Braid zeta functions and certain q-identities

岡本, 健太郎

https://doi.org/10.15017/1931723

出版情報：九州大学, 2017, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：

（様式６－２）

氏　　　名	岡本 健太郎
論　文　名	Braid zeta functions and certain q-identities (組み紐のゼータ函数とある q-恒等式に関する研究)
論文調査委員	主　査　九州大学　　教授　　　落合　啓之 副　査　九州大学　准教授　　　権　　寧魯 副　査　九州大学　准教授　　　高田　敏恵 副　査　琉球大学　　教授　　　木本　一史

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

リーマンゼータ関数に対するリーマン予想へのアプローチに端を発して、ゼータ関数の行列式表示に関する研究が行われてきている。より一般の設定として、群の表現が与えられた時に、行列式表示で表現のゼータ関数を定めることができる。例えば、有限集合上の力学系ゼータ関数は対称群の置換表現から定まるゼータ関数とみなすことができる。さて、組み紐群はトポロジーや結び目理論などと密接に関係している群であり、対称群の一般化とも見なせる。この論文では、組み紐群の表現からゼータ関数を構成し、組み紐や結び目などの幾何学的な対象の情報や不変量を、ゼータ関数を通して理解することを目指している。

第一章では、組み紐群に関する基本事項を記し、有限集合上の力学系ゼータ関数と、その一般化である表現のゼータ関数を、具体例を交えて導入している。

第二章の前半では、Burau 表現といわれる、複素パラメータ q を持つ組み紐群の表現を用いて、組み紐のゼータ関数を構成した。このゼータ関数は、$q\to 1$ により有限集合上の力学系ゼータ関数になることから、力学系ゼータ関数の q-類似となっている。このゼータ関数の関数等式とリーマン予想の類似を証明した。リーマン予想の類似では、パラメータ q の偏角に対する条件が必要であり、現象自体が新しい。そして、このゼータ関数の留数に結び目の著名な不変量である Alexander 多項式が現れることを示した。これは、リーマンゼータ関数の一般化であるデデキントゼータ関数の留数公式に数論的な不変量が現れることに対応していると考えられる。第二章の後半では組み紐群の別の表現（Jones 表現、HOMFLY 表現）に対するゼータ関数を考察し、それぞれのゼータ関数の対数微分の特殊値に Jones 多項式、HOMFLY 多項式と呼ばれる結び目不変量が現れることを示した。また、これらのゼータ関数も、$q\to 1$ で得られるある力学系のゼータ関数の q-類似と見なせる。こうした力学系のゼータ関数を用いて、結び目不変量の間の関係も与えれている。

第三章では、「２つの組み紐から構成される組み紐に関するゼータ関数が、それぞれの組み紐のゼータ関数で表せるか」という問題を考察している。ここでは、組み紐の特殊積というものを新しく定義し、特殊積で得られる組み紐の Burau 表現のゼータ関数を、元の組み紐の２つのゼータ関数で表す公式を与えた。この公式の系として、特殊な結び目に関する Alexander 多項式の分解公式を与えることができた。

第四章では、Kosyak により定められた、3 つのパラメータ(q,t,N)を持つ 3 次組み紐群の表現について研究を行った。この表現は被約 Burau 表現（Burau 表現の非自明な既約部分表現）の対称テンソル積表現を“q-変形”することで得られている。トーラス型といわれるクラスの３次組み紐についてこの表現から定まるゼータ関数を計算すると、Euler の五角数定理に現れる q-級数と密接

に関係していることがわかった。本章の主結果は、この表現を一般の n 次組み紐群へ拡張し、一般次数のトーラス型組み紐に対してゼータ関数の明示公式を与えたことである。また、この明示公式を用いて表現のトレースを２通りに計算することで、組み合わせ論的な q-恒等式を得ることができる。本章の最後には、表現のトレースに関する母関数についての考察をまとめている。この母関数は、Alexander 多項式の情報と、対応する q-級数を含んだ関数となっている。トーラス型組み紐の場合、主結果であるゼータ関数の明示公式を用いることで、対応する q-級数を明示的に求めることができた。

この論文は、結び目不変量（位相幾何学）、ゼータ関数（数論）、q-級数（特殊関数論、組み合わせ論）の諸分野にまたがった研究として特色のある有意義なものである。第３章で与えられた新しい構成法や第４章で与えられた新しい表現は、今後の研究を促す発展性のあるものである。以上の結果は、位相幾何学の分野において価値ある業績と認められる。よって、本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。