Zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space

赤嶺, 新太郎

https://doi.org/10.15017/1931720

出版情報：九州大学, 2017, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：

（様式３）

氏　　名　：赤嶺　新太郎

論 文 名　：Zero mean curvature surfaces in Lorentz-Minkowski 3-space
（3 次元ローレンツ・ミンコフスキー空間内の平均曲率零曲面に関する研究）

区　　分　：甲

論 文 内 容 の 要 旨

3 次元ユークリッド空間内で平均曲率が至る所零の曲面は面積汎関数の停留点として現れるという変分法的な性質があり，シャボン膜の数理モデルとなる．そのような曲面は極小曲面と呼ばれ，古くから研究されてきた．他方で，3 次元ローレンツ・ミンコフスキー空間内で平均曲率が恒等的に零である曲面を平均曲率零曲面と呼ぶ．そのような曲面も面積汎関数の停留点として現れるという性質があり，極小曲面との類似から幾何学的に重要であるばかりでなく，曲面がしばしば，ある種の特異性を持つといった理由から興味深い研究対象であると考えられ，活発に研究されてきた．とくに，ローレンツ・ミンコフスキー空間内の曲面には，因果的特性と呼ばれる曲面が時間軸に対してどのような配置をされているか，という特性があり，それによって曲面上でリーマン計量，ローレンツ計量あるいは退化計量を扱う必要がある．それぞれの計量が入った曲面を空間的曲面，時間的曲面，光的曲面と呼び，一般には 1 つの曲面上で空間的，時間的，光的な部分に分かれる．1 つの曲面内で因果的特性が時間的から空間的に変化することを，型変化すると表現する． 空間的曲面はユークリッド空間内の曲面と同様に扱えるので，リーマン面上の複素解析などの従来の極小曲面論的な手法を用いて，よく研究されてきた．時間的曲面もある程度は空間的な場合と同じく解析が可能であり，空間的曲面程ではないにしても，研究が進んでいる．他方で曲面が光的な点を持つ場合は，その点で計量が退化してしまうため，従来の研究手法が使えず，解析が困難な部分が多くある．このような特異性を持った曲面に対しては，光的な部分の形を考察した Gu (1985)，Klyachin (2003) らの結果を踏まえ，近年，例の構成や特異性の現れ方に関する研究が始まったばかりで，まだわかっていないことが多い．

本学位論文では，3 次元ローレンツ・ミンコフスキー空間内の平均曲率零曲面の研究をその因果的特性に着目して行い，以下の研究成果を得ている．

(1) リーマン型平均曲率零曲面の因果的特性による分類（第 2 章）：リーマン型平均曲率零曲面とは，19 世紀にリーマンが構成した円の一径数族によって作られるユークリッド空間内の極小曲面をローレンツ・ミンコフスキー空間内で考えたもので，これは曲面のうち最も基本的なものの一つである回転面の一般化である．ここで，ローレンツ・ミンコフスキー空間内の円とは空間内のある直線を固定するローレンツ群による軌道をいい，ユークリッド空間における通常の円や双曲線，放物線がこの意味での円になる．リーマン型平均曲率零曲面は因果的特性の型が変化しない，すなわちリーマン計量やローレンツ計量を持つ場合の研究はなされているが，一般の場合は，曲面の径数表示が複雑な楕円積分を含む形で書かれている為，因果的特性を全て踏まえた上で，型の変化を正確に求めるのが難しく，解析されていなかった．本研究では，型変化する場合も含めた全てのリーマン型平均曲率零曲面の分類及び型変化の特徴の解析を行った．本研究によって円の一径数族によって作られるという基本的な性質を持つ曲面を分類することができたほか，応用として，曲面の計量

が退化する光的な点の集合が直線からなる特異性を持つ様々な平均曲率零曲面の例を新たに構成し，藤森-Kim-Koh-Rossman-Shin-高橋-梅原-山田-Yang（2012）により導入された指標と呼ばれる不変量を具体的に計算した．さらにベルンシュタイン型の問題と関係して，放物線の一経数族で構成される全平面上のグラフの新たな例を構成した．一方で最近，小林曲面と呼ばれる曲面のクラスが藤森-川上-國分-Rossman-梅原-山田（2016）によって構成され，本研究で構成した全平面上のグラフの新たな例は，小林曲面の中に含まれる対称性の高い重要な例であることが指摘された．

(2) カテノイドの境界値問題による分類（第 3 章）： Rafael López 教授（スペイン，グラナダ大学）との共同研究で，古くから知られる「1 つの直線に対する回転で不変な 2 つの円を空間内に与えたとき，それを境界に持つ極小曲面の個数はいくつか」という境界値問題をローレンツ・ミンコフスキー空間内の平均曲率零の回転面に対して考えたもので，曲面の因果的特性と 2 つの円の位置関係に依存して解の個数がどのように変化するかを調べた．ユークリッド空間内では，2 つの円を十分近くに置くと，2 つの極小回転面（カテノイドと呼ばれる懸垂線を回して得られる曲面）が得られる．その後，2 つの円を離していくと，あるときに円を張るカテノイドは唯一つになる．さらに 2 つの円を離すと，その 2 つの円を張る極小曲面は存在しないことが知られている．ローレンツ・ミンコフスキー空間内の平均曲率零曲面の場合には，ユークリッド空間の場合と同様の挙動をする状況もあれば，2 つの円の間の距離に応じて，任意の有限個数の解が得られる場合もある．本研究では，境界の 2 つの円の因果的特性と 2 つの円の位置関係によって，境界値問題の解の個数を分類した．

(3) 時間的極小曲面のガウス曲率の挙動に関する研究（第 4 章）: 時間的な平均曲率零曲面に着目し，特異点とガウス曲率の挙動に関する研究を行った．時間的曲面の性質で，ユークリッド空間内の曲面やローレンツ・ミンコフスキー空間内の空間的曲面と顕著に異なるものとして，曲面の主曲率と呼ばれる曲率が常に実数の範囲内で取れるとは限らないという点がある．そこで，本研究では極小面と呼ばれるクラスに属する，特異点を持ちうる時間的な平均曲率零曲面のどのような性質が実数あるいは複素数の主曲率の有無を特徴付けるか決定した．この場合，曲面が実数の主曲率を持つか，複素数の主曲率を持つかはガウス曲率が負か正であることに対応するので，時間的な平均曲率零曲面上に現れる任意の非退化特異点におけるガウス曲率の挙動を完全に分類した．具体的には，カスプ辺以外の特異点の近傍ではガウス曲率は零にはならず，ガウス曲率が負の値を持つか，正の値を持つかは，それぞれ特異点上で波面と呼ばれる特異点付き曲面の構造を有するか否かで決まることを証明した．さらにカスプ辺の近傍におけるガウス曲率はカスプ辺の特異曲率と呼ばれる不変量で完全に記述されることを証明した．