

FUNDAMENTAL GROUP OF OPERATOR ALGEBRAS WITH FINITE DIMENSIONAL TRACE SPACE

川原, 崇司

<https://doi.org/10.15017/1931724>

出版情報 : 九州大学, 2017, 博士 (数理学), 課程博士
バージョン :
権利関係 :

氏 名 : 川原 崇司

論 文 名 : FUNDAMENTAL GROUP OF OPERATOR ALGEBRAS WITH
FINITE DIMENSIONAL TRACE SPACE

(トレース空間が有限次元である作用素環の基本群について)

区 分 : 甲

論 文 内 容 の 要 旨

本論文では、トレース空間の次元が有限次元である C^* -環と von Neumann 環における作用素環の基本群について述べている。

まず初めに、 C^* -環の基本群の定義をするため、その事前準備として、 C^* -環の定義、トレース空間、Hilbert module、 K -理論、 AF -環、von Neumann 環におけるトレース空間と module についての議論を述べている。ここでは、 C^* -環の定義からあらかじめ述べるとともに、後に基本群の定義に必要な Picard 群や、基本群の元を特定するための K_0 群とトレースの議論を事前に述べている。

その後、 C^* -環の基本群の定義を行っている。この C^* -環の基本群の定義は、トレースがただ一つの場合の拡張になっている。トレースがただ一つの場合は、正の実数内の乗法群であったのに対して、トレース空間が有限次元の場合は、行列の可逆元全体からなる群の部分群として表現される。また、その具体的な形としては、各行各列に正の実数が一つ並ぶという非常にわかりやすい形をしており、 2×2 行列を例にとると、成分が正の、対角行列ないし逆対角行列という形である。また、この基本群が群であることの証明にはトレースがただ一つの場合と同様に Picard 群を用いて証明される。そして、この基本群は K_0 群により制限を受け、それを利用して様々な例を計算している。そしてその章の最後には、outer との関係の完全系列と scaling group との関係を紹介している。

次に、正規トレース空間の次元が有限次元である von Neumann 環における作用素環の基本群の定義をしている。この定義は、トレースがただ一つの場合の C^* -環の基本群と von Neumann 環の基本群の関係を元にして、考えられている。そのため、この仮定を満たす von Neumann 環は II-1 型の因子環ないし行列環の直和となっており、非常に簡単なものになる。群になることの証明は C^* -環の場合と同様であるが、具体的な形については、直和分解されるということにより、その直和因子の環を使って、詳細に書き下すことができる。具体的には、 G を正の乗法群の部分群とし、 S_n を n 次置換群として、直和因子を適当な順番に並び替えることによって、 G^n と S_n の接合積を行列に表現したものが、ブロックとして対角に並んでいるように表現することができる。逆に、そのような形をとる任意の群も、II-1 型の因子環ないし行列環の直和の基本群として実現可能であることをこの章では議論している。

最後には、 C^* -環の基本群の実現について論じている。実は擬対角が共に 2 であるような 2×2 の行列から生成される群を C^* -環の基本群の例として挙げているが、これは von Neumann 環の基本群の場合には実現できないことが前章から分かる。このように、どのような基本群が C^* -環の基本群として実現可能かということを考えるため、トレースの空間が 2 次元となる特定の単純な AF -

環に条件を絞って議論している。群としては 2×2 行列における、成分が正の対角行列を一つ持ち出し、それから生成される群を考えている。そして、対角が違うものにおいては、片方が有理数（ないし特定の代数的数）でもう片方が代数的数については、その特定の単純な AF-環では実現できないことを証明している。それから、最後には、定理の一つとして、対角の片方が超越数の場合は、その対角行列から生成される群が、 C^* -環の基本群として実現可能であることを証明している。