Zeta functions of simple graphs with bounded degree

高坂, 太智

https://doi.org/10.15017/1931726

出版情報：九州大学, 2017, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：

（様式６－２）

氏　　　名	髙坂 太智
論　文　名	Zeta functions of simple graphs with bounded degree (有界次数を持つ単純グラフに対するゼータ函数に関する研究)
論文調査委員	主　査　九州大学　　教授　　　　落合　啓之 副　査　九州大学　　教授　　　　白井　朋之 副　査　九州大学　准教授　　　　権　　寧魯 副　査　愛媛大学　准教授　　　　山崎　義徳

論文審査の結果の要旨

伊原ゼータ関数の研究は、伊原康隆の局所体上の二次特殊線形群の離散部分群に対するセルバーグ型のゼータ関数の研究に端を発する。その後、有限グラフにおいても同様に伊原ゼータ関数が定義され、J. P. Serre、砂田利一、橋本喜一朗、H. Bass など様々な研究者によって研究が進められた。L. Bartholdi は 1999 年に伊原ゼータ関数の２変数への拡張を与えた。有限グラフの伊原ゼータ関数に対しては、伊原の公式や Bartholdi の公式と呼ばれる公式が知られている。グラフが正則である場合には、伊原の公式はグラフの閉測地線とラプラシアンのスペクトルとの関連を表し、Bartholdi の公式はグラフの閉路とラプラシアンのスペクトルとの関連を表している。このようにラプラシアンのスペクトルは数論的な性質を持つ。本論文ではより一般に、頂点数が有限とは限らないような（有界な次数を持つ）単純グラフに考察の対象を広げている。このようなグラフに対してゼータ関数を導入し、グラフのラプラシアンのスペクトルの整数論的性質を考察することにより、以下の三つの結果を得た。

(1) 有界次数を持つ単純グラフに対して、伊原ゼータ関数を定義し、そのゼータ関数に対して伊原の公式を得た。
(2) 有界次数を持つ単純グラフに対して、Bartholdi ゼータ関数を定義し、そのゼータ関数に対して Bartholdi の公式を得た。
(3) グラフが正則である場合に、グラフの熱核のベッセル関数を用いた新しい表示を与えることで、熱核のラプラシアンのスペクトルを用いない表示を得た。

なお、無限グラフに対するゼータ関数は本論文で考察されている以外にも様々なものが知られている。この論文で導入したゼータ関数の定義は、有限グラフにも適用することができ、かつ、グラフが正則である場合にはラプラシアンのスペクトルと直接的に関連するものであり、G. Chinta, J. Jorgenson, A. Karlsson らにより導入されたゼータ関数の拡張となっているものである。

本論文は次の四つの章で構成されている。最初の二つの章では研究の背景や動機、ならびに基本事項が述べられている。

第三章では、有界次数を持つ単純グラフに対して、伊原ゼータ関数を定義し、その伊原の公式を主定理として述べ、証明を与えた。グラフが正則である場合には、この公式はグラフの閉測地線とグラフのラプラシアンのスペクトルとの関連を表すものである。グラフが有限である場合には、主定理の結果から既知の伊原の公式を導出することもできる。その意味で、この公式は伊原の公式を、有界次数を持つ単純グラフへ拡張したものになっている。また、主定理の結果は、2015 年に Chinta-Jorgenson-Karlsson により、グラフが頂点推移的である場合に与えられた公式の、有界次

数を持つ単純グラフへの一般化でもある。

第四章では、有界次数を持つ単純グラフに対して、Bartholdi ゼータ関数を定義し、その Bartholdi の公式を主定理として述べ、証明を与えた。グラフが正則である場合には、この公式はグラフの閉路とグラフのラプラシアンのスペクトルとの関連を表している。主定理の結果は 1999 年に L. Bartholdi により示された Bartholdi の公式の、有限とは限らないグラフへの拡張になっている。第四章の後半においては、グラフが正則である場合に、熱核のベッセル関数を用いた新しい表示を主定理として与えた。この表示は、2015 年に Chinta-Jorgenson-Karlsson らにより与えられた表示の拡張になっている。この公式の一つの応用として、この公式に然るべきラプラス変換を施すことにより、本章で定義した Bartholdi ゼータ関数の Bartholdi の公式が得られることを述べる。この証明は有限グラフにおいてよく知られている Bartholdi の公式の別証明も与えている。

本論文の設定は、グラフの有限性や正則性を仮定しないため、代数的な手法のみならず、関数解析的な議論も必要となり、論文中ではそれらが丁寧に与えられている。熱核の表示では、母関数やベッセル関数などの特殊関数を巧妙に活用している。無限グラフに関する主定理は、グラフ上の乱歩や有限グラフからの無限極限とも相性が良く、今後の発展性が見込める内容である。

以上の結果は、代数学の分野において価値ある業績と認められる。

よって、本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。