Lie symmetry analysis of time fractional differential equations

ドルジゴトフ, ホンゴズル

https://doi.org/10.15017/1931728

出版情報：九州大学, 2017, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：

（様式６－２）

氏　　　名	ドルジゴトフ　ホンゴズル Dorjgotov Khongorzul
論　文　名	Lie symmetry analysis of time fractional differential equations （分数階微分方程式のリー環対称性による研究）
論文調査委員	主　査　九州大学　　教授　　　　落合　啓之 副　査　九州大学　　教授　　　　野村　隆昭 副　査　神戸大学　　教授　　　　野海　正俊 副　査　京都大学　准教授　　　　梅田　　亨

論　文　審　査　の　結　果　の　要　旨

非整数階の微分を含む分数階の微分方程式は弾性や拡散の記述に用いられており、近年、理論・応用ともに研究が進んできている。これらの方程式の解を記述したり構造を理解したりする一つの素朴なアイディアとして、特殊解を構成しそれを利用する方法がある。方程式から特殊解を探す方法はいろいろあるが、一部の微分方程式に対して成功している組織的な方法がリー対称性を利用した変数分離法である。この論文では、分数階連立発展方程式のリー対称性に関する研究を行っている。このタイプの方程式に対しては Q. Huang(2015), K. Singla(2016)らによる先行研究があり、この論文では、それらを含む形の一般形を持った変数係数の連立系を扱っている。

まず、この分数階連立系に対して、リー対称性を与える無限小ベクトル場を特徴付ける非線形偏微分方程式系を明示的に書き下した。そして、その方程式系を古典的な方法で解くことで、非自明なリー対称性を持つような分数階発展方程式系の係数関数と、そのリー対称性を分類することに成功した。これは、先行研究で考察されている係数関数をリー対称性の中で特徴付けることにも当たる結果である。

次に、得られたリー対称性のなすリー環の代数構造を決定し、それを利用して optimal 系の分類を行った。リー環の次元が低い多くの場合は先行研究と本質的に同じであるが、非可換な可解リー環の直和になる場合には optimal system の形状は複雑であり、次のステップで考察する変数分離にうまく呼応した optimal system を選ぶ必要があるため、リー環の一般論に乗らない部分の考察が非自明である。

次に、与えられた分数階方程式を optimal system ごとに変数分離した。ここで独立変数の選び方によって、分離された分数階常微分方程式の複雑さが異なることに気づき、先行研究に比べて上手な変数選択をすることで、次のステップで記述に使う特殊関数が先行研究よりも平易なものに取れている。新しい係数関数だけでなく、既存の係数関数に対してもこのステップ以降は新しい結果を与えている。

最後に、分離された分数階常微分方程式の解を Mittag-Leffler 関数、一般 Wright 関数、Fox の H 関数などの特殊関数を用いて表示している。微分方程式の場合と異なり、分数階常微分方程式に対しては一般論が準備されていないため、特に右辺が Euler 型になる場合の一般論を整備することも併せておこなっている。これらの結果は新しい解の記述を与えるとともに、パラメータが特殊な場合は、指数関数などの初等関数で解が書けることのカラクリがこの結果から解明されている。

また、パラメータが特殊な別の場合には超幾何関数で書ける解が存在することを示し、一般 Wright 関数と超幾何関数の間の２次関係式につなげている。

特殊関数で書かれた特殊解は数式処理で扱うことができる。論文の最後の部分では、幾つかの分数パラメータに対して得られた解を描画することで、解が方程式のパラメータや分数階微分のパラメータにどのように依存するかを視覚化している。

これらの研究は、微分積分方程式、代数的なリー群・リー環、特殊関数など、複数の分野の内容を横断的に活用したものであり、意義のあるものである。この論文で与えられた一連の議論は、今回扱った以外の方程式系に対しても有効であるため、今後の研究の発展も期待できる。また、特殊解の記述からは、漸近形が読み取れたり解の大小に視覚的に気付けたりするメリットがあり、応用面でも活用できるものである。

以上の結果は、解析学の分野において価値ある業績と認められる。

よって、本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。