

## Braid zeta functions and certain $q$ -identities

岡本, 健太郎

<https://doi.org/10.15017/1931723>

---

出版情報 : 九州大学, 2017, 博士 (数理学), 課程博士  
バージョン :  
権利関係 :

氏 名 : 岡本 健太郎

論 文 名 : **Braid zeta functions and certain  $q$ -identities**  
(組み紐のゼータ関数とある  $q$ -恒等式に関する研究)

区 分 : 甲

## 論 文 内 容 の 要 旨

有限集合上の力学系から、ゼータ関数を定義することができる。Sojung Kim, 小山 信也, 黒川 信重らにより, こうしたゼータ関数は, 函数等式や Euler 積表示など, 整数論において非常に重要であるリーマンゼータ関数と類似した性質をもつことが示された。特に, この力学系ゼータ関数は, リーマンゼータ関数においては未解決であるリーマン予想を満たすことが知られている。この性質は, 有限集合上の力学系ゼータ関数が行列式表示を持つことから比較的容易に示すことができる。そこで, 力学系ゼータ関数の一般化として「表現のゼータ関数」を, 行列式表示を用いて定めた。これにより, 有限集合上の力学系ゼータ関数は対称群の置換表現から定まるゼータ関数とみなすことができる。また対称群の一般化として組み紐群というものが知られており, トポロジーや結び目理論などと密接に関係している。本研究では, 組み紐群の表現からゼータ関数を構成し, 組み紐や結び目などの幾何学的な対象の情報や不変量を, ゼータ関数を通して理解することを目指す。

第一章では, 組み紐群に関する基本事項を記し, 有限集合上の力学系ゼータ関数と, その一般化である表現のゼータ関数を, 具体例を交えて導入する。

第二章では, まず Burau 表現といわれる, 複素パラメータ  $q$  を持つ組み紐群の表現を用いて, 組み紐のゼータ関数を構成する。このゼータ関数は,  $q \rightarrow 1$  により有限集合上の力学系ゼータ関数になることから, 力学系ゼータ関数の  $q$ -類似となっている。さらに, 函数等式やリーマン予想の類似, そして, 留数には有名な結び目不変量である Alexander 多項式が現れることを示した。これは, リーマンゼータ関数の一般化であるデデキントゼータ関数の留数公式において, 数論的な不変量が現れることに対応していると考えられる。第二章ではさらに組み紐群の表現として, Jones 表現, HOMFLY 表現に関してもゼータ関数を考察し, それぞれのゼータ関数の対数微分の特値に Jones 多項式, HOMFLY 多項式と呼ばれる結び目不変量が現れることがわかった。また, これらのゼータ関数は, Burau 表現のゼータ関数と同様に, ある力学系のゼータ関数の  $q$ -類似と見なせる。こうした力学系のゼータ関数を用いて, 結び目不変量の間の関係を明らかにすることができた。

第三章では, 「2つの組み紐からできる非自明な組み紐に関するゼータ関数が, それぞれの組み紐のゼータ関数で表せることはあるか」という問題を考察している。ここで, 非自明とは, 組み紐を横に並べるといった自明な構成を除くことを意味している。本章では, 組み紐の特殊積というものを定義し, 特殊積で得られる組み紐の Burau 表現のゼータ関数の, 元の 2つの組み紐のゼータ関数を用いた明示的な公式を与えた。この公式から, 系として特殊な結び目に関する Alexander 多項式の分解公式を与えることができた。

第四章では, Kosyak により定められた, 3つのパラメータ  $(q, t, N)$  を持つ 3次組み紐群の表現について研究を行った。この表現は被約 Burau 表現 (Burau 表現の非自明な既約部分表現) の対称テンソ

ル積表現を“ $q$ -変形”することで得られる。トーラス型といわれるクラスの3次組み紐についてこの表現から定まるゼータ関数を計算すると、Eulerの五角数定理に現れる $q$ -級数と密接に関係していることがわかった。本章の主結果は、この表現を一般の $n$ 次組み紐群へ拡張し、一般次数のトーラス型組み紐に対してゼータ関数の明示公式を与えたことである。また、この明示公式を用いて表現のトレースを2通りに計算することで、組み合わせ論的な $q$ -恒等式を得ることができる。本章の最後には、表現のトレースに関する母関数についての考察をまとめた。この母関数は、Alexander多項式の情報と、対応する $q$ -級数を含んだ関数となっている。トーラス型組み紐の場合、主結果であるゼータ関数の明示公式を用いることで、対応する $q$ -級数を明示的に求めることができる。こうした、結び目不変量と、ゼータ関数や $q$ -級数などの数論的あるいは組合せ論的な対象との関係をより一層明らかにすることで、両分野の相互発展が期待される。