# Study of non-self-averaging on Polya's urn model using a perturbation analysis

野口, 慎平

https://doi.org/10.15017/1931698

出版情報：九州大学, 2017, 博士（理学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：

（様式３）

氏　　名　：　野口　慎平

論 文 名　：　Study of non-self-averaging on Polya's urn model using a perturbation analysis
（Polya の壺モデルにおける摂動解析による自己平均性の破れの研究）

区　　分　：　甲

## 論 文 内 容 の 要 旨

本学位論文の主題は、『自己平均性の破れ』という現象の理解である。ここで自己平均性は、熱力学極限が成り立つ程度には多数の要素からなる系において、ある示強的物理量（或いはそれに類する量）が部分系と全体系で一致する、と定義する。自己平均性の破れは物理分野では乱れた系などで典型的に現れ、それに関する研究も多くなされている。また、その現象は物理にとどまらず社会、経済等幅広い分野で考察、観察されている。実際、Mandelbrot は米国における綿花取引による収益率が自己平均性を示さないことを報告した。

一方で、従来の研究では自己平均性の破れは主に空間領域で調べられ、時間、振動数領域における振る舞いについてはそれほど着目されてこなかった。従って本学位論文では特に、自己平均性の破れが時間、振動数領域でどのように現れるかに焦点を当てて研究した。

そのような目的の為、具体的な確率模型として Polya の壺モデルを採用した。このモデルは２つの種類の玉（白玉と黒玉）をあるルールで時間発展させていく確率モデルである。ここで、このモデルはそれぞれの玉の増加しやすさを表すいくつかのパラメタを持つ。あるパラメタ領域においては自己平均性を破ることで広く知られており、それに留まらず非常に単純でありながら、広範の現象を記述できる。例えばこのモデルは元々、接触感染現象のモデルとして導入されたが、社会、経済、統計学など非物理分野での幅広い応用が展開されている。具体的にはスケールフリーが現れるようなグラフ理論、意思決定理論、経済成長理論を記述する道具として用いられている。物理分野では、Polya の壺を用いたエントロピーの概念の拡張が試みられている。故に、このモデルで得られた結果は、多くの現象に応用できることが期待される。

まず、本学位論文を通して、Polya の壺を簡単に扱うため、自由なパラメタを a,b の２つに制限し、離散的なモデルの連続近似を調べた。ここで、パラメタ a（b）は黒玉（白玉）の増加しやすさを表す。連続近似により、Polya の壺を記述する離散的なマスター方程式を単純な偏微分方程式へと書き換えられる。ここから、ある種のスケーリング則の存在が分かり、それは Monte Carlo シミュレーションによって得られた結果とよく一致する。また、連続近似で得られた確率分布を用いた黒玉の割合（示強変数に当たる）の m 乗平均の長時間での振る舞いは、既に知られている厳密解と同じである。これよりパラメタ領域 a=b で自己平均性が破れることが容易に示されるが、これは Bagchi と Pal によって示された一般的な定理の一部の例とみなせる。

ここまで準備した上で、本学位論文では時間、振動数領域での自己平均性の破れの現れを見るた

め、Polya の壺モデルのパラメタ a に対して摂動を加え、それによる応答関数、緩和関数、複素感受率を計算した。これは Monte Carlo シミュレーションによるものと、連続近似を用いた解析的手法の両方で行い、両者は一致を示した。また自己平均性が成り立つ領域 $a \neq b$ と自己平均性が成立しない領域 $a=b$ では、摂動により得られる諸関数の平均の振る舞いが異なることが分かった。前者では長時間極限で摂動の影響は緩和するが、後者では摂動の影響が長時間極限でも残り続ける。

さらに本学位論文の後半では、Polya の壺をより一般化した非線形 Polya の壺モデルでの摂動解析を行った。最初に単純な Polya の壺モデルの場合と同じく連続近似したマスター方程式を導出し、非線形壺モデルの基本的な性質を過去の研究とは異なる観点から明らかにした。そのうえで、パラメタ a に摂動を加え、応答関数を数値的に計算した。その応答関数の振る舞いは非線形壺モデルの基本的性質から理論的に説明でき、単純な Polya の壺の結果、すなわち『自己平均性が破れていれば、応答関数などの量は長時間極限でも緩和しない』、とは異なる結論を得た。この場合、ある特殊な状況を除けば、自己平均性が破れているかどうかに依存せず、応答関数は長時間極限で緩和を示す。これは非線形項によってアトラクターが形成され、摂動を加えられた状態がアトラクターに引き込まれてしまう為である。

したがって、自己平均性の破れ方の強さには二つの種類があることが分かった。一つは自己平均性が破れているかどうかに関わらず、応答関数が緩和するようなものである。これは自己平均性の破れ方として弱いと言える。もう一つは、自己平均性の破れと応答関数の緩和が関係をもち、自己平均性が破れているとき、摂動の影響が緩和しないものである。このような分類をすることで自己平均性の時間領域の破れ方がより明確になり、さらに将来なんらかの知見をもたらすのではないか、と予想する。