

A Study on Supersingular Polynomials, Modular Differential Equations, and Hypergeometric Series

中屋, 智瑛

<https://doi.org/10.15017/1931729>

出版情報 : 九州大学, 2017, 博士 (数理学), 課程博士
バージョン :
権利関係 :

氏 名	中屋 智瑛
論 文 名	A Study on Supersingular Polynomials, Modular Differential Equations, and Hypergeometric Series (超特異多項式, 保型微分方程式および超幾何級数に関する研究)
論文調査委員	主 査 九州大学 教授 金子 昌信 副 査 九州大学 教授 落合 啓之 副 査 九州大学 准教授 権 寧魯 副 査 大阪体育大学 准教授 堤 裕之

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本論文では標数正の超特異楕円曲線の j 不変量を根とする多項式(「超特異多項式」)の標数 0 への持ち上げと, ある種の保型微分方程式との関係, さらにはそれらと超幾何級数との関連, また散在型単純群の位数との意外な関係などについて, 三部構成で論じられている。

第一部では, ある保型微分方程式の解から構成される多項式が超特異多項式を与えるというタイプの結果が述べられている。これについては Kaneko-Zagier の先行研究(1998)があり, 彼らはパラメータが一つ入った二階線型微分方程式を導入, 各素数に対しそのパラメータを特殊化することにより, 解から超特異多項式が構成されることを示した。さらに, Baba-Granath (2011)も同様の二種類の微分方程式を導入し, 類似の結果を証明した。これらの微分方程式は適当なモジュラー形式の対数微分を用いて得られる微分作用素から構成される。本論文ではこれらの結果を拡張し統合している。具体的には, Eisenstein 級数と判別式関数のべき乗の積の対数微分から微分作用素を構成し, その結果得られる保型微分方程式の解から超特異多項式が現れることを示した。本研究によって, 先行研究の三種類の微分方程式が散発的なものではないことが示され, また超特異多項式と関連する保型微分方程式の無限系列の存在が示された点でも興味深い。

第二部では, 第一部に現れた超特異多項式のレベルつき類似物と, いくつかの散在型有限単純群との関係が論じられており, 本論文中では最も興味深く独創性が高い研究成果であると評価される。

Ogg (1974)がかつて指摘したように, 散在型有限単純群の中でも位数最大の, いわゆるモンスター群とよばれる群の位数の素因数の集合と, 超特異多項式が線形因子のみに既約分解されるような素数の集合は一致する。これは有限集合であるから, 後者の性質を持つ素数が前者の集合に現れる素数に限るということが証明出来ればそれでよいが, それには, 超特異多項式の線形因子の個数の虚二次体の類数による表示(本質的には Deuring による)と類数評価を組み合わせればよい。さて, Tsutsumi (2007) や Sakai (2011)によって, 適当な群のモジュラー関数に付随する, 超特異多項式のレベル付き類似物が研究されてきた。これらはいずれも第一部の超特異多項式と同様に超幾何多項式表示をもつ。本論文では彼らが定義したレベル付き超特異多項式の既約分解について, Brillhart-Morton (2004)による Legendre 多項式の既約分解についての結果を援用し以下の結果を得た。まずレベル $2,3$ の Fricke 群に対応する超特異多項式の既約分解における線形因子の個数を, 虚二次体の類数の線形和により明示的に表した。そしてその既約分解を観察することにより, 線形因子のみに既約分解されるような素数の集合が, 散在型有限単純群であるペビーモンスター群, Fisher 群(Fi'_{24})の位数の素因数と各々一致することを見て取り, それを証明した。その証明は,

超幾何級数の代数変換公式とモジュラー関数間の代数的な関係式という古典的なつながりを基にして、Tsutsumi および Sakai の結果と Brillhart-Morton の結果を結びつけることでなされる。第二部の後半では、さらに高いレベルの群について、特に Fricke 群に関するモジュラー関数体が一元生成となる 15 種のレベルについて、線形因子の個数の虚二次体の類数の線形和による統一的な表示を明示的に予想している。この予想の下で、更にレベル 5,7 の Fricke 群に対応する超特異多項式と Harada-Norton 群、Held 群とのつながりが予想されている。

最後に第三部では Kaneko-Koike (2006) の extremal quasimodular form とよばれる特別な準モジュラー形式の研究において現れた三種類の微分方程式について、いくつかの結果が述べられている。第一部で扱った、Kaneko-Zagier が導入した微分方程式はこの内の一種であるが、Kaneko-Koike (2003) においてその様々なレベルのモジュラー形式解の超幾何級数による具体的な表示が知られていた。彼らはまず解の形を実験的に予想し、それらが実際に微分方程式を満たすことを計算で示すという証明を与えたが、Ochiai が未出版のノートで指摘したように、実はレベル 1 の解から超幾何級数の代数変換公式を通じてレベル 2,3,4 の解を直接的に導出することが出来る。このことを復習した後、残る二種類の微分方程式をこの観点から見直す。そしてそのうちのひとつは、Kaneko-Zagier が導入した微分方程式の解に重さ 4 の Eisenstein 級数を掛けた関数が満たすものであること（従って本質的に新しいものではないこと）を注意し、最後の一種について、これも実は本質的には Kaneko-Zagier が導入した微分方程式に等しいことを、解が Serre 微分作用素によって移ることによって示す。この方程式は Sakai (2010) によって様々なレベルのモジュラー形式解が考察され、Heun 級数を用いた表示が与えられていたが、本論文での考察の応用として、モジュラー形式解の Heun 級数を用いない明示公式を与えている。さらに、適当なモジュラー形式の超幾何級数によるよく知られた表示を通じて、低いレベルの合同部分群、Fricke 群に関する重さ 2 の準モジュラー形式の超幾何級数による表示も与えており興味深い。

以上の研究成果のうち、第一部のものは単著として英文学術雑誌に受理済みであり、第二部、第三部もそれぞれ独立の単著論文として近く投稿予定である。

これらの研究結果は整数論、とくに保型微分方程式や超特異楕円曲線の分野において価値あるすぐれた業績と認められる。よって本研究者は博士（数理学）の学位を授与される資格があるものと認める。