Zeta functions of simple graphs with bounded degree

髙坂, 太智

https://doi.org/10.15017/1931726

出版情報：九州大学, 2017, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：

（様式３）

氏　　名　：髙坂　太智

論 文 名　：Zeta functions of simple graphs with bounded degree
（有界次数を持つ単純グラフに対するゼータ函数に関する研究）

区　　分　：甲

論　文　内　容　の　要　旨

有限グラフに対する伊原ゼータ函数の研究は、伊原康隆による二次 p 進特殊線形群の離散部分群に対するセルバーグ型のゼータ函数の研究に端を発する。その後、J. P. Serre により、有限グラフにおいても同様にゼータ函数が定義されると示唆され、砂田利一、橋本喜一朗、H. Bass らにより研究が進められた。また、1999 年に L. Bartholdi により伊原ゼータ函数の拡張が与えられた。有限グラフに対するこれらのゼータ函数を用いた研究結果として、伊原の公式や Bartholdi の公式と呼ばれる公式が知られている。グラフが正則である場合には、前者はグラフの閉測地線とラプラシアンのスペクトルとの関連を表し、後者はグラフの閉路とラプラシアンのスペクトルとの関連を表すものである。このようにラプラシアンのスペクトルは整数論的な性質を持つ。本論文ではより一般に、有界次数を持つ単純グラフに対するゼータ函数を導入することにより、ラプラシアンのスペクトルの整数論的性質を考察した。これにより、以下の三つの結果を主定理として得た。

(1) 有界次数を持つ単純グラフに対して、伊原ゼータ函数を定義し、その伊原の公式を得た。
(2) 有界次数を持つ単純グラフに対して、Bartholdi ゼータ函数を定義し、その Bartholdi の公式を得た。
(3) グラフが正則である場合に、グラフの熱核のベッセル函数を用いた新しい表示を与えることで、熱核のラプラシアンのスペクトルを用いない表示を得た。この表示は 2015 年に G. Chinta, J. Jorgenson, A. Karlsson らにより与えられた公式の拡張であり、この公式の一つの応用として、(2)の別証明を与えた。

尚、無限グラフに対するゼータ函数は本論文以外にも様々なものが知られている。その中でも有限グラフにも適応することができ、かつグラフが正則である場合にはラプラシアンのスペクトルと直接的に関連するという観点から G. Chinta, J. Jorgenson, A. Karlsson らにより導入されたゼータ函数と同じアイデアを用いた定義をこの論文では採用した。

本論文は次の四つの章で構成されている。

第一章、第二章では本論文の研究の背景、動機及び第三章以降で用いられる用語や事実について述べる。

第三章では、有界次数を持つ単純グラフに対して、伊原ゼータ函数を定義し、その伊原の公式を主定理として述べる。特に、グラフが正則である場合には、この公式はグラフの閉測地線とグラフのラプラシアンのスペクトルとの関連を表す。グラフが有限である場合には、主定理の結果からよく知られている伊原の公式を導出することもできる。その意味で、この公式はよく知られている伊原の公式の、有界次数を持つ単純グラフへの拡張にもなっている。また、主定理の結果は 2015 年に G. Chinta, J. Jorgenson, A. Karlsson らにより、グラフが頂点推移的である場合に与えられた公式の、有界次数を持つ単純グラフへの一般化である。

第四章では、有界次数を持つ単純グラフに対して、Bartholdi ゼータ函数を定義し、その Bartholdi の公式を主定理として述べる。特に、グラフが正則である場合には、この公式はグラフの閉路とグラフのラプラシアンのスペクトルとの関連を表す。主定理の結果は 1999 年に L. Bartholdi により示された Bartholdi の公式の、有限とは限らないグラフへの拡張になっている。さらに本章において、グラフが正則である場合に、熱核のベッセル函数を用いた新しい表示も主定理として述べる。この表示は、2015 年に G. Chinta, J. Jorgenson, A. Karlsson らにより与えられた表示の拡張になっている。この公式の一つの応用として、この公式に然るべきラプラス変換を施すことにより、本章で定義した Bartholdi ゼータ函数の Bartholdi の公式が得られることを述べる。この証明は有限グラフにおいてよく知られている Bartholdi の公式の別証明も与えている。