

A Study on Supersingular Polynomials, Modular Differential Equations, and Hypergeometric Series

中屋, 智瑛

<https://doi.org/10.15017/1931729>

出版情報 : 九州大学, 2017, 博士 (数理学), 課程博士
バージョン :
権利関係 :

氏 名 : 中屋 智瑛

論 文 名 : A Study on Supersingular Polynomials, Modular Differential Equations, and Hypergeometric Series

(超特異多項式, 保型微分方程式および超幾何級数に関する研究)

区 分 : 甲

論 文 内 容 の 要 旨

本論文は有限体上の楕円曲線の中でも特に超特異楕円曲線とよばれる曲線族に対応づけられる超特異多項式と, 保型微分方程式および超幾何級数との関連について述べたものである.

まず第一章ではある保型微分方程式の解から構成する多項式が超特異多項式を与えることを示す.

Kaneko-Zagier (1998)は超特異楕円曲線の j 不変量の研究において, 保型形式解の重さをパラメータとする二階線型微分方程式を導入した. さらに, Baba-Granath(2011)も同様の二種類の微分方程式を導入した. これらの微分方程式は適当なモジュラー形式の対数微分を用いて得られる微分作用素から構成され, いずれも保型形式解から超特異多項式が現れる. その理由として, まず先述の微分方程式が本質的には超幾何微分方程式となること, また超特異多項式が超幾何多項式を用いて表示可能なことがあげられる. 著者はこれらの結果を拡張し統合するため, Eisenstein 級数と判別式関数のべき乗の積の対数微分から微分作用素を構成し, 結果得られる保型微分方程式の解から超特異多項式が現れることを示した. 本研究により, 先行研究の三種類の微分方程式を含む, 超特異多項式と関連する保型微分方程式の無限系列が得られたことになる.

次に第二章では第一章に現れた超特異多項式の類似物と散在型有限単純群との関係について述べる. Ogg (1974)が指摘したように, 散在型有限単純群の中でも位数最大の, いわゆるモンスター群とよばれる群の位数の素因数の集合と, 超特異多項式が線形因子のみに既約分解されるような素数の集合は一致する. この事実の証明方法として, 超特異多項式の線形因子の個数の虚二次体の類数による表示 (本質的には Deuring による) と類数評価を組み合わせる手法があげられる. 一方で Tsutsumi (2007), Sakai (2011)によって, 適当な群のモジュラー関数に付随する, 言わば超特異多項式のレベル付き類似物が研究されてきた. これらはいずれも第一章の超特異多項式と同様に超幾何多項式表示をもつ. 筆者は彼らが定義したレベル付き超特異多項式の既約分解について, Brillhart, Morton (2004)による Legendre 多項式の既約分解についての結果を援用し次を得た: まずレベル 2, 3 の Fricke 群に対応する超特異多項式の既約分解における線形因子の個数は, 虚二次体の類数の線形和により明示的に表せる. またその既約分解を観察すると, 線形因子のみに既約分解されるような素数の集合は, 散在型有限単純群であるベビーモンスター群, Fisher 群 (Fi'_{24}) の位数の素因数と各々一致する. その証明は超幾何級数の代数変換公式とモジュラー関数間の代数的な関係式という古典的なつながりを基にして, Tsutsumi, Sakai の結果と Brillhart, Morton の結果を結びつけることでなされる. 第二章の後半では, さらに高いレベルの群について, 特に Fricke 群に関するモジュラー関数体が一元生成となる 15 種のレベルについて, 線形因子の個数の虚二次体の類数の線形和による統一的な表示を明示的に予想した. この予想の下で更にレベル 5, 7 の Fricke 群に対応する超特異多項式と Harada-Norton 群, Held 群とのつながりが予想される.

最後に第三章では Kaneko-Koike(2006)の extremal quasimodular form とよばれる特別な準モジュラー形式の研究において現れた三種類の微分方程式について、いくつかの結果を述べる。まず第一章の Kaneko-Zagier が導入した微分方程式はこの内の一種であるが、Kaneko-Koike(2003)においてその様々なレベルのモジュラー形式解の超幾何級数による具体的な表示が知られていた。彼らはまず解の形を予想し個別に微分方程式を満たすことを計算する方針で証明を行ったが、Ochiai が未出版のノートで指摘したように、実はレベル 1 の解から超幾何級数の代数変換公式を通じてレベル 2,3,4 の解を直接的に導出することが出来るため、この事実についての説明を行う。残る二種類の微分方程式の内、一種は Kaneko-Zagier が導入した微分方程式の解に重さ 4 の Eisenstein 級数を掛けた関数が満たすものであるため、本質的に新しいものではない。最後の一種は Sakai(2010)によって様々なレベルのモジュラー形式解が考察されているが、本論文ではこの一種も本質的には Kaneko-Zagier が導入した微分方程式に等しいことを、解が Ramanujan-Serre 微分作用素によって移ることから示す。その応用として、モジュラー形式解の Heun 級数を用いない明示公式を与える。また、適当なモジュラー形式の超幾何級数によるよく知られた表示を通じて、低いレベルの合同部分群、Fricke 群に関する重さ 2 の準モジュラー形式の超幾何級数による表示を与える。