
1	2.5	0.951	2 (2) ¹⁾	1.012	2 (2)	0.940
2	3.0	0.927	2 (2)	1.005	2 (2)	0.922
3	5.0	0.885	2 (2)	0.986	2 (2)	0.897
4	5.5	0.882	2 (2)	0.984	2 (2)	0.896
5	6.0	0.880	2 (2)	0.983	2 (2)	0.895

1) Circumferential wave number obtained by proposed formula

2) Circumferential wave number obtained by FE-Analysis



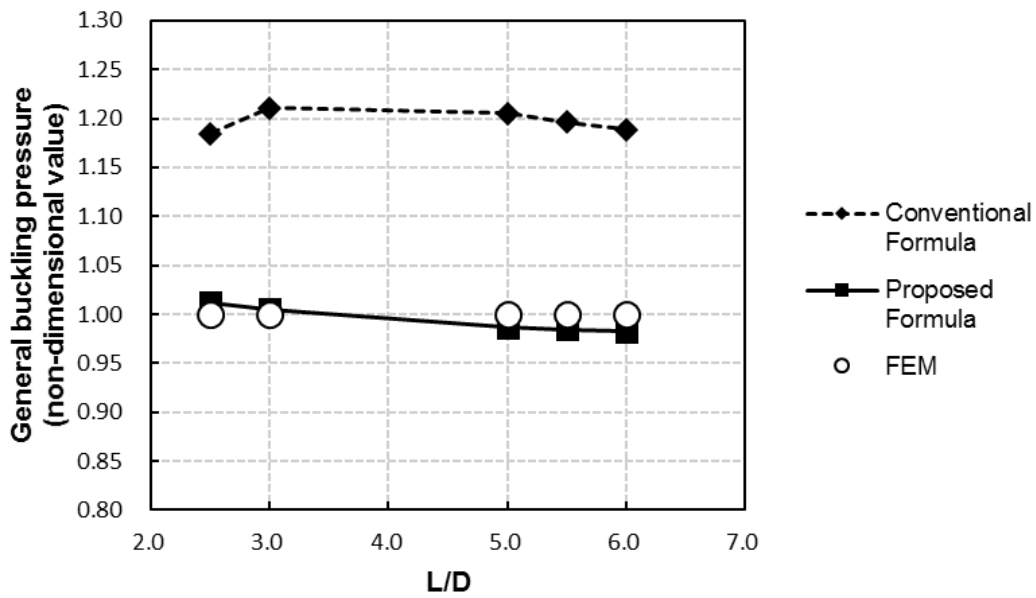
(1) Buckling pressure (non-dimensional value)



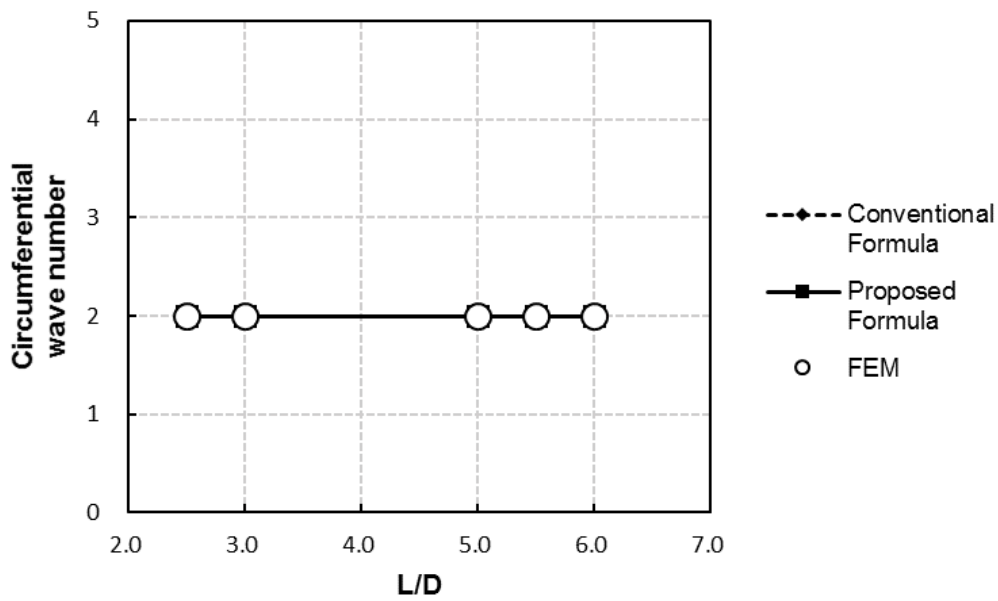
(2) Circumferential wave number

(a) Inside ring frame

Fig. 5-17 Comparison of general buckling pressure and circumferential wave number between proposed formula and FEM results for outside ring frame (Parameter: length of bulkhead).



(1) Buckling pressure (non-dimensional value)



(2) Circumferential wave number

(b) Outside ring frame

Fig. 5-18 Comparison of general buckling pressure and circumferential wave number between proposed formula and FEM results for outside ring frame (Parameter: length of bulkhead).

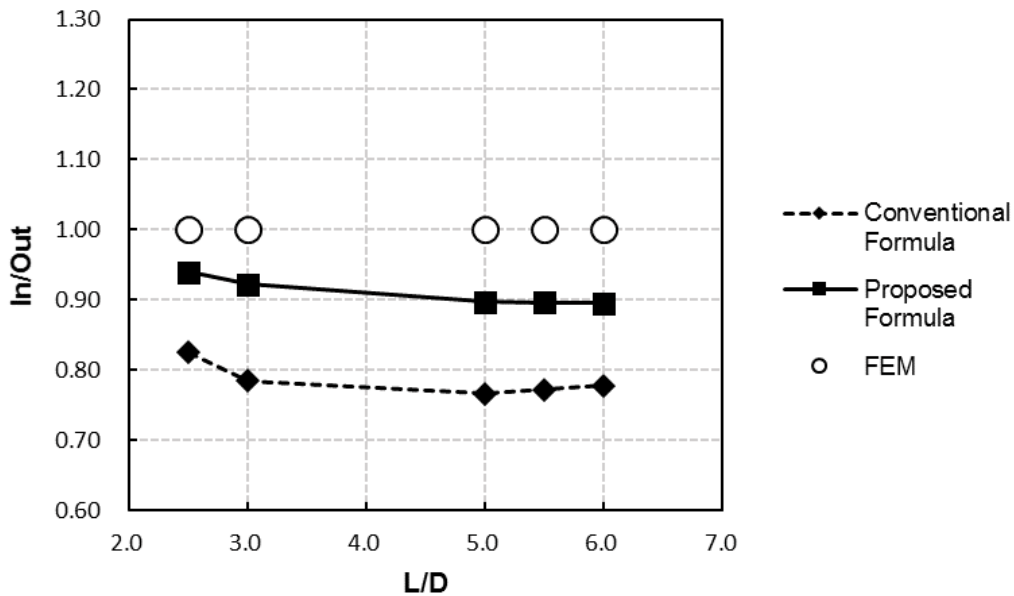


Fig. 5-19 Ratio of inside to outside ring frame.

5.6 全体座屈圧力の塑性修正について

塑性域での全体座屈圧力を求めるためには、(5-23)式にて示される全体座屈圧力推定式(弾性解)から何らかの形で塑性修正を行なう必要がある。本研究では、全体座屈圧力の塑性修正方法として胴板座屈圧力における塑性修正と同じく、(4-20)式で表される Johnson の式を用いた方法を採用する。

外圧を受けるリング補強円筒殻の場合、胴板に生じる応力は長手方向および周方向の2軸圧縮状態となる。さらに、補強リングがあることに伴い、周方向応力は補強リング間の胴板長手方向に対して分布する。そのため、(4-20)式を用いて塑性修正を行なうにあたり、参照すべき構造の位置および参照すべき応力について決定しておく必要があるが、全体座屈では胴板に加えて補強リングも座屈固有値に大きな影響を与えられられる。

そこで、胴板と補強リングの面積比を用いた(5-40)式を提案する。

$$\sigma' = \sigma_R \cdot \frac{A_R}{A_R + A_B} + \sigma_B \cdot \frac{A_B}{A_R + A_B}$$

(5-40)

ここで、 σ_R は補強リングフランジの板厚の各層におけるミーゼス応力の平均値、 σ_B は胴板と補強リングとの取合部の胴板の板厚の各層におけるミーゼス応力の平均値である。また、 A_R は1リングスペースにおける胴板の面積、 A_B は補強リングの面積である。

(5-40)式を用いて塑性修正を行なった結果と FEM 解析結果と比較検証した。解析対象は Table 4-4 に示した円筒殻とした。本検討では、補強リングが負担する荷重が大きくなる内フレーム方式を対象とした。

4.5 節と同じく、軸対称殻弾塑性座屈解析プログラム Axis-BUCK を用いて、材料の 0.2% 応力のみを変化させたシリーズ計算を行なった。境界条件は 4.5.1 項と同じとした。

解析結果を Fig. 5-20 に示す。Fig. 5-20 より、全体座屈圧力については材料の 0.2% 耐力が低い領域では比較的精度の良い推定ができて一方、0.2% 耐力が高くなるとその誤差が大きくなっていることが分かる。同一寸法において 0.2% 耐力の高い材料を使用した場合には、より弾性域での座屈が生じることになるが、この領域での推定精度が低下する理由について力学的な説明を見つけることができなかった。この点については今後の課題としたい。

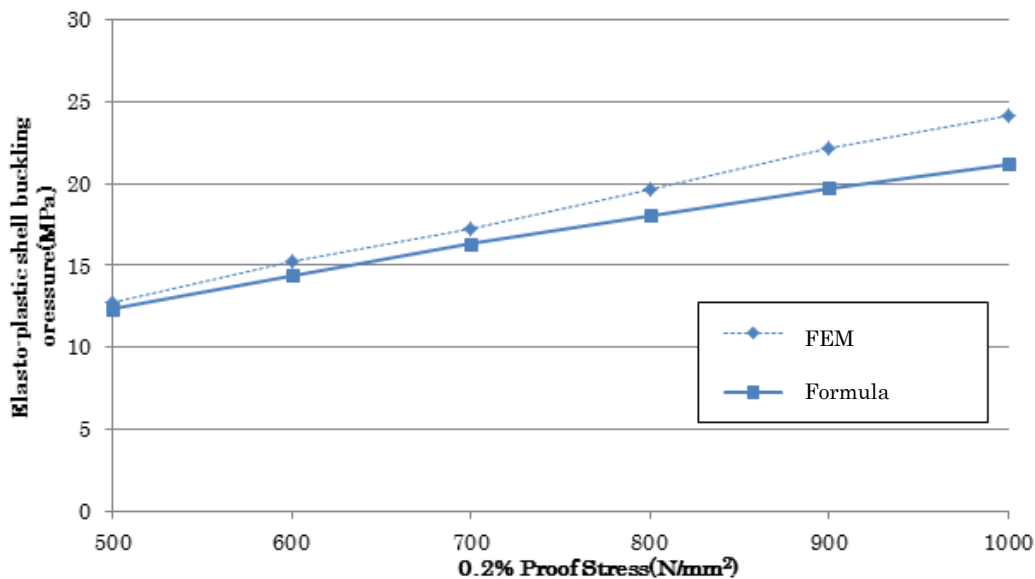


Fig. 5-20 Comparison of plastic shell buckling pressure between proposed method and FEM.

5.7 結言

潜水艇等に用いられる外圧作用下のリング補強円筒殻を対象とし、補強リングの影響による胴板の周方向応力低下の影響を考慮した全体座屈圧力の推定方法について調べ、以下の結論を得た。

- 1) 新たに補強リングの項を追加した周方向の面内力、モーメントを力のつり合い式に導入し、リング補強円筒殻の全体座屈圧力簡易推定式を導出した。さらに、リングの寄与分の曲げ剛性に関して曲り梁効果による中性軸位置の変化とせん断変形の影響を考慮することを提案した。提案式は、外フレーム様式では傾向をとらえ従来式と比べ推定精度が向上しているが、内フレーム様式ではより誤差が大きい結果となっている。なお、内外フレームの違いによる全体座屈圧力の比率に関しては、提案式は従来式より改善できていること、実際に用いられるリング補強円筒殻の長さ L と直径 d の比 (L/d) は、概ね $L/d = 2\sim 3$ 程度の範囲内であり、これらに対する内外フレームの全体圧壊圧力の比は 8%程度であることから、内外フレームの違いを考慮した全体圧壊圧力の推定において、提案式は従来式に比べて大幅に改善されていることがわかる。
- 2) 全体座屈圧力の塑性修正方法について、Johnson の式を用いる方法を採用したうえで、参照応力をリングと胴板のミーゼス応力を胴板と補強リングの面積比を用いて平均化した値を用いることで比較的精度の良い推定が可能である。

第6章 外圧を受けるリング補強円筒殻の補強リング横倒れ座屈強度

6.1 緒言

本論文では、第4章から第6章にて、(1) 胴板座屈、(2) 全体座屈、(3) 補強リングの横倒れ座屈、についてそれぞれ研究を実施する。第6章では(3) 補強リングの横倒れ座屈に対する座屈強度評価手法について検討する。(1)~(3)の座屈モードのイメージを Fig. 6-1 に示す。

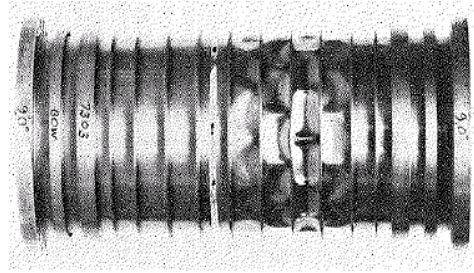
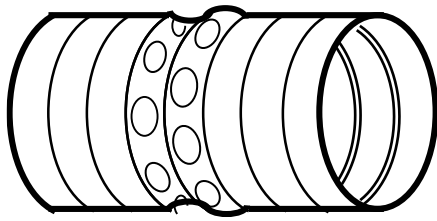
近年、経済性ならびに機能性の観点から隔壁間長をより長くしたいとの要望がある。この場合には全体座屈強度が相対的に低下するため、その対策の1つとして、比較的寸法の大きい補強リングを採用して全体強度を胴板強度より大きくすることが考えられる。しかしながら、寸法の大きな、すなわち背の高い補強リングを採用した場合には、それ自身の横倒れ座屈強度が低下する。このような円筒殻の設計においては、胴板座屈および全体座屈に加えて、補強リングの横倒れ座屈に対する座屈強度についても十分に注意を払う必要がある。

補強リングの横倒れ座屈強度の簡易的推定手法に関する研究は、胴板座屈および全体座屈のそれに比較して極めて少なく、古くは Kennard¹⁷⁾ による推定式が、また、補強リングの横倒れ座屈におよぼす胴板の面内圧縮力作用下での曲げ剛性の低下の影響を考慮した推定式が Faulkner¹⁸⁾、Morandi ら¹⁹⁾ により提案されている。ただし、これらの推定式では、補強リングの横倒れ座屈に及ぼす胴板の剛性低下の影響を表わす方法として、Tokugawa および Mises によって提案された無補強円筒殻に対する座屈強度推定式^{10) 11)} が用いられている。

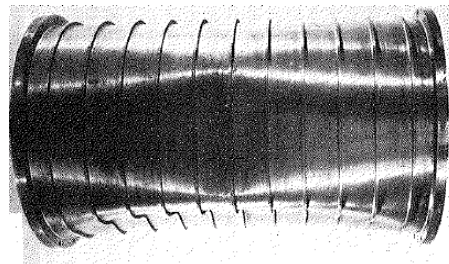
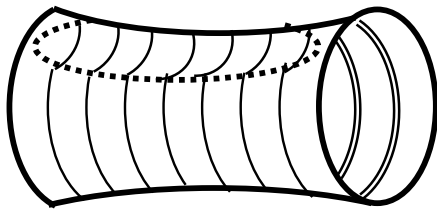
しかしながら、4章で示した通り、リング補強円筒殻に外圧が作用する場合の胴板に生じる周方向応力 σ_θ と長手方向応力 σ_s の比率は、無補強円筒殻の場合の比率($\sigma_\theta:\sigma_s=2:1$)とは必ずしも一致しない。この理由は、補強リングが胴板に作用する圧力荷重の一部を分担するためであり、胴板に生じる胴板に生じる周方向応力 σ_θ と長手方向応力 σ_s の比率($\sigma_\theta:\sigma_s$)は無補強円筒殻の場合に比べて相対的に小さくなる。これは、補強リングの寸法が大きくなるにつれて顕著になると考えられる。

したがって、隔壁間長を長くすべく比較的寸法の大きい補強リングを採用した場合の補強リングの横倒れ座屈に対する座屈強度を精度よく算定するためには、Tokugawa および Mises によって提案された無補強円筒殻に対する座屈強度推定式では精度が充分ではない可能性がある。

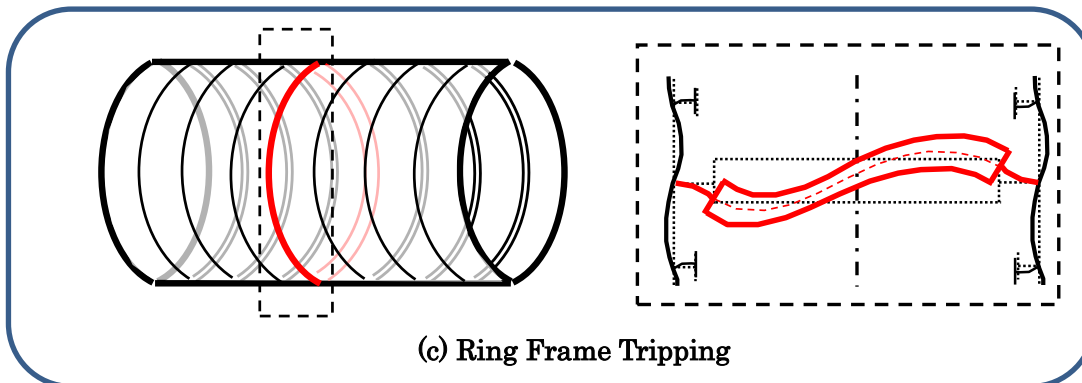
そこで、本章では、補強リングの横倒れ座屈におよぼす胴板の面内圧縮力作用下での曲げ剛性の低下の影響を考慮した、補強リングの横倒れ座屈強度に対する新たな簡易推定式を提案するとともに、4章の胴板座屈強度推定式を適用することを新たに提案する。それらの簡易推定式の精度を FEM 解析結果と比較検討することによって検証する。



(a) Shell Buckling



(b) General Instability



(c) Ring Frame Tripping

Fig. 6-1 Image of several buckling mode for ring-stiffened cylindrical shell under external pressure

6.2 従来研究の概要

外圧を受けるリング補強円筒殻に対する、補強リングの横倒れ座屈強度を精度よく推定するためには、補強リング自身の剛性だけではなく、補強リングと取合う胴板の曲げ剛性を考慮する必要がある。特に、補強リングの横倒れ座屈強度と胴板座屈強度とが近接する場合には、胴板の面内圧縮力作用下での曲げ剛性の低下の影響についても充分考慮しておくことが重要である。

Fig. 6-2 に示すような補強リングの横倒れ座屈強度に対する弾性域での簡易推定式として、古くは Kennard による定式化がある。Kennard は、胴板を剛と仮定した上で、補強リングのウェブの面外曲げ剛性とフランジの水平曲げ剛性および捩り剛性をそれぞれ考慮した式を提案している¹⁾。さらに、Kennard は別途胴板の面外曲げ剛性が補強リングの横倒れ座屈におよぼす影響についても検討を行なっているが、補強リングの横倒れ座屈におよぼす胴板の面内圧縮力作用下での曲げ剛性の低下の影響については検討されていない。

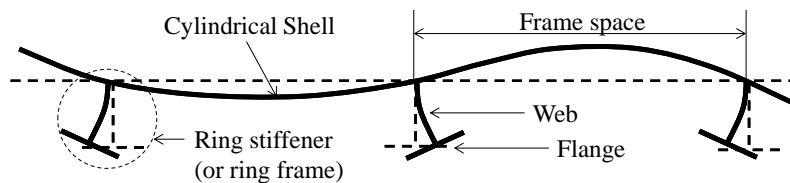


Fig. 6-2 Ring frame tripping mode shape.

一方、補強リングの横倒れ座屈におよぼす胴板の面内圧縮力作用下での曲げ剛性の低下の影響についても考慮した簡易推定式としては、Faulkner¹⁸⁾ や Morandi ら¹⁹⁾ による定式化がある。

Faulkner は、Fig. 6-3 に示すような補強リングのウェブとフランジを一体梁とし、回転軸が拘束された薄肉梁の曲げ捩り座屈として扱う仮定に基づいて、補強リングの横倒れ座屈応力 σ_t の推定式として(6-1)式を提案している¹⁸⁾。

$$\sigma_t = \frac{GJ + E\Gamma \left(\frac{n}{R_m}\right)^2 + C_{0n} \left(\frac{R_m}{n}\right)^2}{I_0 + \frac{C_{0n}}{\xi p_m} \left(\frac{R_m}{n}\right)^2}$$

(6-1)

ここに、 E はヤング率、 G はせん断弾性係数、 I_0 はウェブと胴板との取合位置軸回りの補強リングの断面二次モーメント、 R_m は胴板の平均半径、 n は横倒れ座屈波数である。

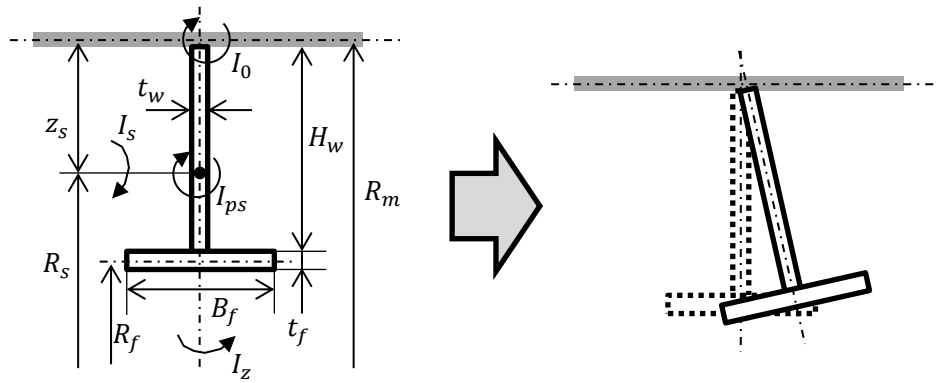


Fig. 6-3 Ring frame tripping buckling mode shape considering ring frame torsion and warping²⁾

J は補強リングに対するサンブナンの振り定数であり、補強リングの断面形状が T 型の場合、(6-2)式で与えられる。

$$J = \frac{B_f t_f^3 + H_w t_w^3}{3}$$

(6-2)

ここで、 B_f は補強リングフランジの幅、 t_f は補強リングフランジの板厚、 H_w は補強リングウェブ高さ、 t_w は補強リングウェブの板厚である。

さらに、 Γ は補強リングの曲げ振り定数であり、補強リングの断面形状が T 型の場合、(6-3)式で与えられる。

$$\Gamma = I_z \left(h_w + \frac{t_f}{2} \right)^2 + \frac{\left(\frac{b_f^3 t_f^3}{4} + h_w^3 t_w^3 \right)}{36}$$

(6-3)

ここで、 I_z は弱軸まわりの断面 2 次モーメントである。但し、(6-3)式は Morandi によって曲げ振り剛性の定式化が修正されたものを示している¹⁹⁾。さらに、 p_m は胴板座屈圧力であり、Faulkner, Morandi とともに(4-1)式に示す Mises の無補強円筒殻に対する胴板座屈圧力推定式を用いている。

また、 ξ は補強リングの横倒れ座屈圧力 p_t と座屈応力 σ_t の比であり、(6-4)式に示す関係があると仮定している。

$$\xi = \frac{\sigma_t}{p_t} = \frac{\sigma_{yf} R_f}{p_{yf} R_s}$$

(6-4)

ここで、 σ_{yf} は補強リングフランジの降伏応力、 p_{yf} は補強リングが座屈せずにフランジ降伏するときの圧力であり、 R_s は Fig. 6-3 に示す補強リングの図心位置の半径、 R_f は補強リングフランジの板厚中心径である。

なお、補強リングの横倒れ座屈におよぼす胴板の面内圧縮力作用下での曲げ剛性の低下の影響は、胴板座屈圧力 p_m と補強リングの横倒れ座屈圧力 p_t との比率が 2.0 よりも小さい場合に対し、(6-5)式に示すように線形的に低下すると仮定している。

$$C = C_{0n} \left(1 - \frac{p_t}{p_m} \right) \quad (6-5)$$

ここで、 C_{0n} は胴板の剛性であり、補強リングが周方向に波打つことを考慮して(6-6)式にて与えられている。

$$C_{0n} = \frac{Et^3}{3(1-\nu^2)L} \left\{ 1 + \left(\frac{nL}{\pi R_m} \right)^2 \right\}^2 \quad (6-6)$$

しかしながら、(6-5)式の力学的意味については Faulkner および Morandi の論文には明確に示されていない。

さらに、Morandi らは、Adamchack⁵³⁾ が提唱した補強平板に対する補強材の横倒れ座屈式の考え方に倣い、補強リングのウェブの曲げの影響を考慮した簡易推定式として(6-7)式を提案している¹⁹⁾。

$$\sigma_t^2(k_2k_4 - k_6^2) + \sigma_t(k_1k_4 + k_2k_3 - 2k_5k_6) + (k_1k_3 - k_5^2) = 0 \quad (6-7)$$

(6-7)式は補強リングの横倒れ座屈応力 σ_t に対する 2 次方程式であり、これを解くことで σ_t が算出できる。なお、補強リング形状が T 型の場合、 $k_1 \sim k_6$ は(6-8)式のように与えられている。

$$\begin{aligned} k_1 &= EI_z \left(\frac{n}{R_m} \right)^2 + 3 \frac{D}{H_w^3} \left(\frac{R_m}{n} \right)^2 (1 + 3C') \\ k_2 &= -A_s + H_w t_w \left(\frac{18}{35} + \frac{19C'}{140} - \frac{3C'^2}{140} \right) \\ k_3 &= GJ + E \left(\frac{B_f^3 t_f^3 / 4 + H_w^3 t_w^3}{36} \right) \left(\frac{n}{R_m} \right)^2 + 3 \frac{D}{H_w} \left(\frac{R_m}{n} \right)^2 \left(1 + \frac{C'}{3} \right) \\ k_4 &= -I_{ps} + H_w^3 t_w \left(\frac{11}{35} + \frac{C'}{84} - \frac{C'^2}{420} \right) \\ k_5 &= -3 \frac{D}{H_w^2} \left(\frac{R_m}{n} \right)^2 (1 + C') \end{aligned}$$

$$k_6 = H_w^2 t_w \left(\frac{3}{35} - \frac{17C'}{420} + \frac{C'^2}{140} \right)$$

(6-8)

ここで、 A_s は補強リングの断面積、 I_{ps} は補強リング図心まわりの断面二次極モーメント、 D は板の曲げ剛性 ($D = Et^3/12(1 - \nu^2)$) であり、 C' は(6-9)式にて与えられる。

$$C' = \frac{CH_w/4D}{1 + CH_w/4D}$$

(6-9)

Morandi らは、FEM 解析と比較することで(6-1)式および(6-7)式の妥当性について確認しているが、検討に用いた寸法では胴板座屈圧力が補強リングの横倒れ座屈圧力を下回っており、比較的寸法の小さい補強リングと推察されることから、補強リングが大きくなる場合への適用性には課題がある。

塑性域における補強リングの横倒れ座屈圧力については、Faulkner¹⁸⁾ および Morandi ら¹⁹⁾ が(6-1)式をベースとして以下に示す(6-10)式を提案している。

$$\begin{aligned} \sigma_{ti} &= \sigma_{yf} \{1 - p_s(1 - p_s)\lambda^2\} \text{ if } n \leq \frac{\pi R_m}{3(H_w + t_f)} \text{ and } \lambda \leq p_s^{-0.5} \\ \sigma_{ti} &= \sigma_{yf} \{1 + p_s(1 - p_s)\lambda^4\}^{-1} \text{ if } n > \frac{\pi R_m}{3(H_w + t_f)} \text{ and } \lambda \leq p_s^{-0.5} \\ \sigma_{ti} &= \sigma_t \text{ if } \lambda > p_s^{-0.5} \end{aligned}$$

(6-10)

ここに、 λ は細長比 ($= \sqrt{\sigma_{yf}/\sigma_t} (= \sqrt{p_{yf}/p_t})$) である。また、 p_s は補強リングの製造方法に伴う係数であり、溶接組み立ての場合は $p_s = 0.8$ を、冷間曲げの場合は $p_s = 0.5$ とすることを推奨している。しかしながら、Faulkner は(6-10)式を提案したが、その妥当性については検証しておらず、Morandi らは(6-10)式を用いて塑性域での補強リングの横倒れ座屈圧力を算出はしているが、その値の精度については検証していない。したがって、補強リングが大きくなる場合への適用性には課題がある。

なお、初期不整が補強リングの横倒れ座屈強度におよぼす影響に関する研究については、著者が調べた限りでは見つからなかった。

6.3 新しい推定法の提案

Fig. 6-2 のような補強リングの横倒れ座屈に対し，補強リングの横倒れ座屈におよぼす胴板の面内圧縮力作用下での曲げ剛性の低下の影響についても考慮した推定式を提案する．

6.3.1 基礎式

胴板および補強リングのウェブをバネと仮定し，Fig. 6-4 に示すように，フランジがこれらのバネに支えられた状態で圧縮荷重 $P(= \sigma A_{Ff})$ を受けて水平座屈を起こすと仮定する．この場合の釣合方程式は(6-11)式で表わされる．

$$E_{Ff} I_{Ff} \frac{d^4 w}{dx^4} + \sigma A_{Ff} \frac{d^2 w}{dx^2} + kw = 0 \quad (6-11)$$

ここに， E_{Ff} はフランジのヤング率， A_{Ff} はフランジの断面積， I_{Ff} はフランジの強軸側（補強リング全体で見た場合は弱軸側）の断面2次モーメントである．

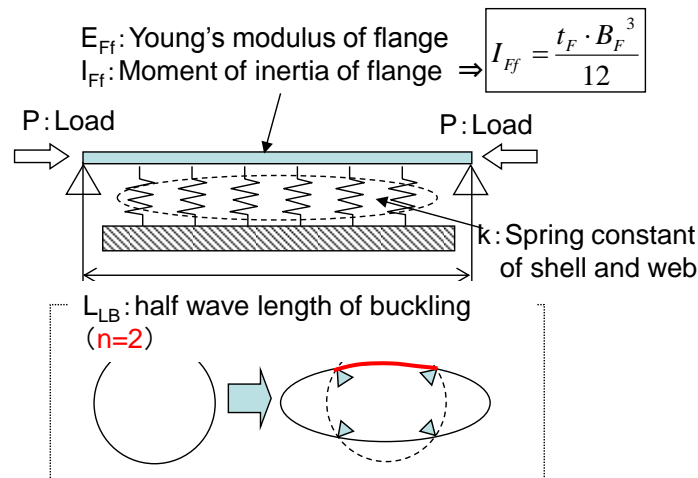


Fig. 6-4 Analyzed modelling of ring frame tripping of ring-stiffened cylinder.

座屈半波長を L とすると，フランジ両端部で水平方向への撓み量 w がゼロ，すなわち両端支持と考えてよい．したがって，水平方向への撓み量 w を(6-12)式のように仮定する．

$$w = w_0 \sin\left(\frac{\pi}{L_{LB}}\right)x \quad (6-12)$$

ここで，座屈半波長 L_{LB} は(6-13)式で与えられる．ただし， d_{FFTC} は補強リングフランジの板厚中心での直径， n は円周方向の座屈波数である．

$$L_{LB} = \frac{\pi d_{FTC}}{2n} \quad (6-13)$$

(6-12)式および(6-13)式を(6-11)式に代入し整理すると、補強リングの横倒れ座屈応力（補強リングフランジの水平曲げ座屈応力） σ_{LBE} は(6-14)式のように求まる。

$$\sigma_{LBE} = \left(\frac{\sigma_E}{2} \right) \left\{ \left(\frac{n_F}{\xi} \right)^2 + \left(\frac{\xi}{n_F} \right)^2 \right\} \quad (6-14)$$

ここで、 n_F は補強リングの横倒れ座屈における周方向座屈波数であり、 σ_E と ξ はそれぞれ(6-15)式および(6-16)式で与えられる。

$$\sigma_E = \frac{2\sqrt{E_{Ff} I_{Ff} k}}{A_{Ff}} \quad (6-15)$$

$$\xi = \left(\frac{d_{FTC}}{2} \right)^4 \sqrt{\frac{k}{E_{Ff} I_{Ff}}} \quad (6-16)$$

ここで k は胴板とウェブの分布バネ定数である。 σ_{LBE}/σ_E と ξ の関係イメージを Fig. 6-5 に示す。

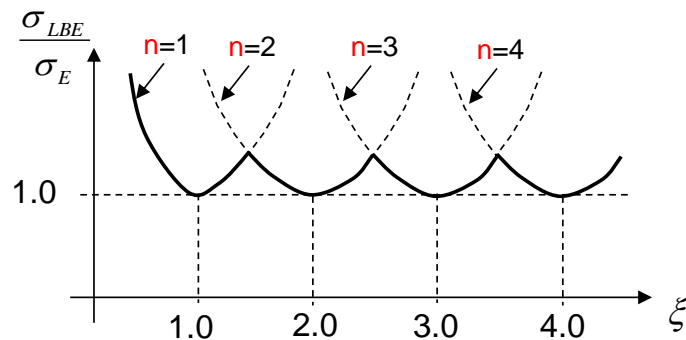


Fig. 6-5 Image of ring frame tripping buckling stress(σ_{LBE})

胴板とウェブの分布バネ定数 k は以下のように算出する。なお、厳密には殻として取り扱う必要があるが、簡単のため、Fig. 6-6 に示すような断面を考える。

フレームフェースに単位周長あたり荷重 f が作用した場合のフレームの単位周長あたりのたわみ量 δ は(6-17)式で与えられる。

$$\delta = \delta_1 + \delta_2 \quad (6-17)$$

ただし、 δ_1 はウェブ単体の曲げたわみ、 δ_2 は胴板の変形に伴う剛体回転に伴う変形量であり、それぞれ(6-18)式と(6-19)式で与えられる。

$$\delta_1 = \frac{f \cdot H_{TC}^3}{3D_{Fw}} \quad (6-18)$$

$$\delta_2 = \theta \cdot H_{TC} = \left(\frac{\ell_s}{2D_S} \right) \cdot \left(\frac{f \cdot H_{TC}}{2} \right) \cdot H_{TC} \quad (6-19)$$

ここで、 D_{Fw} は補強リングウェブの板としての面外曲げ剛性、 D_S は胴板の板としての面外曲げ剛性である。また、 H_{TC} は補強リングウェブ高さ（ただし胴板の板厚中心から補強リングのフランジの板厚中心までの高さ）、 ℓ_s は補強リング間の距離である。

(6-18)式と(6-19)式を(6-17)式に代入して整理することにより、胴板とウェブの分布バネ定数 k は(6-20)式で与えられる。

$$k = \frac{f}{\delta} = \frac{1}{H_{TC}^2 \left(\frac{H_{TC}}{3D_{Fw}} + \frac{\ell_s}{4D_S} \right)} \quad (6-20)$$

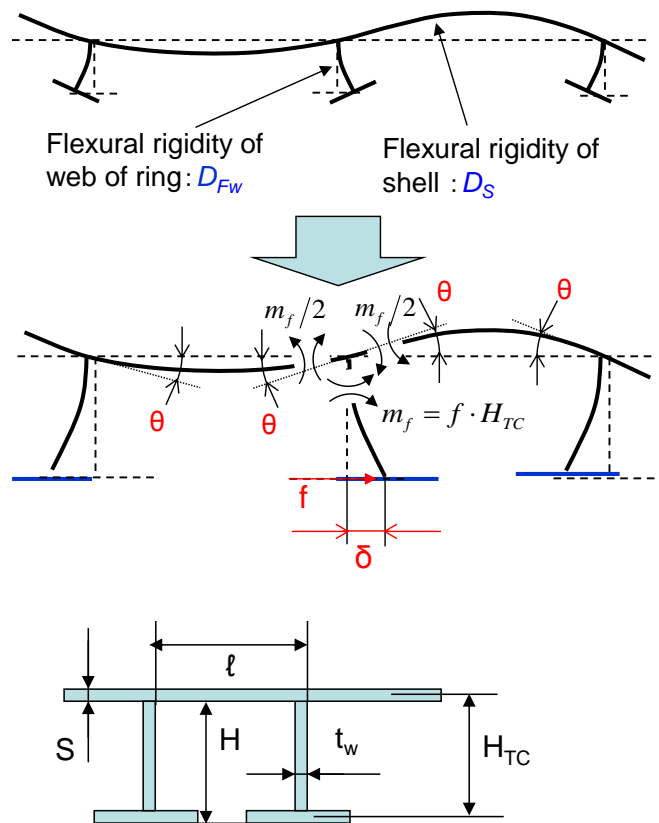


Fig. 6-6 Modelling image for spring constant of shell and web

6.3.2 胴板の面内力作用下での曲げ剛性低下の影響を考慮したバネ定数算出式

補強リングの横倒れ座屈におよぼす胴板の面内圧縮力作用下での曲げ剛性の低下の影響を考慮したバネ定数評価式を提案する。Fig. 6-7は胴板の剛性低下評価のためのモデル図である。

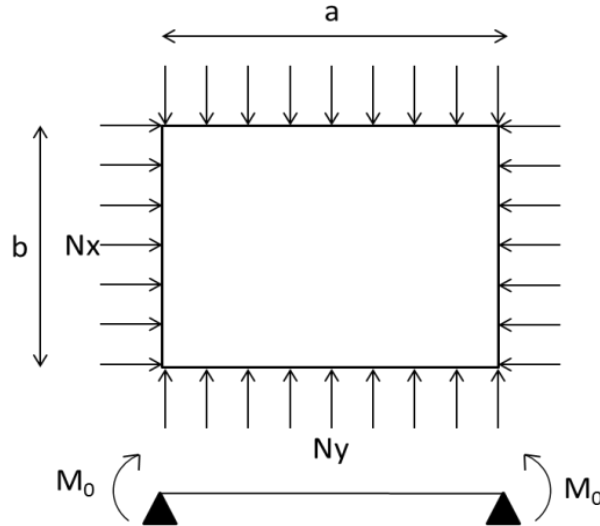


Fig. 6-7 Evaluation model for simply supported plate under bi-axial compression and end moment

このモデルでは胴板の座屈モードの対称性を考慮して軸方向に1フレームスペース，周方向には座屈の半波長を取り出し，フレーム位置で単純支持を適用している。いま，たわみ関数を(6-21)式のように仮定する。

$$w = A \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (6-21)$$

胴板に蓄えられるひずみエネルギーは(6-22)式で与えられる。

$$\Delta U_m = \frac{1}{2} \iint D \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy \quad (6-22)$$

軸圧縮およびモーメントによるポテンシャルエネルギーの変化はそれぞれ(6-23)式および(6-24)式のようになる。

$$\Delta T_1 = -\frac{1}{2} \left\{ N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dx dy \quad (6-23)$$

$$\Delta T_2 = 2M \int_0^b \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \Big|_{x=0} dy = 4 \frac{b}{a} MA \quad (6-24)$$

従って、トータルポテンシャルエネルギーの変化は(6-25)式で表される。

$$\Pi = \frac{ab}{8} A^2 \pi^4 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 - \frac{A^2 \pi^2}{8} \left(\frac{b}{a} N_x + \frac{a}{b} N_y \right) - 4 \frac{b}{a} M A \quad (6-25)$$

(6-25)式を A で偏微分した式が 0 となると仮定すると、 A が(6-26)式のように得られる。

$$A = \frac{16 \frac{b}{a} M}{ab \pi^4 D \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 - \pi^2 \left(\frac{b}{a} N_x + \frac{a}{b} N_y \right)} \quad (6-26)$$

よって、Fig. 6-6 における θ および δ はそれぞれ(6-26)式および(6-27)式となる。

$$\theta = \frac{\pi}{a} \cdot A = \frac{8bfh}{a^3 b \pi^3 D_p \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 - a^2 \pi \left(\frac{b}{a} N_x + \frac{a}{b} N_y \right)} \quad (6-27)$$

$$\delta = \frac{fh^3}{3D_w} + \theta h = \frac{fh^3}{3D_w} + \frac{8bfh^2}{D_p a^3 b \pi^3 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 - a^2 \pi \left(\frac{b}{a} N_x + \frac{a}{b} N_y \right)} \quad (6-28)$$

最終的に板の面内圧縮力作用下での曲げ剛性の低下の影響を考慮したバネ定数評価式として(6-29)式が得られる。

$$k_2 = \frac{f}{\delta} = \left\{ h^2 \left[\frac{h}{3D_w} + \frac{8b}{D_p a^3 b \pi^3 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 - a^2 \pi \left(\frac{b}{a} N_x + \frac{a}{b} N_y \right)} \right] \right\}^{-1} \quad (6-29)$$

なお、(6-29)式は(6-30)式の形で表すことができる。

$$k_2 = \frac{f}{\delta} = \left[h^2 \left\{ \frac{h}{3D_w} + \frac{8l_s}{\pi^3 D_p \left(1 - \frac{N}{N_c} \right)} \right\} \right]^{-1} \quad (6-30)$$

ここで、 N は平板に加わる軸圧縮力、 N_c は平板の座屈軸圧縮力である。(6-30)式は平板に加わる軸圧縮力が座屈軸圧縮力に達したときに胴板の剛性が無くなりバネ定数がゼロとなることを表している。

上記に示す 2 軸圧縮を受ける板の面内圧縮力作用下での曲げ剛性の低下の考え方が、外圧を受ける円筒殻の胴板の面内圧縮力作用下での曲げ剛性の低下にも適用できると考える。すなわち、(6-20)式の分母の第 2 項において、(6-30)式と同じように胴板の面内圧縮力作用下での曲げ剛性の低下を考慮すると(6-31)式が得られる。

$$k = \frac{1}{\left[H_{TC}^2 \left\{ \frac{H_{TC}}{3D_{Fw}} + \frac{l_s}{4D_s} \left\{ 1 / \left(1 - \frac{p_{KF}}{p_c} \right) \right\} \right\} \right]} \quad (6-31)$$

ここに、 p_{KF} は横倒れ座屈圧力、 p_c は外圧を受ける円筒殻の胴板座屈圧力（ただし横倒れ座屈が生じる周方向波数(n_F)における値）である。

なお、本研究では、胴板座屈圧力 p_c は、Faulkner や Morandi らが用いてきた Tokugawa および Mises にて提唱された(6-32)式ではなく、4章で定式化された補強リングの影響を考慮したリング補強円筒殻に対する胴板座屈圧力の簡易推定式である(6-33)式を適用している。

$$p_c = \frac{2E_s(S/d)}{n_s^2 + (\lambda^2/2) - 1} \left\{ \frac{(S/d)^2}{3(1-\nu_s^2)} \left[(n_s^2 + \lambda^2)^2 - 2n_s^2 + 1 \right] + \frac{\lambda^4}{(n_s^2 + \lambda^2)^2} \right\} \quad (6-32)$$

$$p_c = \left(\frac{E_s(2S/d_{STC})}{1-\nu_s^2} \right) \frac{C_1 + C_2 \gamma}{C_3 \left\{ 1 - \frac{\alpha(1-(\nu_s/2))\zeta}{1+\alpha} \right\} + (1/2)C_4} \quad (6-33)$$

補強リングの横倒れ座屈圧力 p_{KF} は、(6-34)式に示す外圧によって補強リングフランジに生じる周方向応力 $\sigma_{\theta F}$ ¹⁷⁾ が、(6-14)式で示した横倒れ座屈応力 σ_{LBE} に一致する圧力となる。

$$\sigma_{\theta F} = \left(\frac{p_{KF} d_{STC}}{2S} \right) \left(\frac{1-(\nu_F/2)}{1+\alpha} \right) \left(\frac{d_{STC}}{d_{FJC}} \right) \quad (6-34)$$

ただし、 d_{STC} および d_{FJC} は、それぞれ胴板および補強リングフランジの板厚中心での直径、 S は胴板板厚、 ν_F は補強リングのポアソン比である。また、 α は(6-35)式のように求められる。

$$\alpha = \frac{A_R}{l_{eo} S} \quad (6-35)$$

ここで、 A_R は補強リングの全断面積、 l_{eo} は補強リングに対する胴板の有効幅であり、 l_{eo} は(6-36)式にて求められる。

$$l_{eo} = \frac{l_s \cosh(2\beta) - \cos(2\beta)}{\beta \sinh(2\beta) + \sin(2\beta)} \quad (6-36)$$

$$\beta = \frac{l_s}{1.56 \sqrt{(d_{STC}/2)S}} \quad (6-37)$$

6.3.3 補強リングの横倒れ座屈圧力の簡易推定式

(6-14)式に(6-31)式および(6-34)式を代入して整理することで、補強リングの横倒れ座屈圧力 p_{KF} は(6-38)式のように書き直すことができる。

$$A \cdot p_{KF}^2 - B \cdot p_{KF} + C = 0 \quad (6-38)$$

ここに、 A, B, C は(6-39)式にて与えられる。

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{1}{p_c}\right) \left[(A_{Ff} H_{TC}^2) \left\{ \left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{H_{TC}}{l_s}\right) \left(\frac{D_s}{D_{FW}}\right) \right\} \left\{ \left(\frac{d_{STC}}{2S}\right) \left(\frac{1-\nu/2}{1+\alpha}\right) \left(\frac{d_{STC}}{d_{FfTC}}\right) \right\} \right] \\ B &= \left(\frac{1}{p_c}\right) \left[E_{Ff} I_{Ff} \left(\frac{n}{d_{FfTC}/2}\right)^2 \left\{ \left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{H_{TC}}{l_s}\right) \left(\frac{D_s}{D_{FW}}\right) \right\} + \left(\frac{d_{FfTC}/2}{n}\right)^2 \left(\frac{4D_s}{l_s}\right) \right] \\ &\quad + (A_{Ff} H_{TC}^2) \left\{ \left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{H_{TC}}{l_s}\right) \left(\frac{D_s}{D_{FW}}\right) \right\} + (A_{Ff} H_{TC}^2) \left\{ \left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{H_{TC}}{l_s}\right) \left(\frac{D_s}{D_{FW}}\right) \right\} \left\{ \left(\frac{d_{STC}}{2S}\right) \left(\frac{1-\nu/2}{1+\alpha}\right) \left(\frac{d_{STC}}{d_{FfTC}}\right) \right\} \\ C &= E_{Ff} I_{Ff} \left(\frac{n}{d_{FfTC}/2}\right)^2 + E_{Ff} I_{Ff} \left(\frac{n}{d_{FfTC}/2}\right)^2 \left\{ \left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{H_{TC}}{l_s}\right) \left(\frac{D_s}{D_{FW}}\right) \right\} + \left(\frac{d_{FfTC}/2}{n}\right)^2 \left(\frac{4D_s}{l_s}\right) \end{aligned} \quad (6-39)$$

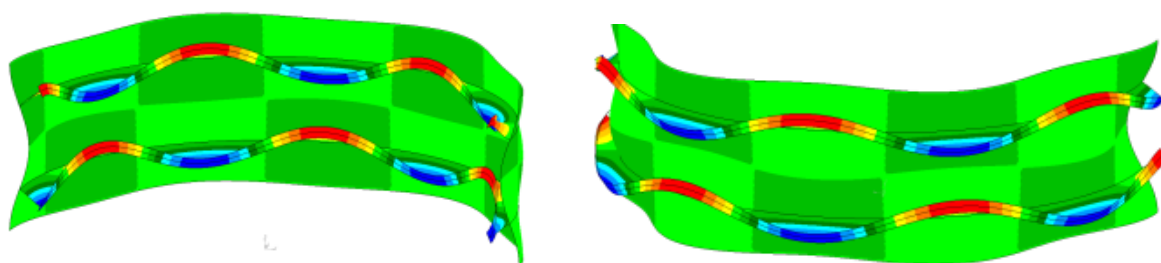
(6-38)式は p_{KF} に関する2次方程式であり、これを周方向波数 n ごとに解き、 p_{KF} が正の実数となる条件、および(6-31)式のバネ定数 k が正値となる条件を適用する。それらが成立する周方向波数 n に対し、最も小さい値となる p_{KF} が補強リングの横倒れ座屈圧力であり、そのときの周方向波数 n が座屈波数となる。

6.4 簡易推定式の精度検証

リング補強円筒殻に対する横倒れ座屈圧力の簡易推定式の推定精度を検証すべく、内フレーム方式と表記)、および外フレーム方式について、それぞれ FEM 解析にて得られた結果との比較検証を行なった。

6.4.1 検討対象、検討パラメータおよび FEM 解析モデル

4.4 節と同じく、Yamamoto らの研究⁴⁵⁾にて用いられたリング補強円筒殻の圧壊試験模型を参考に検討対象寸法を設定した。検討パラメータおよび FEM 解析モデルは 4.4 節と同じとした。基本寸法 (Case1-1-1) による横倒れ座屈解析結果を Fig. 6-8 に示す。



(a) Inside ring frame (b) Outside ring frame

Fig. 6-8 Frame tripping mode under external pressure (case 1-1-1).

さらに、座屈前変形が補強リングの横倒れ座屈圧力におよぼす影響について確認すべく、Case1-4-1 に対し線形座屈固有値解析 (座屈前変形は未考慮) および非線形座屈解析 (座屈前変形の影響を考慮) を実施した。

座屈前変形の影響を考慮の有無による補強リングの横倒れ座屈圧力の値の比較結果を Table 6-1 に、補強リングの横倒れ座屈モードを Fig. 6-9 にそれぞれ示す。なお、Table 6-1 に示す値は、4 章と同様(6-32)式にて得られた無補強円筒殻の胴板座屈圧力の値にて無次元化している。

Table 6-1 および Fig. 6-9 より、座屈荷重および座屈モードとも、座屈前変形の影響を考慮した場合としない場合とで大差ないことがわかる。

Table 6-1 Comparison of ring frame tripping buckling pressure between without and with considering the pre-buckling deformation. (Case 1-4-1)

pre-buckling deformation	Frame tripping buckling pressure ¹⁾	n ²⁾
Without considering	0.362	1
With considering	0.368	1

1) Non-dimensional value by using shell buckling pressure obtained to Eq. (6-32)

2) Circumferential wave number

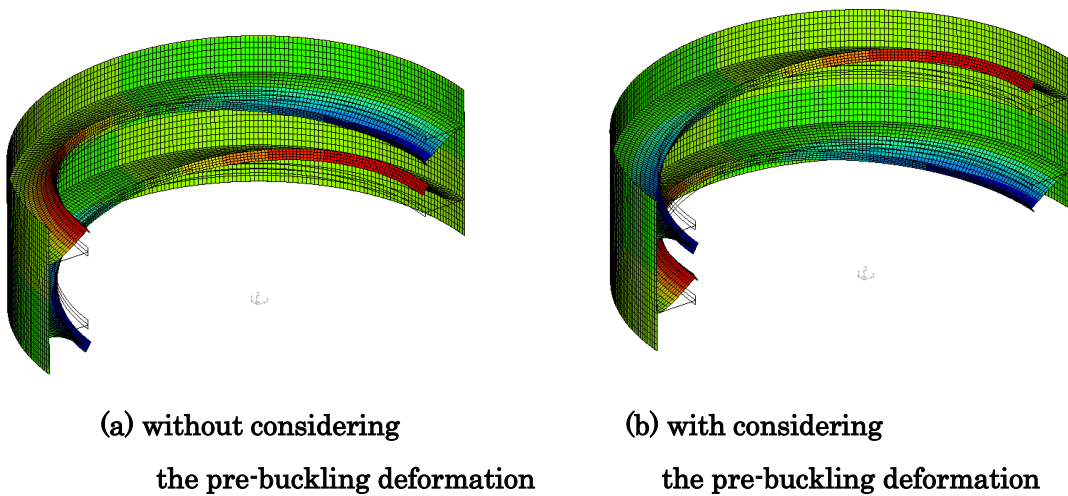


Fig. 6-9 Ring frame tripping buckling mode under external pressure with and without considering the pre-buckling deformation (Case 1-4-1)

6.4.2 提案した推定式と FEM 解析結果との比較

ウェブ高さをパラメータとした場合の横倒れ座屈圧力および周方向への座屈波数の値の比較を Fig. 6-10 および Fig. 6-11 に示す. Fig. 6-10 は内フレーム方式の値を, Fig. 6-11 は外フレーム方式の値を示している. なお, 提案式および FEM 解析にて得られた数値は, (6-32)式にて得られた無補強円筒殻の胴板座屈圧力の値で無次元化している.

Fig. 6-10 および Fig. 6-11 より, 内フレーム方式と外フレーム方式それぞれに対する座屈圧力は, 推定式と FEM 解析結果とが概ね一致していることがわかる. したがって, 提案した補強リングの横倒れ座屈強度に対する簡易推定式は, 今回検討対象とした寸法においては, 内フレーム方式および外フレーム方式によらず横倒れ座屈強度が推定可能であることがわかる.

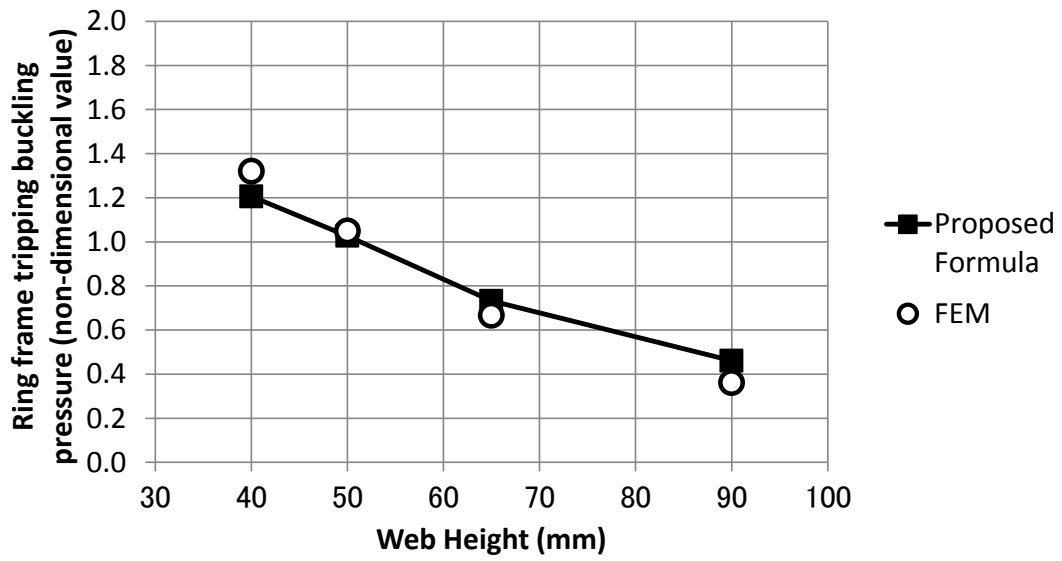
ただし, 今回検討対象とした寸法においては, 提案した補強リングの横倒れ座屈強度に対する

推定式は、ウェブが低い場合に FEM 解析と若干差異が生じる結果を与えている。これは、ウェブが低い場合には、補強リングが横倒れ座屈する際の座屈形態が、フランジの水平曲げ座屈が主体ではなく補強リング全体の曲げ捩り座屈が主体になるためと考える。提案した補強リングの横倒れ座屈強度に対する簡易推定式では、補強リング全体の曲げねじり座屈の影響については考慮されていないことから、ウェブが低い場合に低めの座屈圧力を与えているものとする。しかしながら、ウェブが低い場合に横倒れ座屈が先に生じる可能性は小さく、また安全側の評価を与えていることから、設計上は問題とはならないと考えている。また、周方向への座屈波数については必ずしも一致しておらず、この部分についても改善の余地があるとする。

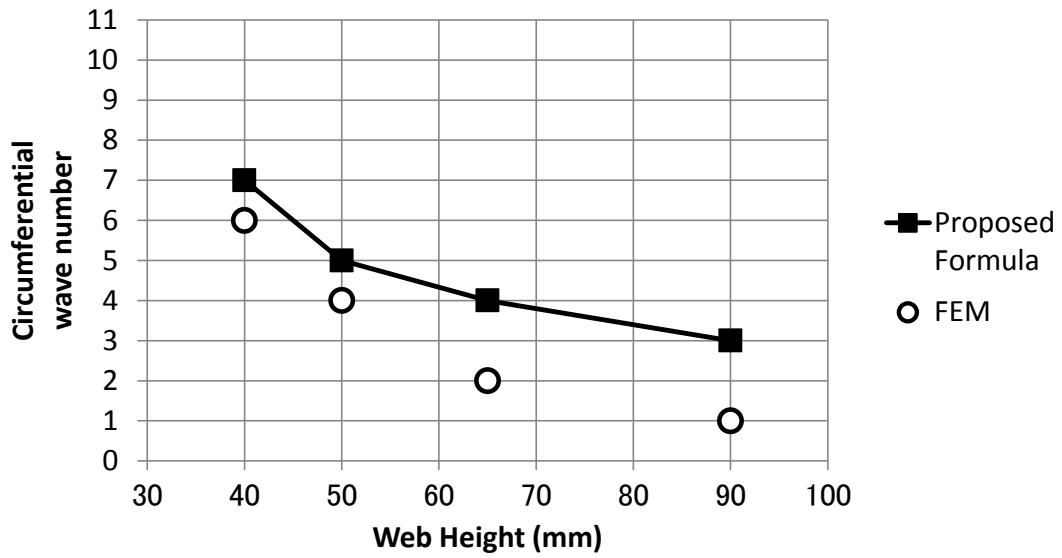
ウェブ高さ以外のパラメータも含めた横倒れ座屈圧力の値の比較を Table 6-2 に示す。なお、Table 6-2 に示す値は、4章と同様(6-32)式にて得られた無補強円筒殻の胴板座屈圧力の値にて無次元化している。また、Table 6-2 には FEM 解析結果も合わせて示している。Table 6-2 より、提案した補強リングの横倒れ座屈強度に対する推定式は、今回検討対象とした寸法においては、ウェブ高さ以外のパラメータを変化させた場合においても補強リングの横倒れ座屈圧力が高い精度で推定可能であることがわかる。

なお、Table 6-2 より、同じフレーム寸法であっても、内フレーム方式と外フレーム方式では、内フレーム方式の方が横倒れ座屈波数が小さくなっていることがわかる。

これは、補強リングフランジの周長が外フレーム方式に比べて内フレーム方式のほうが小さいためと考えられる。そこで、提案式および FEM 解析それぞれについて、各パラメータに対する内フレーム方式と外フレーム方式の座屈半波長の比較を行なった。結果を Table 6-3 および Fig. 6-12 に示す。Fig. 6-12 より、提案式については、内フレーム方式と外フレーム方式の座屈半波長の比が全パラメータでほぼ 1.0 に近いことがわかる。一方、FEM 解析結果をみると、Web 高さを高くするにつれて、内フレーム方式と外フレーム方式の座屈半波長の比が 1.0 から大きくなることがわかる。また、Web 高さほど顕著ではないが胴板の板厚を厚くした場合もその傾向がみられる。したがって、補強リングフランジの周長の違いが理由の 1 つであることは判断できるが、それだけが波数の違いを与える理由ではない可能性が高い。しかしながら、これについては力学的な説明を見つけることができなかった。この点については今後の課題としたい。

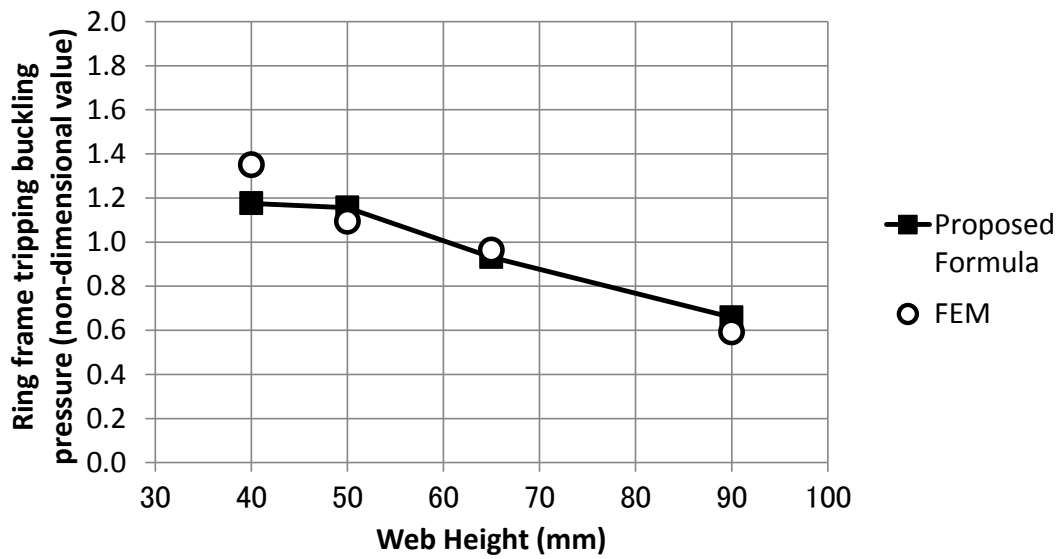


(a) Buckling pressure (non-dimensional value)

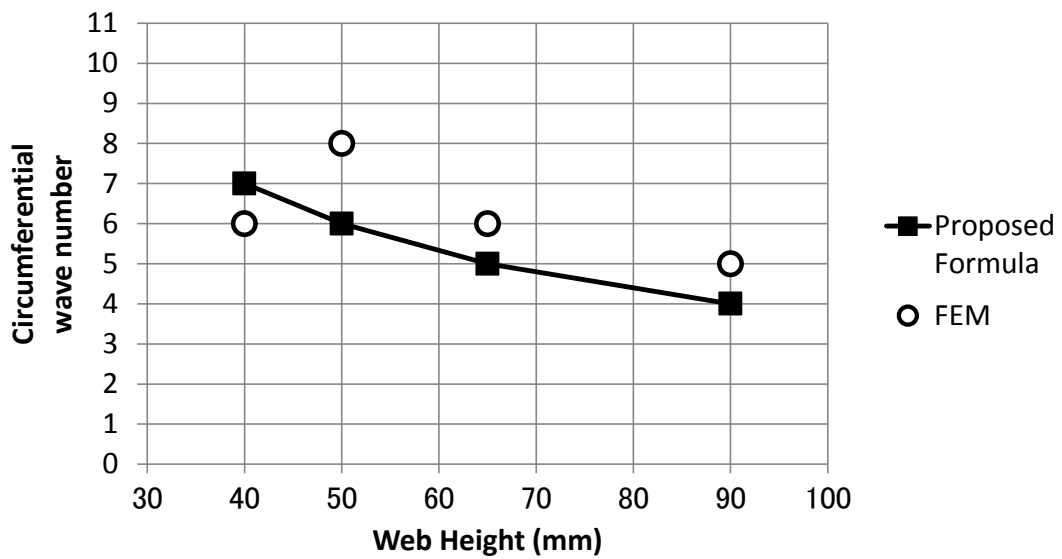


(b) Circumferential wave number

Fig. 6-10 Comparison of ring frame tripping buckling pressure and circumferential wave number between proposed formula and FEM results for inside ring frame (Parameter: web height).



(a) Buckling pressure (non-dimensional value)



(b) Circumferential wave number

Fig. 6-11 Comparison of ring frame tripping buckling pressure and circumferential wave number between proposed formula and FEM results for outside ring frame (Parameter: web height).

**Table 6-2 Comparison of ring frame tripping buckling pressure
between proposed formula and FEM.**

(a) Inside ring frame

Parameter	Case	Proposed Formula		FEM		Proposed Formula /FEM
		$P_{KF}^{(1)}$	$n^{(2)}$	$P_{KF}^{(1)}$	$n^{(2)}$	
Base	1-1-1	1.206	7	1.320	6	0.914
Shell Thickness (S)	2-1-1	1.071	6	1.115	7	0.961
	3-1-1	0.935	5	0.990	5	0.944
	4-1-1	0.802	5	0.831	4	0.965
Web Height (Hw)	1-2-1	1.027	5	1.049	4	0.978
	1-3-1	0.732	4	0.667	2	1.097
	1-4-1	0.461	3	0.362	1	1.274
Face Breadth (Bf)	1-1-2	1.062	7	1.154	7	0.921
	1-1-3	0.909	8	1.001	9	0.908
	1-1-4	0.804	9	0.915	10	0.879

(b) Outside ring frame

Parameter	Case	Proposed Formula		FEM		Proposed Formula /FEM
		$P_{KF}^{(1)}$	$n^{(2)}$	$P_{KF}^{(1)}$	$n^{(2)}$	
Base	1-1-1	1.176	7	1.351	6	0.870
Shell Thickness (S)	2-1-1	1.074	8	1.120	7	0.959
	3-1-1	1.011	7	1.021	8	0.990
	4-1-1	0.918	6	0.985	8	0.933
Web Height (Hw)	1-2-1	1.156	6	1.095	8	1.056
	1-3-1	0.932	5	0.963	6	0.967
	1-4-1	0.659	4	0.592	5	1.112
Face Breadth (Bf)	1-1-2	1.050	9	1.177	7	0.892
	1-1-3	0.948	9	1.006	10	0.943
	1-1-4	0.882	10	0.984	10	0.896

(1) Frame tripping buckling pressure (non-dimensional value)

(2) Circumferential wave number

Table 6-3 Comparison of half-wavelength for ring frame tripping buckling mode between inside ring frame and outside ring frame

(a) Proposed formula

Parameter	Case	Inside ring frame			Outside ring frame			Inside/ Outside
		$d_{Ffc}^{(1)}$	$n^{(2)}$	$L_{LB}^{(3)}$	$d_{Ffc}^{(1)}$	$n^{(2)}$	$L_{LB}^{(3)}$	
Base	1-1-1	888.0	7	199.3	1054.0	7	236.5	0.84
Shell Thickness (S)	2-1-1	886.0	6	232.0	1054.0	8	207.0	1.12
	3-1-1	884.0	5	277.7	↓	7	236.5	1.17
	4-1-1	882.0	5	277.1	↓	6	275.9	1.00
Web Height (Hw)	1-2-1	868.0	5	272.7	1074.0	6	281.2	0.97
	1-3-1	838.0	4	329.1	1104.0	5	346.8	0.95
	1-4-1	788.0	3	412.6	1154.0	4	453.2	0.91
Face Breadth (Bf)	1-1-2	888.0	7	199.3	1054.0	9	184.0	1.08
	1-1-3	↓	8	174.4	↓	9	184.0	0.95
	1-1-4	↓	9	155.0	↓	10	165.6	0.94

(1) Diameter of thickness center of frame face

(2) Circumferential wave number for frame tripping buckling obtained by FE-Analysis.

(3) Half-wavelength for frame tripping buckling mode

Table 6-3 Comparison of half-wavelength for ring frame tripping buckling mode between inside ring frame and outside ring frame [continued]

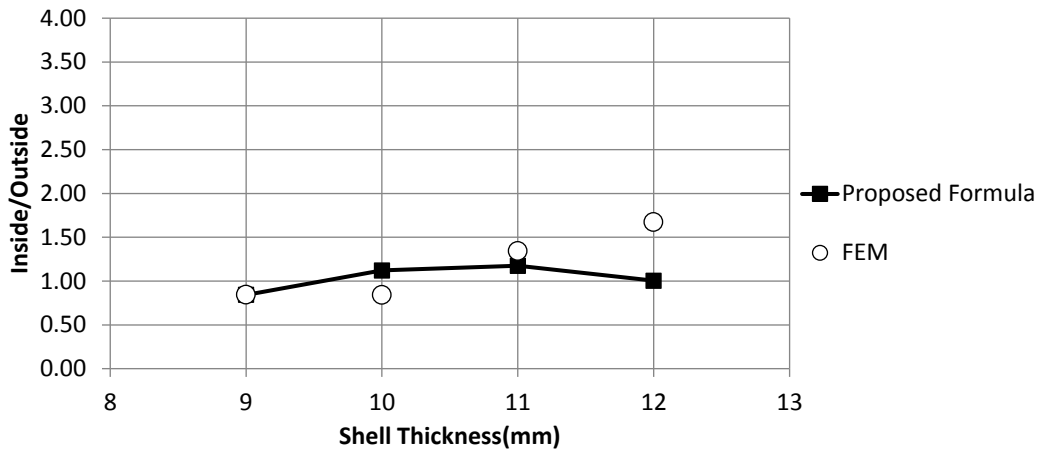
(b) FEM

Parameter	Case	Inside ring frame			Outside ring frame			Inside/ Outside
		$d_{Ffc}^{(1)}$	$n^{(2)}$	$L_{LB}^{(3)}$	$d_{Ffc}^{(1)}$	$n^{(2)}$	$L_{LB}^{(3)}$	
Base	1-1-1	888.0	6	232.5	1054.0	6	275.9	0.84
Shell Thickness (S)	2-1-1	886.0	7	198.8	1054.0	7	236.5	0.84
	3-1-1	884.0	5	277.7	↓	8	207.0	1.34
	4-1-1	882.0	4	346.4	↓	8	207.0	1.67
Web Height (Hw)	1-2-1	868.0	4	340.9	1074.0	8	210.9	1.62
	1-3-1	838.0	2	658.2	1104.0	6	289.0	2.28
	1-4-1	788.0	1	1237.8	1154.0	5	362.5	3.41
Face Breadth (Bf)	1-1-2	888.0	7	199.3	1054.0	7	236.5	0.84
	1-1-3	↓	9	155.0	↓	10	165.6	0.94
	1-1-4	↓	10	139.5	↓	10	165.6	0.84

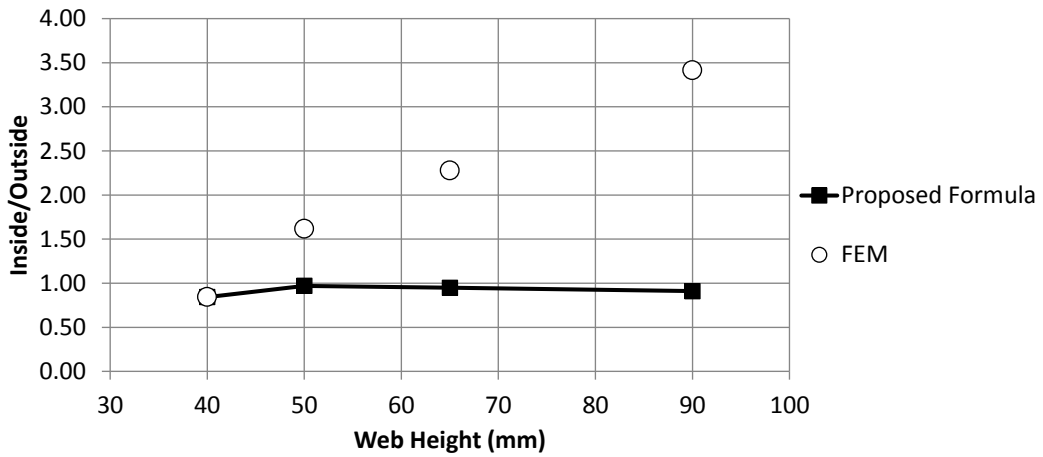
(1) Diameter of thickness center of frame face

(2) Circumferential wave number for frame tripping buckling obtained by FE-Analysis.

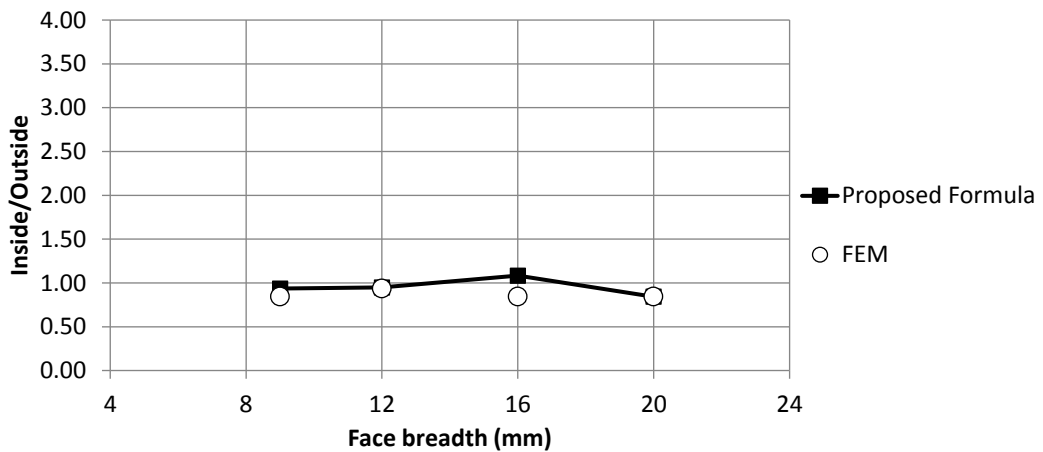
(3) Half-wavelength for frame tripping buckling mode



(a) Parameter : Shell thickness



(b) Parameter : Web height



(c) Parameter : Frame breadth

Fig. 6-12 Comparison of half-wavelength for ring frame tripping buckling mode between inside ring frame and outside ring frame

6.5 結言

潜水船等に用いられる外圧作用下のリング補強円筒殻を対象とし、補強リングの横倒れ座屈におよぼす胴板の面内圧縮力作用下での曲げ剛性の低下の影響、および補強リングの影響による胴板の周方向応力低下の影響を考慮した補強リングの横倒れ座屈圧力の推定方法について検討した。得られた結果を以下に示す。

- 1) 補強リングの横倒れ座屈におよぼす胴板の面内圧縮力作用下での曲げ剛性の低下の影響、及び補強リングの影響による胴板の周方向応力低下の影響を考慮した、新たな補強リングの横倒れ座屈圧力推定式を提案した。
- 2) 提案式は、内フレーム方式および外フレーム方式によらず、弾性域における補強リングの横倒れ座屈圧力が高い精度で推定可能であることを確認した。

第7章 結 言

本研究では、Moss 型 LNG 船タンクスカートに作用するせん断荷重に対する弾塑性座屈強度評価を主眼として、せん断および振り荷重作用下での短い無補強円筒殻の弾塑性座屈強度における形状初期不整等の影響、およびリング補強材の寸法および球形タンク構造がリング円筒殻のせん断座屈強度に及ぼす影響、について明らかにした。さらに、潜水船等に用いられるリング補強円筒殻を主眼として、外圧作用下のリング補強円筒殻に対し、補強リングの影響による胴板の周方向応力の低下の影響を考慮した胴板座屈強度、全体座屈強度、および補強リングの横倒れ座屈強度、の推定方法の高精度化を図るべく、弾性域での各座屈強度における新たな推定式を提案しその精度を FEM にて検証するとともに、その塑性修正方法について検討した。

第1章の緒言に続き、第2章では本論文で用いた基礎理論および数値解析理論について概説した。あわせて、変位-ひずみ関係の非線形項の簡略化が座屈圧力の推定におよぼす影響、および座屈時の従動荷重が座屈圧力の推定におよぼす影響について簡単な例題を基に検証した。

第3章では、Moss 型 LNG 船タンクスカートに作用するせん断荷重に対する弾塑性座屈強度評価を対象として、せん断および振り荷重作用下での短い無補強円筒殻の弾塑性座屈強度における形状初期不整等の影響、およびリング補強材の寸法および球形タンク構造がリング円筒殻のせん断座屈強度におよぼす影響について調べ、以下の結論を得た。

- 1) せん断荷重を受ける短い無補強円筒殻の弾塑性座屈強度は、振り荷重の場合のそれよりも大きな値となることが分かった。これは、振り荷重の場合は円筒殻全体で座屈するのに対し、せん断荷重の場合は円筒殻の一部のみで座屈が生じることが原因と考えられる。面外変形が生じることで座屈変形を妨げるような垂直引張力が生じるが、振り荷重を受ける場合には垂直引張力を受ける領域が全体に拡がり、せん断荷重の場合は座屈が生じている場所のみ生じ、その値は相対的に大きい。その結果、引張応力の大きな位置での座屈強度が上昇し、面外変形の増加とともに、座屈の生じる場所が初期の位置から次第に引張応力のより小さなその両側の領域へシフトするが、両側の領域では生じるせん断応力が初期の位置より小さいため、振り変形よりも弾塑性座屈強度が大きくなる。
- 2) 短い無補強円筒殻の場合、せん断荷重および振り荷重ともに、最大初期不整量が大きくなるにつれて弾塑性座屈強度が低下していくが、せん断荷重については、最大初期不整量が板厚の10%を超える場合、弾塑性座屈強度はほとんど変化しない。さらに、塑性化パラメータ β

の値が大きくなる、すなわち弾性的な座屈になるにつれ、初期不整が弾塑性座屈強度に及ぼす影響は、せん断荷重および振り荷重を受ける円筒殻ともに小さくなる。

- 3) 複数のリング補強材を考慮した円筒殻にせん断荷重を付与した場合、円筒殻に軸圧縮荷重時に補強リングが節となる座屈となるようにリング寸法を決めたとしても、補強リングを巻き込む座屈が生じる可能性がある。また、複数のリング補強材を考慮した円筒殻にせん断荷重が作用する場合、フランジのみ板厚を増加させるとせん断座屈荷重はほとんど変化しないが座屈モードがリングを節とするモードに転じる。一方、ウェブのみ板厚を増加させるとせん断座屈荷重は上昇するが座屈モードは変化しない。ウェブとフランジの板厚を両方とも増加させるとせん断座屈荷重および座屈モードの変化の両方に効果がある。
- 4) 円筒殻の上端境界条件が座屈強度に及ぼす影響について、球形タンクも模擬した解析モデルを用いて確認した。その結果、円筒上端面を平面保持として検討することは安全側の条件であり問題ないと考えられる。

第4章から第6章では、潜水船等に用いられる外圧を受けるリング補強円筒殻の座屈強度評価を対象として、外圧作用下のリング補強円筒殻に対し、補強リングの影響による胴板の周方向応力低下の影響を考慮した胴板座屈強度、全体座屈強度、および補強リングの横倒れ座屈強度、の推定方法について調査した。

第4章では、外圧作用下の弾性域におけるリング補強円筒殻の胴板座屈圧力の推定手法、および胴板座屈圧力の塑性修正方法について調べ、以下の結論を得た。

- 1) 弾性域における胴板座屈強度について、補強リングの影響による胴板の周方向応力低下の影響を考慮した推定式を提案した。提案した推定式に対して FEM 解析結果と比較した結果、これまで一般的に用いられてきた無補強円筒殻に対する推定式に比べて精度の良い推定ができることを確認した。
- 2) 胴板座屈圧力の塑性修正方法について、Johnson の塑性修正法を適用するに当たり参照すべき応力算出位置と算出応力について調査した。その結果、胴板座屈圧力に対しては、リング間中央での板厚の各層におけるミーゼス応力の平均を用いることで塑性修正が適切に実施可能であることを確認した。

第5章では、外圧作用下の弾性域におけるリング補強円筒殻の全体座屈圧力の推定手法、および全体座屈圧力の塑性修正方法について調べ、以下の結論を得た。

- 1) 新たに補強リングの項を追加した周方向の面内力、モーメントを力のつり合い式に導入し、リング補強円筒殻の全体座屈圧力簡易推定式を導出した。さらに、リングの寄与分の曲げ剛性に

関して曲り梁効果による中性軸位置の変化とせん断変形の影響を考慮することを提案した。

提案式は、外フレーム様式では傾向をとらえ従来式と比べ推定精度が向上しているが、内フレーム様式ではより誤差が大きい結果となっている。しかしながら、内外フレームの違いによる全体座屈圧力の比率に関しては、提案式は従来式より改善できていること、実際に用いられるリング補強円筒殻の長さ L と直径 d の比 (L/d) は、概ね $L/d = 2\sim 3$ 程度の範囲内であり、これらに対する内外フレームの全体圧壊圧力の比は8%程度であることから、内外フレームの違いを考慮した全体圧壊圧力の推定において、提案式は従来式に比べて大幅に改善されている。

- 2) 全体座屈圧力の塑性修正方法について、Johnson の式を用いる方法を採用したうえで、参照応力をリングと胴板のミーゼス応力を胴板と補強リングの面積比を用いて平均化した値を用いることで比較的精度の良い推定が可能である。

第6章では、外圧作用下の弾性域におけるリング補強円筒殻の補強リング横倒れ座屈強度の推定手法、および補強リング横倒れ座屈強度の塑性修正方法について調べ、以下の結論を得た。

- 1) 補強リングの横倒れ座屈におよぼす胴板の面内圧縮力作用下での曲げ剛性の低下の影響、及び補強リングの影響による胴板の周方向応力低下の影響を考慮した、新たな補強リングの横倒れ座屈圧力推定式を提案した。
- 2) 提案式は、内フレーム方式および外フレーム方式によらず、弾性域における補強リングの横倒れ座屈圧力が高い精度で推定可能であることを確認した。

第7章では本論文の研究結果をまとめて総括した。

以上の結果より、Moss 型 LNG 船タンクスカートのせん断荷重下での弾塑性座屈強度評価、および潜水船の外圧作用下での胴板・全体・横倒れ座屈強度評価に対し有意な資料を得ることができた。

付録 1 無補強円筒殻の座屈に関する基礎理論 ^{20) 21)}

補強のない円筒殻に軸圧縮，振り荷重が作用する場合の理論座屈応力，および側圧，外圧が作用する場合の理論座屈圧力の算出方法について概説する。

付1.1 無補強円筒殻の曲げ理論

Fig. A1-1 に示す円筒殻の変形を定める方程式を導出する．ここで，円筒殻の半径を a ，板厚を t ，円筒殻の長さを l とする．

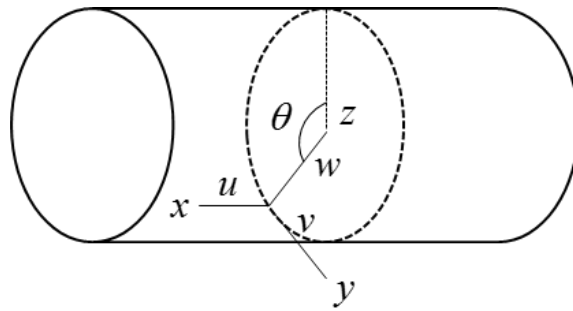


Fig. A1-1 Coordinate system for circular cylindrical shell

まず，円筒の軸に垂直な2つの隣接断面と2つの隣接軸断面によって，円筒殻から切り取られた要素の釣合方程式を考える．変形後の円筒殻中央面の対応要素を Fig. A1-2 に示す．変形前の中央面の任意点の軸 x, y , および z は，それぞれ円筒軸方向，円周の接線方向と円筒殻の中央面の法線とする．変形は小さいと仮定しているが，変形後にこれらの方向は少し変化する．したがって合力の方向も変化するため，要素 $OABC$ の釣合方程式を考える際には，これらの変化も考慮する必要がある．

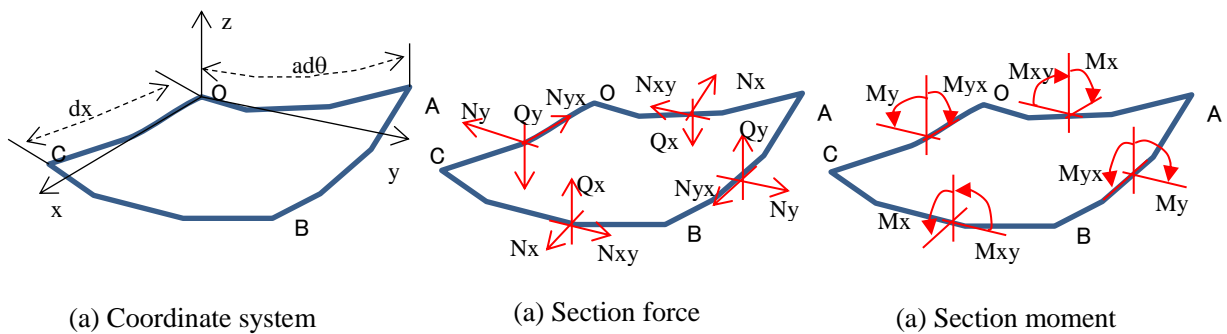


Fig. A1-2 Definition of section force and section moment for cylindrical shell segment

要素の辺 OA および OC のまわりの, 辺 BC および AC の角変位の公式を誘導する. このとき, 変位 u, v および w は非常に小さいと仮定する. まず, 辺 OA のまわりの辺 BC の回転を考える. この回転を x, y , および z 軸まわりの 3 つの回転成分に分解する.

x 軸まわりの辺 OA および BC の回転は変位 v および w に基づく. 変位 v は辺 OA および BC が円周方向に行なう運動を表し, a を円筒の中央面の半径とすると, x 軸まわりの辺 OA の回転は v/a , および辺 BC の回転は $(1/a) \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right)$ のように表わせる. したがって, 変位 v による x 軸まわりの辺 OA に対する辺 BC の相対回転角は(A1-1)式のように表わせる.

$$\frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad (\text{A1-1})$$

変位 w により, 辺 OA は x 軸のまわりに $\frac{\partial w}{a \partial \theta}$ だけ回転し, 辺 BC は $\frac{\partial w}{a \partial \theta} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{a \partial \theta} \right) dx$ だけ回転する. したがって, 変位 w による x 軸まわりの辺 OA に対する辺 BC の相対回転角は(A1-2)式のように表わせる.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{a \partial \theta} \right) dx \quad (\text{A1-2})$$

(A1-1)式と(A1-2)式を足し合わせるにより, x 軸まわりの辺 OA に対する辺 BC の回転角は(A1-3)式のように得られる.

$$\frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) dx \quad (\text{A1-3})$$

また, y 軸まわりの辺 OA に対する辺 BC の回転角は, 軸平面内に生じる母線の曲げによって引き起こされ, (A1-4)式のように得られる.

$$-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \quad (\text{A1-4})$$

さらに, z 軸まわりの辺 OA に対する辺 BC の回転角は, 接平面内に生じる母線の曲げによって引き起こされ, (A1-5)式のように得られる.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx \quad (\text{A1-5})$$

次に, 辺 OC のまわりの辺 AB の x, y および z 軸まわりの相対回転角を導出する.

まず, x 軸まわりの辺 OC に対する辺 AB の初期角は円筒殻の曲率である $d\theta$ である. しかしな

がら, 変位 v および w のためにこの角は変化する. x 軸まわりの辺 OC の回転は $\frac{v}{a} + \frac{\partial w}{a\partial\theta}$ であり, 辺 AB の回転は $\left(\frac{v}{a} + \frac{\partial w}{a\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v}{a} + \frac{\partial w}{a\partial\theta}\right)d\theta$ である. したがって, 初期の角 $d\theta$ のかわりに, (A1-6) 式に示す相対回転角を取る必要がある.

$$d\theta + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{v}{a} + \frac{\partial w}{a\partial\theta}\right)d\theta \tag{A1-6}$$

y 軸まわりの辺 OC に対する辺 AB の回転角は, (A1-7)式のように与えられる.

$$-\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)d\theta \tag{A1-7}$$

z 軸まわりの辺 OC に対する辺 AB の回転角は, 変位 v および w に基づく. 変位 v による辺 OC の z 軸まわりの回転角は $\frac{\partial v}{\partial x}$ であり, 辺 AB の z 軸まわりの回転角は $\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\partial v}{\partial x}d\theta$ となることから, 変位 v による z 軸まわりの辺 OC に対する辺 AB の相対回転角は(A1-8)式となる.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta}d\theta \tag{A1-8}$$

変位 w によって辺 AB は $\frac{\partial w}{\partial x}$ だけ回転する. したがって, 変位 w による z 軸まわりの辺 OC に対する辺 AB の相対回転角は(A1-9)式となる.

$$-\frac{\partial w}{\partial x}d\theta \tag{A1-9}$$

(A1-8)式と(A1-9)式を足し合わせることで, z 軸まわりの辺 OC に対する辺 AB の回転角は (A1-10)式のように得られる.

$$\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)d\theta \tag{A1-10}$$

以上より x, y , および z 軸まわりの回転角の式が得られたことから, 要素 $OABC$ に働くすべての力を x, y , および z 軸に射影することにより, この要素の各方向の釣合方程式が得られる.

要素 $OABC$ に生じる力の x 軸方向に対する釣合方程式を導出する. まず, 直膜力 N_x と面内せん断力 N_{yx} に平行な力について, x 軸に射影することによりそれぞれ(A1-11)式および(A1-12)式のように得られる.

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} dx ad\theta$$

(A1-11)

$$\frac{\partial N_{yx}}{\partial \theta} d\theta dx$$

(A1-12)

次に、(A1-5)式にて与えられる z 軸まわりの辺 OC に対する辺 AB の回転角により、直膜力 N_y に平行な力についても x 方向に成分が生じ、その値は(A1-13)式にて与えられる。

$$-N_y \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) d\theta dx$$

(A1-13)

さらに、(A1-10)式にて与えられる z 軸まわりの辺 OA に対する辺 BC の回転角により、面内せん断力 N_{xy} に平行な力についても x 方向に成分が生じ、その値は(A1-14)式にて与えられる。

$$-N_{xy} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx ad\theta$$

(A1-14)

最後に、(A1-4)式にて与えられる y 軸まわりの辺 OA に対する辺 BC の回転角、および(A1-7)式にて与えられる y 軸まわりの辺 OC に対する辺 AB の回転角、により、面外せん断力 Q_x および Q_y に平行な力についても x 方向に成分が生じ、その値は(A1-15)式にて与えられる。

$$-Q_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx ad\theta - Q_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\theta dx$$

(A1-15)

例えば要素 OABC に対して、q の垂直圧力だけが働くと仮定すると、この圧力に対する x 軸に下した射影における合力はゼロである。したがって、(A1-11)式～(A1-15)式にて得られた x 軸に対するすべての射影を足し合わせるにより、要素 OABC に生じる力の x 軸方向に対する釣合方程式は(A1-16)式のように求められる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial N_x}{\partial x} dx ad\theta + \frac{\partial N_{yx}}{\partial \theta} d\theta dx - N_y \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) d\theta dx - N_{xy} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx ad\theta - Q_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx ad\theta \\ & - Q_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\theta dx = 0 \end{aligned}$$

(A1-16)

次に、要素 OABC に生じる力の y 軸方向に対する釣合方程式を導出する。まず、直膜力 N_y と面内せん断力 N_{xy} に平行な力について、y 軸に射影することによりそれぞれ(A1-17)式および

(A1-18)式のように得られる.

$$\frac{\partial N_y}{\partial \theta} d\theta dx \quad (\text{A1-17})$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx ad\theta \quad (\text{A1-18})$$

次に, (A1-5)式にて与えられる z 軸まわりの辺 OC に対する辺 AB の回転角により, 面内せん断力 N_{yx} に平行な力についても y 方向に成分が生じ, その値は(A1-19)式にて与えられる.

$$N_{yx} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) d\theta dx \quad (\text{A1-19})$$

さらに, (A1-10)式にて与えられる z 軸まわりの辺 OA に対する辺 BC の回転角により, 直膜力 N_x に平行な力についても y 方向に成分が生じ, その値は(A1-20)式にて与えられる.

$$N_x \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx ad\theta \quad (\text{A1-20})$$

最後に, (A1-3)式にて与えられる x 軸まわりの辺 OA に対する辺 BC の回転角, および(A1-6)式にて与えられる x 軸まわりの辺 OC に対する辺 AB の回転角, により, 面外せん断力 Q_x および Q_y に平行な力についても x 方向に成分が生じ, その値は(A1-21)式にて与えられる.

$$-Q_x \frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) dx ad\theta - Q_y \left\{ d\theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v}{a} + \frac{\partial w}{a \partial \theta} \right) d\theta \right\} dx \quad (\text{A1-21})$$

x 軸方向に対する釣合方程式と同様, (A1-17)式~(A1-21)式にて得られた y 軸に対するすべての射影を足し合わせるにより, y 軸方向に対する釣合方程式は(A1-22)式のように求められる.

$$\begin{aligned} & \frac{\partial N_y}{\partial \theta} d\theta dx + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx ad\theta + N_{yx} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) d\theta dx + N_x \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx ad\theta \\ & - Q_x \frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) dx ad\theta - Q_y \left\{ d\theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v}{a} + \frac{\partial w}{a \partial \theta} \right) d\theta \right\} dx = 0 \end{aligned} \quad (\text{A1-22})$$

最後に, 要素 OABC に生じる力の z 軸方向に対する釣合方程式を導出する. まず, 面外せん断力 Q_x および Q_y に平行な力について, z 軸に射影することによりそれぞれ(A1-23)式および(A1-24)式のように得られる.

$$\frac{\partial Q_y}{\partial \theta} d\theta dx$$

(A1-23)

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx ad\theta$$

(A1-24)

次に、(A1-3)式にて与えられる x 軸まわりの辺 OA に対する辺 BC の回転角により、面内せん断力 N_{xy} に平行な力についても z 方向に成分が生じ、その値は(A1-25)式にて与えられる。

$$N_{xy} \frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) dx ad\theta$$

(A1-25)

次に、(A1-6)式にて与えられる x 軸まわりの辺 OC に対する辺 AB の回転角により、直膜力 N_y に平行な力についても z 方向に成分が生じ、その値は(A1-26)式にて与えられる。

$$N_y \left\{ d\theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v}{a} + \frac{\partial w}{a \partial \theta} \right) d\theta \right\} dx$$

(A1-26)

次に、(A1-4)式にて与えられる y 軸まわりの辺 OA に対する辺 BC の回転角により、直膜力 N_x に平行な力についても z 方向に成分が生じ、その値は(A1-27)式にて与えられる。

$$-N_x \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) ad\theta$$

(A1-27)

最後に、(A1-7)式にて与えられる y 軸まわりの辺 OC に対する辺 AB の回転角により、面内せん断力 N_{yx} に平行な力についても z 方向に成分が生じ、その値は(A1-28)式にて与えられる。

$$-N_{yx} \left\{ -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\theta \right\} dx$$

(A1-28)

x 軸の場合と同様、例えば要素 OABC に対し q の垂直圧力だけが働くと仮定すると、この圧力に対する z 軸に下した射影における合力は(A1-29)式となる。

$$q dx ad\theta$$

(A1-29)

したがって、(A1-23)式～(A1-29)式にて得られた z 軸に対するすべての射影を足し合わせることににより、要素 OABC に生じる力の z 軸方向に対する釣合方程式は(A1-30)式のように求められる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx ad\theta + \frac{\partial Q_y}{\partial \theta} d\theta dx + N_{xy} \frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) dx ad\theta + N_y \left\{ d\theta + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v}{a} + \frac{\partial w}{a \partial \theta} \right) d\theta \right\} dx \\ - N_x \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) ad\theta - N_{yx} \left\{ -\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) d\theta \right\} dx + q dx ad\theta = 0 \end{aligned}$$

(A1-30)

(A1-16)式, (A1-22)式および(A1-30)式を整理することで, (A1-31)式に示す力の釣合に対する3つの方程式が導出できる.

$$\begin{aligned} a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial \theta} - a N_{xy} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - N_y \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - a Q_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - Q_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \\ \frac{\partial N_y}{\partial \theta} + a \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + N_{yx} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + a N_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - Q_x \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) - Q_y \left\{ 1 + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v}{a} + \frac{\partial w}{a \partial \theta} \right) \right\} = 0 \\ a \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial \theta} + N_{xy} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) + a N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \left\{ 1 + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v}{a} + \frac{\partial w}{a \partial \theta} \right) \right\} + N_{yx} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + qa = 0 \end{aligned}$$

(A1-31)

x,y,およびz軸に関するモーメントについても同様の所作を施すことにより, (A1-32)式に示す3つの釣合方程式が得られる.

$$\begin{aligned} a \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial \theta} - a M_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - M_{yx} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + a Q_y = 0 \\ \frac{\partial M_{yx}}{\partial \theta} + a \frac{\partial M_x}{\partial x} + a M_{xy} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - M_y \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - a Q_x = 0 \\ M_x \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) + a M_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_{yx} \left\{ 1 + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v}{a} + \frac{\partial w}{a \partial \theta} \right) \right\} - M_y \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + a(N_{xy} - N_{yx}) = 0 \end{aligned}$$

(A1-32)

(A1-32)式の始めの2式を用いて, 式から Q_x および Q_y を消去することができ, 合力 N_x , N_y および $N_{xy}(=N_{yx})$ と, モーメント M_x , M_y および $M_{xy}(=M_{yx})$ とを含む3つの方程式が得られる.

さらに, 合力 N_x , N_y および N_{xy} と, モーメント M_x , M_y および M_{xy} は, (A1-33)式の等方均質体に対する弾性域での応力-ひずみ関係を用いることにより(A1-34)式にて算出できる.

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2} \{ \varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2 - z(\kappa_x + \nu \kappa_y) \}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2} \{ \nu \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - z(\nu \kappa_x + \kappa_y) \}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} \{ \gamma - 2z\kappa_{xy} \}$$

(A1-33)

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz = \frac{Et}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2)$$

$$N_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_y dz = \frac{Et}{1-\nu^2} (\nu \varepsilon_1 + \varepsilon_2)$$

$$N_{xy} = N_{yx} = \int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz = \frac{\gamma Et}{2(1+\nu)}$$

$$M_x = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_x dz = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} (\kappa_x + \nu \kappa_y)$$

$$M_y = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_y dz = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} (\nu \kappa_x + \kappa_y)$$

$$M_{xy} = -M_{yx} = -\int_{-t/2}^{t/2} z \tau_{xy} dz = \frac{Et^3(1-\nu)}{12(1-\nu^2)} \kappa_{xy}$$

(A1-34)

ここに、 $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ は円筒殻板厚中央面での直ひずみ、 γ はせん断ひずみ、 κ_x, κ_y は曲率である。また、 κ_{xy} は板の場合における $\partial^2 w / \partial x \partial y$ の代わりをし、円筒殻が曲げられたことによる要素 OABC の捩りを表す。これらのひずみ成分と曲率は変位 u, v , および w によって(A1-35)式のように表わすことができる。

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{a \partial \theta} - \frac{w}{a}, \quad \gamma = \frac{\partial u}{a \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\kappa_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = \frac{1}{a^2} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad \kappa_{xy} = \frac{1}{a} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right)$$

(A1-35)

このようにして、 u, v , および w を定めるための3つの微分方程式を導くことができる。

付1.2 無補強円筒殻の座屈理論

1.1節にて示した(A1-31)式および(A1-32)式を基に、軸圧縮荷重、捩り荷重および外圧がそれぞれ作用する円筒殻の座屈するときの釣合方程式を導出し、各荷重に対する座屈応力（外圧については座屈圧力）を算出する。

付1.2.1 軸圧縮

軸方向に圧縮された円筒殻における力の釣合方程式は、軸圧縮 N_x に比べて他の荷重が非常に小さいことから、 N_x 以外の荷重およびモーメントと変位 u, v および w の導関数との積を無視すると、(A1-31)式および(A1-32)式はそれぞれ(A1-36)式および(A1-37)式のように表わせる。

$$a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial \theta} + a \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + a N_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - Q_y = 0$$

$$a \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial \theta} + a N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y = 0$$

(A1-36)

$$a \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial \theta} + a Q_y = 0$$

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial \theta} + a \frac{\partial M_x}{\partial x} - a Q_x = 0$$

(A1-37)

(A1-37)式を(A1-36)式に代入して整理すると、軸圧縮荷重を受ける円筒殻が座屈する時の釣合方程式は(A1-38)式のように表わされる。

$$a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial \theta} + a \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + a N_x \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{a \partial \theta} = 0$$

$$a N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y + a \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 M_y}{a \partial \theta^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial \theta} = 0$$

(A1-38)

(A1-38)式を Fig. A1-1 に示す座標系における変位 u, v および w で表現する。圧縮応力を正として、(A1-34)式および(A1-35)式を用い、 $\alpha = (1/12)(t/a)^2$ 、 $\phi = N_x(1 - \nu^2)/Et$ とすると(A1-38)式は(A1-39)式のように表現できる。

$$\begin{aligned}
& a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \nu a \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \\
& \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{a^2(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{a(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial \theta} \\
& + \alpha \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} + a^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + a^2(1-\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right\} - \phi a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0 \\
& - a^2 \phi \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu a \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{w}{a} \right) - \alpha \left\{ \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} + (2-\nu) a^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + a^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + 2a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} \right\} = 0
\end{aligned}
\tag{A1-39}$$

(A1-39)式の一般解を考える。円筒殻の一端に座標原点を取り、変位 u, v および w の変位関数を (A1-40)式のように仮定する。

$$u = A \sin(n\theta) \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right), \quad v = B \cos(n\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right), \quad w = C \sin(n\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)
\tag{A1-40}$$

ここに、 m は円筒軸方向への半波数（以降軸方向半波数と表記）、 n は円周方向への波数（以降周方向波数と表記）である。なお、円筒殻の両端部では、撓み w がゼロ、およびモーメントがゼロ、すなわち $\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)$ がゼロとなる単純支持条件を課している。

(A1-40)式を(A1-39)式に代入し、 $\lambda = m\pi a/l$ とすると、(A1-41)式が得られる。

$$\begin{aligned}
& A \left(\lambda^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) + B \frac{n(1+\nu)\lambda}{2} + C\nu\lambda = 0 \\
& A \frac{n(1+\nu)\lambda}{2} + B \left\{ \frac{1-\nu}{2} \lambda^2 + n^2 + \alpha(1-\nu)\lambda^2 + \alpha n^2 - \lambda^2 \phi \right\} + C \{ n + \alpha n(n^2 + \lambda^2) \} = 0 \\
& A\nu\lambda + B[1 + \alpha\{n^2 + (2-\nu)\lambda^2\}] + C\{1 - \lambda^2 \phi + \alpha(n^2 + \lambda^2)^2\} = 0
\end{aligned}
\tag{A1-41}$$

(A1-41)式の係数から作成した行列式がゼロとなるための係数 $A \sim C$ の値を求めればよい。ここで、 α^2 および ϕ^2 を含む項は値が小さいとして無視すると(A1-42)式が得られる。

$$\phi = \frac{N_x(1-\nu^2)}{Eh} = \frac{R}{S}
\tag{A1-42}$$

ただし、 R と S はそれぞれ(A1-43)式および(A1-44)式で与えられる。

$$\begin{aligned}
R &= (1-\nu^2)\lambda^4 \\
&+ \alpha\{n^2 + \lambda^2\}^4 - (2+\nu)(3-\nu)\lambda^4 n^2 + 2\lambda^4(1-\nu^2) - (7+\nu)\lambda^2 n^4 + (3+\nu)\lambda^2 n^2 + n^4 - 2n^6\}
\end{aligned}
\tag{A1-43}$$

$$S = \lambda^2 \left[(n^2 + \lambda^2)^2 + \frac{2}{1-\nu} \left(\lambda^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) \{1 + \alpha(n^2 + \lambda^2)^2\} - \frac{2\nu^2 \lambda^2}{1-\nu} \right. \\ \left. + \frac{2\alpha}{1-\nu} \left(\lambda^2 + \frac{1-\nu}{2} n^2 \right) \{n^2 + (1-\nu)\lambda^2\} \right]$$

(A1-44)

(A1-42)式, (A1-43)式および(A1-44)式に対して N_x が最小となる軸方向半波数 m および周方向波数 n を決定すればよい. ただし m および n はゼロ以上の値を持つ整数である. さらに, (A1-43)式の中括弧内の第一項, および(A1-44)式の右辺第一項のみを残して簡略化すると, (A1-45)式が得られる.

$$\phi = \frac{N_x(1-\nu^2)}{Et} = \frac{\alpha(n^2 + \lambda^2)^2}{\lambda^2} + \frac{(1-\nu^2)\lambda^2}{(n^2 + \lambda^2)^2}$$

(A1-45)

$\sigma_{xcr} = N_{xcr}/t$ として(A1-45)式を整理すると(A1-46)式が得られる.

$$\sigma_{xcr} = \frac{N_{xcr}}{t} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \left\{ \frac{\alpha(n^2 + \lambda^2)^2}{\lambda^2} + \frac{(1-\nu^2)\lambda^2}{(n^2 + \lambda^2)^2} \right\}$$

(A1-46)

付1.2.2 振り

振り荷重を受ける円筒殻における力の釣合方程式は, 面内せん断力 $N_{xy}(=N_{yx})$ に比べて他の荷重が非常に小さいことから, $N_{xy}(=N_{yx})$ 以外の荷重およびモーメントと変位 u, v および w の導関数との積を無視すると, (A1-31)式および(A1-32)式はそれぞれ(A1-47)式および(A1-48)式のように表わせる.

$$a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial \theta} - a N_{xy} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial \theta} + a \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + N_{yx} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - Q_y = 0$$

$$a \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial \theta} + (N_{xy} + N_{yx}) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) + N_y = 0$$

(A1-47)

$$a \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial \theta} + a Q_y = 0$$

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial \theta} + a \frac{\partial M_x}{\partial x} - a Q_x = 0$$

(A1-48)

(A1-47)式に以下に示す式を代入する.

$$N_{xy} = N_{yx} = \frac{M}{2\pi a^2} + N'_{xy}$$

(A1-49)

ここに, M は端部に加えられた振りモーメントであり, $\frac{M}{2\pi a^2}$ はこれによる面内せん断力, N'_{xy} は座屈によるこの力の小さな変化である. また, 座屈に伴う円筒殻の板厚中央面の伸びを考慮し, (A1-47)式の N_{yx} と N_{xy} の代わりに $N_{yx}(1 + \varepsilon_1)$ と $N_{xy}(1 + \varepsilon_2)$ をそれぞれ導入する. このとき, N'_{xy} の導関数と変位 u, v および w との積, および N'_{xy} と変位 u, v および w との積, は微小であるとして無視すると, (A1-50)式が得られる.

$$a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N'_{yx}}{\partial \theta} + \frac{M}{2\pi a^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} - a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial \theta} + a \frac{\partial N'_{xy}}{\partial x} + 2 \frac{M}{2\pi a^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - Q_y = 0$$

$$a \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial \theta} + N_y + 2 \frac{M}{2\pi a^2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) = 0$$

(A1-50)

(A1-50)式に, (A1-48)式, (A1-34)式および(A1-35)式を代入すると, (A1-51)式が得られる.

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{a(1 + \nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \nu a \frac{\partial w}{\partial x} + \phi a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} - a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{a^2(1 - \nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{a(1 + \nu)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial \theta}$$

$$+ \alpha \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + a^2(1 - \nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right\} + \phi a \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} + \nu a \frac{\partial u}{\partial x} - w - \alpha \left\{ a^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + (2 - \nu)a^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} \right\}$$

$$+ 2\phi a \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \theta} \right) = 0$$

(A1-51)

ここに, $\alpha = (1/12)(t/a)^2$, $\phi = M(1 - \nu^2)/(2\pi a E t) = \tau(1 - \nu^2)/E$ である.

振りモーメントを受ける円筒殻の座屈モードは螺旋上になると予測されることから, u, v および w の変位として(A1-52)式のように与える.

$$u = A \cos\left(\frac{\lambda x}{a} - n\theta\right), \quad v = B \cos\left(\frac{\lambda x}{a} - n\theta\right), \quad w = B \sin\left(\frac{\lambda x}{a} - n\theta\right)$$

(A1-52)

ここに、 m は軸方向半波数、 n は周方向波数、 $\lambda = m\pi a/l$ である。また、(A1-52)式に対応する座屈モードは円周方向に n 個の波があり円筒に沿って螺旋形をしている。

まず長い円筒を仮定することで、端部による拘束が座屈強度におよぼす影響は無視できると仮定する。(A1-52)式を(A1-51)式に代入すると(A1-53)式が得られる。

$$-A\left(\lambda^2 + \frac{1-\nu}{2}n^2 - \lambda n\phi\right) + B\left(\frac{1+\nu}{2}\lambda n + \lambda^2\phi\right) - C\nu\lambda = 0$$

$$A\frac{n(1+\nu)\lambda}{2} - B\left\{n^2(1+\alpha) + \frac{1-\nu}{2}\lambda^2(1+2\alpha) - 2\phi\lambda n\right\} + Cn\left\{1 + \alpha(n^2 + \lambda^2) - 2\phi\frac{\lambda}{n}\right\} = 0$$

$$A\lambda n - Bn\left[1 + \alpha\{n^2 + (2-\nu)\lambda^2\} - 2\phi\frac{\lambda}{n}\right] + C\{1 + \alpha(n^2 + \lambda^2)^2 - 2\phi\lambda n\} = 0$$

(A1-53)

(A1-53)式の係数から作成した行列式がゼロとなるための係数 $A\sim C$ の値を求めればよい。ここで α^2 , $\alpha\phi$, α^3 , ϕ^2 , および ϕ^3 を含む項は値が小さいとして無視すると(A1-54)式が得られる。

$$\phi = \frac{R}{S}$$

(A1-54)

ただし、 R と S はそれぞれ(A1-55)式および(A1-56)式で与えられる。

$$R = (1-\nu^2)\lambda^4$$

$$+ \alpha\{2\lambda^4(1-\nu^2) + (n^2 + \lambda^2)^4 + (3+\nu)\lambda^2n^2 - (2+\nu)(3-\nu)\lambda^4n^2 - (7+\nu)\lambda^2n^4 - 2n^6 + n^4\}$$

(A1-55)

$$S = 2\lambda n^5 - 2\lambda n^3 + 4\lambda^3 n^3 - 2\lambda^3 n + 2\lambda^5 n$$

(A1-56)

(A1-54)式、(A1-55)式および(A1-56)式に対して ϕ の値が最小となる軸方向半波数 m および周方向波数 n を決定すればよい。

短い円筒では、端部拘束条件を無視することができなくなることから、座屈荷重を求める問題はより複雑になる。そこで、より問題を簡単にするため、Donnell によりいくつかの簡略化が提案されている。具体的には、(A1-51)式の第一式および第二式に対して、 α または ϕ を因数として含むすべての項を無視し、第三式に対して、 w の導関数を含む因数 α または ϕ をもつ項だけを残す。これにより、(A1-51)式はかなり単純化される。さらに、端部境界条件のうち、 $u=0$ を省略することで境界条件を単純化した。その結果、短い円筒殻と長い円筒殻に対して、Donnell²⁷⁾ は固定端

に対して(A1-57)式を，単純支持端に対して(A1-58)式を導出している．

$$\tau_{cr} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{t}{l}\right)^2 \left\{ 4.6 + \sqrt{7.8 + 1.67 \left(\frac{l^2 \sqrt{1-\nu^2}}{2at}\right)^{\frac{3}{2}}} \right\} \quad (\text{A1-57})$$

$$\tau_{cr} = \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{t}{l}\right)^2 \left\{ 2.8 + \sqrt{2.6 + 1.40 \left(\frac{l^2 \sqrt{1-\nu^2}}{2at}\right)^{\frac{3}{2}}} \right\} \quad (\text{A1-58})$$

さらに，(A1-57)式および(A1-58)式の妥当性を検証するために，数十体の試験を実施しそれまでの試験結果とあわせて比較している．その結果，試験結果は(A1-57)式および(A1-58)式にて得られた値より少し小さめとなることを確認している．

付1.2.3 側圧

側板に均一な横圧力が作用する円筒殻における力の釣合方程式は， N_y を除いてすべての合力は小さいと仮定し，これらの合力と変位 u, v, w の導関数との積を含む項を無視すると，(A1-31)式および(A1-32)式はそれぞれ(A1-47)式および(A1-48)式のように表わせる．

$$a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial \theta} - N_y \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial \theta} + a \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} - Q_y = 0$$

$$a \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial \theta} + N_y \left\{ 1 + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v}{a} + \frac{\partial w}{a \partial \theta} \right) \right\} + qa = 0 \quad (\text{A1-59})$$

$$a \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial \theta} + a Q_y = 0$$

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial \theta} + a \frac{\partial M_x}{\partial x} - a Q_x = 0 \quad (\text{A1-60})$$

(A1-60)式を(A1-59)式に代入して整理すると，(A1-61)式が得られる．

$$a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial \theta} - N_y \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial \theta} + a \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{a \partial \theta} = 0$$

$$a \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 M_y}{a \partial \theta^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial \theta} + N_y \left\{ 1 + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{v}{a} + \frac{\partial w}{a \partial \theta} \right) \right\} + qa = 0$$

(A1-61)

均一な側圧力が作用する場合は、円筒殻は円形に保たれ、 $v = 0$ 、 $w = qa^2/Et$ 、 $N_x = 0$ 、 $N_y = -qa$ 、 $M_x = M_y = M_{xy} = 0$ が成立するように円周方向に均一な圧縮力だけが作用すると仮定する。

均一に圧縮された釣合の形から小さな撓みが生じると仮定すると、 $N_y = -qa + N'_y$ となる。ここで、 N'_y は小さな変位 u, v, w に基づく合力 $-qa$ からの小さな変化量を表す。

さらに、座屈に伴う円筒殻中央面の伸びを考慮し、式の N_y と q の代わりに $N_y(1 + \varepsilon_1)$ と $q(1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)$ をそれぞれ代入すると(A1-62)式が得られる。

$$a \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{yx}}{\partial \theta} - qa \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0$$

$$\frac{\partial N'_y}{\partial \theta} + a \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{a \partial \theta} = 0$$

$$a \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{yx}}{\partial x \partial \theta} + \frac{\partial^2 M_y}{a \partial \theta^2} - \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial \theta} + N'_y - qa \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = 0$$

(A1-62)

(A1-62)式に、(A1-34)式および(A1-35)式を代入すると、(A1-63)式が得られる。

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \nu a \frac{\partial w}{\partial x} + \phi a \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{a^2(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{a(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial \theta} + \alpha \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + a^2(1-\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right\} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} + \nu a \frac{\partial u}{\partial x} - w - \alpha \left\{ a^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + (2-\nu)a^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} \right\} - \phi \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) = 0$$

(A1-63)

ここに、 $\alpha = (1/12)(t/a)^2$ 、 $\phi = qa(1-\nu)/Et$ である。

端部条件を考慮した上で適切に設定した撓み関数を(A1-63)式に代入して整理することにより Von Mises が提案した側圧を受ける円筒殻に対する座屈圧力の定式化に一致する。

付1.2.4 外圧

潜水船のように水圧を受ける円筒殻の座屈問題は、付 1.2.3 に示す均一な横圧力（側圧）に加えて、付 1.2.1 に示す軸方向への圧縮力（軸圧縮）が同時に作用する場合と考えてよい。

付 1.2.1 および付 1.2.3 と同じく，円筒形からの小さな変位を u, v , および w で表わす．軸圧縮に対する釣合方程式である(A1-39)式，および側圧に対する釣合方程式である(A1-63)式を参考に，(A1-64)式のように表わすことができる．

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{a(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - \nu a \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_1 a \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \theta} - a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{a^2(1-\nu)}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{a(1+\nu)}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \theta} - \frac{\partial w}{\partial \theta}$$

$$+ \alpha \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + a^2(1-\nu) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 w}{\partial \theta^3} \right\} - \phi_2 a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} + \nu a \frac{\partial u}{\partial x} - w - \alpha \left\{ a^4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2a^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial \theta^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + (2-\nu)a^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial \theta} + \frac{\partial^3 v}{\partial \theta^3} \right\}$$

$$- \phi_1 \left(w + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) - a^2 \phi_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

(A1-64)

ここに， $\alpha = (1/12)(t/a)^2$ ， $\phi_1 = qa(1-\nu^2)/Et$ ， $-\phi_2 = N_x(1-\nu^2)/Et$ である．

円筒殻の一端に座標原点を取り，変位 u, v および w の変位関数を(A1-65)式のように仮定する．

$$u = A \sin(n\theta) \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right), \quad v = B \cos(n\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right), \quad w = C \sin(n\theta) \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right)$$

(A1-65)

ここに， l は円筒殻の長さ， m は軸方向半波数， n は周方向波数である．なお，円筒殻の両端部では，撓み w がゼロ，およびモーメント $(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2})$ がゼロとなる両端支持条件を課している．

(A1-65)式を(A1-64)式に代入し， $\lambda = m\pi a/l$ とすると， A, B, C についての3つの線形同次方程式が得られる．これらの係数で作った行列式がゼロとおくと，圧力の臨界値を計算する方程式が得られる．これを簡単に表現すると(A1-66)式のようにおくことができる．

$$C_1 + C_2 \alpha = C_3 \phi_1 + C_4 \phi_2$$

(A1-66)

ただし， $C_1 \sim C_4$ はそれぞれ(A1-67)式のように与えられる．

$$C_1 = (1-\nu^2)\lambda^4$$

$$C_2 = (n^2 + \lambda^2)^4 - 2\{\nu\lambda^6 + 3\lambda^4 n^2 + (4-\nu)\lambda^2 n^4 + n^6\} + 2(2-\nu)\lambda^2 n^2 + n^4$$

$$C_3 = n^2(n^2 + \lambda^2)^2 - (3\lambda^2 n^2 + n^4)$$

$$C_4 = \lambda^2(n^2 + \lambda^2)^2 + \lambda^2 n^2$$

(A1-67)

最も一般的な例として，閉じた端に均一な外圧力が作用する円筒殻の場合がある．このとき，

$\phi_2 = (1/2)\phi_1$ となる。板厚が薄いと仮定し、(A1-66)式の主な項のみを残して整理すると(A1-68)式が得られる。

$$q_{cr} = \frac{Et}{a} \frac{1}{n^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi a}{l}\right)^2} \left[\frac{1}{\left\{n^2 \left(\frac{l}{\pi a}\right)^2 + 1\right\}^2} + \frac{1}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{a}\right)^2 \left\{n^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\pi a}{l}\right)^2\right\}^2 \right]$$

(A1-68)

(A1-68)式は、Von Mises¹¹⁾が提案した外圧を受ける円筒殻に対する座屈圧力の定式化に一致する。

付録 2 軸対称荷重を受ける軸対称殻の非軸対称座屈解析理論 ²⁴⁾

付2.1 軸対称殻の弾塑性大変形解析（有限要素法による定式化）

本節では軸対称殻が軸対称荷重を受け軸対称変形する場合を考え、有限要素法に基づく解析手法について述べる。まず、軸対称殻を Fig. A2-1 に示すような 2 節点の円錐台シェル要素の集合としてモデル化し、仮想仕事の原理により要素の剛性行列、等価節点力を求め、それを剛性して構造全体の平衡方程式を作成する。さらに、大変形解析を行うために荷重増分法に基づく解析理論の定式化を行う。

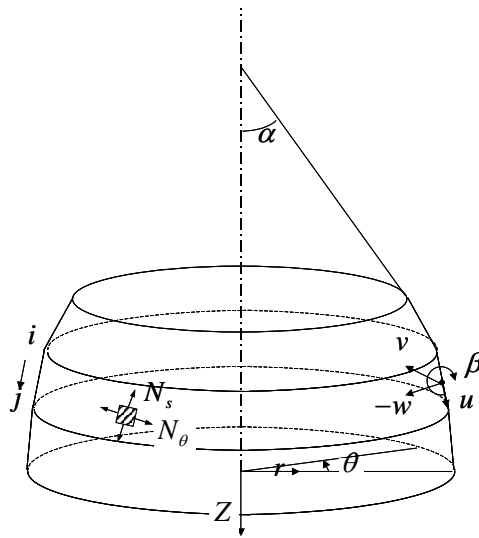


Fig. A2-1 Coordinate of axisymmetric shell segment

付2.1.1 変位関数

Fig. A2-1 に示す要素の両端を節点 i , j とし、節点 i から節点 j の向きに要素上の任意の点まで測った距離を s とする。大変形解析においては軸対称変形のみを考えるので、円周方向の変位は生じない。そこで、変位として要素の子午線方向の変位 u と法線方向のたわみ w を考える。

変位ベクトル $\{d\}$ を(A2-1)式のように定義する。

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \beta \end{Bmatrix} \quad (\text{A2-1})$$

但し、 $\beta = \partial w / \partial s$ である。

要素内の変位分布として、変位 u を s の 1 次式、たわみ w を s の 3 次式と仮定すれば、要素内の変位は(A2-2)式のように与えられる。

$$\{d\} = [N_i]\{d_i\} + [N_j]\{d_j\} \quad (\text{A2-2})$$

ここに、 $\{d_i\}$ および $\{d_j\}$ はそれぞれ節点 i, j における変位ベクトルであり、 $[N_i]$ および $[N_j]$ は以下の(A2-3)式で与えられる変位関数である。

$$[N_i] = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 \\ 0 & 1-3\xi^2+2\xi^3 & l(\xi-2\xi^2+\xi^3) \\ 0 & \frac{1}{l}(-6\xi+6\xi^2) & 1-4\xi+3\xi^2 \end{bmatrix} \quad [N_j] = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & 3\xi^2-2\xi^3 & l(-\xi^2+\xi^3) \\ 0 & \frac{1}{l}(6\xi-6\xi^2) & -2\xi+3\xi^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A2-3})$$

任意形状の軸対称殻を解析する場合、要素毎に Fig. A2-1 に示す角 α は異なることから、全体座標系での変位に u, w, β を変換することを考える。節点 i については(A2-4)式のようになる。

$$\{d_i\} = [T]\{\bar{d}_i\} \quad (\text{A2-4})$$

ここに $[T]$ は式に示す座標変換行列、 $\{\bar{d}_i\}$ は変位ベクトルでありそれぞれ(A2-5)式、(A2-6)式で与えられる。

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A2-5})$$

$$\{\bar{d}_i\} = [u_z, u_r, \beta]^T \quad (\text{A2-6})$$

ここに、 $\{\bar{d}_i\}$ はそれぞれ Fig. A2-1 に示す座標軸 z および r 方向の変位を示す。

付2.1.2 変位—ひずみ関係

シェル板厚中央面から板厚方向 (w の正の向き) に測った距離を \bar{z} とする。 \bar{z} でのひずみ $\bar{\varepsilon}_s, \bar{\varepsilon}_\theta$ は(A2-7)式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\varepsilon}_s &= \varepsilon_s + \bar{z}\kappa_s \\ \bar{\varepsilon}_\theta &= \varepsilon_\theta + \bar{z}\kappa_\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{A2-7})$$

ここで、 $\varepsilon_s, \varepsilon_\theta$ はシェル板厚中央面のひずみ、 κ_s, κ_θ は曲率である。

ひずみ - 変位関係式は大撓みの効果を考慮して(A2-8)式を採用する。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{du}{ds} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{ds} \right)^2 \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} (u \sin \alpha + w \cos \alpha) \\ \kappa_s &= -\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \\ \kappa_\theta &= -\frac{\sin \alpha}{r} \frac{dw}{ds} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A2-8})$$

(A2-8)式を増分の形で表示すると(A2-9)式のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varepsilon_s &= \frac{d\Delta u}{ds} + \frac{dw}{ds} \cdot \frac{d\Delta w}{ds} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{ds} \right)^2 \\ \Delta \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} (\Delta u \sin \alpha + \Delta w \cos \alpha) \\ \Delta \kappa_s &= -\frac{d^2 \Delta w}{ds^2} \\ \Delta \kappa_\theta &= -\frac{\sin \alpha}{r} \frac{d\Delta w}{ds} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A2-9})$$

$\Delta \varepsilon_s$ の右辺第 3 項は 2 次の微小項であり通常は省略するが、ひずみエネルギー増分計算において無視できない寄与分があるので残す。他方、ひずみ増分の計算では $\Delta \varepsilon_s$ の第 2 項も無視する。

(A2-2)式を(A2-9)式に代入すれば、ひずみ増分は節点変位増分により(A2-10)式のように表わせる。

$$\{\Delta \varepsilon_L\} = [B_i] \{d_i\} + [B_j] \{d_j\} = [B] \{d\} \quad (\text{A2-10})$$

ここに $\{\Delta \varepsilon_L\}$ は、(A2-9)式のうち $\Delta \varepsilon_s$ の右辺第 2 項および第 3 項を省略したものを成分にもつベクトルである。また、 $[B_i]$ および $[B_j]$ は(A2-11)式で与えられる。

$$[B_i] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{l} & 0 & 0 \\ \frac{\sin \alpha}{r} (1-\xi) & \frac{\cos \alpha}{r} (1-3\xi^2+2\xi^3) & \frac{l \cos \alpha}{r} (\xi-2\xi^2+\xi^3) \\ 0 & \frac{6}{l^2} (1-2\xi) & \frac{1}{l} (4-6\xi) \\ 0 & \frac{6 \sin \alpha}{rl} (\xi-\xi^2) & -\frac{\sin \alpha}{r} (1-4\xi+3\xi^2) \end{bmatrix} \quad (\text{A2-11})$$

$$[B_j] = \begin{bmatrix} \frac{1}{l} & 0 & 0 \\ \frac{\sin \alpha}{r} \xi & \frac{\cos \alpha}{r} (3\xi^2-2\xi^3) & -\frac{l \cos \alpha}{r} (\xi^2-\xi^3) \\ 0 & -\frac{6}{l^2} (1-2\xi) & \frac{1}{l} (2-6\xi) \\ 0 & -\frac{6 \sin \alpha}{rl} (\xi-\xi^2) & -\frac{\sin \alpha}{r} (-2\xi+3\xi^2) \end{bmatrix}$$

付2.1.3 応力増分—ひずみ増分関係

軸対称変形の場合にはせん断ひずみ $\gamma_{s\theta}$ およびせん断応力 $\tau_{s\theta}$ は生じない。この点を考慮して応力増分 - ひずみ増分関係式として(A2-12)式に示すものを用いる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta\sigma_s &= \frac{E}{1-\nu^2} \Delta\bar{\varepsilon}_s + \frac{\nu E}{1-\nu^2} \Delta\bar{\varepsilon}_\theta \\ \Delta\sigma_\theta &= \frac{\nu E}{1-\nu^2} \Delta\bar{\varepsilon}_s + \frac{E}{1-\nu^2} \Delta\bar{\varepsilon}_\theta \end{aligned} \right\} \quad (\text{A2-12})$$

ここに、 σ_s は子午線方向の直応力増分、 σ_θ は円周方向の直応力増分、 E はヤング率、 ν はポアソン比である。

通常のシェル理論では、一般化された応力は膜力およびモーメントの形で扱うのが普通である。そこで膜力増分 $\Delta N_s, \Delta N_\theta$ 、曲げモーメント増分 $\Delta M_s, \Delta M_\theta$ を(A2-13)式のように定義する。

$$\left. \begin{aligned} \Delta N_s &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \Delta\sigma_s d\bar{z}, & \Delta M_s &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \Delta\sigma_s \bar{z} d\bar{z} \\ \Delta N_\theta &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \Delta\sigma_\theta d\bar{z}, & \Delta M_\theta &= \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \Delta\sigma_\theta \bar{z} d\bar{z} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A2-13})$$

ここに t はシェルの板厚である。

一方、(A2-12)式を

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\sigma_s \\ \Delta\sigma_\theta \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \Delta\bar{\varepsilon}_s \\ \Delta\bar{\varepsilon}_\theta \end{array} \right\} \quad (\text{A2-14})$$

の形に表わし、さらに(A2-13)式に(A2-14)式を代入した式に(A2-7)式を代入すれば、次のような広義の応力増分 - ひずみ増分の関係式が得られる。すなわち、

$$\{\Delta\sigma\} = [D]\{\Delta\varepsilon\} \quad (\text{A2-15})$$

但し、 $\{\Delta\sigma\}, \{\Delta\varepsilon\}, [D]$ はそれぞれ(A2-16)式、(A2-17)式および(A2-18)式である。

$$\{\Delta\sigma\} = \left\{ \begin{array}{l} \Delta N_s \\ \Delta N_\theta \\ \Delta M_s \\ \Delta M_\theta \end{array} \right\} \quad (\text{A2-16})$$

$$\{\Delta\varepsilon\} = \left\{ \begin{array}{l} \Delta\varepsilon_s \\ \Delta\varepsilon_\theta \\ \Delta\kappa_s \\ \Delta\kappa_\theta \end{array} \right\} \quad (\text{A2-17})$$

$$[D] = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} d\bar{z} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \bar{z}D_{11} & \bar{z}D_{12} \\ D_{21} & D_{22} & \bar{z}D_{21} & \bar{z}D_{22} \\ \bar{z}D_{11} & \bar{z}D_{12} & \bar{z}^2D_{11} & \bar{z}^2D_{12} \\ \bar{z}D_{21} & \bar{z}D_{22} & \bar{z}^2D_{21} & \bar{z}^2D_{22} \end{bmatrix} \quad (\text{A2-18})$$

(A2-18)式に示す[D]行列は、弾性域では積分は簡単となり(A2-19)式のようになる。

$$[D] = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{12} & \frac{\nu h^2}{12} \\ 0 & 0 & \frac{\nu h^2}{12} & \frac{h^2}{12} \end{bmatrix} \quad (\text{A2-19})$$

一方、(A2-7)式からもわかるようにひずみおよび応力は板厚方向にも変化する。特に塑性域ではひずみは板厚方向に直線状に分布するが応力はさらに複雑な分布になると考えられる。従って、(A2-16)式、(A2-17)式および(A2-18)式より[D]行列を計算する際にはこの点を考慮する必要がある。これを解決するため、要素を板厚方向に仮想的に等分割したうえで各層では応力を一定として解析を実施する。降伏および除荷の判定は層ごとに実施する。板厚方向に仮想的に分割した場合の応力の板厚方向への分布イメージを Fig. A2-2 に示す。計算精度を確保するためには、仮想的な分割点は 10 点以上あることが望ましい。

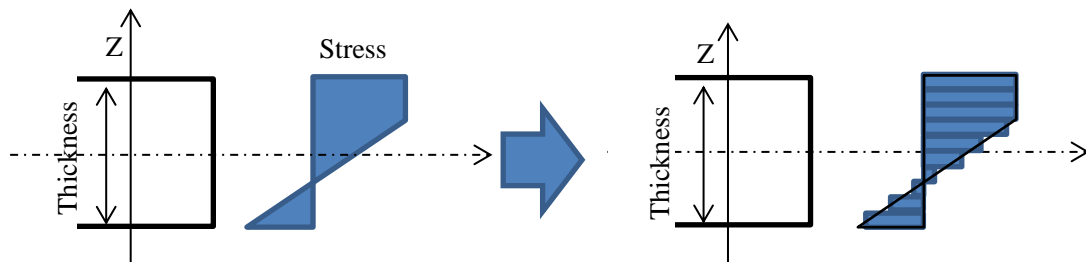


Fig. A2-2 Image of approximation of stress distribution

降伏条件として(A2-20)式に示すミーゼスの降伏条件を用いる。

$$F = \sigma_s^2 - \sigma_s \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 = \sigma_Y^2 \quad (\text{A2-20})$$

ここに、 σ_Y は降伏応力である。

塑性域についてはひずみ増分理論に基づく Reuss の式を採用する。まず、応力増分 - ひずみ増

分関係式を(A2-21)式のように表す.

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_s &= \left(\frac{E}{1-\nu^2} - \frac{S_1^2}{S}\right)\Delta\bar{\varepsilon}_s + \left(\frac{\nu E}{1-\nu^2} - \frac{S_1 S_2}{S}\right)\Delta\bar{\varepsilon}_\theta \\ \Delta\sigma_\theta &= \left(\frac{\nu E}{1-\nu^2} - \frac{S_1 S_2}{S}\right)\Delta\bar{\varepsilon}_s + \left(\frac{E}{1-\nu^2} - \frac{S_1^2}{S}\right)\Delta\bar{\varepsilon}_\theta\end{aligned}$$

(A2-21)

ただし, S_1, S_2, S は(A2-22)式にて与えられる.

$$\begin{aligned}S &= \frac{4}{9}\bar{\sigma}^2 H' + S_1 \sigma'_s + S_2 \sigma'_\theta \\ S_1 &= \frac{E}{1-\nu^2}(\sigma'_s + \nu\sigma'_\theta) \\ S_2 &= \frac{E}{1-\nu^2}(\nu\sigma'_s + \sigma'_\theta) \\ \bar{\sigma}^2 &= \sigma_s^2 - \sigma_s \sigma_\theta + \sigma_\theta^2 \\ \sigma'_s &= \sigma_s - \sigma \\ \sigma'_\theta &= \sigma_\theta - \sigma \\ \sigma &= \frac{\sigma_s + \sigma_\theta}{3}\end{aligned}$$

(A2-22)

ここに, $\bar{\sigma}$ は相当応力, $\sigma'_s, \sigma'_\theta$ は偏差応力, H' は加工硬化係数である.

除荷の判定は(A2-23)式により行なう.

$$d\bar{\varepsilon}_p = \frac{S_1 d\varepsilon_s + S_2 d\varepsilon_\theta}{\frac{3}{2}S/\bar{\sigma}}$$

(A2-23)

すなわち, $d\bar{\varepsilon}_p > 0$ であれば塑性状態が持続し, $d\bar{\varepsilon}_p < 0$ ならば除荷と考えて, 除荷の生じたステップでは剛性行列および応力増分とひずみ増分の関係式を塑性域のものから弾性域のものに戻し再計算する.

付2.1.4 平衡方程式

ある荷重状態 $\{f_0\}$ における応力を $\{\sigma_0\}$ とし, 荷重増分 $\{\Delta f\}$ が生じたときの応力増分を $\{\Delta\sigma\}$ として $\{f_0\} + \{\Delta f\}$ の荷重状態の平衡方程式を仮想仕事の原理を用いて求める.

節点の変位増分 $\{\Delta d\}$ の変分 $\delta\{\Delta d\}$ から導かれるひずみ増分を $\delta\{\Delta\varepsilon\}$ とすれば, 仮想仕事の原理により(A2-24)式が得られる.

$$\int \delta\{\Delta\varepsilon\}^T (\{\sigma_0\} + \{\Delta\sigma\}) 2\pi r ds = \delta\{\Delta d\}^T (\{f_0\} + \{\Delta f\}) \quad (\text{A2-24})$$

応力 $\{\sigma_0\}$ の等価節点力を $\{f_e\}$ とすれば、(A2-24)式の左辺第1項は(A2-25)式となる。

$$\int \delta \{\Delta \varepsilon_L\}^T \{\sigma_0\} 2\pi r ds = \delta \{\Delta d\}^T \{f_e\} \quad (\text{A2-25})$$

ただし、 $\{\Delta \varepsilon_L\}$ は(A2-9)式から非線形成分を除去したものである。

(A2-24)式に(A2-25)式を代入し変位増分に関する3次以上の項を省略すれば(A2-26)式が得られる。

$$\int \left[\delta \{\Delta \varepsilon_N\}^T \{\sigma_0\} + \delta \{\Delta \varepsilon_L\}^T \{\Delta \sigma\} \right] 2\pi r ds = \delta \{\Delta d\}^T \left[(\{f_0\} - \{f_e\}) + \{\Delta f\} \right] \quad (\text{A2-26})$$

(A2-26)式の $\{\Delta \varepsilon_L\}$ 以外についてそれぞれ(A2-27)式に示す。

$$\begin{aligned} \{\Delta \varepsilon_N\}^T &= \{\Delta \varepsilon\}^T - \{\Delta \varepsilon_L\}^T = \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{d\Delta w}{ds} \right)^2, 0, 0, 0 \right\} \\ \delta \{\Delta \varepsilon_N\}^T &= \left\{ \frac{d\Delta w}{ds}, \frac{d\delta(\Delta w)}{ds}, 0, 0, 0 \right\} \\ \{\sigma_0\} &= \begin{Bmatrix} N_s \\ N_\theta \\ M_s \\ M_\theta \end{Bmatrix} \\ \{\Delta \sigma\} &= [D] \{\Delta \varepsilon_L\} \end{aligned} \quad (\text{A2-27})$$

したがって、(A2-26)式は(A2-28)式のようになる。

$$\begin{aligned} \int N_s \frac{d\Delta w}{ds} \cdot \frac{d\delta(\Delta w)}{ds} \cdot 2\pi r ds + \int \delta \{\Delta \varepsilon_L\}^T [D] \{\Delta \varepsilon_L\} 2\pi r ds \\ = \delta \{\Delta d\}^T \left[(\{f_0\} - \{f_e\}) + \{\Delta f\} \right] \end{aligned} \quad (\text{A2-28})$$

また、(A2-2)式より、 $d\Delta w/ds$ は(A2-29)式のように求められる。

$$\frac{d\Delta w}{ds} = [G_s] \{\Delta d\} = [G_{si}] \{\Delta d_i\} + [G_{sj}] \{\Delta d_j\} \quad (\text{A2-29})$$

ここに、 $[G_{si}]$ と $[G_{sj}]$ はそれぞれ(A2-30)式となる。

$$[G_{si}] = \left[0, \frac{6}{l}(\xi^2 - \xi), 1 - 4\xi + 3\xi^2 \right] \quad [G_{sj}] = \left[0, \frac{6}{l}(\xi - \xi^2), -2\xi + 3\xi^2 \right] \quad (\text{A2-30})$$

(A2-11)式と(A2-29)式を(A2-28)式に代入すれば、要素に関する平衡方程式として(A2-31)式が得られる。

$$([k^e] + [k_G^e])\{\Delta d\} = (\{f_0\} - \{f_e\}) + \{\Delta f\} \quad (\text{A2-31})$$

ただし、 $[K^e]$ は線形解析の場合の剛性行列、 $[K_G^e]$ は幾何学的剛性行列であり(A2-32)式となる。

$$[k^e] = \int_0^l [B]^T [D][B] \cdot 2\pi r ds \quad [k_G^e] = \int_0^l N_s [G_s]^T [G_s] \cdot 2\pi r ds \quad (\text{A2-32})$$

なお、 $[k^e]$ および $[K_G^e]$ の計算にはガウスの数値積分を使用する。

次に、(A2-5)式の座標変換行列を用いて(A2-31)式を全体座標系へ変換すると(A2-33)式が得られる。

$$([\bar{k}^e] + [\bar{k}_G^e])\{\Delta \bar{d}\} = (\{\bar{f}_0\} - \{\bar{f}_e\}) + \{\Delta \bar{f}\} \quad (\text{A2-33})$$

ここに、

$$[\bar{k}^e] = [T]^T [k][T], [\bar{k}_G^e] = [T]^T [k_G][T] \quad (\text{A2-34})$$

$$\{\bar{f}_0\} = [\tau]^T \{f_0\}, \{\bar{f}_e\} = [T]^T \{f_e\}, \{\Delta \bar{f}\} = [T]^T \{\Delta f\}$$

さらに全要素について(A2-33)式を作成し重ね合わせることで構造全体の平衡方程式として(A2-35)式を得る。

$$([K] + [K_G])\{\Delta \bar{d}\} = (\{F_0\} - \{F_e\}) + \{\Delta F\} \quad (\text{A2-35})$$

ここに、

$$[K] = \Sigma [\bar{k}^e], [K_G] = \Sigma [\bar{k}_G^e] \quad (\text{A2-36})$$

$$\{F_0\} = \Sigma \{\bar{f}_0\}, \{F_e\} = \Sigma \{\bar{f}_e\}, \{\Delta F\} = \Sigma \{\Delta \bar{f}\}$$

ただし、 Σ は全要素について重ね合わせることを意味する。なお、(A2-36)式において $(\{F_0\} - \{F_e\})$

は各荷重ステップでの内力と外力の不均衡量であり、繰り返し計算により零に収束させる。
 応力 $\{\sigma_0\}$ による等価節点力 $\{f_e\}$ は(A2-25)式に(A2-10)式を代入し(A2-37)式にて求められる。

$$\{f_e\} = \int [B]^T \{\sigma_0\} 2\pi r ds \quad (\text{A2-37})$$

等価節点力 $\{f_e\}$ の計算では、剛性行列の計算の場合と同様にガウスの数値積分を使用する。
 次に圧力による等価節点力の計算式を求める。要素上の圧力分布を(A2-38)式のように仮定する。

$$\Delta q = [P]\{\Delta p\} \quad (\text{A2-38})$$

ここに、

$$[P] = [1 - \xi, \xi] \quad \{\Delta p\} = \begin{Bmatrix} \Delta p_i \\ \Delta p_j \end{Bmatrix} \quad (\text{A2-39})$$

ただし、 Δp_i および Δp_j は節点 i および j における圧力である。

また、撓み増分 Δw は(A2-2)式および(A2-3)式より(A2-40)式のように書くことができる。

$$\Delta w = [N_{wi}]\{\Delta d_i\} + [N_{wj}]\{\Delta d_j\} = [N_w]\{\Delta d\} \quad (\text{A2-40})$$

ここに、

$$[N_{wi}] = [0, 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, l(\xi - 2\xi^2 + \xi^3)] \quad [N_{wj}] = [0, 3\xi^2 - 2\xi^3, l(-\xi^2 + \xi^3)] \quad (\text{A2-41})$$

撓み増分の変分 $\delta(\Delta w)$ による圧力増分 Δq の仮想仕事と変位増分 $\delta(\Delta d)$ による等価節点力 $\{f_e\}$ の仮想仕事に等しいと考えれば、(A2-42)式が得られる。

$$\delta\{\Delta d\}^T \{f_e\} = \int \delta(\Delta w) \Delta q 2\pi r ds \quad (\text{A2-42})$$

(A2-42)式に(A2-38)式および(A2-40)式を代入すると(A2-43)式が得られる。

$$\{f_e\} = [Q]\{\Delta p\} \quad (\text{A2-43})$$

ここに、行列 $[Q]$ は

$$[Q] = \int [N_w]^T [P] \cdot 2\pi r ds \quad (\text{A2-44})$$

であり，剛性行列の場合と同様にガウスの数値積分を使用して求める．

なお，圧力荷重については大変形解析では次の点を考慮する必要がある．すなわち，各荷重段階で変形前と変形後でシェルの形状が変化するため，Fig. A2-3 に示すように圧力の作用方向が少し変化する．したがって，不平衡量の計算時に内力のみならず増分外力の総和についても修正し，収束計算をする必要がある．また，非線形問題を処理する方法として荷重増分法を用いる．さらに，非線形性の強いシェルの問題を取り扱うため，不平衡力の収束方法として Fig. A2-4 に示す Newton-Raphson 法を採用する．

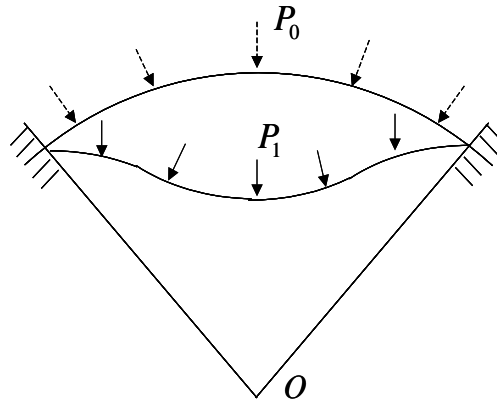


Fig. A2-3 Pressure loading

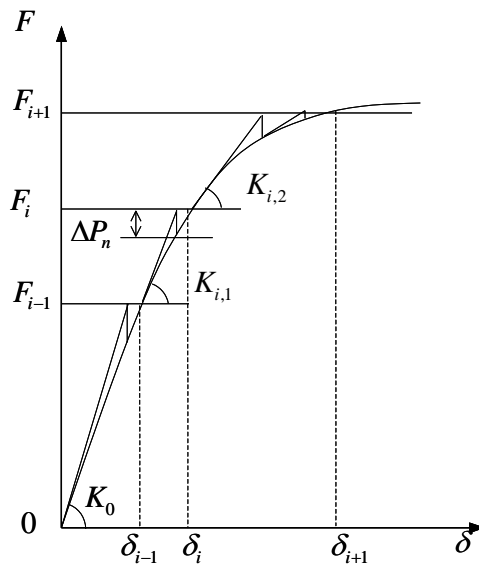


Fig. A2-4 Newton-Raphson Method

付2.2 軸対称殻の非軸対称座屈解析（有限要素法による定式化）

前項では軸対称荷重を受ける軸対称殻が軸対称変形をする場合の解析手法を述べたが、座屈については荷重が軸対称であっても分岐座屈が生じ非軸対称モードの変形が生じる可能性がある。そこで、本項では非軸対称座屈解析手法について述べる。

付2.2.1 変位関数（座屈変形に関するもの）

非軸対称変形が生じる場合には、(A2-1)式の変形成分のほかに円周方向の変位 v を考える必要がある。そこで Fig. A2-1 に示す要素について要素内の座屈増分変位 Δu , Δv , Δw および $\Delta\beta$ を (A2-45)式のようにフーリエ級数に展開する。

$$\{\Delta d\} = \begin{Bmatrix} \Delta u \\ \Delta v \\ \Delta w \\ \Delta\beta \end{Bmatrix} = \sum_{n=0}^N \begin{Bmatrix} \Delta u_n(s) \cos(n\theta) \\ \Delta v_n(s) \sin(n\theta) \\ \Delta w_n(s) \cos(n\theta) \\ \Delta\beta_n(s) \cos(n\theta) \end{Bmatrix} \quad (\text{A2-45})$$

ここで、 n は非軸対称座屈における円周方向への波数（以降周方向波数と表記）である。

変位増分 Δu_n , Δv_n , Δw_n および $\Delta\beta_n$ を(A2-46)式のように仮定する。

$$\{\Delta d\} = \{\Delta u_n, \Delta v_n, \Delta w_n, \Delta\beta_n\}^T = [N_i]\{d_{ni}\} + [N_j]\{d_{nj}\} \quad (\text{A2-46})$$

ここに、 $\{d_{ni}\}$ および $\{d_{nj}\}$ はそれぞれ周方向波数が n 波のときの節点 i , j における変位ベクトルであり、 $[N_i]$ および $[N_j]$ は以下の(A2-47)式で与えられる変位関数である。

$$[N_i] = \begin{bmatrix} 1-\xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-\xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-3\xi^2+2\xi^3 & l(\xi-2\xi^2+\xi^3) \\ 0 & 0 & \frac{1}{l}[-6\xi+6\xi^2] & l(1-4\xi+3\xi^2) \end{bmatrix} \quad [N_j] = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3\xi^2-2\xi^3 & l(-\xi^2+\xi^3) \\ 0 & 0 & \frac{1}{l}[6\xi-6\xi^2] & (-2\xi+3\xi^2) \end{bmatrix} \quad (\text{A2-47})$$

さらに、要素座標系の変位ベクトル $\{\Delta d_n\}$ と全体座標系の変位ベクトル $\{\Delta \bar{d}_n\}$ の間には(A2-48)式の関係が成立する。

$$\{\Delta d_n\} = [T]\{\Delta \bar{d}_n\} \quad (\text{A2-48})$$

ただし、 $\{\Delta \bar{d}_n\}$ は全体座標系における座屈変位増分であり、(A2-49)式のように表せる。

$$\{\Delta \bar{d}_n\} = \{u_z, u_\theta, u_r, \beta\}^T \quad (\text{A2-49})$$

ここに, u_z, u_θ, u_r および u_β は Fig. A2-1 に示した座標軸 z, θ, r 方向の変位を示す. また $[T]$ は座標変換マトリックスであり, Fig. A2-1 に示す角 α に対して(A2-50)式のように表せる.

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \alpha & 0 & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A2-50})$$

付2.2.2 変位 - ひずみ関係式 (座屈変形に関するもの)

シェル中央面の変位とひずみの関係式は, 大たわみの効果を考慮して(A2-51)式を用いる.

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{\partial u}{\partial S} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial S} \right)^2 \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (w \cos \alpha + u \sin \alpha) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta} \right)^2 \\ \varepsilon_{s\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial S} - \frac{\sin \alpha}{r} v \\ \kappa_s &= -\frac{\partial^2 w}{\partial S^2} \\ \kappa_\theta &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \alpha}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{\sin \alpha}{r} \frac{\partial w}{\partial S} \\ \kappa_{s\theta} &= 2 \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial S \partial \theta} + \frac{\sin \alpha}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\cos \alpha}{r} \frac{\partial v}{\partial S} - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r^2} v \right) \end{aligned} \quad (\text{A2-51})$$

(A2-51)式を増分の形で表わし, 線形成分と非線形成分に分けると(A2-52)式のように表せる.

$$\begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_s \\ \Delta \varepsilon_\theta \\ \Delta \varepsilon_{s\theta} \\ \Delta \kappa_s \\ \Delta \kappa_\theta \\ \Delta \kappa_{s\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_s^L \\ \Delta \varepsilon_\theta^L \\ \Delta \varepsilon_{s\theta}^L \\ \Delta \kappa_s^L \\ \Delta \kappa_\theta^L \\ \Delta \kappa_{s\theta}^L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_s^N \\ \Delta \varepsilon_\theta^N \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{\Delta \varepsilon\} = \{\Delta \varepsilon_L\} + \{\Delta \varepsilon_N\} \quad (\text{A2-52})$$

ここに, (A2-52)式右辺第1項の各成分は(A2-53)式のように表せる.

$$\begin{aligned}
\Delta \varepsilon_S^L &= \frac{\partial \Delta u}{\partial S} \\
\Delta \varepsilon_\theta^L &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta v}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\Delta w \cos \alpha + \Delta u \sin \alpha) \\
\Delta \varepsilon_{S\theta}^L &= \frac{1}{r} \frac{\partial \Delta u}{\partial \theta} + \frac{\partial \Delta v}{\partial S} - \frac{\sin \alpha}{r} \Delta v \\
\Delta \kappa_S^L &= -\frac{\partial^2 \Delta w}{\partial S^2} \\
\Delta \kappa_\theta^L &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial \theta^2} + \frac{\cos \alpha}{r^2} \frac{\partial \Delta v}{\partial \theta} - \frac{\sin \alpha}{r} \frac{\partial \Delta w}{\partial S} \\
\Delta \kappa_{S\theta}^L &= 2 \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial S \partial \theta} + \frac{\sin \alpha}{r^2} \frac{\partial \Delta w}{\partial \theta} + \frac{\cos \alpha}{2r} \frac{\partial \Delta v}{\partial S} - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r^2} \Delta v \right)
\end{aligned} \tag{A2-53}$$

また、(A2-52)式右辺第2項の各成分は、(A2-54)式のように表せる。

$$\begin{aligned}
\Delta \varepsilon_S^N &= \left(\frac{\partial w}{\partial S} \right) \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial S} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial S} \right)^2 \\
\Delta \varepsilon_\theta^N &= \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{2r^2} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{v}{r^2} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial \theta} \right) \cos \alpha - \frac{\Delta v}{r^2} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial \theta} \right) \cos \alpha \\
&\quad + \frac{\cos^2 \alpha}{r^2} (\Delta v)v + \frac{\cos^2 \alpha}{r^2} (\Delta v)^2
\end{aligned} \tag{A2-54}$$

(A2-45)式を(A2-53)式に代入するとひずみの線形成分に対し(A2-55)式が得られる。

$$\{\Delta \varepsilon_L\} = \sum_{n=0}^N \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_{Sn}^L \cos n\theta \\ \Delta \varepsilon_{\theta n}^L \cos n\theta \\ \Delta \varepsilon_{S\theta n}^L \sin n\theta \\ \Delta \kappa_{Sn}^L \cos n\theta \\ \Delta \kappa_{\theta n}^L \cos n\theta \\ \Delta \kappa_{S\theta n}^L \sin n\theta \end{Bmatrix} \tag{A2-55}$$

ここに、 $\Delta \varepsilon_{Sn}^L$, $\Delta \varepsilon_{\theta n}^L$, $\Delta \varepsilon_{S\theta n}^L$, $\Delta \kappa_{Sn}^L$, $\Delta \kappa_{\theta n}^L$, $\Delta \kappa_{S\theta n}^L$ は(A2-56)式のようになる。

$$\begin{aligned}
\Delta \varepsilon_{Sn}^L &= \frac{\partial \Delta u_n}{\partial S} \\
\Delta \varepsilon_{\theta n}^L &= \frac{n}{r} \Delta v_n + \frac{1}{r} (\Delta w_n \cos \alpha + \Delta u_n \sin \alpha) \\
\Delta \varepsilon_{S\theta n}^L &= \frac{-n}{r} \Delta u_n + \frac{\partial \Delta v_n}{\partial S} - \frac{\sin \alpha}{r} \Delta v_n \\
\Delta \kappa_{Sn}^L &= -\frac{\partial^2 \Delta w_n}{\partial S^2} \\
\Delta \kappa_{\theta n}^L &= +\frac{n^2}{r^2} \Delta w_n + \frac{n \cos \alpha}{r^2} \Delta v_n - \frac{\sin \alpha}{r} \frac{\partial \Delta w_n}{\partial S} \\
\Delta \kappa_{S\theta n}^L &= 2 \left(+\frac{n}{r} \frac{\partial \Delta w_n}{\partial S} - \frac{n \sin \alpha}{r^2} \Delta w_n + \frac{\cos \alpha}{r} \frac{\partial \Delta v_n}{\partial S} - \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{r^2} \Delta v_n \right)
\end{aligned} \tag{A2-56}$$

(A2-56)式に(A2-46)式を代入すれば、(A2-57)式が得られる。

$$\begin{aligned} \{\Delta \varepsilon_n^L\} &= [B_i]\{d_m\} + [B_j]\{d_{jn}\} \\ &= [B_n]\{d_n\} \end{aligned} \quad (\text{A2-57})$$

ここに、 $\{\varepsilon_n^L\}$ は(A2-58)式のようになる。

$$\{\Delta \varepsilon_n^L\} = \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_{S_n}^L \\ \Delta \varepsilon_{\theta_n}^L \\ \Delta \varepsilon_{S\theta_n}^L \\ \Delta \kappa_{S_n}^L \\ \Delta \kappa_{\theta_n}^L \\ \Delta \tau_n^L \end{Bmatrix} \quad (\text{A2-58})$$

$[B_{in}]$ および $[B_{jn}]$ はそれぞれ(A2-59)式および(A2-60)式のようになる。

$$[B_m] = \begin{bmatrix} \frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sin \alpha}{r}(1-\xi) & \frac{n}{r}(1-\xi) & \frac{\cos \alpha}{r}(1-3\xi^2+2\xi^3) & \frac{l \cos \alpha}{r}(1-2\xi^2+\xi^3) \\ -\frac{n}{r}(1-\xi) & -\frac{1}{l} - \frac{\sin \alpha}{r}(1-\xi) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6}{l^2}(1-2\xi) & \frac{1}{l}(4-6\xi) \\ 0 & \frac{n \cos \alpha}{r^2}(1-\xi) & \frac{n^2}{r^2}(1-3\xi^2+2\xi^3) + \frac{6 \sin \alpha}{rl}(\xi-\xi^2) & \frac{n^2 l}{r^2}(1-2\xi^2+\xi^3) - \frac{\sin \alpha}{r}(1-4\xi+3\xi^2) \\ 0 & -\frac{2 \cos \alpha}{rl} - \frac{2 \cos \alpha \sin \alpha}{r^2}(1-\xi) & -\frac{2n \sin \alpha}{r^2}(1-3\xi^2+2\xi^3) - \frac{12n}{rl}(\xi-\xi^2) & -\frac{2nl \sin \alpha}{r^2}(1-2\xi^2+\xi^3) + \frac{2n}{r}(1-4\xi+3\xi^2) \end{bmatrix} \quad (\text{A2-59})$$

$$[B_m] = \begin{bmatrix} \frac{1}{l} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sin \alpha}{r} \xi & \frac{n}{r} \xi & \frac{\cos \alpha}{r}(3\xi^2-2\xi^3) & -\frac{l \cos \alpha}{r}(\xi^2-\xi^3) \\ -\frac{n}{r} \xi & \frac{1}{l} - \frac{\sin \alpha}{r} \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{6}{l^2}(1-2\xi) & \frac{1}{l}(2-6\xi) \\ 0 & \frac{n \cos \alpha}{r^2} \xi & \frac{n^2}{r^2}(3\xi^2-2\xi^3) - \frac{6 \sin \alpha}{rl}(\xi-\xi^2) & \frac{n^2 l}{r^2}(\xi^2-\xi^3) - \frac{\sin \alpha}{r}(-2\xi+3\xi^2) \\ 0 & \frac{2 \cos \alpha}{rl} - \frac{2 \cos \alpha \sin \alpha}{r^2} \xi & -\frac{2n \sin \alpha}{r^2}(3\xi^2-2\xi^3) + \frac{12n}{rl}(\xi-\xi^2) & \frac{2nl \sin \alpha}{r^2}(\xi^2-\xi^3) - \frac{2n}{r}(2\xi-3\xi^2) \end{bmatrix} \quad (\text{A2-60})$$

なお、シエルの板厚方向の任意の点のひずみ増分は(A2-61)式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\varepsilon}_s &= \Delta \varepsilon_s + \bar{z} \Delta \kappa_s \\ \Delta \bar{\varepsilon}_\theta &= \Delta \varepsilon_\theta + \bar{z} \Delta \kappa_\theta \\ \Delta \bar{\varepsilon}_{s\theta} &= \Delta \varepsilon_{s\theta} + \bar{z} \Delta \kappa_{s\theta} \end{aligned} \quad (\text{A2-61})$$

付2.2.3 応力増分- ひずみ増分関係式（座屈変形に関するもの）

座屈変形は非軸対称モードも考えているので、座屈解析では子午線方向膜応力 σ_s 、周方向膜応力 σ_θ のほかに剪断応力 $\sigma_{s\theta}$ も考える必要がある。また、非線形座屈解析では座屈直前の応力状態に対する応力増分とひずみ増分の関係式が必要である。そして座屈前の応力は軸対称変形により生じたものであるから、剪断応力 $\sigma_{s\theta}$ は零である。

これらの点を考慮すると、弾性域において(A2-62)式に示す応力増分とひずみ増分の関係式を得る。

$$\begin{aligned}\Delta\sigma_s &= \frac{E}{1-\nu^2}\Delta\bar{\varepsilon}_s + \frac{\nu E}{1-\nu^2}\Delta\bar{\varepsilon}_\theta \\ \Delta\sigma_\theta &= \frac{\nu E}{1-\nu^2}\Delta\bar{\varepsilon}_s + \frac{E}{1-\nu^2}\Delta\bar{\varepsilon}_\theta \\ \Delta\sigma_{s\theta} &= G\Delta\bar{\varepsilon}_{s\theta}\end{aligned}\tag{A2-62}$$

(A2-62)式をマトリックス表示すると(A2-63)式となる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta\sigma_s \\ \Delta\sigma_\theta \\ \Delta\sigma_{s\theta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\bar{\varepsilon}_s \\ \Delta\bar{\varepsilon}_\theta \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{s\theta} \end{Bmatrix}\tag{A2-63}$$

膜力増分 ΔN_s , ΔN_θ , $\Delta N_{s\theta}$ 、曲げモーメント増分 ΔM_s , ΔM_θ , $\Delta M_{s\theta}$ を(A2-64)式のように定義する。

$$\begin{aligned}\Delta N_s &= \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\sigma_s d\bar{z} & \Delta M_s &= \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\sigma_s \bar{z} d\bar{z} \\ \Delta N_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\sigma_\theta d\bar{z} & \Delta M_\theta &= \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\sigma_\theta \bar{z} d\bar{z} \\ \Delta N_{s\theta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\sigma_{s\theta} d\bar{z} & \Delta M_{s\theta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \Delta\sigma_{s\theta} \bar{z} d\bar{z}\end{aligned}\tag{A2-64}$$

(A2-64)式に(A2-63)式を代入し、さらに(A2-61)式を代入すれば広義の応力増分とひずみ増分の関係として (A2-65)式が得られる。

$$\{\Delta\sigma\} = [D]\{\Delta\varepsilon\}\tag{A2-65}$$

ここに、

$$\{\Delta\sigma\} = \{\Delta N_s, \Delta N_\theta, \Delta N_{s\theta}, \Delta M_s, \Delta M_\theta, \Delta M_{s\theta}\}^T\tag{A2-66}$$

$$\{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta\varepsilon_s, \Delta\varepsilon_\theta, \Delta\varepsilon_{s\theta}, \Delta\kappa_s, \Delta\kappa_\theta, \Delta\kappa_{s\theta}\}^T\tag{A2-67}$$

$$[D] = \int_{-h/2}^{h/2} d\bar{z} \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 & \bar{z}D_{11} & \bar{z}D_{12} & 0 \\ D_{21} & D_{22} & 0 & \bar{z}D_{21} & \bar{z}D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{33} & 0 & 0 & \bar{z}D_{33} \\ \bar{z}D_{11} & \bar{z}D_{12} & 0 & \bar{z}^2D_{11} & \bar{z}^2D_{12} & 0 \\ \bar{z}D_{21} & \bar{z}D_{22} & 0 & \bar{z}^2D_{21} & \bar{z}^2D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{z}D_{33} & 0 & 0 & \bar{z}^2D_{33} \end{bmatrix} \quad (\text{A2-68})$$

(A2-68)式に示す $[D]$ 行列は、弾性域では積分は簡単となり(A2-69)式のようになる。

$$[D] = \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{t^2}{2} & \frac{\nu t^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\nu t^2}{2} & \frac{t^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-\nu)t^2}{24} \end{bmatrix} \quad (\text{A2-69})$$

なお、塑性域においては(A2-70)式に示す応力増分とひずみ増分の関係式を用いる。

$$\begin{aligned} \Delta\sigma_s &= \left(\frac{E}{1-\nu^2} - \frac{S_1^2}{S} \right) \Delta\bar{\varepsilon}_s + \left(\frac{\nu E}{1-\nu^2} - \frac{S_1 S_2}{S} \right) \Delta\bar{\varepsilon}_\theta \\ \Delta\sigma_\theta &= \left(\frac{\nu E}{1-\nu^2} - \frac{S_1 S_2}{S} \right) \Delta\bar{\varepsilon}_s + \left(\frac{E}{1-\nu^2} - \frac{S_1^2}{S} \right) \Delta\bar{\varepsilon}_\theta \\ \Delta\sigma_{s\theta} &= G\Delta\bar{\varepsilon}_{s\theta} \end{aligned} \quad (\text{A2-70})$$

(A2-70)式中の S_1, S_2, S は(A2-22)式で与えられる。また、座屈に関しては除荷の生じる部分がないと仮定する。

付2.2.4 座屈の基礎式

座屈直前の荷重 $\{f_0\}$ による応力を $\{\sigma_0\}$ 、座屈後の応力増分を $\{\Delta\sigma\}$ 、座屈による節点の変位増分 $\{\Delta d\}$ の変分 $\delta\{\Delta d\}$ から導かれるひずみ増分を $\delta\{\Delta\varepsilon\}$ とすれば仮想仕事の原理により(A2-71)式が得られる。

$$\int \delta\{\Delta\varepsilon\}^T (\{\sigma_0\} + \{\Delta\sigma\}) 2\pi r dS = \delta\{\Delta d\}^T \{f_0\} \quad (\text{A2-71})$$

座屈直前の応力 $\{\sigma_0\}$ の等価節点力を $\{f_e\}$ とすれば(A2-72)式が得られる.

$$\int \delta \{\Delta \varepsilon_L\}^T \{\sigma_0\} 2\pi r dS = \delta \{\Delta d\}^T \{f_e\} \quad (\text{A2-72})$$

ただし, $\{\Delta \varepsilon_L\}$ は(A2-53)式に示したひずみ増分のうちの線形成分である.

(A2-71)式と(A2-72)式の辺々の差をとり, 変位増分に関する 3 次以上の項を省略すれば, (A2-73)式が得られる.

$$\int \left[\delta \{\Delta \varepsilon_N\}^T \{\sigma_0\} + \delta \{\Delta \varepsilon_L\}^T \{\sigma\} \right] r d\theta dS = \delta \{\Delta d\}^T [\{f_0\} - \{f_e\}] \quad (\text{A2-73})$$

ここに,

$$\begin{aligned} \{\Delta \varepsilon_N\}^T \{\sigma_0\} &= \frac{1}{2} N_s^0 \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial s} \right)^2 + \frac{1}{2} N_\theta^0 \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial \theta} - \frac{\Delta v}{r} \cos \alpha \right)^2 \\ \{\Delta \sigma\} &= [D] \{\Delta \varepsilon_L\} \\ \{f_0\} - \{f_e\} &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A2-74})$$

であるから, (A2-73)式は(A2-75)式のように表わせる.

$$\frac{1}{2} \int \delta \left[N_s^0 \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial s} \right)^2 + N_\theta^0 \left(\frac{\partial \Delta w}{r \partial \theta} - \frac{\Delta v}{r} \cos \alpha \right)^2 \right] r d\theta dS + \int \delta \{\Delta \varepsilon_L\} [D] \{\Delta \varepsilon_L\} r d\theta dS = 0 \quad (\text{A2-75})$$

但し, 曲げモーメントによる初期応力行列についてはその影響が小さいと考えて無視している.

(A2-75)式に(A2-45)式および(A2-55)式を代入し積分すればフーリエ級数の項別に独立な式として(A2-76)式が得られる.

$$\frac{1}{2} \int \delta \left[N_s^0 \left(\frac{\partial \Delta w_n}{\partial s} \right)^2 + N_\theta^0 \left(\frac{n}{r} \Delta w_n + \frac{\cos \alpha}{r} \Delta v_n \right)^2 \right] r dS + \int \delta \{\Delta \varepsilon_n^L\} [D] \{\Delta \varepsilon_n^L\} r dS = 0 \quad (\text{A2-76})$$

(A2-46)式より, Δv_n , Δw_n および $\Delta \beta_n = \partial \Delta w / \partial s$ はそれぞれ(A2-77)式のように表せる.

$$\begin{aligned} \Delta v_n &= [G_{ci}] \{\Delta d_{ni}\} + [G_{cj}] \{\Delta d_{nj}\} \\ &= [G_c] \{\Delta d_n\} \\ \Delta w_n &= [G_{\theta i}] \{\Delta d_{ni}\} + [G_{\theta j}] \{\Delta d_{nj}\} \\ &= [G_\theta] \{\Delta d_n\} \\ \Delta \beta_n &= [G_{si}] \{\Delta d_{ni}\} + [G_{sj}] \{\Delta d_{nj}\} \\ &= [G_s] \{\Delta d_n\} \end{aligned} \quad (\text{A2-77})$$

ここに, $[G_c], [G_{ci}], [G_{cj}], [G_\theta], [G_{\theta i}], [G_{\theta j}], [G_s], [G_{si}], [G_{sj}]$ は(A2-78)式のようになる.

$$\begin{aligned}
[G_c] &= [G_{ci} \ G_{cj}] \ , \ [G_\theta] = [G_{\theta i} \ G_{\theta j}] \ , \ [G_s] = [G_{si} \ G_{sj}] \\
[G_{ci}] &= [0, \ 1-\xi, \ 0, \ 0] \\
[G_{cj}] &= [0, \ \xi, \ 0, \ 0] \\
[G_{\theta i}] &= [0, \ 0, \ 1-3\xi^2+2\xi^3, \ l(\xi-2\xi^2+\xi^3)] \\
[G_{\theta j}] &= [0, \ 0, \ 3\xi^2-2\xi^3, \ l(-\xi^2+\xi^3)] \\
[G_{si}] &= [0, \ 0, \ \frac{1}{l}(-6\xi+6\xi^2), \ 1-4\xi+3\xi^2] \\
[G_{sj}] &= [0, \ 0, \ \frac{1}{l}(6\xi-6\xi^2), \ -2\xi+3\xi^2]
\end{aligned} \tag{A2-78}$$

ある荷重状態 $\{f\}$ における膜力を N_s および N_θ とし,

$$\begin{aligned}
N_s^0 &= -\lambda N_s \\
N_\theta^0 &= -\lambda N_\theta
\end{aligned} \tag{A2-79}$$

とおき, (A2-75)式に(A2-77), (A2-79)式および(A2-80)式を代入すれば(A2-80)式が得られる.

$$[k_n^e] \{\Delta d_n\} = \lambda [k_{Gn}^e] \{\Delta d_n\} \tag{A2-80}$$

$[k_n^e], [k_{Gn}^e]$ は(A2-81)式にて求められる.

$$\begin{aligned}
[k_n^e] &= \int [B_n]^T [D] [B_n] r dS \\
[k_{Gn}^e] &= \int N_s [G_s]^T [G_s] r dS + \int \frac{N_\theta}{r^2} \left\{ n^2 [G_\theta]^T [G_\theta] + n \cos \alpha [G_\theta]^T [G_c] + \cos^2 \alpha [G_c]^T [G_c] \right\} r dS
\end{aligned} \tag{A2-81}$$

(A2-80)式は要素についての座屈の基礎式であり, これを全体座標系へ変換することで構造全体についての座屈の基礎式として(A2-82)式を得る.

$$[K] \{\Delta \bar{d}_n\} = \lambda [K_G] \{\Delta \bar{d}_n\} \tag{A2-82}$$

ここに,

$$\begin{aligned}
[K] &= \sum [\bar{k}_n^e] \ , \quad [\bar{k}_n^e] = [T]^T [k_n^e] [T] \\
[K_G] &= \sum [\bar{k}_{Gn}^e] \ , \quad [\bar{k}_{Gn}^e] = [T]^T [k_{Gn}^e] [T]
\end{aligned} \tag{A2-83}$$

付録3 3次元板殻要素を用いた弾塑性大変形解析理論²⁶⁾

付3.1 弾塑性解析の概要

変形が弾性範囲内である場合の応力とひずみの関係は(A3-1)式で与えられる。

$$\{\sigma\} = [D^E]\{\varepsilon\} \quad (\text{A3-1})$$

但し、 $\{\sigma\}$ は応力ベクトル、 $\{\varepsilon\}$ はひずみベクトル、 $[D^E]$ は弾性での応力-ひずみマトリックスである。(A3-1)式は応力増分 $\{d\sigma\}$ とひずみ増分 $\{d\varepsilon\}$ の間でも成立し(A3-2)式が得られる。

$$\{d\sigma\} = [D^E]\{d\varepsilon\} \quad (\text{A3-2})$$

Von Mises の降伏条件に従うと、(A3-3)式で定義される降伏関数 f が(A3-4)式を満足すると降伏が始まる。

$$f = \frac{1}{2} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right] = \bar{\sigma}^2 \quad (\text{A3-3})$$

$$f = \sigma_Y^2 \quad (\text{A3-4})$$

ここに、 σ_Y は降伏応力である。また、降伏関数 F は(A3-5)式のようにも表すことができる。

$$F = f - \sigma_Y^2 = 0 \quad (\text{A3-5})$$

降伏が始まるとひずみ増分 $\{d\varepsilon\}$ は弾性ひずみ増分 $\{d\varepsilon^E\}$ と塑性ひずみ増分 $\{d\varepsilon^P\}$ との和として(A3-6)式のように表される。

$$\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon^E\} + \{d\varepsilon^P\} \quad (\text{A3-6})$$

塑性ひずみ増分 $\{d\varepsilon^P\}$ は、塑性ポテンシャル Θ を対応する応力成分で偏微分することにより得られるという流れ理論を用いることにより、(A3-7)式のように表せる。

$$\{d\varepsilon^P\} = \lambda \left\{ \frac{\partial \Theta}{\partial \sigma} \right\} \quad (\text{A3-7})$$

ここで、 λ は未知の比例定数である。そして、(A3-8)式に示す塑性ポテンシャルと降伏関数が等しいとする関連流れ則を用いると、(A3-7)式は(A3-9)式のように表わせる。

$$\Theta = F$$

(A3-8)

$$\{d\varepsilon^P\} = \lambda \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} d\sigma$$

(A3-9)

ここで、 df は(A3-10)式のように表わせる。

$$df = \frac{\partial f}{\partial \sigma_x} d\sigma_x + \frac{\partial f}{\partial \sigma_y} d\sigma_y + \frac{\partial f}{\partial \sigma_z} d\sigma_z + \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}} d\tau_{xy} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}} d\tau_{yz} + \frac{\partial f}{\partial \tau_{zx}} d\tau_{zx} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\}$$

(A3-10)

一方、塑性変形が始まると、塑性仕事増分 dW^P は応力 $\{\sigma\}$ のもとで(A3-11)式のように表わせる。

$$dW^P = \sigma_x d\varepsilon_x^P + \sigma_y d\varepsilon_y^P + \sigma_z d\varepsilon_z^P + \tau_{xy} d\gamma_{xy}^P + \tau_{yz} d\gamma_{yz}^P + \tau_{zx} d\gamma_{zx}^P = \{\sigma\}^T \{d\varepsilon^P\}$$

(A3-11)

(A3-11)式に(A3-9)式を代入すると(A3-12)式が得られる。

$$dW^P = \lambda \{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\} d\sigma$$

(A3-12)

ここで、(A3-12)式で定義される相当塑性ひずみ増分 $d\varepsilon^{\bar{P}}$ を導入する。

$$dW^P = \bar{\sigma} d\varepsilon^{\bar{P}}$$

(A3-13)

ここで $\bar{\sigma}$ は相当応力である。(A3-12)式と(A3-13)式より(A3-14)式が得られる。

$$\lambda d\sigma = \frac{\bar{\sigma}}{\{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}} d\varepsilon^{\bar{P}}$$

(A3-14)

1軸引張状態を仮定すると、相当応力 $\bar{\sigma}$ と相当塑性ひずみ $\varepsilon^{\bar{P}}$ の関係は、引張試験から求められる相当応力-相当塑性ひずみ関係を表すことになる。この場合、加工硬化係数 H' は(A3-15)式で定義される。

$$H' = \frac{d\bar{\sigma}}{d\varepsilon^{\bar{P}}}$$

(A3-15)

(A3-15)式を(A3-14)式に代入すると(A3-16)式が得られる。

$$\lambda d\sigma = \frac{\bar{\sigma}}{\{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}} \frac{d\bar{\sigma}}{H'} = \frac{\bar{\sigma}}{\{\sigma\}^T \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}} \frac{\left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right\}^T \{d\sigma\}}{H'}$$

(A3-16)

(A3-6)式中の弾性ひずみ増分と応力増分の間には(A3-17)式の関係が成り立つ。但し、ここでは(A3-9)式の関係を用いている。

$$\{d\sigma\} = [D^E]\{d\varepsilon^E\} = [D^E](\{d\varepsilon\} - \{d\varepsilon^P\}) = [D^E]\{d\varepsilon\} - \lambda[D^E]\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\} df \quad (\text{A3-17})$$

(A3-17)式の $\{d\sigma\}$ を(A3-16)式に代入し、これを λdf について解くと(A3-18)式が得られる。

$$\lambda df = \frac{\left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}^T [D^E]}{\frac{H'}{c} + \left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}^T [D^E] \left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}} \{d\varepsilon\} \quad (\text{A3-18})$$

ここに、 c は(A3-19)式のように表わせる。

$$c = \frac{\bar{\sigma}}{\{\sigma\}^T \left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}} \quad (\text{A3-19})$$

(A3-18)式を(A3-17)式に代入すると、弾塑性の応力-ひずみ関係が(A3-20)式のように求められる。

$$\{d\sigma\} = [D^P]\{d\varepsilon\} \quad (\text{A3-20})$$

ここで、 $[D^P]$ は弾塑性の応力-ひずみマトリックスであり、(A3-21)式のように示される。

$$[D^P] = [D^E] - \frac{[D^E] \left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\} \left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}^T [D^E]}{\frac{H'}{c} + \left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}^T [D^E] \left\{\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right\}} \quad (\text{A3-21})$$

以上が Von Mises の降伏関数による関連流れ則での弾塑性状態の応力-ひずみ関係式であり、これは一般的に Prandtl-Reuss の式と呼ばれている。

有限要素法解析で都合のいいように、 $[D^P]$ を(A3-22)式のように表わす。

$$[D^P] = [D^E] - \frac{9G^2}{(3G + H')\bar{\sigma}^2} \begin{bmatrix} S_{xx}S_{xx} & S_{xx}S_{yy} & S_{xx}S_{zz} & S_{xx}\tau_{xy} & S_{xx}\tau_{yz} & S_{xx}\tau_{zx} \\ & S_{yy}S_{yy} & S_{yy}S_{zz} & S_{yy}\tau_{xy} & S_{yy}\tau_{yz} & S_{yy}\tau_{zx} \\ & & S_{zz}S_{zz} & S_{zz}\tau_{xy} & S_{zz}\tau_{yz} & S_{zz}\tau_{zx} \\ & & & \tau_{xy}\tau_{xy} & \tau_{xy}\tau_{yz} & \tau_{xy}\tau_{zx} \\ & & & & \tau_{yz}\tau_{yz} & \tau_{yz}\tau_{zx} \\ & & & & & \tau_{zx}\tau_{zx} \end{bmatrix} \quad (\text{A3-22})$$

ここに、 S_{xx} , S_{yy} , S_{zz} は(A3-23)式にて与えられる。

$$\begin{aligned}
S_{xx} &= \sigma_{xx} + P \\
S_{yy} &= \sigma_{yy} + P \\
S_{zz} &= \sigma_{zz} + P \\
P &= -(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3 \\
G &= E/2(1 + \nu)
\end{aligned}$$

(A3-23)

(A3-22)式および(A3-23)式からも明らかなように、弾塑性の応力-ひずみマトリックスは、材料定数である E と ν のほかに、その時点の応力成分 $(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx})$ の関数となっており、変形の進行とともに時々刻々変化するものであることがわかる。

付3.2 大変形解析の概要

変形が微小な場合のひずみ-変位関係は(A3-24)式で与えられる。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \\
\gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}
\end{aligned}$$

(A3-24)

しかしながら、変形が大きくなってくると(A3-24)式の関係が崩れてくる。いま変形が大きくなった場合を考える。この場合のひずみ-変位関係は(A3-25)式で表わされる。

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \\
\varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \\
\varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \\
\gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \\
\gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial w}{\partial y} \\
\gamma_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z}
\end{aligned}$$

(A3-25)

ここで、応力ベクトル $\{\sigma\}$ 、ひずみベクトル $\{\varepsilon\}$ 、変位ベクトル $\{u\}$ 、および物体の境界における外力ベクトル $\{\overline{X}_V\}$ をそれぞれ(A3-26)式、(A3-27)式、(A3-28)式および(A3-29)式のように定義する。

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T \quad (\text{A3-26})$$

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T \quad (\text{A3-27})$$

$$\{u\} = \{u, v, w\}^T \quad (\text{A3-28})$$

$$\{\overline{X}_V\} = \{\overline{X}_V, \overline{Y}_V, \overline{Z}_V\}^T \quad (\text{A3-29})$$

いま、時刻 t^n までの物体の力学的挙動が既知であるとして、次に時刻 Δt 後の時刻 t^{n+1} での変形状態を考える。なお、ここでは物体力は無視する。時刻 t^{n+1} での増分系の仮想仕事の原理は(A3-30)式のようになる。

$$\iiint_V \{\delta\Delta\varepsilon\}^T \{\sigma\}^{n+1} dV - \iint_{S_\sigma} \{\delta\Delta u\}^T \{\overline{X}_V\}^{n+1} dS = 0 \quad (\text{A3-30})$$

但し、右肩付き文字はその時刻での量であることを意味する。また時刻 t^n から t^{n+1} までの各諸量の増分を Δ を用いて表している。ここで、 $\{\sigma\}^{n+1}$ および $\{\overline{X}_V\}^{n+1}$ はそれぞれ(A3-31)式および(A3-32)式のように表わせる。

$$\{\sigma\}^{n+1} = \{\sigma\}^n + \{\Delta\sigma\} \quad (\text{A3-31})$$

$$\{\overline{X}_V\}^{n+1} = \{\overline{X}_V\}^n + \{\Delta\overline{X}_V\} \quad (\text{A3-32})$$

(A3-30)式に(A3-31)式および(A3-32)式を代入し展開すると、(A3-33)式が得られる。

$$\iiint_V \{\delta\Delta\varepsilon\}^T \{\sigma\}^n dV + \iiint_V \{\delta\Delta\varepsilon\}^T \{\Delta\sigma\} dV - \iint_{S_\sigma} \{\delta\Delta u\}^T \{\overline{X}_V\}^n dS - \iint_{S_\sigma} \{\delta\Delta u\}^T \{\Delta\overline{X}_V\} dS = 0 \quad (\text{A3-33})$$

ここで、ひずみ増分が(A3-34)式に示す上付き L で示される線形成分と上付き N で示される非線形成分とに分離できるとする。

$$\{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta\varepsilon^L\} + \{\Delta\varepsilon^N\} \quad (\text{A3-34})$$

L および N の成分は(A3-25)式を参考にして(A3-35)式および(A3-36)式のように表わせる。

$$\begin{aligned}
\Delta \varepsilon_x^L &= \frac{\partial \Delta u}{\partial x} \\
\Delta \varepsilon_y^L &= \frac{\partial \Delta v}{\partial y} \\
\Delta \varepsilon_z^L &= \frac{\partial \Delta w}{\partial z} \\
\Delta \gamma_{xy}^L &= \frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} \\
\Delta \gamma_{yz}^L &= \frac{\partial \Delta v}{\partial z} + \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \\
\Delta \gamma_{zx}^L &= \frac{\partial \Delta w}{\partial x} + \frac{\partial \Delta u}{\partial z}
\end{aligned}
\tag{A3-35}$$

$$\begin{aligned}
\Delta \varepsilon_x^N &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta u}{\partial x} \right)^2 \\
\Delta \varepsilon_y^N &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta v}{\partial y} \right)^2 \\
\Delta \varepsilon_z^N &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial z} \right)^2 \\
\Delta \gamma_{xy}^N &= \frac{\partial \Delta u}{\partial y} \frac{\partial \Delta v}{\partial x} \\
\Delta \gamma_{yz}^N &= \frac{\partial \Delta v}{\partial z} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \\
\Delta \gamma_{zx}^N &= \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \frac{\partial \Delta u}{\partial z}
\end{aligned}
\tag{A3-36}$$

いま、ひずみ増分の非線形部分 $\{\Delta \varepsilon^N\}$ は線形部分 $\{\Delta \varepsilon^L\}$ に比べて極めて小さいと仮定すると、応力増分はひずみ増分の L 成分を用いて(A3-37)式のように近似できる。

$$\{\Delta \sigma\} \cong [D]\{\Delta \varepsilon^L\}
\tag{A3-37}$$

さらに、(A3-33)式の左辺第二項自体が微小であることから、それを(A3-38)式のように近似する。

$$\iiint_V \{\delta \Delta \varepsilon\}^T \{\Delta \sigma\} dV \cong \iiint_V \{\delta \Delta \varepsilon^L\}^T [D] \{\Delta \varepsilon^L\} dV
\tag{A3-38}$$

(A3-33)式に(A3-34)式、(A3-37)式および(A3-38)式を代入すると(A3-39)式が得られる。

$$\begin{aligned}
&\iiint_V \{\delta \Delta \varepsilon^L\}^T [D] \{\Delta \varepsilon^L\} dV + \iiint_V \{\delta \Delta \varepsilon^N\}^T \{\sigma\}^n dV \\
&= \iint_{S_\sigma} \{\delta \Delta u\}^T \{\overline{X_V}\}^n dS + \iint_{S_\sigma} \{\delta \Delta u\}^T \{\Delta \overline{X_V}\} dS - \iiint_V \{\delta \Delta \varepsilon^L\}^T \{\sigma\}^n dV
\end{aligned}$$

(A3-39)

(A3-39)式を離散化することにより、剛性方程式が(A3-40)式のように得られる。

$$([K_M] + [K_G])\{\Delta u\} = (\{F^n\} + \{\Delta F\}) - \{F_{int}\}$$

(A3-40)

ここに、 $[K_M]$ は材料剛性マトリックス、 $[K_G]$ は剛性マトリックスであり、それぞれ(A3-41)式および(A3-42)式のように表わせる。

$$[K_M] = \iiint_V [B^L]^T [D] [B^L] dV$$

(A3-41)

$$[K_G] = \iiint_V [B^{NL}]^T [\sigma] [B^{NL}] dV$$

(A3-42)

ここで、 $[B^L]$ は変形が微小な場合のひずみ-変位マトリックス、 $[B^{NL}]$ は(A3-36)式のひずみ増分の非線形部分と変位増分とを関連づけるマトリックス、 $[\sigma]$ は応力のマトリックス表示である。また、 $\{F^n\}$ は時刻 t^n のときの外力ベクトル、 $\{\Delta F\}$ は増分荷重ベクトル、 $\{F_{int}\}$ は内力ベクトルであり、それぞれ(A3-43)式、(A3-44)式および(A3-45)式のように表わせる。

$$\{F^n\} = \iint_{S_\sigma} [N]^T \{\bar{X}_V\}^n dS$$

(A3-43)

$$\{\Delta F\} = \iint_{S_\sigma} [N]^T \{\Delta \bar{X}_V\} dS$$

(A3-44)

$$\{F_{int}\} = \iiint_V [B^L]^T \{\sigma\}^n dV$$

(A3-45)

(A3-43)式および(A3-44)式の $[N]$ は形状関数マトリックスである。

付3.3 弧長増分法の概要

弧長増分法は、静的問題における弾塑性大変形解析の解法の1つであり、特に座屈後の不安定挙動等を追跡するのに適した手法である。

具体的には、予測子ステップと修正子ステップを1サイクルとして、非線形な釣合経路を逐次追跡していく方法である。すなわち剛性方程式を Fig. A2-4 に示す Newton-Raphson 法で解く際

に，1回の予測子と数回の修正子を1サイクルとして，変位だけでなく荷重も未知数として非線形な曲線を追跡する方法である．予測子は Fig. A3-1 に示すように非線形な釣合経路の接線方向に解を前に押し進める役割を果たす．

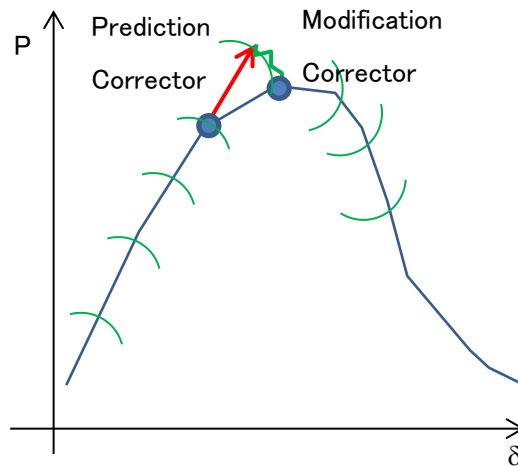


Fig. A3-1 Image of arc-length method

今，弧長増分法において規定すべきステップサイズを $\Delta\xi$ とすると，予測子 $(\{du\}, dp)$ を求めるために解くべき方程式は(A3-46)式および(A3-47)式のように表わせる．

$$[K]\{du\} = dp\{e\} \tag{A3-46}$$

$$\{du\}^T\{du\} + dp^2 = \Delta\xi \tag{A3-47}$$

右辺は荷重の向きを示す $\{e\}$ と荷重パラメータ dp である．荷重増分 dp を1.0としたときの $\{du\}$ を $\{du_e\}$ とすると，(A3-46)式は(A3-48)式のように表わせる．

$$[K]\{du_e\} = +\{e\} \tag{A3-48}$$

任意の荷重増分 dp に対する変位増分ベクトル $\{du\}$ は(A3-49)式のようになる．

$$\{du\} = dp \tag{A3-49}$$

(A3-49)式を(A3-47)式に代入すると， dp を(A3-50)式のように求めることができる．

$$dp = \pm \frac{\Delta\xi}{\sqrt{\{du_e\}^T\{du_e\} + 1.0}} \tag{A3-50}$$

(A3-50)式の右辺における±は追跡方向を示すもので、荷重や変位の折り返し点で、釣合経路を後戻りする事なく追跡するためには、接線方向2方向のうちの追跡方向、つまり式の予測子の荷重増分の符号の選択を的確に行う必要がある。また、ステップサイズ $\Delta\xi$ については、修正子に対する反復回数が少なくなるように解くべき問題によって適切なサイズを選択する必要がある。

予測子によって釣合経路から逸脱した点を、Fig. A3-1のように修正子による反復計算により再び釣合経路へと引き戻す。修正子を求めるための拘束条件として、予測子と修正子を直交させる条件 (Riks-Ramm の方法) を採用した場合、解くべき方程式は(A3-51)式および(A3-52)式のようになる。

$$([K_M] + [K_G])\{\Delta u\} - \Delta p\{e\} = (\{F^n\} + \{\Delta F\}) - \{F_{int}\} \quad (\text{A3-51})$$

$$\{du\}^T\{du\} + dp\Delta p = 0 \quad (\text{A3-52})$$

(A3-51)式より、 $\{\Delta u\}$ は(A3-52)式のように求められる。

$$\{\Delta u\} = \Delta p\{\Delta u_e\} + \{\Delta u_F\} \quad (\text{A3-53})$$

ただし、 $\{\Delta u_e\}$ は単位荷重増分に対する変位修正子、 $\{\Delta u_F\}$ は不平衡力に対する変位修正子であり、それぞれ(A3-53)式および(A3-54)式で表わされる。

$$([K_M] + [K_G])\{\Delta u_e\} = \{e\} \quad (\text{A3-54})$$

$$([K_M] + [K_G])\{\Delta u_F\} = (\{F^n\} + \{\Delta F\}) - \{F_{int}\} \quad (\text{A3-55})$$

(A3-53)式を(A3-52)式に代入すると、荷重増分 Δp は式のように求めることができる。

$$\Delta p = \frac{\{du\}^T\{\Delta u_F\}}{\{du\}^T\{\Delta u_e\} + dp} \quad (\text{A3-56})$$

このように1つ前の釣合点における変位および荷重に、予測子と修正子を加えて更新することにより、次の釣合点を求めることができる。また、修正子の収束条件としては、不釣合力ベクトルのノルム、もしくは変位修正子ベクトルのノルムが設定した誤差以下になる条件が良く用いられる。

謝 辞

本研究の遂行および論文作成にあたり、懇切丁寧なご指導とご鞭撻を賜りました、九州大学大学院 工学研究院 海洋システム工学部門 吉川孝男 教授 に対し、心より厚く御礼申し上げます。

本論文をまとめるにあたり、九州大学大学院 工学研究院 航空宇宙工学部門 宇田暢秀 教授、九州大学大学院 工学研究院 海洋システム工学部門 後藤浩二 教授、九州大学大学院 工学研究院 海洋システム工学部門 柳原大輔 准教授 には、大変貴重なご助言、ご討論を賜りました。心より厚く御礼申し上げます。

本研究の実施にあたり、九州大学大学院 工学研究院 海洋システム工学部門 藤 公博 助教、九州大学大学院 工学府 海洋システム工学部門 博士前期課程 2 年 中村拓登氏、および九州大学大学院 工学府 海洋システム工学部門 博士前期課程 1 年 塩満大祐氏には、多くの有益なご助言や多大なるご協力を頂きました。心より御礼申し上げます。

著者の九州大学大学院 工学府 海洋システム工学部門 博士後期課程への入学にあたり、その機会を与えて頂くとともに、本研究の意義を深くご理解頂き、本論文をまとめるきっかけを与えて頂いた、川崎重工業株式会社 技術開発本部長 門田浩次 常務執行役員には、心より厚く御礼申し上げます。また、本論文をまとめるにあたり終始温かく見守って頂いた、川崎重工業株式会社 技術開発本部 技術研究所長 中谷 浩 執行役員には、心より御礼申し上げます。

本研究は、Moss 型 LNG 運搬船や潜水船等に用いられるリング補強円筒殻の座屈強度に関するものであり、研究の遂行にあたり、川崎重工業株式会社 船舶海洋カンパニー 技術本部 基本設計部 構造計画課 吉田 巧 課長、ならびに川崎重工業株式会社 船舶海洋カンパニー 神戸造船工場 潜水艦設計部 船体設計課 葭安 肇 課長および伊藤豪敏 主事には、多大なるご支援とご協力を頂きました。心より御礼申し上げます。

本研究の実施にあたりご協力頂いた、川崎重工業株式会社 技術開発本部 技術研究所 強度研究部 研究二課 西川弘泰 課長、佐野敦司 主事、川重テクノロジー株式会社 ソリューション事業部 設計ソリューション部 構造解析一課 中川泰宏 主事、川崎重工業株式会社 船舶海洋カンパニー 神戸造船工場 潜水艦設計部 艤装設計課 澤田祐也 係員（九州大学大学院 工学府 海洋システム工学部門 博士前期課程に在籍）、に感謝の意を表します。

最後に、本研究ならびに本論文の作成に際し、ご協力ならびにご鞭撻を頂いた、川崎重工業株式会社 技術開発本部 技術研究所 強度研究部の方々に深く感謝いたします。

2018 年 2 月

和泉 徳喜

参考文献

- 1) 中村昭和, 安川 度, 川上 肇, 鴨井紀之, 吉川孝男 : Moss Type LNG 船タンクシステムの座屈計算法について-形状初期不整の影響-, 関西造船協会, 第 189 号, 1983.
- 2) Koiter,W.T : The effect of axisymmetric imperfections on the buckling of cylindrical shells under axial compression, Proc.kon.Ned.Ak.Wet,B66, 1963.
- 3) Hutchinson,J.W. and Koiter, W.T. : Post buckling theory, Applied Mechanics Reviews , 1970
- 4) Almroth,B.O. : Influence of imperfections and edge restraint on the axially compressed cylinders, NASA CR-432
- 5) Ziemian,R.D.(ed.): Chapter 14 Circular Tubes and Shells; Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures, 6th, 2009.
- 6) 安川 度, 川上 肇, 吉川孝男 : 初期不整を有する円筒殻の崩壊強度解析 (軸圧縮を受ける短い円筒殻), 日本造船学会論文集, 第 153 号, 1983.
- 7) 安川 度, 川上 肇, 吉川孝男 : 初期不整を有する円筒殻の崩壊強度解析 (その 2, 軸圧縮を受ける縦補強円筒殻), 日本造船学会論文集, 第 156 号, 1984.
- 8) Det Norske Veritas Classification A.S.: Buckling Criteria of LNG Spherical Cargo Tank Containment Systems – Skirt and Sphere, Classification Notes No.30.3, 1997.
- 9) Yamaki, N : Elastic Stability of Circular Cylindrical Shells, North-Holland Series in applied mathematics and mechanics, Volume 27, 1984.
- 10) Tokugawa, T.: Model experiments on the elastic stability of closed and cross-stiffened circular cylinders under uniform external pressure, Proc. World Engineering Congress, Tokyo, Vol.29, 1929.
- 11) von Mises, R.: Der kritische Aussendruck für allseits belasteter zylindrische Rohre, Stodola-Ferstschrift, 1929.
- 12) Bryant, A.R: Hydrostatic Pressure Buckling of a Ring-stiffened Tube, Naval Construction Research-Establishment Report, R-306, 1954.
- 13) 寺田明, 島本参之助 : 補強材を有する薄肉円筒殻の圧壊に関する研究, 造船協会論文集, Vol.108, 1960.
- 14) Pulos, J.G et al.: Axisymmetric Elastic Deformations and Stresses in a Ring-Stiffened, Perfectly Circular Cylindrical Shell under External Hydrostatic Pressure, David Taylor Model Basin, Report 1497, 1961.

- 15) 大坪英臣, 吉田二郎: 補強円筒殻の全体圧壊と有効幅の検討, 日本造船学会論文集, Vol.164, 1989.
- 16) 吉川孝男, 吉村健司: 外圧を受けるリング補強円筒殻の全体圧壊強度と有効幅に関する研究, 日本船舶海洋工学会論文集, 第3号, 2006.
- 17) Kennard, E.H.: Tripping of T-shaped stiffening rings on cylinders under external pressure, David Taylor Model Basin Report 1079, 1959.
- 18) Faulkner, D.: Application of reliability theory in submarine design, *Advances in Marine Structures-2*, pp.566-595, 1991.
- 19) Morandi, A.C., Faulkner, D. and Das, P.K. : Frame tripping in ring stiffened externally pressurized cylinders, *Marine Structures* 9, 1996.
- 20) Timoschenko, S. P. and Gere, J. M. : *Theory of Elastic Stability*, McGraw-Hill, 1961.
- 21) Gerard, G.: *Introduction to Structural Stability Theory*, McGraw-Hill, 1962.
- 22) Brush, D. O., Almroth, B. O. : *Buckling of Bars, Plates and Shells*, McGraw-Hill, 1975.
- 23) (社)日本機械学会編, シェルの振動と座屈ハンドブック, 2003.
- 24) 吉川孝男: 初期不整を有する球殻および円筒殻の座屈・崩壊強度に関する研究, 大阪大学学位論文, 1977.
- 25) 小林正佳, 小野寺真作, 原 清次: 有限要素法による軸対称形状かくの座屈解析 (第1報, 軸対称荷重を受ける場合の座屈解析), 日本機械学会論文集 (第1部), Vol.42, No.362, 1976.
- 26) 関西造船協会 KSSG 委員会 (編): 造船構造設計者のための有限要素法, 2004.
- 27) Donnell, L. H.: *Stability of Thin-walled Tubes under Torsion*, NACA Report No.479, 1933.
- 28) Bushnell, D. : *Buckling of Shells – Pitfall for Designers*, *AIAA Journal*, Vol.19, No.9, 1981.
- 29) Horton, W.H., Bailey, S.C., and McQuilkin, B.H. : *An Introduction to Stability*, Stanford University Report version of paper 219 presented at ASTM annual meeting, Atlantic City, N.J. (1966)
- 30) Donnell, L.H. and Wan, C.C. : *Effects of Imperfections on Buckling of Thin Cylinders and Columns under Axial Compression*, *Journal of Applied Mechanics*, Vol.17 (1950).
- 31) 吉川孝男, 石川倫浩: 初期不整を有する殻構造の様々な応力状態における座屈強度, 日本船舶海洋工学会論文集, 第7号, 2008.
- 32) 国立研究法人物質・材料研究機構: アルミニウム合金板 A5083-O (Al-4.5Mg-0.6Mn) の低サイクル疲労特性データシート, *NRIM Fatigue Data Sheets* No.61, 1989.
- 33) 寺澤一雄: 船体構造力学, 海文堂, 1974.
- 34) Reynolds, T.E.: Inelastic local buckling of ring-supported cylindrical shells under hydrostatic pressure, David Taylor Model Basin Report 1392, 196.

- 35) Sanden, K. and Gunter, K. : Uber das Hestigkeitsproblem queversteifter Hohlzylinder unter allseitig gleichmaÙigem AuÙendruck, W.R., No.17.
- 36) 吉識雅夫, 山本善之, 鈴木富夫 : 補強円筒殻の軸対称圧壊, 日本造船学会論文集, 第 105 号, 1959.
- 37) Pulos, J.G. : Structural Analysis and Design Considerations for Cylindrical Pressure Hulls, David TGaylor Model Basin Report, No.1639, 1963.
- 38) Holmquist, J. L. and Nadai, A. : A Theoretical and Experimental Approach to the Problem of Collapse of Deep-well Casing, Drilling and Production Practice, A.P.I., 1939.
- 39) 本間康之 : 外圧を受ける円筒殻の軸対称圧壊強度 (その 1), 日本造船学会論文集, 第 147 号, 1980.
- 40) 本間康之 : 外圧を受ける円筒殻の軸対称圧壊強度 (その 2), 日本造船学会論文集, 第 154 号, 1983.
- 41) Bergman, E.O. : The New-type Code Chart for the design of vessels under external pressure, Pressure Vessel Piping Des. , ASME, 1960.
- 42) 本間康之, 石田 忍 : 初期たわみを持つ円筒殻の胴板座屈圧力 (第 1 報), 日本造船学会論文集, 第 158 号, 1985.
- 43) Reynolds, T.E.: Elastic local buckling of ring-supported cylindrical shells under hydrostatic pressure, David Taylor Model Basin Report 1614, 1962.
- 44) Det Norske Veritas Classification A.S.: Buckling Strength Analysis, Classification Notes No.30.1, 1995.
- 45) Yamamoto, Y., Homma, Y., Oshima, K., Mishiro, Y., Terada. H., Yoshikawa, T., Morihana, H., Yamauchi, Y. and Takenaka, M.: General Instability of Ring-Stiffened Cylindrical Shells under External Pressure, Marine Structures 2, 1989.
- 46) Kendrick, S. : The Buckling under External Pressure of Circular Cylindrical Shells with Evenly Spaced Equal Strength Circular Ring Frames (Part III), Nav. Constr. Res. Estab. Rep., R-259, 1953.
- 47) 山本善之 : 補強円筒殻の外圧による全体的圧壊の研究, 造船協會論文集, 第 113 号, 1963.
- 48) Lunchick, M. E. : Plastic General-Instability Pressure of Ring-Stiffened Cylindrical Shells, David Taylor Model Basin Report, No.1587, 1963.
- 49) Reynolds, T.E. and Blumenberg, W.F. : General Instability of Ring-Stiffened Cylindrical Shells subjected to External Hydrostatic Pressure, David Taylor Model Basin Report, No.1324, 1959.

- 50) Windenburg, D.F. : Vessels under External Pressure, Pressure Vessel Piping Des., ASME, 1960.
- 51) Holt, M. : A Procedure for Determining the Allowable Out-of-roundness for Vessels under External Pressure, Trans. ASME, 74, 1952
- 52) 寺沢一雄, 松浦義一 : 材料力学(上卷), 海文堂出版, 1966.
- 53) Adamchack, J.C.: Design Equations for Tripping of Stiffeners under Inplane and Lateral Loads, David Taylor Naval Ship Research and Development, Report 79/064, 1979.