# Hyperbolic Eisenstein Series on n-dimensional Hyperbolic Spaces

入江, 洋右

https://doi.org/10.15017/1931721

出版情報：Kyushu University, 2017, 博士（数理学）, 課程博士

（様式３）

氏　　名　：入江　洋右

論 文 名　：Hyperbolic Eisenstein Series on $n$-dimensional Hyperbolic Spaces
（$n$ 次元双曲空間上の双曲的アイゼンスタイン級数について）

区　　分　：甲

## 論 文 内 容 の 要 旨

本論文では、$n$ 次元双曲多様体上の双曲的アイゼンスタイン級数について研究を行った。

双曲的アイゼンスタイン級数とは、上半平面を第一種フックス群の作用で割って得られるリーマン面のカスプに対して定義される非正則アイゼンスタイン級数の類似である。通常の非正則アイゼンスタイン級数がカスプに対して定義されるのに対して、双曲的アイゼンスタイン級数はリーマン面の閉測地線（または第一種フックス群の双曲元）に対して定義される。この双曲的アイゼンスタイン級数は最初 S. S. Kudla と J. J. Millson が 1979 年の論文で 2 次元双曲空間である上半平面を離散群で割って得られるコンパクトなリーマン面に対して form-valued なものを定義した。彼らはその保型性や複素パラメータ $s$ に関する有理型解析接続を示し、その後に複素パラメータを特殊化することで、調和的保型形式を具体的に構成した。このリーマン面上の双曲的アイゼンスタイン級数は、上半平面を 2 次元双曲多様体とみなすと、2 次元双曲多様体とその中のある 1 次元実部分多様体の組に対して定義される非正則アイゼンスタイン級数の類似と考えることが出来る。Kudla と Millson はその後、これを高次元コンパクト双曲多様体とその部分多様体の組に対して一般化し、ラプラシアンに関する微分方程式と複素パラメータ $s$ に関する有理型解析接続、またその極の位置を求めている。

リーマン面上の双曲的アイゼンスタイン級数については、その後、D. Garbin らによってリーマン面の退化と呼ばれる変形の族を考えた場合の双曲的アイゼンスタイン級数の漸近挙動が調べられており、双曲的アイゼンスタイン級数に対応する測地線の長さが 0 に近づくようなリーマン面の退化を考えた場合には、双曲的アイゼンスタイン級数は新しく生じるカスプに対応する非正則アイゼンスタイン級数に収束することが分かっている。また 2010 年には J. Jorgenson らにより、双曲的アイゼンスタイン級数が二乗可積分であることが証明され、ラプラシアンに対するスペクトル展開が明示的に得られている。

本論文では、必ずしもコンパクトとは限らない体積有限な高次元双曲多様体とその部分多様体の組に対して双曲的アイゼンスタイン級数を定義し、その基本的な性質：収束性、保型性、ラプラシアンに関する微分方程式を証明した。また、一般の体積有限な双曲多様体においてはこれまで得られていなかった双曲的アイゼンスタイン級数の二乗可積分性を証明し、ラプラシアンに関する明示的なスペクトル展開を得た。これによって、必ずしもコンパクトとは限らない体積有限な高次元双曲的多様体上の双曲的アイゼンスタイン級数においても、その有理型解析接続と、極の位置及び留数を明示的に求めることに成功した。これは、上記の J. Joregenson らの 2010 年の結果の体積有限な高次元双曲多様体とその部分多様体の組への一般化となっている。

本論文は以下の 4 つの節から成る。

第 1 節はイントロダクションであり、本研究の動機や目的と主結果の概要を述べる。

第 2 節は続く第 3 節と第 4 節への準備として、$n$ 次元双曲空間とその上に作用する不定値直行群による群作用、実解析的アイゼンスタイン級数やラプラシアンに関するスペクトル展開の一般論を復習する。

第 3 節では、一般の体積有限な $n$ 次元双曲多様体とその双曲的部分多様体に対し、双曲的アイゼンスタイン級数を定義し、その収束性とラプラシアンに関する微分方程式を証明する。

第 4 節では、主結果とその証明を与える。先ず補題として、双曲的アイゼンスタイン級数の二乗可積分性と、基本領域上の二乗可積分な関数空間における双曲的アイゼンスタイン級数の内積の評価を示す。双曲的アイゼンスタイン級数がラプラシアンに関するスペクトル展開を持つことは、双曲的アイゼンスタイン級数の定義とラプラシアンに関する微分方程式、及びラプラシアンに関するスペクトル展開に関する一般論から分かる。このスペクトル展開の係数は、双曲的アイゼンスタイン級数とラプラシアンの固有関数、または実解析的アイゼンスタイン級数との内積の形で表わされるのであるが、これを明示的に求める為に、双曲的アイゼンスタイン級数のラプラシアンに関する微分方程式と先に述べた補題の双曲的アイゼンスタイン級数の内積の評価、ガンマ関数についての Stirling の公式を用いる。全複素平面への有理型解析接続とその極の位置及び留数は、スペクトル展開の各項の係数の解析接続を考えることによって得られる。