XXII. Gutachten, betreffend den dritten Band der Theorie der Transformationsgruppen von S. Lie anläßlich der ersten Verteilung des Lobatschewsky-Preises[1].

An die Physiko-mathematische Gesellschaft der Kaiserlichen Universität in Kasan.

Geehrte Herren!

Sie haben mir im Hinblick auf die demnächstige erste Vergebung des Lobatschewskyschen Preises die ehrenvolle Aufforderung zukommen lassen, ich solle mich über die Arbeiten von Sophus Lie betr. die Grundlagen der Geometrie, insbesondere über die im dritten Bande seiner Transformationsgruppen enthaltenen bezüglichen Entwicklungen gutachtlich äußern und über dieselben im Zusammenhange mit dem gegenwärtigen Standpunkte der Raumfrage Bericht erstatten. Ich versuche im folgenden dieser Aufforderung zu entsprechen, so schwierig und verantwortungsvoll die Sache nach verschiedenen Richtungen erscheinen mag.

Nach § 5 der Statuten wird der Lobatschewsky-Preis für Werke über Geometrie, in erster Linie für solche über Nicht-Euklidische Geometrie verliehen. Der § 6 stellt die weitere Bedingung, daß die Werke innerhalb der sechs der Verleihung des Preises vorangehenden Jahre gedruckt sein müssen.

Äußerlich genommen liegt daraufhin die Sache sehr einfach; denn der von Prof. Lie eingesandte Band entspricht diesen Bedingungen nicht nur, sondern er ragt unter allen anderen Werken, die zum Vergleich kommen mögen, so unbedingt hervor, daß ein Zweifel über die Erteilung des Preises kaum möglich sein dürfte. Entscheidend für diese Beurteilung der Höhe der wissenschaftlichen Leistung ist nicht nur die außerordentliche Gründlichkeit und Schärfe, mit welcher Lie im fünften Abschnitte seines Buches das von ihm so genannte *Riemann-Helmholtzsche Raumproblem*

[1]) Abgedruckt nach dem von der physikalisch-mathematischen Gesellschaft der Universität Kasan publizierten Original. [Bulletin de la société physico-mathematique de Kasan (2) 8 (1898). Vgl. auch den Abdruck in den Math. Annalen, Bd. 50.]

behandelt, sondern insbesondere der Umstand, daß diese Behandlung so zu sagen als logische Folge der lang fortgesetzten schöpferischen Arbeiten Lies auf dem Gebiete der Geometrie, insbesondere seiner Theorie der kontinuierlichen Transformationsgruppen erscheint. Ich möchte sagen, daß der § 5 der Statuten hier ebensosehr nach seinem speziellen wie nach seinem allgemeinen Inhalte entscheidet. Die außerordentliche Bedeutung, welche die Arbeiten von Lie für die Allgemeinentwicklung der Geometrie besitzen, kann nicht wohl überschätzt werden; ich bin überzeugt, daß dieselbe in den nächsten Jahren zu noch viel allgemeinerer Geltung kommen wird, als bisher.

Sehr viel schwieriger erscheint nun aber, Ihnen einen Bericht zu liefern, der ebensowohl der Wichtigkeit der Sache entspricht, als Ihrer Gesellschaft einigermaßen nützlich sein kann. Die sehr ausführliche und unmittelbar verständliche Darlegung von Lie hier im Auszuge reproduzieren zu wollen, hieße nur das, was klar und deutlich ist, unnötig zu verdunkeln und schwerer zugänglich zu machen; — mit dem Verfasser aber betreffs der kritischen Bemerkungen, die er anderen Autoren gegenüber macht, in dem einen oder anderen Punkte zu rechten, dürfte weder förderlich noch der heutigen Gelegenheit entsprechend sein; ich darf beiläufig auch auf die Darstellung verweisen, die ich von den Lieschen Entwickelungen im zweiten Bande meiner (autographierten) Vorlesungen über höhere Geometrie, sowie in dem elften Vortrage meines Evanston Colloquiums[2]) gegeben habe. Vielmehr will ich versuchen, meine Aufgabe allgemeiner zu fassen, indem ich es unternehme, den heutigen Stand der Raumfrage oder doch eine Reihe dahin gehöriger Probleme, die in den letzten Jahren hervorgetreten sind, unter umfassenden Gesichtspunkten zu erläutern. Hierbei wird sich von selbst die Stelle ergeben, an der die in Frage stehenden Lieschen Untersuchungen so wie andere von Lie herrührende, in demselben Bande der Transformationsgruppen enthaltene Entwicklungen in Betracht kommen; zugleich finde ich Gelegenheit, auf weitere Fragepunkte aufmerksam zu machen, die mir wesentlich scheinen und denen die Kommission des Lobatschewsky-Preises vielleicht einmal in Zukunft ihre Aufmerksamkeit zuwenden wird.

Woher stammen die Axiome? Ein Mathematiker, der die nichteuklidischen Theorien kennt, wird kaum noch die Meinung früherer Zeiten festhalten wollen, als seien die Axiome nach ihrem konkreten Inhalte Notwendigkeiten der inneren Anschauung: was dem Laien als solche Not-

[2]) „The Evanston Colloquium". Lectures on Mathematics delivered from Aug. 28 to Sept. 9, 1893 before members of the Congress of Mathematics hold in connection with the world's fair in Chicago at Northwestern University, Evanston Ill. Reported by Alexander Ziwet. Newyork, Macmillan & Co. 1894.

wendigkeit erscheint, erweist sich bei längerer Beschäftigung mit den Nicht-Euklidischen Problemen als Resultat sehr zusammengesetzter Prozesse, insbesondere auch der Erziehung und der Gewöhnung. Stammen die Axiome aus der Erfahrung? Helmholtz ist hierfür bekanntlich in nachdrücklichster Weise eingetreten. Aber seine Darlegungen erscheinen nach bestimmter Richtung unvollständig. Man wird, wenn man dieselben überdenkt, zwar gerne zugeben, daß die Erfahrung an dem Zustandekommen der Axiome einen großen Anteil hat, man wird aber bemerken, daß gerade derjenige Punkt bei Helmholtz unerörtert bleibt, der dem Mathematiker vor anderen interessant ist. Es handelt sich um einen Prozeß, den wir in genau derselben Weise bei der theoretischen Behandlung irgendwelcher empirischer Daten immerzu vollziehen und der ebendarum dem Naturforscher völlig selbstverständlich erscheinen mag. Ich werde mich in allgemeiner Fassung so ausdrücken: *die Ergebnisse irgendwelcher Beobachtungen gelten immer nur innerhalb bestimmter Genauigkeitsgrenzen und unter partikulären Bedingungen; indem wir die Axiome aufstellen, setzen wir an Stelle dieser Ergebnisse Aussagen von absoluter Präzision und Allgemeinheit.* In dieser „Idealisierung" der empirischen Daten liegt meines Erachtens das eigentliche Wesen der Axiome. Unser Ansatz ist dabei in seiner Willkür zunächst nur dadurch beschränkt, daß er sich den Erfahrungstatsachen anschmiegen muß und andererseits keine logischen Widersprüche einführen darf. Es tritt dann als Regulator noch dasjenige hinzu, was Mach die „Ökonomik des Denkens" nennt. Niemand wird vernünftigerweise ein komplizierteres Axiomensystem festhalten, sobald er einsieht, daß er mit einem einfacheren Systeme die zur Darstellung der empirischen Daten erforderliche Genauigkeit bereits vollauf erreicht. Also, um es gleich an demjenigen Punkte zu erläutern, der für die Grundlegung der Geometrie in erster Linie in Betracht kommt: Jedermann wird für praktische Zwecke die Formeln der gewöhnlichen Euklidischen Geometrie und nicht etwa diejenigen der Lobatschewskyschen Geometrie in Anwendung bringen.

Diese allgemeinen Bemerkungen habe ich vorausschicken wollen, damit über die Grundlage, von der die folgenden Entwickelungen ausgehen, kein Zweifel bestehen soll. In der Tat soll es sich des weiteren nur um die wirkliche Geometrie unseres empirisch gegebenen Raumes und um deren mathematischen Aufbau handeln, — nicht um Verallgemeinerungen, die man gebildet hat und die nach anderer Richtung mathematisch wertvoll sein mögen. Ich beginne mit einer Frage, welche die mathematischen Kreise in den letzten 25 Jahren in steigendem Maße beschäftigt hat, die aber immer noch nicht die allgemeine Beachtung gefunden hat, welche sie verdient. Was ist eine *willkürliche Kurve*, eine

willkürliche Fläche? Euklid stellt die Worte Kurve und Fläche an die Spitze eines Systems, ehe er zur Definition der geraden Linie und der Ebene schreitet. Und nicht nur die Schöpfer der Differential- und Integralrechnung scheinen an der Deutlichkeit dieser Begriffe keinen Zweifel gehegt zu haben, auch noch die geometrischen Beweise, welche Gauß von dem Fundamentalsatze der Algebra gibt, ruhen auf der Voraussetzung, daß die Idee der (ebenen) Kurve etwas in sich evidentes sei. Aber unsere Sicherheit in dieser Hinsicht ist in der Zwischenzeit, wesentlich unter dem Einflusse von Weierstraß, völlig zerstört worden; man kann sagen, daß vom rein mathematischen Standpunkte aus heutzutage nichts dunkler und unbestimmter erscheint als die genannte Idee. Was wir in der empirischen Anschauung Kurve nennen, ist zunächst ein *Streifen*, d. h. ein Raumstück, dessen übrige Abmessungen gegen die Längendimension zurücktreten (wobei die genaue Begrenzung des Raumstücks unbestimmt bleibt). In dieser (primären) Form kommt die Idee der Kurve in zahlreichen Gebieten der Anwendungen zur Geltung, und ich bin, mit Herrn Pasch, der Meinung, daß es gut ist, dieses mehr hervorzukehren, als gewöhnlich geschieht. Soll aber die Kurve Gegenstand der *exakten* mathematischen Betrachtung werden, so müssen wir sie idealisieren, genau so, wie dies zu Beginn der Geometrie allerorts mit dem Punkte geschieht. Und hier beginnen nun die Schwierigkeiten. Eine erste Bemerkung, die nicht unwichtig ist, ist die, daß alle Autoren, welche über die vorliegende Frage geschrieben haben, dabei die analytische Geometrie als Ausgangspunkt benutzen. Man kann dann die ebene Kurve (um uns auf diese zu beschränken) entweder als Ort eines beweglichen Punktes durch Gleichungen $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ definieren, unter φ, ψ stetige Funktionen verstanden, oder als Grenze eines ebenen Gebietes. Tut man das letztere, so muß gleich zu Anfang die schwierige Frage erörtert werden, was alles unter „Gebiet" verstanden werden soll. Die beiden Definitionen stimmen zuvörderst keineswegs überein, und jedenfalls müssen ihnen beiden weitgehende Beschränkungen zugesetzt werden, wenn man zu all' den Eigenschaften der Rektifizierbarkeit, der Differentiierbarkeit usw. gelangen will, die man einer Kurve gemeinhin beilegt.[3]) Es ist fast am besten, sich von vornherein auf *analytische Kurven* zu beschränken, d. h. φ, ψ in den vorstehenden Gleichungen als analytische Funktionen vorauszusetzen. Die analytischen Kurven sind auch allgemein genug, um jede empirisch gegebene Kurve mit beliebiger Annäherung darzustellen. Weiter ist es eine sehr merkwürdige Tatsache, daß man die wichtigsten Eigenschaften

[3]) [Vgl. hierzu den Enzyklopädieartikel von v. Mangoldt über die Begriffe der „Linie" und „Fläche". Math. Enzyklopädie, Bd. III, AB 2 (1907), (dazu dessen Bearbeitung von Zoretti in der französischen Ausgabe).]

der analytischen Funktionen (insbesondere auch der algebraischen Funktionen) gefunden hat, indem man von der empirischen Auffassung der Kurven (und Flächen) Gebrauch machte. Trotzdem wird man sich kaum entschließen wollen anzunehmen, daß die empirische Auffassung vermöge irgendwelcher ihr innewohnender verborgener Qualitäten gerade notwendig und ausschließlich zu den analytischen Kurven hinleite. Es liegen hier offenbar noch die interessantesten Probleme erkenntnistheoretischer Natur vor. An gegenwärtiger Stelle müssen wir uns mit einer negativen Schlußfolgerung begnügen, *daß nämlich die hier berührten Untersuchungen unmöglich an den Anfang der Geometrie gestellt werden können*, daß man an dieselben erst herangehen kann, wenn auf Grund geeigneter Axiome und daran geknüpfter Folgerungen das Lehrgebäude der *elementaren* Geometrie bereits fest steht. Der vorherige Aufbau und die Verwendung der *analytischen* Geometrie aber erscheint uns nicht notwendig, sondern nur zweckmäßig.

Wenden wir uns jetzt zu der Voraussetzung, welche Riemann an die Spitze seiner Betrachtungen über die „Hypothesen der Geometrie" gestellt hat, der Punktraum dürfe als eine dreifach ausgedehnte, stetige *Zahlenmannigfaltigkeit* angesehen werden. In früherer Zeit mochte man diese Voraussetzung für eine selbstverständliche Folge der Stetigkeitsverhältnisse des Raumes bez. der in ihm liegenden Kurven und Flächen halten. Dies ist aber auf Grund der Entwicklung, welche die Kritik des Kurvenbegriffs in der Zwischenzeit genommen hat, offenbar nicht mehr zulässig. Die Berechtigung, den Punktraum als Zahlenkontinuum zu bezeichnen, kann nach dem heutigen Standpunkte der Wissenschaft nur so abgeleitet werden, daß man vorab dasselbe tut, was wir eben als notwendige Vorbereitung für die Definition des Kurvenbegriffs hinstellten, daß man nämlich die *Elementargeometrie als solche* entwickelt, — mag man nun dabei die Betrachtung der Kreise und Kugeln voranstellen (metrische Geometrie) oder diejenige der geraden Linien und Ebenen (projektive Geometrie), wie sogleich noch näher zu schildern ist. Von der Elementargeometrie aus ist nunmehr die elementare analytische Geometrie zu entwickeln. Da wird es sich zunächst darum handeln, die Punkte des einzelnen Kreises, oder der einzelnen geraden Linie, dem eindimensionalen Zahlenkontinuum zuzuordnen, worüber wir ebenfalls weiter unten noch Genaueres sagen werden. Nun erst, wenn dies alles geschehen ist, wird man zu den drei Raumkoordinaten aufsteigen, wo dann die Frage entsteht, wodurch sich ein mehrdimensionales Kontinuum von dem eindimensionalen unterscheidet. Man sieht, wie kompliziert der Weg ist, auf dem die in Rede stehende Voraussetzung schließlich erreicht wird. Etwas Ähnliches wird man von der Forderung sagen müssen, welche Riemann

wieder stillschweigend benutzt und die Helmholtz dann ausdrücklich als Axiom einführt[4]): es sollen die Funktionen, durch welche die Maßverhältnisse des Raumes innerhalb der repräsentierenden Zahlenmannigfaltigkeit festgelegt werden, differentiierbare Funktionen sein (eine Anzahl Differentiationen gestatten). Es folgt, daß alle Untersuchungen, welche mit den Begriffen Zahlenmannigfaltigkeit und differentiierbare Funktionen beginnen, wenn man sie *direkt* als Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie interpretieren wollte, einen Zirkel enthalten würden. Wir können sie nur als Hilfsmittel für solche Untersuchungen gelten lassen; sie ebenen sozusagen den Weg, auf welchem die rein geometrischen Untersuchungen vorzugehen haben. In ähnlichem Sinne äußert sich Lie auf S. 535—537 des dritten Bandes seiner Transformationsgruppen; er hebt dort noch hervor, daß, wenn man die Forderung der Zahlenmannigfaltigkeit und der Differentiierbarkeit mit den weiteren Axiomen zusammennimmt, die man bei der Durchführung der analytischen Untersuchungen als solcher gebraucht, man dieses erreicht, *ein vielleicht nicht zweckmäßiges, aber jedenfalls vollständiges System von Axiomen für die Grundlegung der Geometrie zu besitzen.*

Immer möchte ich hier zunächst an die Voraussetzung der Zahlenmannigfaltigkeit und der Differentiierbarkeit anknüpfen. Man wird dann genau so, wie bei der rein geometrischen Betrachtungsweise, zwischen metrischer und projektiver Behandlung der weiteren Aufgabe unterscheiden können; — oder auch, man wird in Anlehnung an meine Entwicklungen von 1872[5]) die allgemeine Idee einer beliebigen innerhalb der Mannigfaltigkeit zu entwerfenden „Geometrie" auf Grund irgendwelcher für die Elemente der Mannigfaltigkeit geltenden Transformationsgruppe erfassen. *Für jede derartige Geometrie kann man dann eine axiomatische Definition verlangen*, d. h. eine Definition, welche sie ohne explizite Formeln (oder sagen wir lieber: unabhängig von der innerhalb der Mannigfaltigkeit zufällig gegebenen Koordinatenbestimmung) durch begriffliche Eigenschaften festlegt. Diese axiomatische Definition kann damit beginnen, die zugrunde liegende Gruppe als solche zu definieren, und das ist der Weg, den man in der metrischen Geometrie einschlägt, wenn man die Tatsache der freien Beweglichkeit starrer Körper (anders ausgedrückt: die „Kongruenzsätze") an die Spitze stellt. Man kann aber auch so vorgehen, daß man die Konfigurationen in Betracht zieht, welche sich aus irgend-

[4]) Helmholtz bezeichnet die Annahme, der Raum dürfe als Zahlenmannigfaltigkeit angesehen werden, bereits ebenfalls ausdrücklich als Axiom.

[5]) Erlanger Programm [Abh. XXVII dieser Ausgabe], oder auch Bd. 6 der Math. Annalen (Zweiter Aufsatz zur Nicht-Euklidischen Geometrie) [Abh. XVIII dieser Ausgabe].

welchen im Sinne der Gruppe gleichwertigen Elementen bilden lassen. Dies geschieht beispielsweise, wenn man den Aufbau der projektiven Geometrie mit den Sätzen über das Ineinanderliegen von Punkten, geraden Linien und Ebenen beginnt.

Wir haben nun genau die Stelle für dasjenige Problem, dessen endgültige Erledigung von Lie gegeben wird, das von Lie sogenannte *Riemann-Helmholtzsche Raumproblem.* Lie legt dabei, wie es im Sinne der weiter unten zu gebenden Erläuterungen allein zulässig scheint, zunächst ein begrenztes Raumstück der Betrachtung zugrunde (S. 441 seiner Darstellung). Man wird dann etwa so sagen: die Euklidische, die Lobatschewskysche und die Riemannsche Geometrie setzen in gleicher Weise innerhalb des genannten Raumstücks freie Beweglichkeit der starren Körper voraus. Sie liefern auch übereinstimmend für das Quadrat des Bogenelementes eine quadratische Funktion der Differentiale der Koordinaten, und zwar eine solche, für welche das sogenannte Krümmungsmaß konstant ist (Riemanns Ausgangspunkt); sie differieren nur hinsichtlich des Wertes dieser Größe, indem dieselbe in den drei Fällen beziehungsweise Null, negativ und positiv ist. *Die Aufgabe soll sein, die sechsgliedrigen Bewegungsgruppen dieser drei Geometrien durch charakteristische Merkmale von allen anderen kontinuierlichen Transformationsgruppen der dreifachen Zahlenmannigfaltigkeit zu unterscheiden.*

Lie gibt für diese Aufgabe im vorliegenden Bande zwei Lösungen, deren erste Voraussetzungen über das Verhalten der Gruppe im Infinitesimalen macht, während sich die zweite auf die Betrachtung endlicher Dimensionen beschränkt. Was die erste Methode angeht, so sage man, „eine Gruppe besitze in einem reellen Punkte freie Beweglichkeit im Infinitesimalen“, wenn Folgendes statt hat: „Hält man den Punkt P und ein beliebiges hindurchgehendes reelles Linienelement fest, so soll stets noch kontinuierliche Bewegung möglich sein, hält man dagegen außer P und jenem Linienelemente noch ein beliebiges reelles Flächenelement fest, das durch beide geht, so soll keine kontinuierliche Bewegung möglich sein“. *Unsere oben genannten Gruppen sind dann, wie Lie findet, dadurch vollkommen charakterisiert, daß sie in einem reellen Punkte allgemeiner Lage freie Beweglichkeit im Infinitesimalen besitzen.* — Bei der zweiten Methode wird vorausgesetzt: „Hält man einen beliebigen reellen Punkt y_1^0, y_2^0, y_3^0 von allgemeiner Lage fest, so befriedigen alle reellen Punkte x_1, x_2, x_3, in welche ein anderer reeller Punkt x_1^0, x_2^0, x_3^0 dann noch übergehen kann, eine reelle Gleichung von der Form:

$$W(y_1^0, y_2^0, y_3^0; x_1^0, x_2^0, x_3^0; x_1, x_2, x_3) = 0,$$

die für $x_1 = y_1^0$, $x_2 = y_2^0$, $x_3 = y_3^0$ nicht erfüllt ist und die eine reelle

durch den Punkt x_1^0, x_2^0, x_3^0 gehende Fläche darstellt. Um den Punkt y_1^0, y_2^0, y_3^0 läßt sich ein endlicher dreifach ausgedehnter Bereich derart abgrenzen, daß nach Festhaltung des Punktes y_1^0, y_2^0, y_3^0 jeder andere reelle Punkt x_1^0, x_2^0, x_3^0 des Bereiches noch kontinuierlich in jeden anderen dem Bereiche angehörigen reellen Punkt übergehen kann, der die Gleichung $W = 0$ befriedigt und der mit dem Punkte: x_1^0, x_2^0, x_3^0 durch eine irreduzible kontinuierliche Reihe von Punkten verbunden ist“. *Wiederum sind durch diese Voraussetzungen, wie Lie findet, die oben genannten drei Gruppen vollständig charakterisiert.* — Diese zweite Methode leitet vermöge der Ähnlichkeit ihrer Voraussetzung zu Helmholtz' ursprünglichen Entwicklungen hin. Wenn man von der Genauigkeit der Formulierungen absieht (infolge deren die Lieschen Prämissen, die wir wörtlich anführten, etwas umständlich lauten), so wird bei Helmholtz *mehr* verlangt als bei Lie, insbesondere noch das besondere Postulat der „Monodromie des Raumes“ aufgestellt, welches bei Lie wegfällt. Des ferneren aber findet sich in Helmholtz' Beweisgang eine wirkliche Unrichtigkeit, die darin besteht, daß Helmholtz seine auf endliche Dimensionen bezüglichen Voraussetzungen stillschweigend auf das Infinitesimale überträgt. Genauer gesagt: er setzt als mathematisch selbstverständlich voraus, daß die dreifach unendliche Gruppe von Bewegungen, welche einen Punkt P festläßt, die Verhältnisse der von P auslaufenden Differentiale der Koordinaten auf dreifach unendlich viele Weisen linear transformieren müsse. Hier ist übersehen (wie Lie hervorhebt), daß sich unter den Transformationen der genannten Gruppe möglicherweise auch solche befinden können, welche in der Umgebung des Punktes P unendlich klein von der zweiten Ordnung sind, welche also die in Rede stehenden Differentiale überhaupt ungeändert lassen. Vielleicht kann man sagen, daß bei Helmholtz an dieser Stelle der strenge Grenzbegriff der modernen Differentialrechnung durch die den Anwendungen entstammende Auffassung der Differentiale als sehr kleiner, aber nicht geradezu verschwindender Größen beeinträchtigt ist. —

Soviel über das Riemann-Helmholtzsche Raumproblem. Ich habe mich dabei absichtlich. entsprechend der Begrenzung, welche in diesem Berichte festgehalten werden soll, auf den Fall der dreidimensionalen Mannigfaltigkeit beschränkt; die Entwickelungen von Riemann, Helmholtz und Lie selbst beziehen sich zum Teil auf eine beliebige Dimensionenzahl. Im übrigen wiederhole ich, was ich schon oben andeutete, daß nämlich die bloße Mitteilung der Lieschen Resultate kein Äquivalent für die überzeugende Kraft der Lieschen Darstellung sein kann; um letztere zu würdigen, muß der Leser durchaus das Original selbst nachsehen. Ich gebe hier noch eine kurze Zusammenstellung weiterer

Bemerkungen zur Grundlegung der Geometrie, die in dem Lieschen Werke eingestreut sind. In Abteilung IV untersucht Lie u. a. diejenigen Gruppen des R_n, welche eine quadratische Gleichung zwischen den Differentialen der Koordinaten: $\sum f_{ik}\,dx_i\,dx_k = 0$ invariant lassen, wodurch er Anschluß an Riemanns ursprüngliche Entwickelungen nimmt. Auf S. 524 (Abteilung V) kommt er beiläufig auf die Grundlegung der projektiven Geometrie zu sprechen und bemerkt, daß man die zugehörige Gruppe, d. h. die Gruppe der Kollineationen des R_n, einfach durch die Angabe charakterisieren kann, sie sei eine endliche kontinuierliche Gruppe von Punkttransformationen, bei welcher $n+2$ Punkte keine Invariante haben. Endlich kommt hier aus Abteilung III die Bestimmung aller kontinuierlichen Untergruppen der projektiven Gruppe des Raumes von drei Dimensionen in Betracht. Man nehme an, daß man von der sechsfach unendlichen Bewegungsgruppe des genannten Raumes bereits wisse, daß sie aus lauter Kollineationen bestehe. Dann führt die von Lie gegebene Tabelle aller Untergruppen mit einem Schlage zu den obengenannten drei Möglichkeiten zurück, die sich nun in heute wohlbekannter Weise in die Cayleysche Maßbestimmung einordnen, bei welcher eine Fläche zweiten Grades fundamental ist.

Ich knüpfe nunmehr erneut an dasjenige an, was oben über die Notwendigkeit und Bedeutung der Axiome gesagt wurde. Unsere bisherigen Entwicklungen bezogen sich, wie wir ausdrücklich angaben, immer nur auf ein *begrenztes* Stück unserer Mannigfaltigkeit; es ist durchaus logisch, daß wir nun fragen, welche Verhältnisse eintreten mögen, wenn wir dieses Stück unbegrenzt erweitern. Die natürliche Festsetzung wird sein, daß sich der Raum in der Umgebung jeder seiner (durch endliche Bewegung zugänglichen) Stellen genau ebenso verhalten soll, wie in dem bisher untersuchten begrenzten Stück. Damit ist ersichtlich nicht ausgeschlossen, daß der Raum (bzw. die Mannigfaltigkeit, die wir hier abkürzend als Raum bezeichnen) verschiedentlich in sich zurückläuft, daß er höheren „Zusammenhang" besitzt. Die Frage wird geradezu sein, welche *Zusammenhangsverhältnisse des Raumes mit den verschiedenen Bogenelementen konstanter Krümmung verträglich sein mögen.* Diese Frage will mir genau ebenso wichtig erscheinen, wie irgendeine andere Frage auf axiomatischem Gebiete. Um so merkwürdiger ist es, daß dieselbe bisher nur wenig beachtet wurde.

Clifford hatte 1873 beiläufig auf eine in sich zurücklaufende Fläche des von mir so genannten elliptischen Raumes (des „einfachen" Raumes konstanter positiver Krümmung) aufmerksam gemacht, welche überall das Krümmungsmaß Null besitzt, aber trotzdem nur endlichen Flächeninhalt hat.

Hieran anknüpfend entwickelte ich im Bande 37 der Math. Annalen (1890) [Abh. XXI dieser Ausgabe] die allgemeine Fragestellung und die Grundlinien der Theorie; die Untersuchungen sind dann bald hernach von Herrn Killing aufgenommen worden (Math. Annalen, Bd. 39, 1891, sowie Abschnitt 4 in dem 1893 erschienenen ersten Bande des Lehrbuchs „Einführung in die Grundlagen der Geometrie"); es ist mir aber nicht bekannt, daß irgend jemand sonst seitdem auf diesen Gegenstand eingegangen wäre. Und doch sind die Resultate sehr merkwürdig. Es ergibt sich, daß wir je nach dem Werte des Krümmungsmaßes eine Reihe unterschiedener Möglichkeiten erhalten, *also eine Serie topologisch unterschiedener Raumformen mit Euklidischer, Lobatschewskyscher, Riemannscher Geometrie im begrenzten (einfach zusammenhängenden) Raumstück.* Wir haben da erstlich selbstverständlicherweise die drei Stammtypen, die sich in unmittelbarer Anlehnung an Cayleys projektive Maßbestimmung ergeben, den parabolischen, hyperbolischen und elliptischen Raum nach der von mir in Math. Annalen, Bd. 4 (1871) [Abh. XVI dieser Ausgabe] eingeführten Ausdrucksweise. Weitere Typen ergeben sich, wenn wir innerhalb eines jeden dieser Räume solche *diskontinuierliche* Bewegungsgruppen aufsuchen, die keine im Endlichen gelegene Rotations- oder Schraubenachsen aufweisen: die Diskontinuitätsbereiche dieser Gruppen brauchen nur als geschlossene Mannigfaltigkeiten aufgefaßt zu werden, um ebenso viele Beispiele der von uns gewollten Raumformen abzugeben. Es ist hier nicht der Ort, dies näher auszuführen. Ich will nur bemerken, daß die Aufzählung der genannten Gruppen im hyperbolischen Falle (im Falle des negativen Krümmungsmaßes) unmittelbar mit der von Poincaré und mir gegebenen Theorie der diskontinuierlichen Gruppen linearer Substitutionen einer komplexen Veränderlichen zusammenhängt und daß letztere Theorie von Herrn Fricke neuerdings wesentlich weiterentwickelt und unter meiner Mitwirkung zur zusammenhängenden Darstellung gebracht worden ist[6]). Aber dies ist nicht alles. Es rubriziert hier auch (im Falle positiven Krümmungsmaßes) die Gegenüberstellung des einfachen elliptischen und des *sphärischen* Raumes, in welchem sich zwei geodätische Linien immer in zwei Punkten schneiden. Herr Killing hat zuerst den Satz aufgestellt, daß der sphärische Raum neben den Stammtypen (wie ich sie oben nannte) der einzige ist, der als Ganzes frei in sich bewegt werden kann. — Es wird interessant sein, zu untersuchen, wie die Axiome der Geometrie (NB. hier immer noch unter Zugrundelegung der Hypothesen von der Zahlenmannigfaltigkeit und Differentiierbarkeit) gefaßt werden müssen, um von vornherein auf eine bestimmte dieser unendlich vielen verschiedenen Raumformen zu kommen. Für die Untergruppen, die sich

[6]) Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen. Von R. Fricke und F. Klein. Bd. 1. Leipzig, Teubner 1897.

aus den Diskontinuitätsbereichen der Bewegungsgruppen ergeben, gilt, daß die freie Beweglichkeit der Figuren nur so lange besteht, als die Dimensionen der Figuren eine gewisse Größe nicht überschreiten. Das Axiom von der Geraden (demzufolge zwei gerade Linien sich nur in einem Punkte schneiden können) erleidet die wesentlichsten Modifikationen; gibt es doch jetzt gerade Linien, welche sich in unendlich vielen Punkten treffen. Hierdurch wird die Beziehung zwischen den Punkten einer Geraden und den Strahlen eines perspektiven Büschels (sofern man eben den Raum als Ganzes nehmen will) unter Umständen ganz entstellt. Vollends aber entsteht Verwirrung in der Theorie der Parallellinien. Es ist so bequem zu sagen, daß sich verschwindendes, negatives und positives Krümmungsmaß dadurch unterscheiden, daß durch einen Punkt außerhalb einer Geraden zu dieser Geraden 1, 2 und 0 Parallelen möglich sind. Jetzt haben wir Räume von verschwindendem und negativem Krümmungsmaße, welche nur endlich ausgedehnt sind; wie will man in ihnen Parallele definieren? In alledem liegt natürlich mehr eine formale als eine wirkliche Schwierigkeit (insofern die Erzeugung aller unserer Raumformen ganz klar ist); ich führe es nur an, um zur Untersuchung der neuen Raumformen anzureizen.

Ich werde nunmehr die Annahme der Zahlenmannigfaltigkeit (und der Differentiierbarkeit) verlassen und über die eigentlichen *geometrischen Grundlagen* der Theorie einiges sagen. Dabei will ich wieder nur solche Punkte berühren, welche in den letzten Jahren besonders hervorgetreten sind oder auf die ich die Aufmerksamkeit des Lesers besonders hinlenken möchte. Als Haupteinteilungsprinzip bietet sich wieder der Gegensatz von *metrischer* und *projektiver* Geometrie. Letztere ist dabei natürlich wieder nicht so zu verstehen, als ob sie die metrischen Fragen von der Betrachtung schlechtweg ausschlösse; sie schiebt dieselben nur zurück, um sie erst aufzunehmen, nachdem die einfacheren projektiven Beziehungen entwickelt sind. Diese Zweiteilung wird dabei nicht als eine willkürliche oder nur durch die Natur der mathematischen Methoden indizierte anzusehen sein, sondern als eine solche, die dem tatsächlichen Zustandekommen unserer Raumanschauung entspricht, bei dem sich ja in der Tat mechanische Erfahrungen (betr. die Bewegung starrer Körper) mit Erfahrungen des Sehraumes (betr. die verschiedenartige Projektion angeschauter Gegenstände) kombinieren.

Die elementaren Grundlagen der metrischen Geometrie haben in den letzten Jahren wohl kaum eine Neubearbeitung gefunden, die hier zu nennen wäre. Interessant sind die Entwicklungen des Herrn Lindemann in dem 1891 erschienenen zweiten Bande von Clebschs Vorlesungen über Geometrie, der die Axiome, welche bei Euklid selbst auftreten, mit den

modernen Betrachtungen über die Beweglichkeit der starren Körper in Vergleich bringt.

Etwas ausführlicher möchte ich mich über die *Einführung der Zahlen in die metrische Geometrie* äußern. Der wesentliche Schritt ist, wie schon oben hervorgehoben wurde, daß wir den Punkten irgendwelcher gegebenen Kurve, sagen wir der Einfachheit halber einer geraden Linie, die Zahlen des eindimensionalen Kontinuums zuordnen. Wir werden damit beginnen, daß wir uns auf einer gezeichnet vorliegenden oder sonstwie materiell gegebenen geraden Linie tatsächlich eine Skala äquidistanter Punkte (einen Maßstab) konstruieren. Die Teile dieser Skala werden wir dann weiter unterabteilen, soweit dies praktisch ausführbar erscheint. Wir kommen so zu dem Resultate, daß innerhalb der empirischen Anschauung, d. h. soweit die Genauigkeit derselben reicht, tatsächlich jedem Punkte der geraden Linie eine bestimmte Zahl und jeder Zahl ein bestimmter Punkt zugeordnet werden kann. Und nun machen wir den charakteristischen Schritt über die empirische Anschauung hinaus zum Axiom: *wir postulieren, daß das Entsprechen zwischen Punkt und Zahl nicht nur innerhalb der empirischen Genauigkeit, sondern im absoluten Sinne statthaben soll*[7]). Es wird sich diese Forderung des genaueren in drei Stücke zerlegen lassen. Wir ziehen erstlich nur rationale Zahlen in Betracht und verlangen, daß *jeder* rationalen Zahl ein Punkt der geraden Linie entsprechen soll. Schon dieses erscheint mir durchaus axiomatisch, denn rationale Zahlen mit hinreichend großem Nenner können auf unserer Skala empirisch nicht mehr nachgewiesen werden. Wir wenden uns zweitens zu den irrationalen Zahlen (die wir mit Dedekind oder G. Cantor oder Weierstraß als Grenzen rationaler Zahlen definieren). Wieder haben wir ausdrücklich zu postulieren, daß jeder solchen irrationalen Zahl ein Punkt unserer Geraden entsprechen soll (vgl. G. Cantor im fünften Bande der Math. Annalen, 1872). Drittens endlich ist zu verlangen, daß jedem Punkte unserer Geraden nun auch eine bestimmte Zahl zugewiesen sein soll. Es wird dies der Fall sein, sobald es kein noch so kleines Segment unserer geraden Linie gibt, in welches wir bei fortgesetzter Unterabteilung unserer Skala nicht eindringen können. Insofern deckt sich diese dritte Forderung mit dem [mehr projektiv gefaßten] sogenannten *Axiom des Archimedes*. Diese drei Axiome zusammen — ich werde sie kurz die *Stetigkeitsaxiome* nennen — sind die eigentliche Grundlage unserer gewöhnlichen analytischen Geometrie. Man wird fragen können, ob diese Axiome notwendig sind, ob man dieselben nicht irgendwie modifizieren kann. In diesem Zusammen-

[7]) Es ist interessant, hier die Erläuterungen zu vergleichen, welche Mach auf S. 71—77 seines neuen Buches über die Prinzipien der Wärmelehre (Leipzig, 1896) betreffs der physikalischen Bedeutung des Zahlenkontinuums gibt.

hange habe ich zunächst die Tendenz zu nennen, welche in dem großen Buche von Veronese*) ihre ausführlichste Bearbeitung gefunden hat, nämlich, das Axiom des Archimedes fallen zu lassen und neben den genannten (rationalen und irrationalen) Zahlen auf der geraden Linie noch andere Zahlen einzuführen, die durch Addition von „aktual unendlich kleinen Zahlen" zu den gewöhnlichen „endlichen" Zahlen entstehen. Ich betrachte es hier nicht als meine Aufgabe, zu den verschiedenen Einwendungen Stellung zu nehmen, welche gegen die Veroneseschen Entwicklungen erhoben worden sind; ich will nur beiläufig bemerken, daß greifbare geometrische Resultate als Folge des erwähnten Ansatzes bisher noch nicht gewonnen sein dürften. Umgekehrt tritt bei anderen Forschern neuerdings vielfach die Tendenz hervor, nur die rationalen Punkte als wirkliche Punkte gelten zu lassen. Es liegt hier eine merkwürdige Umkehr des wissenschaftlichen Gedankens vor. Denn die irrationalen Zahlen sind in die Arithmetik überhaupt erst eingeführt worden, um der geometrischen Kontinuität gerecht zu werden, an deren Vorhandensein man nicht zweifelte; also nicht die Arithmetik, sondern die Geometrie hat den ersten Anstoß zu ihrer Inbetrachtnahme gegeben.

Die hiermit gegebenen Erörterungen über die Einführung der Zahlen gingen von dem Umstande aus, daß die empirische Messung eine Grenze nach unten hin hat, jenseits deren sie versagt. Genau so dürfte bei der Heranziehung der topologisch unterschiedenen Raumformen, von denen wir oben nur erst in abstraktem Sinne handelten, hier, wo die Geometrie des tatsächlich gegebenen Raumes in Betracht kommt, keine Willkür, sondern nur eine innere Konsequenz vorliegen. Unsere empirische Messung hat ebensowohl eine Grenze nach oben hin, welche durch die Dimensionen der uns zugänglichen oder sonst in unsere Beobachtung fallenden Gegenstände gegeben ist. Was wissen wir über die Verhältnisse des Raumes im Unmeßbar-Großen? Von vornherein zweifellos gar nichts; wir sind durchaus darauf angewiesen, Postulate aufzustellen. Ich betrachte also alle die topologisch unterschiedenen Raumformen als mit der Erfahrung gleich verträglich. Daß wir bei unseren theoretischen Überlegungen einzelne dieser Raumformen bevorzugen (nämlich die Stammtypen, also die eigentliche parabolische, hyperbolische und elliptische Geometrie), um schließlich die parabolische Geometrie, d. h. die gewöhnliche Euklidische Geometrie endgültig anzunehmen, geschieht einzig nach dem Grundsatze der Ökonomie.

Indem ich mich jetzt zur projektiven Geometrie wende, wünsche ich zunächst einiges über ihre von allem Messen unabhängige Begründung zu

*) Grundlagen der Geometrie von mehreren Dimensionen und mehreren Arten geradliniger Einheiten (übersetzt von Schepp), Leipzig 1894. Das italienische Original erschien 1891, Padova.

sagen. Dieselbe beruht bekanntlich auf dem Ineinanderliegen der Punkte, Geraden und Ebenen des Raumes, wie dies zuerst v. Staudt in seiner Geometrie der Lage 1847 entwickelt hat. Ich selbst habe dann in Bd. 4 und 6 der Math. Annalen (1871—72) [Abh. XVI und XVIII dieser Ausgabe] gezeigt, daß diese Überlegungen, trotzdem v. Staudt es anders darstellt, tatsächlich vom Parallelenaxiom unabhängig sind. Es beruht dies auf dem Umstande, daß man sich auf solche Konstruktionen beschränken kann, die über ein vorgegebenes begrenztes Raumstück nicht hinausführen (wobei dann alle Punkte, welche die gewöhnliche projektive Geometrie außerhalb dieses Raumstücks voraussetzt, nur als sogenannte ideale Punkte zur Geltung kommen). In besonders knapper und durchsichtiger Weise ist dies neuerdings (1891) von Herrn Schur im 39. Bande der Math. Annalen dargelegt worden. Vor allen Dingen aber muß ich hier auf die systematische Ableitung der ganzen Theorie aufmerksam machen, welche Herr Pasch in seinen Vorlesungen über neuere Geometrie (Leipzig 1882) gegeben hat. Das Buch von Pasch ist um so bemerkenswerter, als er mit seinen streng logisch gegliederten Entwicklungen überall ausdrücklich an die empirisch gegebene Raumanschauung anknüpft, so daß diejenige Auffassung der Geometrie, welche im vorliegenden Berichte vertreten wird, hier im Zusammenhange zur konsequenten Darstellung gelangt. Die Axiome der *abstrakten* projektiven Geometrie sind im Anschlusse an Pasch in den letzten Jahren von verschiedenen italienischen Geometern weiter zergliedert worden. Eine eigenartige Darstellung fanden dieselben in dem bereits genannten Buche von Veronese: der Verfasser formuliert seine Voraussetzungen so allgemein, daß er beim Übergange zur metrischen Geometrie neben dem einfachen elliptischen Raume von vornherein den sphärischen Raum mit erhält. Die Abstraktheit ist hier auf die Spitze getrieben, indem die Betrachtung immer mit den allgemeinsten Überlegungen anhebt; ich finde es äußerst schwer, dem Gedankengange des Verfassers auch nur ein Stück weit zu folgen.

Zweitens wünsche ich über die *Einführung der Zahlen in die projektive Geometrie* hier einiges zu sagen. Der Prozeß ist meines Erachtens im Prinzip genau derselbe wie im Falle der metrischen Geometrie, daß man nämlich zuerst eine Skala auf gegebener gerader Linie empirisch konstruiert, diese so weit als möglich unterabteilt und schließlich eben diejenigen Stetigkeitsaxiome einführt, von denen oben die Rede war. *Der äußere* Unterschied besteht natürlich, daß man jetzt von *drei* Punkten der Geraden ausgehen muß, denen man (willkürlich) die Zahlen $0, 1, \infty$ zuweist, — während die metrische Skala mit zwei beliebigen Punkten beginnt, welche 0 und 1 genannt werden. Dies hat aber mit der *Plausibilität* der Stetigkeitsaxiome, wie ich es nennen möchte, gar nichts zu tun;

es genügt, sich wirklich einmal eine projektive Skala (empirisch) zu konstruieren, um zu sehen, daß die Teilpunkte für das beobachtende Auge bald so eng zusammenrücken, daß sie nicht mehr unterschieden werden können[9]). Ich habe daher auch nie verstehen können, weshalb Pasch in seinem Buche, in dem er übrigens die projektive Einführung der Zahlen vollständig zur Durchführung bringt, vor Einführung der Stetigkeitsaxiome einen Abschnitt über Kongruenz der Figuren einschaltet und die genannten Axiome dann an die metrische Skala anschließt; man vergleiche hierzu die Erläuterungen, welche Herr Pasch später (1887) im 30. Bande der Math. Annalen über diesen Punkt gegeben hat. Die Herren Lindemann und Killing haben sich denn auch in ihren bereits genannten Lehrbüchern diesem Verfahren nicht angeschlossen. Übrigens soll nicht unerwähnt bleiben, daß der erste, welcher die projektive Einführung der Zahlen auf der geraden Linie in streng logisch gegliederter Weise zur Darstellung gebracht hat, de Paolis gewesen ist (Memorie della Accademia dei Lincei, ser. 3, vol. 9, 1880—81).

Die so skizzierten Bemerkungen über die Einführung der Zahlen in die projektive Geometrie bedürfen natürlich, um mit dem Früheren in Übereinstimmung zu sein, der bestimmten Einschränkung, daß alle in Betracht kommenden Konstruktionen und Überlegungen zunächst nur im begrenzten Raumstück angestellt werden sollen. Dann ist die Bahn frei, um beim Übergang zur Metrik eine der drei möglichen Maßbestimmungen nach Belieben aufzustellen und überhaupt für den unbegrenzten Raum hinterher alle die topologischen Möglichkeiten zu diskutieren, die wir oben genauer bezeichneten.

Nun noch ein paar lose Ausführungen, die mit diesen projektiven Theorien in Verbindung stehen.

Die Herren Minkowski und Hilbert haben der Frage der mit der projektiven Geometrie verträglichen metrischen Geometrie letzthin eine sehr merkwürdige Wendung gegeben. Es seien x, y, z gewöhnliche Parallelkoordinaten. Minkowski ersetzt dann (vgl. seine Geometrie der Zahlen, Heft 1, Leipzig 1896) den üblichen Ausdruck für den Abstand zweier Punkte x, y, z und x_0, y_0, z_0 durch irgendeine homogene Funktion ersten Grades der beigesetzten Differenzen:

$$\Omega(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0),$$

welche, gleich Konstans gesetzt, in x, y, z als laufenden Koordinaten eine *nirgends konkave* Fläche darstellt. Es gilt dann immer noch der Satz (wie Minkowski nachweist), daß die gerade Linie die kürzeste Linie

[9]) In der Tat ist ja auch die gewöhnliche metrische Skala der Euklidischen Geometrie direkt ein Spezialfall der projektiven Skala.

zwischen zwei beliebigen ihrer Punkte ist. Bewegungen des Raumes aber gibt es, allgemein zu reden, nicht mehr, abgesehen von den dreifach unendlich vielen Parallelverschiebungen. Man muß die Entwicklungen von Minkowski selbst nachlesen, um zu sehen, daß dieser allgemeine Ansatz zu sehr bemerkenswerten geometrischen Folgerungen hinführt. Herr Hilbert hat die Frage umgekehrt, indem er verlangt, die allgemeinste Maßbestimmung anzugeben, bei welcher die gerade Linie uneingeschränkt kürzeste Linie ist. Er findet, daß man diese Maßbestimmung aus den Doppelverhältnissen der projektiven Geometrie erhält, wenn man statt der Fläche zweiten Grades, welche Cayley benutzt, irgendeine nirgends konkave geschlossene Fläche als Fundamentalfläche zugrunde legt. Minkowskis Maßbestimmung ist hiervon ein Grenzfall. Im allgemeinen gibt es bei Hilbert überhaupt keine Bewegungen.

Eine andere Frage, welche allgemein interessieren muß, ist, welche Stellung Helmholtz zur projektiven Begründung der Nicht-Euklidischen Geometrie eingenommen hat. Das typische projektive Denken (im Sinne v. Staudts) hat Helmholtz vermutlich ganz fern gelegen. Man muß sich vergegenwärtigen, daß man in jenen Jahren, in welche Helmholtz' eigentliche mathematische Produktivität fällt, die projektive Geometrie noch durchgängig als eine Spezialität betrachtete; die Überzeugung von ihrer grundlegenden Bedeutung für alle geometrische Spekulation war noch keineswegs allgemein durchgedrungen. Es kann auch sein, daß Helmholtz nach seiner naturwissenschaftlichen Gewöhnung, die Dinge immer in concreto zu sehen, der bei der projektiven Geometrie zugrunde liegenden Abstraktion von vornherein abgeneigt war. In der Einleitung zu seiner Göttinger Note (1868) weist er eine Begründung der Geometrie, welche die Eigenschaften des Sehraumes voranstellt, geradezu zurück, „weil doch auch der Blinde richtige Raumvorstellungen gewinnen könne". Hiermit kontrastiert nun in interessanter Weise, daß Helmholtz durch seine ausgedehnten optischen Untersuchungen von selbst immerzu veranlaßt ist, projektive Fragen in Betracht zu ziehen, die er bald mit selbstgeschaffenen Hilfsmitteln löst, bald aber auch nur mit allgemeinem Räsonnement behandelt.

Was insbesondere die projektive Erfassung der Lobatschewskyschen bzw. Riemannschen Geometrie angeht, so finden sich die ausführlichsten Äußerungen in dieser Richtung in seinem populären Vortrage über „Ursprung und Bedeutung der geometrischen Axiome", der im dritten Hefte der bezüglichen Sammlung (Braunschweig, 1876) abgedruckt ist. Für den Raum konstanter negativer Krümmung benutzt er dort in der Tat mit Vorliebe Beltramis „Sphärisches Abbild" (1868) (bei welchem der genannte Raum nach seiner ganzen Erstreckung in das Innere einer Kugel des Euklidischen Raumes abgebildet wird, und zwar derart, daß seinen geraden Linien die geraden Linien des Euklidischen Raumes entsprechen). Bei dieser Abbildung verwandelt sich bekanntlich Lobatschewskys Geometrie in diejenige Cayleysche Maßbestimmung, welche die begrenzende Kugel als absolute Fläche benutzt; der Unterschied ist nur, daß im Anschluß an Cayley zum Fundament wird, was bei Beltrami ein bloßes Mittel der Veranschaulichung ist, womit zusammenhängt, daß nicht schon Beltrami zur Erfassung einer projektiven Begründung der Nicht-Euklidischen Geometrie gelangt ist. Von Cayley und den sich anschließenden Entwicklungen ist nun bei Helmholtz nirgends die Rede; er hat, wie es scheint, davon nie Notiz genommen. Trotzdem erfaßt er das „kugelförmige Abbild“ als etwas Wesentliches; er sucht sich den Eindruck klarzumachen, den ein Beobachter gewinnen müßte, der, mit Euklidischem Augenmaße ausgestattet, die Nicht-Euklidischen Bewegungen starrer Körper innerhalb des genannten Abbildes betrachten würde. Diese Bewegungen erweisen sich dabei natürlich als Kollineationen, welche die fundamentale Kugel festlassen; die Kugel ist wie eine undurchdringliche, oder richtiger gesagt: unerreichbare Wand, an welche die Bewegungen zwar beliebig nahe heranbringen, welche man aber nie wirklich berührt. Helmholtz versucht es, diese Sache zu veranschaulichen, ohne von dem Worte „Kollineation“ Gebrauch zu machen. Zu dem Zweck konstruiert er eine Analogie; er fingiert einen Beobachter, der, mit Euklidischem Augenmaß ausgestattet, den Euklidischen Raum und die in diesem stattfindenden Bewegungen durch eine Konkavlinse betrachtet. Die Sache ist dann in projektiver Ausdrucksweise folgende: der Euklidische Raum unterliegt vermöge der an der Linse stattfindenden Strahlenbrechung einer bestimmten Kollineation (einer „Reliefperspektive“), vermöge deren die unendlich ferne Ebene auf den Beobachter zu ins Endliche gerückt erscheint; es ist also in der Tat dieser Vergleichspunkt vorhanden, daß das Gesichtsfeld nach vornehin durch eine Wand wie abgeschlossen erscheint. Darum bleibt aber doch, wie man leicht bemerkt, ein wesentlicher Unterschied bestehen. Die in Rede stehende Wand ist eben kein Stück einer Kugelfläche, sondern eine richtige Ebene, und in Übereinstimmung hiermit ist die abgeänderte Maßbestimmung, welche unser Beobachter wahrnimmt, nach wie vor eine Euklidische, d. h. eine parabolische Maßbestimmung, welche einen in der ebenen Wand gelegenen imaginären Kegelschnitt als fundamentales Gebilde benutzt. — Noch interessanter gewissermaßen (als eine Mischung von wahr und falsch) ist, was Helmholtz über den Fall des positiven Krümmungsmaßes sagt. Er stattet zunächst den eben eingeführten Beobachter mit einer Konvexbrille aus, was allerdings weniger gut paßt, weil dadurch die in Rede stehende Wand (die Fluchtebene der Reliefperspektive) nicht

weggeschafft wird, wie es eigentlich der Fall sein sollte, sondern nur hinter den Beobachter gelegt wird. Dann wieder bemerkt er mit überraschender Deutlichkeit, daß der Hintergrund des Gesichtsfeldes im Falle positiven Krümmungsmaßes durch den eigenen Hinterkopf des Beobachters gegeben sein würde. Man kann die Verhältnisse, wie sie sich im (einfachen) elliptischen Raume gestalten, nicht überzeugender schildern, als durch diese Angabe geschieht. Die Sache stimmt allerdings auch im sphärischen Raume, aber doch nur in komplizierter Weise, indem nämlich die Visierlinien, welche vom Auge des Beobachters ausgehen, ehe sie erneut, von hinten kommend, sich im Ausgangspunkte kreuzen, vorher alle im sphärischen Gegenpunkte des Beobachters zusammentreffen: das ist eine so wesentliche Sache, daß ein Naturforscher, der den Hergang schildert, sie unmöglich unerwähnt lassen kann. Helmholtz ist aber trotzdem nicht zur Erfassung des einfachen elliptischen Raumes durchgedrungen; vielmehr reproduziert er l. c. weiterhin ungeändert den alten (aber falschen) Satz, daß sich im Raume positiver Krümmung zwei geodätische Linien, wenn sie sich überhaupt schneiden, notwendig in *zwei* Punkten schneiden müssen!

Fassen wir zusammen, so werden wir sagen dürfen, daß sich hier auf dem Gebiete der projektiven Geometrie ein ganz ähnliches Bild ergibt, wie bei den Untersuchungen über die Grundlagen der metrischen Geometrie, daß nämlich Helmholtz hier wie allerwärts in genialer Weise die richtigen allgemeinen Gesichtspunkte erfaßt, daß aber die Einzelausführung nur wenig befriedigt. Der große Namen von Helmholtz kann durch solche Bemerkungen nicht herabgemindert werden; die Wissenschaft aber hat Gewinn, wenn die historische Kritik versucht, auch in solchen außerordentlichen Fällen Licht und Schatten richtig zu verteilen.

Göttingen, den 1. Oktober 1897.

[Unnötig zu sagen, daß erst nach Abschluß des vorstehenden Berichts die volle Entwicklung der modernen Axiomatik einsetzte; man vergleiche, was diese weitere Entwicklung angeht, das Referat von Enriques in der Math. Enz., Bd. III, AB 1 (1907) bzw. deren französischen Ausgabe.

Ich selbst bin in meinen weiteren wissenschaftlichen Schriften nur noch einmal auf axiomatische Fragen zurückgekommen, nämlich in Bd. 2 meiner autographierten Vorlesungen über Elementarmathematik vom höheren Standpunkt aus (Geometrie, 1. Aufl. 1905, 2. Aufl. 1914), in der ich eine Übersicht über die elementarsten Fragen der Axiomatik gebe. Was insbesondere die Parallelentheorie angeht, gebe ich dort in erster Linie eine Darstellung, die dem Axiomensystem von Méray entspricht, indem ich nämlich von vornherein die Existenz von ∞^3 (unter sich vertauschbaren) Translationen voraussetze, womit natürlich die allgemeine projektive Maßbestimmung, und damit die eigentliche Nicht-Euklidische Geometrie ausgeschlossen sind. Erst in zweiter Linie gehe ich auf letztere ein. Ich erwähne diese Einzelheit hier, um hervortreten zu lassen, daß ich mir hinsichtlich Art und Aufeinanderfolge der Axiome je nach dem gerade vorliegenden Zweck alle Freiheit wahren möchte. — K.]

XXIII. Zur Interpretation der komplexen Elemente in der Geometrie.

[Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen vom 14. August 1872; Math. Annalen, Bd. 22.]

Wenn bei der analytischen Behandlung der Geometrie das Studium der algebraischen Gebilde notwendig zu der Einführung komplexer Elemente hinleitet, so hat man lange Zeit darüber gestritten, ob und in wie weit den komplexen Elementen eine rein geometrische Bedeutung beizulegen sei. Die mehr oder minder unbestimmten Prinzipien, wie sie von Poncelet, Chasles u. a. mit Bezug auf diese Frage formuliert wurden, konnten eine exakte Auffassung nicht befriedigen; sie erweisen sich nicht nur als unklar, sondern in vielen Fällen geradezu als ungenügend. Auch die in neuerer Zeit so vielfach angewandte und gewiß höchst fruchtbare Methode, die komplexen Gebilde als nur analytisch definiert anzusehen, von ihnen aber Dinge auszusagen, welche die geometrische Anschauung den reellen Gebilden beilegt, indem man darunter nur die auch für die komplexen Elemente bestehenden bez. analytischen Relationen versteht, kann nicht als die abschließende Behandlung des Gegenstandes erscheinen, obwohl sie in ihrer Richtung alles leistet. Denn wir wollen auch in der analytischen Geometrie uns nicht begnügen, geometrische Sätze an der Hand übrigens nicht gedeuteter analytischer Operationen als wahr zu erkennen, sondern wir wollen den geometrischen Inhalt jeder einzelnen Operation verfolgen, so daß das Resultat als ein durch unsere räumliche Anschauung notwendig bedingtes mit Bewußtsein erkannt wird. In dieser Richtung liegt also bei den komplexen Elementen die Frage vor, ob man nicht den Sätzen und Aufgaben, die sich analytisch auf komplexe Elemente beziehen, dadurch eine geometrische Bedeutung erteilen könne, daß man sie auf reale Gebilde überträgt, die zu den komplexen in einer wesentlichen Beziehung stehen. v. Staudts Verdienst ist es[1]), in seinen

[1]) Vgl. hierzu die beiden neuen Aufsätze: Stolz, Die geometrische Bedeutung der komplexen Elemente in der analytischen Geometrie. Math. Ann., Bd. 4 (1871). — August, Untersuchungen über das Imaginäre in der Geometrie. (Programm der Friedrichs-Realschule in Berlin 1872.)

Beiträgen zur Geometrie der Lage die Frage in der so präzisierten Form aufgestellt und in einer nun noch näher zu beleuchtenden Art beantwortet zu haben.

Jeder komplexe Punkt — und es mag hier nur von komplexen *Punkten* gehandelt werden — liegt mit seinen konjugierten auf einer reellen Geraden und gibt mit ihm zusammen das Paar Grundpunkte für eine reelle auf der Geraden befindliche Involution ab. Diese Involution ist durch die beiden Punkte vollständig bestimmt; es findet auch das Umgekehrte statt; sie kann daher die beiden komplexen Punkte geometrisch vertreten, insofern für sie bestimmte Beziehungen gelten müssen, sobald irgendwelche Beziehungen für die komplexen Punkte festgesetzt werden. Aber es entsteht die Schwierigkeit, zu sondern, was auf den einen oder den anderen komplexen Punkt sich bezieht. Um dies zu erreichen — und das ist der Kern seiner Methode — legt v. Staudt der geraden Linie, auf welcher sich die Involution befindet, einen bestimmten *Sinn* bei, in welchem sie durchlaufen werden soll; die Involution vertritt den einen oder den anderen komplexen Punkt, je nachdem man den einen oder anderen Sinn auswählt.

Diese Einführung und Unterscheidung des Sinnes scheint zunächst sehr willkürlich. Denn derselbe hängt mit der auf der Geraden befindlichen Involution gar nicht zusammen, er gibt nur an, in welcher Reihenfolge wir die überdies durch die Involution paarweise zusammengeordneten Punkte der Geraden unserer Aufmerksamkeit vorführen sollen. Und es ist gar nicht zu sehen, weshalb die Unterscheidung des Sinnes mit der Trennung der beiden komplexen Punkte zusammenhängt.

Demgegenüber sei es gestattet, hier eine andere Interpretation der komplexen Elemente vorzutragen, welche eine Einsicht in die aufgeworfenen Fragen gestattet, welche übrigens die v. Staudtsche Interpretation umfaßt und nur als eine Weiterbildung derselben angesehen werden will.

In ihrer allgemeinsten Form kann die fragliche Interpretation folgendermaßen dargelegt werden. Die beiden auf einer Geraden befindlichen komplexen Punkte O, O' können als Grundpunkte für eine auf der Geraden zu treffende *projektivische Maßbestimmung* betrachtet werden. Als Entfernung zweier Punkte a, b hat man dann den mit einer beliebig zu wählenden Konstanten c multiplizierten Logarithmus eines der beiden Doppelverhältnisse zu betrachten, welches die Punkte a, b mit den Punkten O, O' bilden. Nachdem man über c nach Belieben verfügt, ist die Maßbestimmung bis auf das Vorzeichen festgelegt, *in dieser Unbestimmtheit repräsentiert sie die beiden komplexen Punkte O und O'*. Ein Wechsel des Vorzeichens kann mit einer Vertauschung der beiden Punkte O und O' in Zusammenhang gebracht werden. Denn bei einer solchen Vertauschung geht das bez. Doppelverhältnis in seinen reziproken Wert über, der Logarithmus des Doppelverhältnisses ändert sein Zeichen. *Indem wir also der Maßbestimmung ein bestimmtes Vorzeichen beilegen, sondern wir zwischen den beiden komplexen Punkten, insofern Vorzeichenwechsel und Vertauschung der beiden Punkte einander entsprechen.*

Wir wollen jetzt von einem beliebigen Punkte a anfangend auf der gegebenen Geraden eine Skala mit Bezug auf die festgelegte Maßbestimmung äquidistanter Punkte konstruieren, welche in positivem Sinne fortschreitet, in dem wir von a aus eine positive Strecke α wiederholt antragen. Die so entstehende und in bestimmtem Sinne durchlaufene Punktreihe vertritt die Maßbestimmung vollständig, auch wenn sie sich nach n-maliger Wiederholung schließt, vorausgesetzt nur, daß $n > 2$. Sinkt n auf 2 herab, so hat die Reihe als solche keinen eigentümlichen Sinn mehr; sie hat auch zu wenig Konstante, um die beiden komplexen Punkte zu definieren. — Ist aber $n > 2$, so können wir die Punktreihe, die dann eine sogenannte zyklisch projektivische Reihe von n Punkten ist[2]), mit ihrem Sinne an Stelle der Maßbestimmung setzen; *als Bild des einzelnen komplexen Punktes dient dann also die in bestimmtem Sinne durchlaufene zyklisch projektivische Reihe.*

Statt der einen solchen Reihe mögen wir unendlich viele konstruieren, indem wir den Anfangspunkt a sich beliebig ändern lassen; wir mögen die unendlich vielen Reihen in der Weise aufeinander folgen lassen, wie es ihre Anfangspunkte entsprechend einer positiven Zunahme der Entfernung von a tun. Ist n, wie wir voraussetzten, > 2, so können alle diese Punktreihen in bestimmter Aufeinanderfolge aus einer einzigen derselben durch Konstruktion abgeleitet werden[3]); die Einführung der unendlich vielen Reihen hat nur den Zweck, daß sie den Wert beurteilen läßt, den die einzelne Reihe zur Darstellung der komplexen Grundpunkte besitzt; sie ist eben eine unter einfach unendlich vielen.

Ist aber $n = 2$, haben wir also mit Punktepaaren zu tun, die dann eine Involution bilden, so wird das gleichzeitige Betrachten von mindestens zwei Paaren notwendig, denen dann noch der Sinn, in welchem die Gerade durchlaufen werden soll, besonders hinzugefügt werden muß. *Dann hat man eben die v. Staudtsche Interpretation.*

Nehmen wir aber, was am einfachsten scheint, $n = 3$. Man hat dann

[2]) Eine solche wird auf einer beliebigen Geraden von den n Strahlen ausgeschnitten, die den Winkelraum um einen Punkt herum in n gleiche Teile teilen; man erhält dabei die allgemeinste zyklisch projektivische Reihe, jede einmal.

[3]) Man erreicht dies am einfachsten, wenn man die erste Reihe durch n Strahlen eines Büschels bestimmt, die untereinander gleiche Winkel bilden; dreht man den Büschel um seinen Mittelpunkt, so schneiden die Strahlen alle weiteren Punktreihen aus.

drei Punkte auf der Geraden, und zwar drei beliebige Punkte, da jedes System von drei Punkten zyklisch projektivisch ist. Die Grundpunkte desselben werden durch die quadratische Kovariante Δ der durch die drei Punkte repräsentierten kubischen Form f vorgestellt. Drei Punkte sind auch gerade notwendig und hinreichend, um einen bestimmten Sinn auf den Geraden festzulegen. *Wir repräsentieren also schließlich den komplexen Punkt durch drei beliebige in bestimmtem Sinne zu nehmende Punkte einer Geraden.* — Der komplexe Punkt ist dann einer der beiden Punkte, die durch $\Delta = 0$ vorgestellt werden. Daß sich die Unterscheidung des Sinnes auf der Geraden mit der Unterscheidung der Faktoren von Δ deckt, kommt darauf hinaus, daß die Festsetzung des Sinnes der Adjunktion der Quadratwurzel aus der Diskriminante von f äquivalent ist, letztere ist aber zugleich im wesentlichen die Diskriminante von Δ.

Es mag hier nicht näher ausgeführt werden, wie sich die konstruktiven Aufgaben, welche man für komplexe Punkte stellen kann, unter Zugrundelegung dieser einfachsten Darstellung gestalten; dagegen mag noch kurz der Darstellung durch zyklisch projektivische Reihen von vier Punkten a, b, c, d gedacht werden. Dieselbe fällt nämlich ihrem Wesen nach mit v. Staudts „harmonischer" Darstellung der zur Definition der komplexen Punkte dienenden Involution zusammen, und nur die Auffassung ist hier etwas anders. Bei v. Staudt hat man in den vier Punkten a, b, c, d zwei Paare der bez. Involution vor sich, nämlich ac und bd, und man schreibt die Punkte nur in der Reihenfolge a, b, c, d, um zugleich den Sinn auf der Geraden zu fixieren. Hier dagegen gehen die Punkte a, b, c, d in ihrer Reihenfolge durch dieselbe Operation auseinander hervor, und der Sinn findet sich von selbst mitbestimmt.

XXIV. Eine Übertragung des Pascalschen Satzes auf Raumgeometrie.

[Sitzungsberichte der physikalisch-medizinischen Sozietät zu Erlangen vom 10. November 1873[1]); Math. Annalen, Bd. 22.]

Man erhält ein eigentümliches Prinzip zur Übertragung von Sätzen der Ebene auf den Raum, wenn man die Riemannsche Repräsentation einer komplexen Variabeln auf der Kugelfläche mit der projektivischen Betrachtung der Gebilde zweiten Grades verbindet. Dasselbe soll im folgenden kurz bezeichnet und insbesondere auf den Pascalschen Satz angewendet werden.

Hesse hat bekanntlich eine Methode gegeben (Borchardts Journal, Bd. 66 (1867)), um Sätze der Ebene auf die gerade Linie, — algebraisch ausgedrückt, auf das Wertgebiet einer einzelnen, im Sinne der linearen Invariantentheorie betrachteten, Variabeln — zu übertragen. Man lasse nämlich jeder geraden Linie der Ebene das Punktepaar entsprechen, in welchem sie einen festen Kegelschnitt schneidet, und beziehe den Kegelschnitt durch stereographische Projektion von irgendeinem seiner Punkte aus auf eine feste Gerade. Die Punktepaare der Geraden werden so die Bilder der Linien der Ebene, und die ebene Geometrie ist mit der Geometrie der Geraden in Verbindung gesetzt, wenn man in ersterer die Linien, auf letzterer die Punktepaare als Elemente betrachtet.

Man repräsentiere nun weiter das Wertgebiet der Variabeln, deren *reelle* Werte allein auf der festen Geraden veranschaulicht waren, in Riemannscher Weise auf einer Kugelfläche, oder, was eine leicht verständliche Verallgemeinerung ist, auf einer nicht geradlinigen reellen Fläche zweiten Grades[2]). Der geraden Linie der ursprünglichen Ebene, mochte sie reell oder komplex sein, entspricht eindeutig ein reelles Punktepaar der Fläche, und dieses Punktepaar ersetze man wieder durch seine Verbindungsgerade. So hat man schließlich eine Beziehung zwischen Ebene und Raum, *vermöge deren jeder reellen oder komplexen Geraden der Ebene eine und im allgemeinen nur eine reelle Gerade des Raumes ent-*

[1]) Es ist dies diejenige Arbeit, auf welche Hr. Wedekind bei seiner Definition des komplexen Doppelverhältnisses von vier Punkten der Kugel Bezug nimmt, Bd. 9 der Math. Annalen, S. 209 ff. (1875).

[2]) Man erhält diese Repräsentation, von der gewöhnlichen Darstellung der komplexen Variabeln in der Ebene ausgehend, indem man die Ebene parallel zu der Tangentialebene der Fläche in einem ihrer Nabelpunkte legt und durch stereographische Projektion von diesem Nabelpunkte aus Fläche und Ebene aufeinander bezieht.

spricht. Letztere ist in ihrer Lage dadurch beschränkt, daß sie gezwungen ist, eine nicht geradlinige reelle Fläche zweiten Grades zu treffen.

Diese Beziehung hat namentlich folgende Eigentümlichkeit: Zwei Gerade der Ebene, die mit den Tangenten, welche man durch ihren Durchschnittspunkt an den bei Herstellung der Beziehung benutzten festen Kegelschnitt legen kann, ein *reelles* Doppelverhältnis bilden, erhalten als Bilder zwei räumliche Gerade, die sich erstens *schneiden* und überdies innerhalb des somit durch sie bestimmten Büschels mit den an die feste Fläche gelegten durch ihren Durchschnittspunkt gehenden Tangenten *dasselbe reelle* Doppelverhältnis bilden. Insbesondere also: Linien der Ebene, die in bezug auf den festen Kegelschnitt konjugiert sind, werden wieder konjugierte, sich überdies schneidende, Raumgeraden zu Bildern haben. Oder, wie man sich ausdrücken kann, indem man den Kegelschnitt in der Ebene, die Fläche im Raume nach Cayleys Vorgange als Fundamentalgebilde für eine projektivische Maßbestimmung betrachtet: *Senkrechten Linien der Ebene entsprechen senkrechte, sich schneidende Linien des Raumes.*

Um das hiermit geschilderte Übertragungsprinzip auf den Pascalschen Satz anzuwenden, mag man demselben folgende Form geben. Statt zu sagen, daß die drei Durchschnittspunkte der Gegenseiten eines in einen Kegelschnitt eingeschriebenen Sechsseits in einer Geraden liegen, kann man sich dahin ausdrücken, daß die Polaren dieser drei Punkte, d. h. die drei Geraden, welche bez. zu den zusammengehörigen Gegenseiten gleichzeitig konjugiert sind, zu einer vierten Geraden konjugiert sind; oder endlich, indem man nun den Kegelschnitt als Fundamentalgebilde einer projektivischen Maßbestimmung wählt: *daß die gemeinsamen Perpendikel der Gegenseiten eines in das Fundamentalgebilde eingeschriebenen Sechsseits ein gemeinsames Perpendikel haben.*

Auf den Raum übertragen, behält der Satz vollständig seine Form; und das ist die Verallgemeinerung des Pascalschen Satzes, die hier gegeben werden sollte. Unter „Fundamentalgebilde" ist nur eine ovale Fläche zweiten Grades verstanden; das in sie eingeschriebene Sechsseit braucht nicht eben zu sein, sondern kann irgendwie angenommen werden; endlich erscheinen alle Konstruktionen auf das Innere der Fläche beschränkt. Wollte man diese Beschränkung aufheben, wollte man ferner, was nahe liegt, zu weiterer Verallgemeinerung an Stelle der nicht geradlinigen reellen Fläche zweiten Grades eine beliebige Fläche zweiten Grades setzen, so würde zunächst eine gewisse Unbestimmtheit zu beseitigen sein, die daraus entsteht, daß die Konstruktion des gemeinsamen Perpendikels zweier Raumgeraden in Cayleys Geometrie eine zweideutige ist und nur durch Beschränkung auf das Innere der nicht geradlinig vorausgesetzten reellen Fläche zu einer eindeutigen gemacht wird.

[Die Figur, welche aus zwei die $(x+iy)$ Kugel schneidenden Raumgeraden und ihrem zugehörigen, innerhalb der Kugel verlaufenden Perpendikel besteht, scheint in vielfacher Hinsicht besonders interessant. Ich hatte in einer Vorlesung von 1890—91 Anlaß, hierauf ausführlicher hinzuweisen, und im Anschluß daran hat damals Herr Fr. Schilling ein Resultat gefunden (s. Göttinger Nachrichten 1901, bez. Math. Annalen, Bd. 39), welches ich seiner besonderen Schönheit wegen hier gern erwähne:

Man nehme irgend drei die $(x+iy)$-Kugel schneidende Gerade a, b, c und die drei in unserem Sinne zugehörigen Perpendikel, welche in geeigneter Reihenfolge α, β, γ heißen sollen. Die Beziehung zwischen den a, b, c und den α, β, γ ist ersichtlich eine gegenseitige. Man definiere nun Winkel und Entfernung hinsichtlich der $(x+iy)$-Kugel als Logarithmen der in Betracht kommenden Doppelverhältnisse, multipliziert mit $i/_2$. Die Ebenen, welche man durch a und bez. β, γ legen kann, mögen danach den Winkel l' einschließen, ebenso die Strecke, welche auf a durch β, γ ausgeschnitten wird, die Länge il'' besitzen. Die entsprechende Bedeutung sollen m', m'', bez. n', n'' für b, c haben. Analog definiere man bei den Geraden α, β, γ die Winkel λ', μ', ν' und die Strecken $i\lambda'', i\mu'', i\nu''$. Man setze endlich

$$\begin{aligned} l &= l' + il'', & \lambda &= \lambda' + i\lambda'', \\ m &= m' + im'', & \mu &= \mu' + i\mu'', \\ n &= n' + in'', & \nu &= \nu' + i\nu''. \end{aligned}$$

Zwischen den sechs Größen $l, m, n, \lambda, \mu, \nu$ bestehen dann genau dieselben Gleichungen, die man in der Elementargeometrie zwischen den Kantenwinkeln und den Seitenwinkeln eines gewöhnlichen Dreikants aufstellt. Die Gleichungen der sphärischen Trigonometrie finden also in unserer Figur auch für den Fall, daß alle in sie eingehenden Argumente komplexe Werte haben, ihre konkrete Interpretation.

Wegen des, übrigens ganz einfachen, Beweises wolle man meine autographierte Vorlesung über die hypergeometrische Funktion (von 1893—94) oder auch Fr. Schilling in Math. Annalen, Bd. 44 vergleichen. An gegenwärtiger Stelle sei nur bemerkt, daß unsere Figur, sobald sich a, b, c im Mittelpunkt der $(x+iy)$-Kugel schneiden, in die Elementarfigur vom Dreikant und zugehörigem Polardreikant übergeht, wobei dann $l'', m'', n'', \lambda'', \mu'', \nu''$ verschwinden und $l = l', m = m', \ldots$, die Bedeutung gewöhnlicher Winkel bekommen. Mit anderen Worten: man hat dann genau die Verhältnisse der elementaren sphärischen Trigonometrie vor sich. K.]

Zum Erlanger Programm.

Zur Entstehung der Abhandlungen XXV—XXXIII.

In der nun noch folgenden dritten Abteilung des vorliegenden ersten Bandes meiner gesammelten Abhandlungen sind der Hauptsache nach diejenigen meiner Arbeiten zusammengefaßt, bei denen der Begriff der *kontinuierlichen Transformationsgruppe* im Vordergrunde steht.

Den Anfang bilden, auch der Zeit nach, die gemeinsamen Veröffentlichungen von Lie und mir über *W*-Gebilde vom Sommer 1870, bzw. Frühjahr 1871, die hier als XXV und XXVI abgedruckt sind. Einige nähere Angaben über ihr Zustandekommen sind an Ort und Stelle eingefügt (S. 415).

Folgeweise hätte meine Arbeit VIII (Über Liniengeometrie und metrische Geometrie, vom Herbst 1871) ihre Stelle finden können, wenn es nicht doch, ihres besonderen Inhaltes wegen, zweckmäßiger erschienen wäre, sie schon in den ersten (liniengeometrischen) Teil des vorliegenden Bandes aufzunehmen. In der Tat kommen hier, wie in der großen Arbeit von Lie über Linien- und Kugelkomplexe, auf die dort fortwährend Bezug genommen wird, innerhalb der geometrischen Fragestellungen, die wir behandeln, neue Beispiele kontinuierlicher Transformationsgruppen zu spezifischer Geltung.

In demselben Sinne muß ferner auf die beiden Nummern XVI und XVIII der zweiten Abteilung (meine beiden ersten Arbeiten über Nicht-Euklidische Geometrie) verwiesen werden. Ganz besonders gilt das von XVIII, die Anfang Juni 1872 abgeschlossen wurde. Auf S. 52 oben ist bereits erzählt, daß der Grundgedanke des Erlanger Programms (den ich im Spätherbst 1871 erfaßt hatte) ebendort seine erste Ausprägung gefunden hat. Der Stoff, welcher dabei umspannt wird, ist nicht so ausgedehnt, wie im Programm selbst, dafür aber die Darstellung im einzelnen vielleicht noch überzeugender, weil ursprünglicher.

Unter XXVII folgt nunmehr das Erlanger Programm selbst, dessen Entstehungszeit der Oktober 1872 ist. Zwei Umstände haben bei seinem Zustandekommen in erster Linie mitgewirkt, worüber ich hier ein paar Worte sagen muß. Zunächst, daß mich Lie vom 1. September beginnend für zwei Monate besuchte, dann, daß ich am 1. Oktober nach Erlangen übersiedelte, wohin ich als Ordinarius berufen war. Lie, der mich dorthin begleitete, hatte inzwischen die Grundzüge seiner Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, wie insbesondere der Berührungstransformationen, gewonnen, die bald unser tägliches Gespräch bildeten (wie denn die erste Note, welche Lie über seine neuen Auffassungen veröffentlichte, siehe die Göttinger Nachrichten vom 30. Okt. 1872, von mir redigiert war). Andererseits ging Lie nun mit größtem Eifer auf meine Ideen über die gruppentheoretische Klassifikation der verschiedenen Behandlungsweisen der Geometrie ein. Die äußere Veranlassung für die Entstehung meiner Schrift aber war, daß in Erlangen der neuernannte Professor neben einem Vortrage, mit dem er sich in den Kreis seiner Kollegen einführte, herkömmlicherweise ein gedrucktes Programm vorzulegen hatte. Ich halte diese Sitte, trotz aller Unbequemlichkeiten, die daraus für die Nächstbeteiligten erwachsen mögen, für etwas sehr Gutes, indem die inneren Gedankenreihen, mit denen der Neuberufene sein Amt antritt, den Kollegen, mit denen er zusammenzuwirken hat, auf ganz andere Weise bekannt werden, als sonst möglich ist, auch der Neuling zu voller Abklärung seiner Ideen gezwungen ist. In meinem Falle fand der öffentliche Vortrag, bei welchem die Druckschrift an die Zuhörer verteilt wurde, am 7. Dezember statt; ich hatte, wie beiläufig bemerkt sei, als Thema für meinen Vortrag die pädagogischen Grundzüge der von mir anzustrebenden akademischen Tätigkeit gewählt [einiges Nähere darüber in Loreys Abhandlung über das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten seit Anfang des 19. Jahrhunderts, Leipzig, B. G. Teubner, 1916[1])].

Bei der Ausarbeitung meines Programms habe ich selbstverständlich immer daran gedacht, was wohl mein verehrter Lehrer Clebsch (dem ich zweifellos auch die frühzeitige Berufung nach Erlangen zu verdanken hatte) zu meinen Darlegungen, die so vielfach von seiner systematisch-projektiven Denkweise abwichen, sagen würde. Vergeblich! Denn Clebsch ist am 7. November 1872, im Alter von nur 39 Jahren, einem Anfall von Diphtheritis plötzlich erlegen. Es kam also nicht zu der Stellungnahme, der ich mit einer Mischung von Hoffnung und Furcht entgegensah. Aber gleichzeitig erwuchsen mir, indem ich Clebschs wissenschaftliche Erbschaft zu verwalten hatte, neue Aufgaben, die meine Tätigkeit in eine andere Richtung drängten. Ich hatte zunächst dafür zu sorgen, daß Lindemann, der bald nach Erlangen kam, die Ausarbeitung von Clebschs Vorlesungen über Geometrie übernehmen konnte, überhaupt aber andere Spezialschüler von Clebsch, die sich gleichfalls in Erlangen einfanden, in ihren Arbeiten gefördert wurden. Im Zusammenhang damit hielt ich mehrere Semester hindurch höhere Vorlesungen über die von Clebsch bevorzugten Gegenstände, also Invariantentheorie, projektive Geometrie, Abelsche Funktionen usw. Auch die Tradition der noch jungen Mathematischen Annalen wollte aufrecht erhalten sein. Im übrigen wandte ich mich, indem ich meinen Bonner Arbeitsplan in erweitertem Sinne neu aufnahm, jetzt dazu, von den mir geläufigen Darstellungsweisen der algebraischen Geometrie zu Riemann und Galois vorzudringen. Hierüber wird im 2. und 3. Bande der vorliegenden Gesamtausgabe Näheres mitzuteilen sein; es war die Theorie der *diskontinuierlichen Gruppen*, die nun für mich in den Vordergrund trat.

Jedenfalls wurde ich durch diese Inanspruchnahme von dem unmittelbaren Kontakt mit dem Lieschen Ideenkreise abgedrängt. Aber auch bei Lie selbst trat eine Änderung der Arbeitsrichtung ein, die durch einen Besuch, den er, bei der Rückreise von Erlangen nach Christiania, bei Adolf Mayer in Leipzig machte, eingeleitet wurde: er begann, um für einen ausgedehnteren Kreis von Mathematikern verständlicher zu schreiben, die rein geometrischen (oder, wie er sagte, „synthetischen") Betrachtungsweisen, die er sich ausgebildet hatte und die nach wie vor den eigentlichen Kern seines mathematischen Denkens bildeten, zu Gunsten der analytischen Darstellungart Jacobischer Tradition zurückzudrängen. Solcherweise ist das merkwürdige Ergebnis zustande gekommen, daß sich Lies und meine Gedankenkreise eben in dem Augenblicke, wo sie durch das Erlanger Programm auf das innigste verschmolzen waren, voneinander abtrennten. Wiederholtes längeres Zusammensein in den 70er und 80er Jahren hat an der hiermit geschilderten Sachlage nicht mehr viel ändern können. Ich war Ostern 1875 nach München, Herbst 1880 nach Leipzig gekommen. In beiderlei Stellungen war ich durch meine eigenen Untersuchungen und übrigens amtliche Verpflichtungen so sehr in Anspruch genommen, daß es einfach unmöglich war, auch noch den fortschreitenden Gedankenreihen meines norwegischen Freundes zu folgen. Das Gefühl innerer Zusammengehörigkeit ging darum nicht verloren, wie ich dann Ostern 1886, als ich wieder nach Göttingen übersiedelte, durchgesetzt habe, daß Lie als mein Nachfolger nach Leipzig berufen wurde und

[1]) Band III, Heft 9, der von mir im Auftrage der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission herausgegebenen Abhandlungen über den mathematischen Unterricht in Deutschland.

dadurch die Möglichkeit erhielt, jüngere Forscher in größerer Zahl in seine Ideen einzuführen.

Die ersten Jahre meines Göttinger Aufenthalts sind für mich eine Periode der Sammlung gewesen. Ich begann, das früher Erreichte zu ordnen und abzuschließen, insbesondere auch auf meine Jugendarbeiten in größeren Vorlesungen zurückzukommen. Aus einer solchen Vorlesung ist 1890 die Abhandlung „Zur Nicht-Euklidischen Geometrie" entstanden, die vorstehend unter XXI abgedruckt ist. Zugleich ließ ich eine Ausarbeitung der Vorlesung autographisch vervielfältigen, und es beginnt damit die Reihe der Autographien, auf die schon in den Schlußbemerkungen zur Abh. XXI hingewiesen ist. Von den weiteren Autographien kommt hier nur erst diejenige in Betracht, die 1893 unter dem Titel „Einleitung in die höhere Geometrie" in zwei Teilen erschienen ist. Auf sie bezieht sich das unter XXVIII folgende Selbstreferat von 1896. Es handelt sich bei ihr geradezu um die Kommentierung des Erlanger Programms unter Heranziehung der in der Zwischenzeit erzielten zugehörigen Fortschritte. —

In den gleichen Jahren gelang es mir übrigens, was ich seit Beginn meiner mathematischen Studien angestrebt hatte, mit Mechanik und mathematischer Physik nähere Fühlung zu gewinnen. Einzelnes in dieser Hinsicht werden die folgenden Bände dieser Ausgabe bringen. Zu einer umfassenden Produktivität ist es dann freilich nicht mehr gekommen, weil ich mich sehr bald vor neue organisatorische Aufgaben gestellt sah, auch immer mehr für die Geltendmachung der Mathematik nach außen hin einzutreten hatte. Ich erwähne in dieser Hinsicht nur, daß im Herbst 1894 die Arbeiten an der *Mathematischen Enzyklopädie* begannen, die mich in der Folge sehr stark in Anspruch genommen haben. Die unten folgende Abhandlung XXIX, in der ich den Geltungsbereich des Erlanger Programms auf elementare Mechanik ausdehne (1901), ist direkt diesem Beschäftigungskreise entwachsen. Einige Jahre darauf setzten die Untersuchungen der Physiker über die Relativitätstheorie ein, die sehr rasch die allgemeine Aufmerksamkeit auf sich lenkten. Ich bemerkte natürlich sofort, daß sich auch diese aufs beste in die Klassifikationsgedanken von 1872 einordnen, daß mit letzteren sogar die einfachste Art gegeben ist, die neueren physikalischen (oder auch philosophischen) Gedanken mathematisch klarzustellen. Ich habe auf die Dauer dem Reiz nicht widerstehen können, hierauf genauer einzugehen. Nach einem ersten Vortrag über die *Lorentzgruppe* (von 1910), der weiter unten unter XXX abgedruckt ist, habe ich mich in den Jahren 1916—18 mit den einschlägigen Fragen in eigenen Vorlesungen beschäftigt. Von hier aus sind die Notizen zu XXX, die ich jetzt beifüge, sowie die Aufsätze XXXI—XXXIII mit den jetzt angeschlossenen Ausführungen entstanden, womit der gegenwärtige Band abschließt[2]).

[2]) Ich gebe hier noch einige Einzelheiten zur Entstehung dieser letzten Arbeiten.

Hilbert (der 1895 nach Göttingen kam) hatte 1902 erreicht, daß noch ein drittes Ordinariat für reine Mathematik an der Universität errichtet und dieses seinem Jugendfreunde Minkowski übertragen wurde. Minkowski wandte sich damals bald — im Vollbesitz der von ihm entwickelten mathematischen Fähigkeiten — den Fragen der modernen theoretischen Physik zu; man wolle Hilberts Nachruf an Minkowski vergleichen, welcher 1909 zuerst in den Göttinger Nachrichten erschien und dann als Einleitung in Bd. I von Minkowskis Gesammelten Werken (Leipzig 1911) abgedruckt ist. Poincaré und Einstein hatten 1905 die elektrodynamischen Fragen, die mit der Lorentzgruppe zusammenhängen und zur Aufstellung der sogenannten speziellen Relativitätstheorie führen sollten, in den Vordergrund des Interesses gebracht. In der Erkenntnis, daß hier für den Mathematiker der dankbarste Untersuchungsgegenstand gegeben sei, setzte Minkowski sofort mit der Weiterentwicklung der Gedankenreihen ein. Ich vermag keine Einzelheiten darüber anzugeben, aber erzähle gern, daß er damals Hilbert und mir darüber auf unseren regelmäßigen wöchentlichen Spaziergängen immer wieder eindringliche Vorträge gehalten hat. Minkowski war sich dabei des Zusammenhanges mit den früheren Untersuchungen der

Wenn ich jetzt, nach fast 50 Jahren, auf das Erlanger Programm zurückblicke, sind es besonders zwei Unvollkommenheiten, die mir entgegentreten.

Die eine betrifft das schon auf S. 320—21 der gegenwärtigen Ausgabe getadelte Gleichsetzen von projektiver Geometrie und linearer Invariantentheorie (wo doch erstere nur die *Verhältnisse* der homogenen Koordinaten, bzw. der in den vorgelegten Formen auftretenden Koeffizienten interpretieren kann).

Die andere bezieht sich auf den unentwickelten und dementsprechend nicht recht umgrenzten Funktionsbegriff. Das Erlanger Programm ist fast so geschrieben, als wenn es nur algebraische Funktionen gäbe. In späteren Jahren ist für mich der Begriff der analytischen Funktion mit einer gewissen Ausschließlichkeit in den Vordergrund getreten (siehe z. B. den Abdruck des Programms in Bd. 43 der Mathematischen Annalen, 1893). Heute würde ich vielfach nur von reellen, mehrfach differentiierbaren Funktionen reeller Veränderlicher reden (an die übrigens die Auseinandersetzungen des Programms auch verschiedentlich anstreifen).

Beide Arten der Unvollkommenheit sind ein Reflex der mathematischen Auffassungen, in denen ich aufgewachsen war. Jedenfalls habe ich sie jetzt nicht ändern wollen, weil sonst der ganze Text einer Umgestaltung hätte unterzogen werden müssen, was doch dem Zwecke des gegenwärtigen Wiederabdrucks zuwiderlaufen würde. Ebensowenig kann ich systematisch auf Weiterbildungen des Programms oder zugehörige Weiterausführungen eingehen, wie sie die Folgezeit nach verschiedenen Richtungen gebracht hat. Manches Hierhergehörige wird man in den einschlägigen Enzyklopädieartikeln finden. Von den bisher erschienenen Referaten kommt insbesondere dasjenige von G. Fano in Betracht (III_1, Heft 2, 1907), das den Standpunkt der algebraischen Geometrie hervorkehrt. K.

Geometer wohl bewußt. Man wolle die folgenden Sätze aus seinem, weiter unten (S. 551) genauer zu nennenden Vortrag vom 5. Nov. 1907 vergleichen (welche zugleich Minkowskis unvergleichliche Darstellungskraft charakterisieren):

„Überhaupt würden die neuen Ansätze, falls sie tatsächlich die Erscheinungen richtig wiedergeben, fast den größten Triumph bedeuten, den die Anwendung der Mathematik gezeitigt hat. Es handelt sich, so kurz wie möglich ausgedrückt, darum, daß die Welt in Raum und Zeit in gewissem Sinne eine vierdimensionale nichteuklidische Mannigfaltigkeit ist. Es würde zum Ruhme der Mathematiker, zum grenzenlosen Erstaunen der übrigen Menschheit offenbar werden, daß die Mathematiker rein in ihrer Phantasie ein großes Gebiet geschaffen haben, dem, ohne daß dieses je in der Absicht dieser so idealen Gesellen gelegen hätte, eines Tages die vollendetste reale Existenz zukommen sollte."

1908 erschien dann Minkowskis große Abhandlung über die elektromagnetischen Vorgänge in bewegten Körpern (Göttinger Nachrichten) und bald darauf sein Vortrag über „Raum und Zeit" vor der Kölner Naturforscherversammlung (Sonderabdrucke bei B. G. Teubner, 1909 und anderwärts); man vgl. Bd. II seiner Gesammelten Abhandlungen (1911).

Es bedarf wohl keiner Begründung, daß ich danach die nächste Gelegenheit ergriff, die sich mir bei meiner Vorlesungstätigkeit bot, um die Beziehungen der Lorentzgruppe zu den mir geläufigen Betrachtungen über projektive Maßbestimmung darzulegen. So ist der hier unter XXX abgedruckte Vortrag entstanden.

Minkowski ist durch seinen frühen Tod (12. Januar 1909) verhindert worden, den weiteren Fortschritten des physikalischen Gedankens, wie sie zumal durch Einsteins tiefschürfende Überlegungen geschaffen wurden, zu folgen. Aber nun setzte Hilbert ein, selbige nach den verschiedensten Richtungen mathematisch zu durchdringen. So ist insbesondere, als Einstein mit seinen Untersuchungen über allgemeine Relativität begonnen hatte, als Seitenstück dazu Hilberts erste Note über die Grundlagen der Physik zustande gekommen (Göttinger Nachrichten, Sitzung vom 20. November 1915). An sie haben dann die Vorlesungen und Aufsätze, die unter XXXI—XXXIII abgedruckt sind, in erster Linie angeknüpft.

XXV. Deux notes sur une certaine famille de courbes et de surfaces.

Par

MM. F. Klein et S. Lie.

[Comptes Rendus hebdomadaires de l'Académie de sciences de Paris, t. 70 (1870). Presentées par M. Chasles].

[Den unmittelbaren Anlaß zu den nachfolgenden mit Lie zusammen verfaßten Noten haben die merkwürdigen Untersuchungen geboten, welche Lie unter dem Titel „Über die Reziprozitäts-Verhältnisse des Reyeschen Komplexes" in Nr. 2 der Göttinger Nachrichten von 1870 veröffentlicht hat. Lie hatte mir, während er daran arbeitete, nicht nur fortwährend Mitteilungen gemacht, sondern auch, wie er in jener Zeit pflegte, die Darstellung seiner Ideen überlassen. Lie ging davon aus — man vergleiche das Original — den Komplex, oder vielmehr die mit ihm verknüpfte partielle Differentialgleichung der ersten Ordnung, zu erzeugen, indem er auf eine beliebige Komplexkurve (d. h. eine von den Geraden des Komplexes umhüllte Kurve) die dreifach unendlich vielen Kollineationen anwandte, die ein festes Tetraeder in sich überführen. Ich bemerkte gleich nach Abschluß der Lieschen Note, daß dabei die stillschweigende Annahme vorlag, daß besagte Kurve nicht selbst durch eine kontinuierliche Schar solcher Kollineationen in sich überging, also, im Sinne unserer späteren Ausdrucksweise, eine „W-Kurve" war. Diese W-Kurven erwiesen sich darauf selbst als das dankbarste Objekt der Lieschen Betrachtungsweise. Meine eigene Teilnahme an den bezüglichen Untersuchungen ist mehr auf schärfere Sonderung der Einzelheiten, auf den Zusammenhang mit der gewöhnlichen (algebraischen) Invariantentheorie und die Herausarbeitung der metrisch interessanten Fälle (logarithmische Spirale, Loxodrome auf der Kugel) gerichtet gewesen. Lie selbst gehört alles an, was auf das mehr gefühlsmäßige Operieren mit kontinuierlichen Gruppen Bezug hat, insbesondere auch, was die Integration gewöhnlicher oder partieller Differentialgleichungen betrifft. Alle die Gedanken, welche er später in seiner Theorie der kontinuierlichen Transformationsgruppen zur Entwicklung brachte, waren damals bei ihm bereits keimhaft vorhanden, aber freilich noch so wenig durchgebildet, daß ich ihm manche Einzelheiten, z. B. zu Anfang sogar die Existenz der W-Kurven, in langen Unterhaltungen abringen mußte. Ich erwähne diese ganze Sachlage, weil sie mir immer als eine für alle mathematische Produktion bedeutungsvolle Tatsache erschien, hinter der die Gewinnung der Einzelresultate, so wichtig sie sein mögen, zurücktritt. *Das Geheimnis ausgreifender mathematischer Produktion liegt im Unbewußten, in der durchaus individuellen, von vornherein gesetzten psychischen Konstitution der heranreifenden Persönlichkeit.*

Was die allgemeine Bedeutung der W-Kurven angeht (die in der Literatur bei den verschiedensten Anlässen immer wieder auftreten), so sei gleich hier auf die zusammenfassende Darstellung verwiesen, welche ihr G. Scheffers in den Nrn. 13—20 und 34 seines Enzyklopädieartikels über besondere transzendente Kurven gewidmet hat (Enzyklopädie der Math. Wiss. III, D, 4, 1903).

Die Ausführung der Comptes-Rendus-Noten in Bd. 4 der Math. Annalen bezieht sich nur auf die W-Kurven der Ebene; die Durcharbeitung der viel mannigfaltigeren Verhältnisse, welche bei drei Dimensionen auftreten, ist damals leider unterblieben und bedarf auch, wie weiter unten bemerkt wird, einiger Ergänzungen. K.]

Note A.

Dans la Note que nous avons l'honneur de communiquer à l'Académie, nous nous proposons d'établir un théorème général concernant certaines courbes et surfaces. Notre Note se composera de deux parties. Dans la première partie nous définirons les courbes et les surfaces dont nous voulons parler; dans la seconde, nous donnerons l'explication et la démonstration de notre théorème.

I.

1. Les courbes que nous allons considérer sont celles qui se transforment en elles-mêmes par une infinité de transformations linéaires, permettant d'amener en général chaque point de la courbe en chaque autre.

Parmi ces transformations linéaires on trouvera nécessairement une transformation infinitésimale; et réciproquement, si une courbe se transforme en elle-même par une transformation linéaire infinitésimale, elle se transformera en elle-même d'une infinité de manières. Ainsi nos courbes sont les intégrales générales du système d'équations différentielles

$$dp:dq:dr:ds = p':q':r':s',$$

où p, q, r, s; p', q', r', s' désignent des fonctions linéaires des coordonnées[1]).

De la transformation bien connue de ce système d'équations à une forme canonique, on conclut qu'on peut déterminer toujours un tétraèdre, qui reste invariable, par un nombre simplement infini des transformations linéaires appartenant à la courbe. Si ces transformations ne dépendent que d'un seul paramètre arbitraire, ce tétraèdre sera unique; dans le cas contraire[2]), il pourra être choisi parmi une infinité d'autres. Nous ajoutons que ce tétraèdre n'est pas nécessairement un tétraèdre proprement dit, mais qu'un nombre quelconque de ses faces peuvent coïncider [ou devenir indeterminé].

Dans ce qui va suivre, nous supposerons un tétraèdre donné, et nous considérons les courbes appartenant à ce tétraèdre. Pour plus de brièveté, nous les désignerons par un symbole, la lettre V.

[1]) [Vgl. die Bemerkung über das Operieren mit homogenen Koordinaten, wie sie weiter unten (S. 433) für den Fall des ebenen Problems gegeben wird.]

[2]) La seule courbe gauche qui correspond à ce cas est la courbe du troisième ordre.

2. On sait que les transformations linéaires qui laissent invariable un tétraèdre sont échangeables entre elles.

Conséquemment, les surfaces engendrées par des courbes V_1, qui se transforment en elles-mêmes par les mêmes transformations linéaires et qui coupent une autre courbe V_2, appartenant au même tétraèdre, contiendront un nombre doublement infini de courbes V. Elles se transformeront donc en elles-mêmes par un nombre doublement infini de transformations linéaires appartenant au tétraèdre. Ces transformations permettent d'amener en général chaque point de la surface en chaque autre. Ces surfaces sont celles dont nous allons nous occuper; nous les désignerons, de même que les courbes, par la lettre V[3]).

3. On obtient les équations de ces surfaces de la manière suivante:

On peut former trois expressions des coordonnées, qui, par les transformations linéaires appartenant au tétraèdre donné, ne se changent que par une constante additive. Dans le cas d'un tétraèdre proprement dit, ces expressions sont les logarithmes des quotients de trois des fonctions linéaires qui représentent les faces du tétraèdre par la quatrième. Dans les autres cas, il faut remplacer les logarithmes en partie par des expressions algébriques.

Or les surfaces V sont représentées par les équations linéaires entre ces expressions.

4. Nous allons énumérer quelques-unes des courbes V et des surfaces V, qui ont été étudiées sous d'autres points de vue.

Parmi les courbes V planes, on remarque surtout les paraboles et les spirales logarithmiques: aussi un grand nombre des propriétés de ces courbes ne sont que des cas particuliers du théorème général que nous voulons démontrer.

Parmi les courbes V gauches, appartenant à un tétraèdre proprement dit, on doit distinguer les courbes du quatrième ordre avec un point de rebroussement et les courbes transformées linéaires de la loxodromie sur la sphère. Il est bon d'ajouter que ces dernières courbes contiennent un nombre infini de courbes algébriques; les plus simples sont la cubique gauche et une courbe du quatrième ordre, possédant deux tangentes stationnaires[4]).

Parmi les surfaces V, appartenant à un tétraèdre proprement dit,

[3]) La surface développable d'une cubique gauche, qui n'est pas une surface V, se transforme aussi en elle-même par des transformations linéaires, permettant d'amener en général chacun de ses points en chaque autre.

[4]) M. Cayley a signalé cette espèce [Quart. Journ., Bd. 7 (1866), Coll. Papers, Bd. 5, S. 517].

on doit remarquer une particularisation homographique: les surfaces données par l'équation

$$x^a y^b z^c = \text{const.},$$

pour lesquelles M. J.-A. Serret a déterminé les lignes de courbure (Journal de M. Liouville, t. 12 (1847)).

Si deux faces du tétraèdre coïncident, les courbes V contiennent l'hélice, les surfaces V l'héliçoïde gauche.

Enfin, si toutes les faces du tétraèdre coïncident, les courbes V sont des cubiques gauches, et les surfaces V des surfaces réglées du troisième ordre de cette espèce particulière dont les deux directrices coïncident.

Nous ajoutons encore que, dans un travail sur les formes ternaires (Math. Ann., t. 1 (1868)), MM. Clebsch et Gordan ont considéré incidemment les courbes planes, lieu d'un point, qui est transposé successivement par la même transformation linéaire.

II.

Pour établir notre théorème sur les courbes V et les surfaces V, nous allons faire une transformation de l'espace donné, qui n'est pas nécessaire pour notre but, mais qui est très commode. Cette transformation rapporte l'espace donné (A) à un autre espace (B), dont les coordonnées x, y, z sont égales aux trois expressions qui, pour les transformations linéaires appartenant au tétraèdre donné, ne se changent que par une constante additive. Alors ces transformations linéaires deviendront les translations de l'espace B, et les courbes V ses droites, les surfaces V ses plans.

Maintenant nous développerons quelques notions par rapport à l'espace B.

1. Si l'on transpose une courbe ou une surface par toutes les translations, elle formera un *système* de courbes ou de surfaces.

Un système contient, en général, un nombre triplement infini d'éléments.

Le nombre des droites, formant un système, n'est que doublement infini.

Le nombre des plans, formant un système, n'est que simplement infini.

Nous disons aussi des points de l'espace qu'ils forment un système.

2. Les éléments de deux systèmes quelconques, qui contiennent un nombre triplement infini d'éléments, pourront être coordonnés des deux manières suivantes.

En choisissant à volonté deux éléments des deux systèmes, on fera correspondre tous les éléments que l'on obtient de ces deux, soit par des

translations identiques, soit par des translations opposées. La première sorte de correspondance sera nommée *cogrédiente*, la deuxième *contragrédiente*[5]).

Les deux éléments choisis pour établir ces correspondances ne se distinguent pas parmi les autres.

Soient a, b deux systèmes coordonnés par une correspondance contragrédiente. Alors les éléments a, enveloppant b_1, correspondront aux éléments b, enveloppant a_1.

On conclut de là que les éléments a, correspondant aux éléments b, qui enveloppent un élément c_1, et les éléments b, correspondant aux éléments a, qui enveloppent le même élément c_1, envelopperont un même élément d_1.

3. Après avoir établi une correspondance entre deux systèmes a, b, on peut en déduire une correspondance entre tous les systèmes, dont les éléments sont enveloppés par des a et des b. Pour cela, il suffit de coordonner tous les éléments, qui sont enveloppés par des a, b correspondants.

Cette correspondance sera cogrédiente, si la correspondance entre a, b est cogrédiente; si la dernière est contragrédiente, la correspondance établie sera de même contragrédiente, d'après les théorèmes que nous venons d'énoncer.

Il faut distinguer ici surtout le cas où a, b sont des courbes dont les tangentes sont parallèles aux arêtes d'un même cône. Dans ce cas on obtient une correspondance entre toutes les courbes dont les tangentes ont ces directions.

4. Si l'on transforme, par une des correspondances que nous venons d'établir, des droites ou des plans, on obtiendra des droites ou des plans du même système.

De là on conclut, comme corollaire, que les droites et les plans se transforment en eux-mêmes, si l'on coordonne un élément a, qui les enveloppe, à un élément b, qui les enveloppe aussi.

5. Revenons maintenant à l'espace A. Tout ce que nous venons de dire sur les différentes correspondances, que l'on peut établir dans l'espace B, subsiste encore là, si l'on remplace les translations par les transformations linéaires appartenant au tétraèdre donné. Ainsi, en faisant usage de la ter-

[5]) [Man kann diese beiden Transformationsarten unbeschadet des Endresultats noch erweitern, indem man das eine Element jede Translation, welche das andere erfährt, je eine bestimmte Anzahl von Malen, sagen wir m-mal, in gleichem oder entgegengesetztem Sinne ausführen läßt. Es kommt dies darauf hinaus, die im Texte betrachteten Transformationen noch mit der Ähnlichkeitstransformation $x' = mx$, $y' = my$, $z' = mz$ zu kombinieren. Die größere hierdurch erreichte Allgemeinheit des Ansatzes ist in den folgenden Annalenaufsatz stillschweigend gleich mit eingearbeitet. K.]

minologie employée pour l'espace B, nous aurons le théorème suivant, que nous nous proposions d'établir:

Si l'on transforme des courbes V ou des surfaces V par une correspondance appartenant au tétraèdre donné, on obtient des courbes V ou des surfaces V du même système[6]*;*

et ensuite ce corollaire:

Les courbes V et les surfaces V se transforment en elles-mêmes, si l'on coordonne un élément a, qui les enveloppe, à un élément b, qui les enveloppe aussi.

(6. juin 1870.)

Note B.

Dans une Note que nous avons communiquée récemment à l'Académie, nous avons établi un théorème général concernant des courbes et des surfaces que nous avons appelées *courbes* et *surfaces V*. Aujourd'hui nous nous proposons de donner quelques détails, qui sont, il est vrai, des conséquences immédiates de nos considérations, mais qui serviront peut-être à les éclaircir davantage.

Dans notre Communication précédente nous avons supposé un tétraèdre donné et nous avons défini ce que nous avons appelé les *correspondances* (*cogrédientes* ou *contragrédientes*) appartenant à ce tétraèdre. Nous ne considérons ici que le cas d'un tétraèdre proprement dit, et les correspondances qui coordonnent les points, les plans, les lignes droites.

[6]) [Das Theorem bedarf der Präzisierung. Geht man der Einfachheit halber in den Raum B (den Translationsraum) zurück und ordnet dort den Punkten des Raumes in kogredienter oder kontragredienter Weise Kurven oder Flächen eines dreifach unendlichen Systems zu, so erzeugen (oder umhüllen) bei der Bewegung des Punktes längs einer geraden Linie die entsprechenden Kurven (oder Flächen) ersichtlich im allgemeinen einen Zylinder, der nicht etwa eine W-Fläche sein wird, da er nur einfach unendlich viele Transformationen in sich zuläßt. Bezeichnet man die solchen Zylindern entsprechenden Flächen des Raumes A als W_1-Flächen, die eigentlichen W-Flächen des Textes aber als W_2-Flächen, so lautet der korrekte Satz:

Bei einer zum gegebenen Tetraeder gehörenden Transformation gehen Kurven W, wie auch Flächen W_1, je nachdem in Kurven W oder auch Flächen W_1 über, Flächen W_2 aber in Flächen W_2.

Diese Dinge werden erst durchsichtig, wenn man die zur Zeit der Abfassung des Textes noch nicht klar ausgearbeiteten Lieschen Begriffe: „Flächenelement, Elementverein, Berührungstransformation" heranzieht. Punkte, Kurven und Flächen fallen dann gleichmäßig unter den Begriff des zweifach ausgedehnten Elementvereins. Man wird unter diesen Vereinen diejenigen (Kurven oder Flächen) unterscheiden, welche eine eingliedrige Gruppe der zum Tetraeder gehörigen Kollineationen zulassen (W_1-Gebilde), und die W_2-Gebilde (Flächen), welche eine zweigliedrige Gruppe gestatten. Der Satz lautet dann einfach:

Bei einer zum gegebenen Tetraeder gehörenden Transformation gehen W_1-Gebilde wieder in W_1-Gebilde, W_2-Gebilde in W_2-Gebilde über.

Alle diese Transformationen fallen dabei unter den Lieschen Begriff der Berührungstransformation. K.]

Ces correspondances contiennent un grand nombre de correspondances étudiées antérieurement; nous allons en donner une courte énumération:

1. Une correspondance cogrédiente entre les points et les points, ou entre les plans et les plans, est une correspondance homographique, laissant invariable le tétraèdre donné.

Une correspondance contragrédiente entre les points et les points fait correspondre à un plan une surface du troisième ordre avec quatre points doubles dans les sommets du tétraèdre.

Par une correspondance contragrédiente entre les plans et les plans un point se change dans une surface Steinérienne, ayant les quatre faces du tétraèdre pour plans tangents doubles.

Parmi les correspondances cogrédientes entre les points et les plans on retrouve d'une part la correspondance, étudiée par Plücker, sous le nom de *polarité par rapport à un tétraèdre*, d'autre part une correspondance, considérée par M. Cremona dans ses recherches sur les courbes du quatrième ordre avec un point de rebroussement (Comptes rendus, t. 64, p. 1079—1081, 1867). Dans le dernier cas, le plan passe toujours par son point correspondant.

Une correspondance contragrédiente entre les points et les plans est équivalente à la polarité réciproque par rapport à une surface du deuxième degré, conjuguée au tétraèdre donné.

Les correspondances cogrédientes ou contragrédientes entre les points ou les plans et des lignes droites font correspondre les points ou les plans aux droites d'un certain complexe du deuxième degré[7]), engendré par une droite qui est transposée par toutes les transformations linéaires appartenant au tétraèdre donné. On peut définir ce complexe d'une autre manière en disant que ses lignes déterminent, avec les faces du tétraèdre, un rapport anharmonique donné.

M. Reye a étudié ce complexe dans la seconde partie de sa *Géometrie de situation* (1868)[8]). Il considère entre autres une correspondance entre les droites du complexe et les points, qu'il obtient en coordonnant à chaque point l'intersection de ses plans polaires par rapport à deux sur-

[7]) De là on peut tirer une théorie des congruences et des surfaces gauches appartenant au complexe.

[8]) Nous ajoutons que ce complexe a été rencontré déjà antérieurement par plusieurs géomètres, et surtout par M. Chasles, qui, dans son *Aperçu historique*, a appelé expressément l'attention des géomètres sur cet assemblage de droites. [Weitere Zitate in dem auf S. 4 angeführten Enzyklopädieartikel von Zindler.]

faces du deuxième degré. Cette correspondance est identique avec la correspondance contragrédiente entre les points et les droites.

Parmi les correspondances cogrédientes, on doit remarquer le cas où la droite passe par le point correspondant. Une correspondance de cette sorte a été signalée par M. **Chasles**, dans ses *Recherches sur le mouvement infinement petit d'un corps* (1843). M. **Chasles** n'a eu à considérer qu'un cas spécial, qui, dans nos recherches, correspond à un tétraèdre dont deux faces coïncident.

Enfin un cas particulier de la correspondance contragrédiente entre les plans et les droites a été considéré par MM. **Chasles** et **Plücker**: la correspondance entre les normales d'un système de surfaces du second degré homofocales et leurs plans tangents.

2. Revenons maintenant à notre théorème fondamental.

Pour les éléments a, b, que l'on coordonne, on pourra choisir des points, des plans, des lignes droites en combinaison quelconque, et l'on pourra énoncer le théorème de manières différentes pour ces divers cas particuliers. Par exemple, que l'on considère la correspondance contragrédiente entre les points et les plans, on aura le théorème, que les courbes V et les surfaces V sont leurs propres polaires réciproques par rapport à chaque surface du second ordre, qui est conjuguée au tétraèdre donné et qui a un point et son plan tangent de commun avec elles.

On peut déduire de notre théorème un grand nombre d'autres, à l'aide de la remarque suivante. Soit donnée une courbe V ou une surface V: une courbe ou une surface quelconque qui possède avec elle un rapport invariable par des transformations qui transforment la courbe ou la surface V en elle-même, se transformera par ces transformations dans une courbe ou une surface possédant le même rapport avec la courbe ou la surface V.

Nous allons énoncer quelques théorèmes que l'on obtient de cette manière.

3. Une courbe V ne possède de singularités que dans des sommets du tétraèdre.

Toutes les courbes covariantes d'une courbe V, par exemple les courbes doubles de leurs surfaces developpables, sont les courbes V du même système.

Les courbes V d'un même système ne se coupent que dans des sommets du tétraèdre.

Le point de contact d'une tangente d'une courbe V et ses points d'intersection avec les quatre faces du tétraèdre ont un rapport anharmonique constant.

Ce rapport ne dépend que du système auquel la courbe appartient.

Le plan osculateur d'une courbe V et les plans passant par la tangente et les quatre sommets du tétraèdre ont le même rapport anharmonique constant.

Quand on détermine, sur toutes les génératrices d'une surface développable appartenant à une courbe V, le point ayant un rapport anharmonique constant avec les points de rencontre de la droite et les faces du tétraèdre, ce point se trouve sur une courbe V du même système.

Dans les quatre derniers théorèmes on peut remplacer le tétraèdre par une surface V quelconque contenant des courbes V du système de la courbe donnée.

Les plans osculateurs d'une courbe V dans ses n points d'intersection avec un plan quelconque rencontrent la courbe en $n\,(n-3)$ points, situés à n sur $(n-3)$ plans.

Les courbes V qui se trouvent sur une surface du deuxième degré contenant quatre arêtes du tétraèdre appartiennent à un complexe du premier degré contenant les mêmes arêtes, et réciproquement.

Une surface V ne contient de singularités que dans des arêtes du tétraèdre.

Toutes les surfaces covariantes d'une surface V sont des surfaces V du même système.

L'intersection de deux surfaces V consiste dans des courbes V d'un même système.

Les surfaces V d'un même système ne se coupent que dans des arêtes du tétraèdre donné.

Les lignes asymptotiques d'une surface V sont des courbes V. Elles appartiennent à deux systèmes différents.

Les courbes V touchant une courbe dont toutes les tangentes coupent les faces du tétraèdre en quatre points ayant un rapport anharmonique donné sont des lignes asymptotiques de la surface engendrée par elles[9]).

Les surfaces développables de toutes les courbes V d'un même système tracées sur une surface V enveloppent une autre surface V, en la touchant suivant des courbes du même système.

L'ordre et la classe de la congruence formée par les tangentes de ces courbes sont les mêmes; ils s'accordent avec l'ordre et la classe de la surface V.

(13. juin 1870.)

[9]) Dieser Satz rührt insbesondere von **Lie** her und ist hernach (Math. Ann., Bd. 5, 1871) von ihm dahingehend verallgemeinert worden, daß die Charakteristiken der „Integralflächen“ beliebiger Linienkomplexe allemal Asymptotenkurven dieser Flächen sind.

XXVI. Über diejenigen ebenen Kurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen[1]) vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen.

[Math. Annalen, Bd. 4 (1871).]

Von

Felix Klein und Sophus Lie.

In dem nachstehenden Aufsatze wird eine geometrische Schlußweise mit Konsequenz angewandt werden, die wir, obwohl sie durchaus nicht neu ist, gleich hier beim Eingange unserer Arbeit mit Bestimmtheit bezeichnen wollen.

Dieselbe findet bei der Untersuchung aller solcher geometrischer Gebilde ihre Stelle, bei welchen man Transformationen kennt, durch die sie in sich selbst übergeführt werden.

Sie läßt sich in dem allgemeinen Satze zusammenfassen: *daß ein beliebiges anderes Gebilde, welches zu dem ursprünglichen in irgendeiner durch die zugehörigen Transformationen unzerstörbaren Beziehung steht, durch diese Transformationen in solche Gebilde übergeht, welche dieselbe Beziehung zu dem ursprünglichen haben*[2]).

Zum Beweise wende man auf beide Gebilde gleichzeitig diese Transformationen an; ihre gegenseitige Beziehung bleibt dabei, nach Voraussetzung, unverändert dieselbe. Ob man aber auf beide Gebilde oder nur auf das hinzutretende die Transformationen anwendet, macht keinen Unterschied, weil ja das ursprüngliche durch dieselben in sich übergeht. Unser allgemeiner Satz ist also bewiesen.

Wir betrachten nun diesen Satz in den einzelnen Fällen, auf die er Anwendung findet, und geben ihm, wenn dies angeht, eine den speziellen Voraussetzungen entsprechende Form.

[1]) Unter „einfach unendlich viel" sei hier, wie auch immer im folgenden, eine *kontinuierliche* Mannigfaltigkeit von einer Dimension verstanden.

[2]) Diese Schlußweise ist seither wohl besonders bei kinematischen Untersuchungen angewandt worden, vgl. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte. Teil I, Kap. III.

Um dies völlig klar zu stellen, folge hier ein möglichst einfach gewähltes Beispiel.

Betrachten wir eine Schraubenlinie A. Dieselbe geht durch eine kontinuierliche Bewegung (die zugehörige Schraubenbewegung) in sich über. Hieraus schließt man, daß der Ort der Mittelpunkte der Schmiegungskugeln eine Schraubenlinie ist, die mit A die Achse und die Höhe der Schraubengänge gemein hat. Man konstruiere nämlich in einem beliebigen Punkte von A die zugehörige Schmiegungskugel und deren Mittelpunkt. Wenn man auf das so gebildete System die zu A gehörigen Bewegungen anwendet, so bleibt A selbst unverändert, während die Schmiegungskugel in die Schmiegungskugel in einem anderen Punkte von A, ihr Mittelpunkt in den Mittelpunkt dieser Kugel übergegangen ist: da Berührungs- und metrische Relationen bei der Bewegung unverändert bleiben. Man erhält also die Mittelpunkte aller Schmiegungskugeln, wenn man einen auswählt und auf ihn die zu A gehörige Schraubenbewegung anwendet, was der zu beweisende Satz ist.

Die hiermit dargelegte Schlußweise erscheint um so fruchtbarer, je einfacher die Transformationen, durch welche das ursprüngliche Gebilde in sich übergeht, an sich und in ihrer gegenseitigen Beziehung sind, sowie, je größer ihre Zahl ist.

Zwei Arbeiten, in denen wir von dieser Schlußweise als Hilfsmittel Gebrauch machten, waren geeignet, uns ihre Fruchtbarkeit in solchen Fällen zu zeigen.

In der einen Arbeit[3]) behandelte der eine von uns (Lie) den Linienkomplex, dessen Linien ein festes Tetraeder nach konstantem Doppelverhältnisse schneiden. Ein derartiger Komplex geht durch die dreifach unendlich vielen linearen Transformationen, welche sein festes Tetraeder unverändert lassen, in sich selbst über. Von dieser fundamentalen Eigenschaft ausgehend ließen sich nun eine Reihe weiterer Eigentümlichkeiten desselben unmittelbar ableiten. Übrigens werden wir eine aus dieser Arbeit entstandene gemeinsame ausführlichere Arbeit bei einer nächsten Gelegenheit in dieser Zeitschrift veröffentlichen [was leider nie geschehen ist].

In der anderen Arbeit[4]) betrachtete der andere von uns (Klein) insonderheit die Kummersche Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten. Die Untersuchungsmethode ging davon aus, daß diese Fläche durch 16 lineare und 16 reziproke Transformationen, welche untereinander vertauschbar sind, in sich selbst übergeht. Diese Transformationen lassen

[3]) Über die Reziprozitätsverhältnisse des Reyeschen Komplexes. Gött. Nachrichten 1870, 2.

[4]) Zur Theorie der Komplexe des ersten und zweiten Grades. Math. Annalen, Bd. 2 (1870) [s. Abhandlung II dieser Ausgabe].

sich — was übrigens hier nicht in Betracht kommt — durch den Übergang von Punkt- und Ebenenkoordinaten zu Linienkoordinaten im Raume in sehr einfacher Weise untersuchen; ist das geschehen, so erhält man, gemäß der auseinandergesetzten Schlußweise, eine Reihe weiterer Eigenschaften der Kummerschen Fläche.

Hiernach lag es uns nahe, überhaupt solche geometrische Gebilde aufzusuchen, welche durch möglichst einfache und möglichst viele Transformationen in sich übergehen, und nachzusehen, welche Eigenschaften solche Gebilde gemäß der in Rede stehenden Schlußweise besitzen.

Anknüpfend an die genannte Arbeit über den Linienkomplex, dessen Gerade ein festes Tetraeder nach konstantem Doppelverhältnisse schneiden, wandten wir unsere Aufmerksamkeit solchen Kurven und Flächen zu, welche durch geschlossene Systeme von einfach bzw. zweifach unendlich vielen unter sich vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen. So entstand ein gemeinsamer Aufsatz, der unter dem Titel: *Sur une certaine famille de courbes et de surfaces* in den Comptes Rendus des vergangenen Jahres [6. und 13. Juni 1870 (s. Abhandlung XXV dieser Ausgabe)] erschienen ist.

In der gegenwärtigen Abhandlung wollen wir nun den Inhalt dieser Arbeit, soweit er sich auf *ebene Kurven* bezieht, ausführlicher darlegen. Indem wir uns auf die Betrachtung ebener Kurven beschränken, wird es möglich sein, der Darstellung eine abgerundetere Form zu geben, als dies bei Zuziehung der betreffenden räumlichen Gebilde bei deren großer Mannigfaltigkeit gelingen will, ohne daß wir deswegen auf die Auseinandersetzung der allgemeinen Gesichtspunkte zu verzichten brauchten, welche bei der Untersuchung solcher Gebilde in Betracht kommen.

Nur einen Punkt der allgemeinen Theorie, zu dessen Diskussion man bei der Untersuchung der genannten ebenen Kurven keine rechte Veranlassung hat, wollen wir, abgetrennt von dem Übrigen, in einem besonderen Paragraphen (§ 7) behandeln. Derselbe betrifft die Integration solcher Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Variabeln, die durch unendlich viele Transformationen in sich übergehen. Man kann dieselbe immer auf die Integration einer anderen Differentialgleichung zurückführen, die einzig von der Art der unendlich vielen Transformationen abhängt.

Die Darstellung der in den Kreis unserer Betrachtung fallenden räumlichen Verhältnisse haben wir aus genannten Gründen hier ausgeschlossen; wir hoffen indessen, bei einer nächsten Gelegenheit eine solche geben zu können. Dabei würde es sich weniger um die Erledigung prinzipieller Fragen handeln, als vielmehr darum, die Fruchtbarkeit der in dem gegenwärtigen Aufsatze entwickelten Gesichtspunkte aus dem reicheren Material, welches die Raumgeometrie bietet, darzulegen.

Gegenstand der nachstehenden Untersuchung sind also diejenigen ebenen Kurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen unter sich vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen[5]). Wir werden für diese Kurven eine beliebig zu erweiternde Reihe von Eigenschaften ableiten; insbesondere werden wir zeigen, daß dieselben durch unendlich viele geometrische Verwandtschaften in sich übergehen. Wir legen übrigens auf diese Entwicklungen nur insofern Wert, *als wir zu denselben einzig und allein vermöge Raisonnements gelangen und nicht nur die Richtigkeit der Resultate, sondern die innere Notwendigkeit derselben einsehen.*

Wir beginnen damit, daß wir die verschiedenen in den Kreis unserer Betrachtung fallenden Kurven aufzählen. Unter diesen Kurven findet sich insbesondere, wie hier gleich angeführt sein soll, *die logarithmische Spirale.* Die bekannte merkwürdige Eigenschaft dieser Kurve: daß sie durch eine Anzahl einfacher Operationen in eine Kurve derselben Art übergeführt wird[6]), subsumiert sich unter allgemeinere Eigenschaften der von uns betrachteten Kurven. Gleichzeitig ergeben sich eine Reihe bis jetzt, wie es scheint, nicht bemerkter Eigenschaften der logarithmischen Spirale. Man kann wohl durch die von uns angewandte Schlußweise die Theorie der logarithmischen Spirale auf ihren einfachsten Ausdruck zurückführen.

Es mag ferner noch die folgende Bemerkung hier ihre Stelle finden.

Die Betrachtungen über geschlossene Systeme vertauschbarer linearer Transformationen, wie sie im folgenden vorkommen werden, haben eine intime Beziehung zu Untersuchungen, welche in der Theorie der Substitutionen und damit zusammenhängend in der Theorie der algebraischen Gleichungen auftreten[7]). Indes findet *ein* durchgreifender Unterschied statt zwischen der Form, unter der diese Probleme in den genannten Disziplinen und unter der sie hier auftreten, nämlich der, daß in jenen immer von diskret veränderlichen, hier von kontinuierlich veränderlichen Größen die Rede ist. Dadurch vereinfachen sich im vorliegenden Falle die zu lösenden Fragen in hohem Grade. Vielleicht ist es für die Durchführung der

[5]) Die hier gegebene und auch in der Überschrift zugrunde gelegte Definition der in Betracht kommenden Kurven ist mit der scheinbar weiteren gleichbedeutend: Kurven, welche durch einfach unendlich viele lineare Transformationen in sich übergehen. Es liegt dies daran, daß Kurven Mannigfaltigkeiten von *einer* Dimension vorstellen (vgl. § 1, Nr. 4, Note). Wir haben vorgezogen, die Definition in der gewählten Form zu geben, weil sie in derselben auf die unseren Kurven analogen Mannigfaltigkeiten von mehr Dimensionen ausgedehnt werden kann.

[6]) Vgl. hierzu insbesondere den Artikel „Spirale" in Klügels mathematischem Wörterbuch. — [Was Jakob Bernoulli von seiner Spirale rühmt: „Iterum renata resurgo" könnte als Motto vor die gesamten Entwicklungen des Textes gesetzt werden. K.]

[7]) Vgl. Serret, Traité d'Algèbre Supérieure und Camille Jordan, Traité des Substitutions et des Équations Algébriques (1870).

komplizierteren Betrachtungen, welche bei diskreten Variabeln nötig werden, richtig, dieselben zuerst, in einer ähnlichen Weise, wie dies nachstehend geschieht, für kontinuierliche Veränderliche zu behandeln und erst hinterher die Variabilität der Veränderlichen zu beschränken.

§ 1.

Einfach unendliche, geschlossene Systeme von vertauschbaren linearen Transformationen. *W*-Kurven.

1. Von linearen Transformationen in der Ebene gibt es bekanntlich fünf Klassen.

Bei Transformationen der *ersten* Klasse bleiben die drei Ecken und die drei Seiten eines bestimmten Dreiecks (des Fundamentaldreiecks) unverändert, die übrigen Punkte und Geraden der Ebene verändern ihre Lage. Eine Seite des Dreiecks mag unendlich weit rücken, die anderen sollen bzw. mit der X- und Y-Achse zusammenfallen[*]). Dann ist eine solche Transformation dargestellt durch:

$$(1)\qquad \begin{aligned} x' &= ax, \\ y' &= by, \end{aligned}$$

wobei a und b zwei verschiedene Konstante bedeuten.

Die Transformationen der *zweiten* und *dritten* Klasse lassen sich als Grenzfall der Transformationen erster Klasse ansehen. Die Transformationen zweiter Klasse sind dadurch charakterisiert, daß für sie zwei der Ecken und zwei der Seiten des Fundamentaldreiecks bzw. zusammenfallen; bei denen dritter Klasse fallen sämtliche Seiten und bzw. sämtliche Ecken des Fundamentaldreiecks zusammen. Diejenige gerade Linie, in welche für die Transformationen zweiter Klasse zwei Seiten des Fundamentaldreiecks zusammenfallen, mag unendlich weit rücken; die dritte Seite des Dreiecks werde zur X-Achse gewählt. Die Y-Achse sei eine beliebige Gerade, welche durch den isolierten dritten Eckpunkt des Dreiecks geht. So ist die Transformation durch die Formel gegeben:

$$(2)\qquad \begin{aligned} x' &= ax, \\ y' &= y + b. \end{aligned}$$

Bei den Transformationen dritter Klasse soll die Gerade, in welche die

*) Wenn wir von einer besonderen Lage des Fundamentaldreiecks und von nicht homogenen Koordinaten Gebrauch machen, so geschieht dies, weil sich dann die geometrischen Beziehungen, welche wir betrachten müssen, besser bezeichnen und die Formeln, welche vorkommen, kürzer schreiben lassen. Wir verstehen diese Ausdrucksweise immer allgemein: d. h. nicht nur in Beziehung auf die besondere, sondern in Beziehung auf eine beliebige Annahme des Fundamentaldreiecks und der Koordinaten.

drei Seiten des Fundamentaldreiecks zusammenfallen, unendlich weit rücken. Die X-Achse enthalte den Punkt, in welchen die drei Eckpunkte des Dreiecks zusammengerückt sind; die Y-Achse sei eine beliebige Gerade. Dann hat die Transformation die Form:

$$(3)\qquad \begin{aligned} x' &= x + a, \\ y' &= y + ax + b. \end{aligned}$$

Die Transformationen der *vierten* Klasse sind die sogenannten perspektivischen. Bei ihnen bleibt ein isolierter Punkt (Zentrum der Perspektivität) und eine Punktreihe (Achse der Perspektivität) und infolgedessen eine isolierte gerade Linie (die Achse) und ein Büschel gerader Linien (diejenigen, die durch das Zentrum gehen) unverändert. Solche Transformationen werden durch (1) dargestellt, wenn entweder $a = b$, oder eine der beiden Größen gleich 1. Unter Zugrundelegung der ersten Annahme haben wir also für Transformationen der vierten Klasse:

$$(4)\qquad \begin{aligned} x' &= ax, \\ y' &= ay. \end{aligned}$$

Die Transformationen der *fünften* Klasse sind als ein Grenzfall derer vierter Klasse anzusehen. Sie entstehen aus diesen, indem das Zentrum der Perspektivität auf die Achse derselben rückt. Nehmen wir die Achse unendlich weit, die X- und Y-Achse beliebig, so hat man für diese Transformationen die Formel:

$$(5)\qquad \begin{aligned} x' &= x + a, \\ y' &= y + b. \end{aligned}$$

Bei der gewählten Koordinatenbestimmung kommt die Transformation auf eine Translation der Ebene hinaus.

Wegen seiner ausgezeichneten metrischen Eigenschaften mag hier noch ein besonderer Fall der Transformationen erster Klasse hervorgehoben sein. Derselbe entspricht der Annahme, daß zwei der Ecken des Fundamentaldreiecks mit den unendlich weit entfernten imaginären Kreispunkten zusammenfallen. Alsdann besteht die Transformation in einer Rotation der Ebene um den dritten Eckpunkt des Fundamentaldreiecks und einer ihrer Länge proportionalen Vergrößerung (oder Verkleinerung) der von diesem Eckpunkte ausgehenden Radiusvektoren.

2. Man wende nun eine jede der Transformationen (1) ... (5) λ-mal hintereinander an. So erhält man eine Transformation, welche dieselben Elemente der Ebene unverändert läßt, wie die ursprüngliche. Dieselbe ist in den fünf Fällen bzw. durch die nachstehenden fünf Gleichungen gegeben:

$$\text{I.}\quad \begin{aligned} x' &= a^{\lambda} x, \\ y' &= b^{\lambda} y, \end{aligned} \qquad \text{II.}\quad \begin{aligned} x' &= a^{\lambda} x, \\ y' &= y + b\lambda, \end{aligned} \qquad \text{III.}\quad \begin{aligned} x' &= x + a\lambda, \\ y' &= y + a\lambda x + b\lambda \\ &\quad + a^2 \cdot \frac{\lambda(\lambda-1)}{2}, \end{aligned}$$

$$\text{IV.}\quad \begin{aligned} x' &= a^{\lambda} x, \\ y' &= a^{\lambda} y, \end{aligned} \qquad \text{V.}\quad \begin{aligned} x' &= x + a\lambda, \\ y' &= y + b\lambda. \end{aligned}$$

Nun fasse man λ nicht mehr als eine gegebene Zahl, *sondern als einen kontinuierlich veränderlichen Parameter* auf. Dann stellen die Gleichungen I ... V Systeme von einfach unendlich vielen linearen Transformationen dar, welche die folgenden Eigenschaften haben:

Zwei beliebige Transformationen des Systems geben, hintereinander angewandt, unabhängig von ihrer Reihenfolge, dieselbe neue Transformation.

Diese neue Transformation ist selbst eine Transformation des Systems.

Mit Rücksicht auf die erste Eigenschaft heißen die Transformationen des Systems *vertauschbar*, mit Bezug auf die zweite[9]) heißt das System *geschlossen*[10]).

3. Unter den Transformationen der Systeme I ... V findet sich jedesmal eine, welche wir als die *unendlich kleine* Transformation des Systems bezeichnen, insofern sie x, y in solche x', y' überführt, die sich von den x, y nur um unendlich kleine Größen unterscheiden. Man erhält diese unendlich kleinen Transformationen, wenn man in I ... V λ unendlich klein, also etwa gleich $d\lambda$, nimmt. Beispielsweise findet man für I:

$$(6) \qquad \begin{aligned} x' &= x + \log a \cdot d\lambda \cdot x, \\ y' &= y + \log b \cdot d\lambda \cdot y, \end{aligned}$$

und für V:

$$(7) \qquad \begin{aligned} x' &= x + a \cdot d\lambda, \\ y' &= y + b \cdot d\lambda. \end{aligned}$$

Man kann sich die Systeme I ... V durch unendlich-malige Wiederholung der betreffenden unendlich kleinen Transformation entstanden denken.

Es ist nun auch umgekehrt klar, daß es keine weiteren Systeme einfach unendlich vieler linearer Transformationen geben kann, die die in Nr. 2 genannten beiden Eigenschaften besitzen, als die aufgestellten I ... V.

---

9) Im vorliegenden Falle ist die erste Eigenschaft notwendig vorhanden, wenn die zweite erfüllt ist. Es ist dies aber nur dem Umstande zuzuschreiben, daß wir Systeme mit nur einfach unendlich vielen linearen Transformationen betrachten. Beispielsweise bilden die dreifach unendlich vielen linearen Transformationen, die einen Kegelschnitt unverändert lassen, auch ein geschlossenes System; aber vertauschbar sind die Transformationen dieses Systems nicht.

10) Der Ausdruck „ein geschlossenes System von Transformationen" entspricht also ganz dem, was man in der Theorie der Substitutionen als „eine Gruppe von Substitutionen" zu bezeichnen pflegt.

Denn ein derartiges System muß alle Transformationen enthalten, welche sich aus einer beliebigen Transformation desselben durch Wiederholung ergeben. Man wähle nun die in dem Systeme enthaltene unendlich kleine Transformation. Dieselbe gehört entweder der Klasse (1) oder (2) ... oder (5) an und führt bei unendlich oft wiederholter Anwendung zu einem der Systeme I oder II ... oder V mit Notwendigkeit hin.

4. *Wir fragen nun nach solchen Kurven, welche durch die Transformationen der Systeme I ... V in sich übergehen.*

Zuvörderst ist klar, daß es solche Kurven gibt. Man transponiere nämlich einen in der Ebene beliebig angenommenen Punkt p durch alle Transformationen eines der Systeme. Dann beschreibt er eine Kurve, welche, mit Bezug auf dieses System, die verlangte Eigenschaft hat. Zum Beweise sei q ein beliebiger Punkt der Kurve. Man wende auf ihn irgend eine Transformation des Systems an. So geht er in einen Punkt über, in den p übergeht, wenn man p zunächst durch eine passende Transformation des Systems in q überführt und alsdann auf p die betreffende Transformation anwendet. Zwei Transformationen des Systems hintereinander angewandt geben aber eine neue Transformation des Systems; p geht also, und mithin auch q, in einen Punkt der Kurve über. Bei einer beliebigen Transformation des Systems geht also die Gesamtheit der Punkte der Kurve in die Gesamtheit derselben Punkte, mit anderen Worten, die Kurve in sich selbst über, w. z. b. w.

Die hiermit definierten Kurven werden wir im folgenden, der Kürze wegen, mit einem Buchstaben, als *Kurven W* bezeichnen[11]).

W-Kurven, welche durch dieselben Transformationen in sich übergehen, nennen wir *W*-Kurven *eines Systems*. Von *W*-Kurven eines Systems gibt es einfach unendlich viele. Wendet man nämlich auf alle (zweifach unendlich vielen) Punkte der Ebene die Transformationen eines Systems an, so beschreibt jeder eine demselben angehörige *W*-Kurve; aber von diesen Kurven sind, nach der vorstehenden Auseinandersetzung, jedesmal einfach unendlich viele identisch, nämlich alle diejenigen, die aus Punkten einer demselben System angehörigen *W*-Kurve hervorgehen.

---

11) Wenn überhaupt ein geometrisches Gebilde durch eine Transformation in sich übergeht, so geht es selbstverständlicherweise auch in sich über durch jede Transformation, welche aus der einen durch Wiederholung entsteht. Gesetzt nun, eine Kurve gehe durch unendlich viele lineare Transformationen in sich über. Unter denselben findet sich eine unendlich kleine. Durch unendlichmalige Wiederholung derselben entsteht eins der Systeme I ... V. Durch alle Transformationen des Systems geht die Kurve in sich selbst über; mit anderen Worten, sie ist eine von den im Texte betrachteten Kurven. Hieraus folgt, was schon in der Einleitung gesagt wurde: daß für diese Kurven auch die scheinbar weitere Definition gilt: diejenigen Kurven, welche durch einfach unendlich viele lineare Transformationen in sich übergehen.

Es sei hier gleich angeführt, daß die Herren Clebsch und Gordan in einem gemeinsamen Aufsatze in den Mathematischen Annalen (Zur Theorie der ternären Formen mit kontragredienten Variabeln Bd. 1, (1869)) eben die hier zu untersuchenden W-Kurven betrachtet haben, nur unter anderen Gesichtspunkten, als die sind, von denen wir hier ausgehen. Bei ihnen tritt die Kurve nur beiläufig auf, als geometrischer Ort für einen Punkt, der durch wiederholte Anwendung derselben linearen Transformation transponiert wird, und die Untersuchung dreht sich darum, welche speziellen Eigenschaften die so erzeugte Punktreihe für besondere Annahmen der Konstanten (Invarianten) der betreffenden linearen Transformation hat.

5. Für die W-Kurven erhalten wir, dem entsprechend, daß man sich die Transformationen des zugehörigen Systems durch Wiederholung einer unendlich kleinen entstanden denken kann, noch eine zweite Definition. Wir wollen dabei von der Betrachtung des Systems I ausgehen. Die in demselben enthaltene unendlich kleine Transformation (6) führt einen Punkt x, y in einen benachbarten Punkt $x+dx$, $y+dy$ über, wobei offenbar:

$$dx = \log a \cdot d\lambda \cdot x,$$
$$dy = \log b \cdot d\lambda \cdot y.$$

Hieraus folgt:

$$(9) \qquad \frac{dx}{\log a \cdot x} = \frac{dy}{\log b \cdot y},$$

und *dieses ist eine Differentialgleichung, als deren Integrale die W-Kurven des Systems erscheinen.*

Auf ganz ähnliche Weise wird man zu Differentialgleichungen für die W-Kurven der Systeme II ... V geführt. Dieselben haben die Gestalt: $dx:dy = p:q$, wo p, q zwei ganze lineare Funktionen von x und y bezeichnen. Würde man in diese Differentialgleichung statt x und y irgend drei homogene Koordinaten ξ, η, ζ einführen, welche sich auf ein beliebig gewähltes Koordinatendreieck beziehen, so würde sie die allgemeinere Form annehmen: $d\xi : d\eta : d\zeta = p:q:r$, wo p, q, r jetzt homogene lineare Funktionen von ξ, η, ζ sind.

Andererseits ist klar, daß jede solche Differentialgleichung die W-Kurven eines Systems zu Integralen hat. Eine solche Differentialgleichung sagt nämlich aus, daß gewisse gesuchte Kurven durch eine gegebene unendlich kleine lineare Transformation in sich übergehen[12]). Eine Kurve, die dies tut, geht aber auch durch alle Transformationen

[12]) [Hierdurch ist eigentlich eine Kurve im drei-dimensionalen Raum ξ, η, ζ definiert, die erst von O aus projiziert, die ebene W-Kurve liefert. K.]

des Systems, welches durch Wiederholung der unendlich kleinen Transformation entstehen, in sich über. Also:

Die W-Kurven lassen sich auch definieren als die Integrale der linearen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$(10) \qquad d\xi : d\eta : d\zeta = p:q:r,$$

wo p, q, r homogene lineare Funktionen von ξ, η, ζ sind, und zwar sind die W-Kurven eines Systems die Integrale desselben Systems von Differentialgleichungen[13]).

Die bekannte Umformung der Differentialgleichungen (10) auf eine kanonische Form ist gleichbedeutend mit der Umformung der durch dieselbe ausgesprochenen unendlich kleinen linearen Transformation auf ihre kanonische Form.

6. Wir wenden uns dazu, die Gleichungen der W-Kurven aufzustellen, insbesondere diejenigen sonst bekannten Kurven aufzuzählen, welche unter denselben enthalten sind.

Allgemein erhalten wir die Gleichung der W-Kurven, wenn wir aus der Gleichung des zugehörigen Transformationen-Systems I oder II ... oder V den Parameter λ eliminieren und x, y als Anfangswerte, x', y' als veränderliche Größen betrachten.

Um diese Elimination nach gleichförmiger Methode durchführen zu können, bemerken wir, daß sich die Systeme I, II, III, IV in der folgenden Weise schreiben lassen, die der Form entspricht, welche das System V von vornherein hat:

$$\text{I.} \quad \begin{aligned} \log x' &= \log x + A\lambda \\ \log y' &= \log y + B\lambda \end{aligned} \qquad \text{II.} \quad \begin{aligned} \log x' &= \log x + A\lambda \\ y' &= \quad y + B\lambda \end{aligned}$$

$$\text{III.} \quad \begin{aligned} x' &= \qquad x + A\lambda \\ (x'^2 - 2y') &= (x^2 - 2y) + B\lambda \end{aligned} \qquad \text{IV.} \quad \begin{aligned} \log x' &= \log x + A\lambda \\ \log y' &= \log y + A\lambda. \end{aligned}$$

[13]) [Um den Zusammenhang mit anderen Untersuchungen herzustellen, ist es zweckmäßig, die Formel (10) etwas anders zu schreiben. Da es nur auf die Verhältnisse der $\xi:\eta:\zeta$ ankommt, bleibt der Punkt (ξ, η, ζ) ungeändert, wenn man die ξ, η, ζ um solche Inkremente vermehrt, welche den ξ, η, ζ selbst proportional sind. Formel (10) besagt also, ihrer geometrischen Bedeutung nach, nichts anderes als die Determinantengleichung:

$$(10') \qquad \begin{vmatrix} d\xi & d\eta & d\zeta \\ \xi & \eta & \zeta \\ p & q & r \end{vmatrix} = 0.$$

Bezeichnet man jetzt mit u, v, w die zu ξ, η, ζ kontragredienten Linienkoordinaten, so erweisen sich, nach der Terminologie von Clebsch, unsere W-Kurven als die „Hauptkoinzidenzkurven" des „Konnexes"

$$pu + qv + rw = 0.$$

Andererseits dürfen wir in (10′), unbeschadet der Allgemeinheit, eine der homogenen Koordinaten, z. B. ζ, gleich Eins nehmen, was $d\zeta = 0$ bedingt. Wir haben dann

$$p\,d\eta - q\,d\xi + r(\eta\,d\xi - \xi\,d\eta) = 0,$$

d. h. die bekannte Differentialgleichung, welche Jacobi im 24. Bd. von Crelles Journal (1842), = Werke IV, S. 257—262, integrierte. K.]

Für die vorkommenden Konstanten haben wir kurz A, B geschrieben, da es auf die Ausdrücke derselben in den früheren Konstanten a, b nicht ankommt.

Fügen wir noch die ursprüngliche Gleichung des Systems V. hinzu, indem wir in derselben statt a, b auch A, B schreiben, also:

$$\text{V.}\quad \begin{aligned} x' &= x + A\lambda \\ y' &= y + B\lambda. \end{aligned}$$

Eliminiert man nun zwischen den beiden Gleichungen jedes Systems λ, so erhält man die Gleichungen der betreffenden W-Kurven. Dieselben werden, indem man noch statt x, y bzw. x_0, y_0 schreibt und bei x', y' die Akzente fortläßt:

$$(11)\quad \left\{ \begin{array}{rl} \text{I.} & B(\log x - \log x_0) = A(\log y - \log y_0), \\ \text{II.} & B(\log x - \log x_0) = A(y - y_0), \\ \text{III.} & B(x - x_0) = A[(x^2 - 2y) - (x_0^2 - 2y_0)], \\ \text{IV.} & \log x - \log x_0 = \log y - \log y_0, \\ \text{V.} & B(x - x_0) = A(y - y_0). \end{array} \right.$$

Statt I und IV mögen wir noch schreiben:

$$(12)\quad \left\{ \begin{array}{rl} \text{I.} & \left(\frac{x}{x_0}\right)^B = \left(\frac{y}{y_0}\right)^A, \\ \text{IV.} & \frac{x}{x_0} = \frac{y}{y_0}\ . \end{array} \right.$$

7. Wir nennen kurz einige in den Gleichungen (11), (12) enthaltene bekanntere Kurven.

Zunächst die Gleichung (11, V.) stellt gerade Linien dar, und zwar bei festem $A:B$ gerade Linien derselben Richtung. Man sieht an diesem einfachsten Beispiel deutlich, wie die Kurven W eines Systems durch die zugehörigen linearen Transformationen in sich übergehen. Die zugehörigen linearen Transformationen bestehen im vorliegenden Falle in gleichgerichteten Translationen der Ebene, dabei verschieben sich die parallelen Geraden, welche dieselbe Richtung haben, in sich selbst.

Übrigens geht aus dieser geometrischen Vorstellung hervor, daß man nicht nur diese Linien, sondern auch die unendlich weit liegenden Punkte als W-Kurven des Systems V anzusehen hat. Denn dieselben gehen durch die Transformationen des Systems auch in sich selbst über. An und für sich sind dieselben den Transformationen des Systems V gegenüber mit den geraden Linien, die durch dieselben unverändert bleiben, ganz gleichberechtigt. Sie entgehen nur der hier gewählten analytischen Darstellung; hätten wir statt Punkt-Koordinaten Linien-Koordinaten gebraucht, so würden wir zunächst nur die Punkte und erst hinterher, durch Überlegung, die geraden Linien gefunden haben. Diese Bemerkung wird uns später wiederholt entgegentreten (vgl. Nr. 15).

Die Gleichung (11, IV.) stellt gerade Linien dar, welche durch den Koordinaten-Anfangspunkt (das Zentrum der Perspektivität) gehen. Als W-Kurven des Systems müssen wir außer diesen geraden Linien auch noch die Punkte zählen, welche unendlich weit liegen, d. h. der Achse der Perspektivität angehören.

Gleichung (11, III.) stellt Parabeln dar, deren Durchmesser zur X-Achse parallel sind. Diejenigen Parabeln, welche denselben Werten von A, B zugehören, d. h. also W-Kurven desselben Systems sind, berühren sich in unendlicher Entfernung auf der X-Achse vierpunktig. Als W-Kurven des Systems III erhält man also, allgemein zu reden, sich vierpunktig berührende Kegelschnitte.

Die Gleichung (11, II.) stellt transzendente Kurven dar von der Art der logarithmischen Linie: $y = \log x$.

Gleichung (11, I.) endlich umfaßt zunächst alle sogenannten Parabeln. Unter denselben finden sich, entsprechend einem rationalen Verhältnisse von $A:B$ unendlich viele algebraische Kurven.

Setzt man insbesondere $A = 1$, $B = -1$ oder $A = 1$, $B = 2$ oder $A = 2$, $B = 1$, so hat man Kegelschnitte. Dieselben gehen durch zwei Eckpunkte des Fundamentaldreiecks hindurch, indem sie in jedem die bezüglich dem anderen gegenüberliegende Dreieckseite berühren[14].

Weiterhin findet man Kurven dritter Ordnung mit Spitze usw.

Bei beliebiger Annahme von A und B finden sich unter den W-Kurven des zugehörigen Systems die drei Seiten des Fundamentaldreiecks, und auch, in dem eben auseinandergesetzten Sinne, dessen drei Eckpunkte.

Zu den W-Kurven (11, I.) gehört namentlich auch die schon im Eingange erwähnte *logarithmische Spirale*. Man wird auf dieselbe geführt, wenn man, wie dies schon in Nr. 1 geschah, das Fundamentaldreieck so partikularisiert, daß zwei seiner Eckpunkte in die beiden unendlich weit entfernten imaginären Kreispunkte hineinfallen. Diejenigen logarithmischen Spiralen, welche mit den Radiusvektoren vom Pole gleiche Winkel bilden, sind W-Kurven desselben Systems. Bei den linearen Transformationen, durch welche die logarithmische Spirale in sich selbst übergeht, bleiben die Winkel unverändert, alle ebenen Figuren sich selbst ähnlich.

---

[14]) Man hat hiernach den Satz: Kegelschnitte, welche sich in zwei Punkten berühren, gehen durch dieselben einfach unendlich vielen linearen Transformationen in sich über. Rücken die beiden Berührungspunkte unendlich nahe, so ergibt sich der im Texte unter III. genannte Fall der vierpunktig berührenden Kegelschnitte.

§ 2.

Einige Eigenschaften der *W*-Kurven.

8. Wir werden uns in diesem Paragraphen, in welchem wir beabsichtigen, die Anwendung der im Eingange erwähnten Schlußweise auf die *W*-Kurven als solche darzulegen, auf die Betrachtung der *W*-Kurven des Systems I. beschränken. Die analogen Betrachtungen für die *W*-Kurven der anderen Systeme wird man ohne weiteres dem hier Vorgetragenen nachbilden können.

Wir beginnen mit zwei Beispielen.

1. Beispiel. Denken wir uns mehrere demselben Systeme I. angehörige *W*-Kurven gegeben und an eine derselben eine Tangente gezogen. Bei Anwendung der zugehörigen linearen Transformationen bleiben die Kurven *W* selbst unverändert, während die Tangente nach und nach die Lage jeder anderen Tangente derselben Kurve einnimmt. Dabei gehen der Berührungspunkt mit der einen *W*-Kurve und die Schnittpunkte mit den anderen bzw. in den Berührungspunkt und die Schnittpunkte der neuen Tangente mit derselben Kurve über. Hieraus der Satz: *daß die Schnittpunkte mit dem Berührungspunkte eine Punktreihe bilden, die, für beliebige Lagen der Tangente, derselben Punktreihe projektivisch ist.* — Da die drei Seiten des Fundamentaldreiecks immer auch als *W*-Kurven des gegebenen Systems zu betrachten sind, so folgt das Korollar: *Das Doppelverhältnis des Berührungspunktes einer Tangente einer W-Kurve und ihrer drei Durchschnittspunkte mit den Seiten des Fundamentaldreiecks ist konstant*[15]).

2. Beispiel. Sei eine Kurve *W* gegeben. Man schneide dieselbe durch irgendeine gerade Linie a und konstruiere in beliebigen n ihrer Schnittpunkte die Tangenten. *Von den weiteren Schnittpunkten dieser n-Tangenten mit der Kurve liegen jedesmal n wieder auf einer geraden Linie.*

Zum Beweise heiße einer der Schnittpunkte der Linie a mit der gegebenen Kurve o, und einer der weiteren Schnittpunkte seiner Tangente mit der Kurve p. Sei o' ein zweiter Schnittpunkt von a mit der Kurve. Bei der Transformation des Systems, welche o in o' überführt, geht die Tangente in o in die Tangente in o', der Schnittpunkt p in einen Schnitt-

[15]) Für die Kurven des Systems II erschließt man auf gleiche Weise die Konstanz der Subtangente, was ja auch ein bekannter Satz über die logarithmische Linie ist. — [Indem Lie für Doppelverhältnisse in unseren ursprünglichen Unterhaltungen den v. Staudtschen Ausdruck „Wurf" benutzte, ist aus dem im Text angeführten Theorem die Bezeichnung „*W*-Kurve" entstanden. Daraus wieder sind die „courbes *V*" der Comptes Rendus-Noten hervorgegangen. Es ist also sozusagen eine freie Übersetzung unserer Terminologie, wenn Halphen später von „courbes anharmoniques" sprach. K.]

punkt p' der neuen Tangente über. Hiernach sind die Transformationen $o-o'$, $p-p'$ dieselben. Man setze nun beide Transformationen mit der Transformation $o'-p$ zusammen. So entsteht aus der ersten die Transformation $o-p$, aus der zweiten aber, indem man, was bei der Vertauschbarkeit der Transformationen gestattet ist, zuerst $o'-p$ und dann $p-p'$ anwendet, die Transformation $o'-p'$. Das heißt also: p geht aus o durch dieselbe Transformation des Systems hervor, durch welche p' aus o' hervorgeht. Zu den weiteren Schnittpunkten von a mit der Kurve: o'', ... findet man auf dieselbe Weise Punkte p'', ... und dabei ist die Transformation $o-p=o'-p'$ immer gleich der Transformation $o''-p''$, ... Man wende nun auf a, welches die Punkte o, o', o'' .... enthält, diese Transformation an. So geht a in eine neue gerade Linie über, welche p, p', p'' .... enthält. Damit ist unser Satz bewiesen.

9. Die vorstehenden Sätze finden ihren Beweis beide in der von uns im Eingange auseinandergesetzten Schlußweise. Außerdem benutzt der zweite Satz die Vertauschbarkeit der Transformationen unter sich.

Um die beiden Sätze zu verallgemeinern, wollen wir hier die Art der Beziehungen, welche bei den zugehörigen Transformationen unverändert bleiben, näher definieren. *Es sind dies alle im Sinne der neueren Algebra kovarianten Beziehungen zu dem von der W-Kurve und dem Fundamentaldreiecke gebildeten Systeme.*

Von dieser Definition ausgehend können wir in den beiden aufgestellten Sätzen beispielsweise an Stelle der Tangente beliebige solche gerade Linien setzen, welche mit den drei Verbindungslinien mit den Ecken des Fundamentaldreiecks ein konstantes Doppelverhältnis bestimmen[16]). Wir können statt ihrer 2, 3, 4, 5punktig berührende Kegelschnitte setzen, welche bzw. 3, 2, 1, 0 der Eckpunkte des Fundamentaldreiecks enthalten[17]) oder 3, 2, 1, 0 der Seiten des Dreiecks berühren, usw.

In dem zweiten Satze können wir die schneidende gerade Linie a durch eine beliebige Kurve ersetzen; die Schnittpunkte p, p', p'', ... liegen dann auf einer Kurve, die aus dieser durch eine dem Systeme angehörige lineare Transformation entsteht, usf.

Es wird dies genügen, um das Schlußprinzip völlig klarzustellen; man sieht, wie man ohne weitere Betrachtungen eine unbegrenzte Reihe von Eigenschaften der *W*-Kurven ableiten kann, und die einzige Frage,

[16]) In dem Falle der logarithmischen Spirale sind dies die unter konstantem Winkel schneidenden Geraden. — Daß dieselben logarithmische Spiralen derselben Art umhüllen (caustica, diacaustica, evoluta), ist nach unserer Schlußweise selbstverständlich und subsumiert sich unter den letzten Satz der Nr. 10 des Textes.

[17]) Für die logarithmische Spirale gehören hierher die Berührungskreise, welche den Pol enthalten, und die Krümmungskreise.

die man in dieser Richtung nur noch stellen kann, ist die: Welche dieser Eigenschaften sind besonders bemerkenswert?

10. Wir heben aus der Reihe solcher Eigenschaften zunächst nur die folgenden heraus:

Kurven W eines Systems (und zu diesen gehören immer die Seiten des Fundamentaldreiecks) können sich nur in Eckpunkten des Fundamentaldreiecks schneiden. (Wenn also W-Kurven transzendent sind, sind sie es nicht in der Art, daß sie einen Teil der Ebene mit einem Netzwerk bedecken.)

Kurven W besitzen in keinem ihrer Punkte, außer etwa in den Eckpunkten des Fundamentaldreiecks, die sie enthalten, irgendeine Singularität[18]).

Jede im Sinne der neueren Algebra kovariante Kurve einer Kurve W (Hessesche Kurve usw.) ist eine Kurve W desselben Systems.

Wenn man auf eine beliebige Kurve, die nur nicht selbst eine zu dem Fundamentaldreiecke gehörige Kurve W sein soll, die zu einem W-Kurvensysteme gehörigen linearen Transformationen anwendet, so besteht die Umhüllungskurve der dadurch erzeugten Kurvenreihe aus lauter Kurven W des gegebenen Systems.

— Besonders auf den letzten Satz machen wir aufmerksam, da wir ihn in der Folge benutzen werden. —

§ 3.

Aufstellung solcher geschlossener Systeme vertauschbarer linearer Transformationen, welche die bisher behandelten umfassen.

11. Wir legen uns jetzt die Frage vor, ob die einfach unendlichen geschlossenen Systeme von Transformationen I, II, ... V noch in umfassenderen (mindestens zweifach unendlichen) Systemen enthalten sind,

[18]) [Von den hier möglichen Singularitäten handelt u. a. Liebmann in III. D 8 der math. Enzyklopädie (Geometrische Theorie der Differentialgleichungen, S. 508). Es sind dieselben, welche Poincaré später in seinen bekannten Untersuchungen über den gestaltlichen Verlauf der Integralkurven von Differentialgleichungen erster Ordnung als „noued“, „col“, „centre“ und „foyer“ bezeichnet hat. Die unendlich ferne Gerade in ihrer Beziehung zur logarithmischen Spirale ist für den Projektiviker das einfachste Beispiel eines Poincaréschen „Grenzzyklus“. Dabei ist sie, wie aus den Entwicklungen des Textes hervorgeht, das dualistische Gegenstück zu dem „foyer“, den die Spirale in unendlich vielen immer enger werdenden Windungen umkreist. — Übrigens hat Lie seinerzeit jedes Eingehen auf diese gestaltlichen Verhältnisse abgelehnt. Ganz erfüllt von dem Interesse für die allgemeinen Eigenschaften, welche die W-Kurve infolge der kontinuierlichen Schar von Kollineationen, die sie in sich überführen, besitzt, tat er den charakteristischen Ausspruch: „Die Kurve weiß selbst am besten, wie sie sich in singulären Punkten zu verhalten hat.“ An dem Wortlaut des Textes, den ich für diese Abhandlung in Göttingen hergestellt habe, hat er dann nichts mehr geändert. K.]

die, gleich ihnen, die beiden Eigenschaften der Nr. 2 besitzen: daß die ihnen angehörigen Transformationen untereinander vertauschbar sind und miteinander kombiniert eine wieder dem Systeme angehörige Transformation ergeben. Insonderheit fragen wir nach den umfassendsten solchen Systemen, d. h. denjenigen, die nicht noch in weiteren Systemen gleicher Beschaffenheit enthalten sind. In unserem Falle, in welchem nur zwei Variable vorkommen, ergibt sich, daß die umfassendsten Systeme der gesuchten Beschaffenheit immer nur zweifach unendlich sind[19]), so daß es also zwischen den seither betrachteten einfach unendlichen und diesen umfassendsten keine Mittelstufe mehr gibt.

12. Zum Zwecke der Aufstellung der hier in Rede stehenden Systeme betrachten wir zunächst zwei beliebige lineare Transformationen, A und B.

Damit dieselben vertauschbar sind, müssen die Elemente der Ebene, welche bei der einen fest bleiben, auch für die andere fest sein oder durch dieselbe unter sich vertauscht werden.

Sei nämlich o ein festes Element von A; durch die Transformation B gehe es in p über. Wenden wir also auf o zuerst A, dann B an, so erhalten wir p. Wenden wir hingegen zuerst B, dann A an, so erhalten wir dasjenige Element, in welches p durch A übergeht. Dies aber muß p selbst sein, weil die Art der Aufeinanderfolge von A und B gleichgültig sein soll. p also bleibt bei der Transformation A unverändert, w. z. b. w.

Die Transformationen der hier gesuchten Systeme sollen nun nicht nur miteinander vertauschbar sein, sondern kontinuierlich sich aneinander anschließen. Damit ist die Möglichkeit aufgehoben, daß die festen Elemente einer einem solchen Systeme angehörigen Transformation — wofern dieselben nicht in kontinuierlicher, sondern nur in diskreter Aufeinanderfolge vorhanden sind — durch irgendeine andere ihm angehörige Transformation unter sich vertauscht werden; vielmehr müssen dieselben unverändert bleiben.

13. Dieser Satz erlaubt nun sofort alle geschlossenen Systeme vertauschbarer linearer Transformationen der Ebene, die nicht noch in umfassenderen enthalten sind, aufzustellen.

[19]) Daß die Zahl der in diesen Systemen vorkommenden Transformationen, nämlich ∞^2, mit der Zahl der Variabeln stimmt, ist eine besondere Eigenschaft der Zahl 2. Für drei Variable gibt es z. B. neben einer größeren Zahl dreifach unendlicher Systeme ein vierfach unendliches. Dasselbe stellt sich etwa in der folgenden Form dar:

$$x' = x + az + b,$$
$$y' = y + cz + d,$$
$$z' = z.$$

Findet sich unter den Transformationen des Systems *eine*, welche der ersten Klasse angehört, so muß für *alle* Transformationen des Systems das betreffende Fundamentaldreieck ungeändert bleiben. Ein solches System kann also höchstens diejenigen Transformationen umfassen, welche diese Eigenschaft besitzen, nicht aber noch andere. Diese Transformationen sind nun durch (1) dargestellt,

$$x' = ax,$$
$$y' = by,$$

wenn man a, b nicht mehr die Bedeutung von Konstanten, sondern von Parametern gibt. Die Kombination irgend zweier solcher Transformationen mit den Parametern a, b und a', b' ergibt aber, wie man unmittelbar verifiziert, eine neue Transformation des Systems, nämlich diejenige mit den Parametern aa', bb', und zwar unabhängig von der Reihenfolge der beiden Transformationen dieselbe.

Die zweifach unendlich vielen Transformationen:

$$\text{A.}\quad \begin{aligned} x' &= ax, \\ y' &= by \end{aligned}$$

bilden also ein geschlossenes System vertauschbarer linearer Transformationen, das nicht noch in einem umfassenderen enthalten ist.

In diesem Systeme sind alle einfach unendlichen Systeme I. enthalten. *Andererseits sind die Systeme I. in keinem anderen geschlossenen Systeme vertauschbarer linearer Transformationen enthalten als eben in diesem.* Denn nach der vorstehenden Nummer müßte ein solches System in A. enthalten sein, also eine Zwischenstufe zwischen Systemen I. und A. bilden. Eine solche Zwischenstufe gibt es aber nicht, da A. nur zweifach unendlich viele Transformationen enthält, während I. bereits einfach unendlich viele enthält.

Wie man von den Transformationen erster Klasse zur Aufstellung des Systems A. gelangt, kommt man von den Transformationen zweiter und dritter Klasse zu den folgenden beiden:

$$\text{B.}\quad \begin{aligned} x' &= ax, \\ y' &= y + b; \end{aligned}$$
$$\Gamma.\quad \begin{aligned} x' &= x + a, \\ y' &= y + ax + b. \end{aligned}$$

Die Beziehung von B. und Γ. zu den einfach unendlichen Systemen II., III. ist ganz dieselbe, wie die von A. zu den Systemen I., so daß wir dieselbe hier nicht weiter auseinandersetzen.

14. Bei den Transformationen vierter und fünfter Klasse wird eine besondere Untersuchung nötig, weil bei ihnen feste Elemente in kontinuierlicher Aufeinanderfolge vorhanden sind.

Transformationen der *vierten* Klasse können, nach dem Satze der 12. Nummer, nur vertauschbar sein, wenn entweder beide dasselbe Zentrum und dieselbe Achse der Perspektivität besitzen, oder wenn das Zentrum der einen bzw. auf der Achse der anderen liegt. In beiden Fällen sind die beiden Transformationen auch wirklich vertauschbar, wie man leicht verifiziert. Aber man wird dabei zu nichts Neuem geführt. In dem ersten Falle kommt man überhaupt nur zu dem einfach unendlichen Systeme IV.; in dem zweiten wird man zu dem Systeme A. geführt, welches man offenbar aus den beiden perspektivischen Transformationen:

$$\begin{aligned} x' &= ax, \\ y' &= y, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= by \end{aligned}$$

zusammensetzen kann.

Ebensowenig gelingt es durch Kombination von Transformationen der vierten und fünften Klasse neue geschlossene Systeme vertauschbarer Transformationen zusammenzusetzen. Nach dem Satze der 12. Nummer wird man, wenn man dies versucht, zu dem Systeme B. zurückgeführt, welches man als aus der Kombination der perspektivischen Transformation:

$$x' = ax,$$
$$y' = y,$$

mit der Translation:

$$x' = x,$$
$$y' = y + b,$$

entstanden ansehen kann.

Dagegen lassen sich aus Transformationen *fünfter* Klasse zwei neue, auch wieder zweifach unendliche Systeme der gesuchten Art bilden.

Zwei Transformationen fünfter Klasse können nämlich nach Nr. 12 vertauschbar sein, sowohl wenn die feste Punktreihe, als auch wenn das feste Strahlbüschel für beide identisch ist. Man verifiziert unmittelbar, daß sie unter einer dieser Voraussetzungen auch wirklich vertauschbar sind und miteinander kombiniert eine neue Transformation gleicher Art erzeugen. Wir haben also zwei neue, wiederum zweifach unendliche Systeme der gesuchten Art.

Das eine umfaßt alle Transformationen der fünften Klasse, bei welchen dieselbe Punktreihe fest bleibt. Es mag diese Punktreihe mit der unendlich weit entfernten geraden Linie zusammenfallen. Dann sind die Transformationen des Systems dargestellt durch:

$$\Delta.\quad \begin{aligned} x' &= x + a, \\ y' &= y + b. \end{aligned}$$

Ein Beispiel gibt die Gesamtheit der Translationen der Ebene.

Das andere umfaßt alle Transformationen derselben Klasse, bei denen das feste Strahlbüschel dasselbe ist. Wählt man für das letztere die zur Y-Achse parallelen Geraden, so sind die Transformationen des Systems gegeben durch:

$$\text{E.}\quad \begin{aligned} x' &= x, \\ y' &= y + ax + b. \end{aligned}$$

15. Wenn wir zusammenfassen, sind wir zu dem folgenden Resultate gelangt:

Es gibt in der Ebene fünf verschiedene zweifach unendliche geschlossene Systeme von unter sich vertauschbaren linearen Transformationen: A., B., Γ., Δ., E.

Dieselben sind nicht noch in umfassenderen Systemen derselben Beschaffenheit enthalten.

Transformationen erster, zweiter und dritter Klasse sowie die aus ihnen gebildeten einfach unendlichen Systeme I., II., III. finden sich nur bezüglich in den Systemen A., B., Γ.

Transformationen vierter Klasse und die aus solchen gebildeten einfach unendlichen Systeme IV. finden sich in A. *und* B.*; Transformationen fünfter Klasse und die aus ihnen gebildeten einfach unendlichen Systeme V. finden sich in* B., Γ., Δ., E.

Wir werden nun im folgenden die W-Kurven betrachten nicht mit Bezug auf das einfach unendliche System I., ... V., durch dessen Transformationen sie in sich übergehen, sondern mit Bezug auf das zweifach unendliche A., ..., E., welchem das betreffende einfach unendliche angehört: wir werden uns ein solches zweifach unendliches System gegeben denken und diejenigen W-Kurven in Untersuchung ziehen, deren zugehörige einfach unendliche Systeme in diesem enthalten sind.

Solcher W-Kurven gibt es für jedes der Systeme A., B., ..., E. zweifach unendlich viele.

Für A., B., Γ., Δ. sind dieselben durch die Gleichungen Nr. I., II., III., IV. dargestellt, wenn man den in denselben vorkommenden Konstanten beliebige Werte beilegt. Nicht eingeschlossen in diese Darstellung sind für die vier Systeme jedesmal einfach unendlich viele W-Kurven, nämlich (vgl. Nr. 7) diejenigen *Punkte*, welche durch unendlich viele Transformationen des Systems unverändert bleiben. Es sind dies für A., B., Γ. die auf den Seiten der bzw. Fundamentaldreiecke gelegenen Punkte, für Δ. die Punkte der bei allen, Δ. angehörigen, Transformationen festen Punktreihe. Diese Punkte lassen sich nicht durch *eine* Gleichung darstellen, weil wir von Punkt-Koordinaten Gebrauch machen. Würden wir dagegen Linien-Koordinaten anwenden, so hätte man sofort die Darstellung dieser Punkte durch eine Gleichung: es würde aber unmöglich, diejenigen W-Kurven, welche etwa gerade Linien sind, entsprechend darzustellen. Insbesondere für das System Δ., dessen zweifach unendlich viele W-Kurven — bis auf die eben genannten Punkte — die geraden Linien der Ebene sind, würde man die W-Kurven im allgemeinen gar nicht, sondern nur diese einfach unendlich vielen Punkte darstellen können. Das ist nun gerade, was bei dem System E., das dem Systeme Δ. dualistisch gegenübersteht, bei dem Gebrauche von Punktkoordinaten stattfindet. Man findet ohne weiteres einfach unendlich viele gerade Linien, welche W-Kurven sind, nämlich die geraden Linien des festen Büschels:

$$x = x_0.$$

Aber außerdem gibt es zweifach unendlich viele W-Kurven, die sich der Darstellung durch eine Gleichung entziehen: das sind sämtliche Punkte der Ebene. Das System E. hat darum den anderen gegenüber keine Sonderstellung; daß es hier eine solche zu besitzen scheint, beruht auf dem (zufälligen) Gebrauche von Punktkoordinaten.

In den folgenden Betrachtungen wird von dem Systeme A. ausgegangen werden; indes übertragen sich dieselben ohne weiteres auf die übrigen Systeme. Nur muß man dabei berücksichtigen, daß in dem Falle Δ. die geraden Linien, im Falle E. die Punkte der Ebene die W-Kurven sind, und man daher nicht, wie bei A., B., Γ. im ersten Falle die geraden Linien, im zweiten die Punkte als Beispiele für beliebige Kurven betrachten darf. Es ist übrigens so einfach, die Betrachtungen, welche wir für das System A. machen werden, auf B., Γ., Δ., E. zu übertragen, daß wir diese letzteren Systeme fortan ganz beiseite lassen werden.

§ 4.

Die W-Kurven gehen durch eine unendliche Reihe von Transformationen (geometrischen Verwandtschaften) in W-Kurven desselben Systems über.

16. Die Gleichung der W-Kurven, die zu dem zweifach unendlichen Systeme A gehören, ist von der folgenden Form (vgl. Nr. 6):

$$(13)\qquad Ax^k = By^l,$$

wo A, B, k, l irgendwelche Konstanten bedeuten. Diejenigen W-Kurven, welche dasselbe k, l besitzen, gehen durch dieselben einfach unendlich vielen linearen Transformationen in sich über. Wir bezeichneten früher solche W-Kurven als W-Kurven eines Systems und wir wollen hier diese Bezeichnung beibehalten, da ja wohl keine Verwechselung mit dem zweifach unendlichen Systeme A., dem alle W-Kurven, die wir hier betrachten, angehören, möglich ist.

Aus der Form der Gleichung (13) ersieht man nun unmittelbar: *daß die W-Kurven durch eine Anzahl von Transformationen, die noch* *jedesmal zwei willkürliche Konstanten einschließen, in W-Kurven desselben Systems, bzw. bei passender Bestimmung der beiden Konstanten unendlich oft in sich selbst übergeführt werden.*

Dies ist zunächst der Fall für die linearen Transformationen von A.:

$$x' = ax,$$
$$y' = by,$$

es ist allgemeiner der Fall für die Transformationen:

$$x' = ax^m,$$
$$y' = by^m,$$

wo m irgendeine Zahl ist.

Es ist ferner so hinsichtlich der Umformung durch reziproke Polaren mit Bezug auf einen Kegelschnitt, der das Fundamentaldreieck von A. zum Polardreieck hat. Damit nämlich eine gerade Linie:

$$tx + uy + 1 = 0,$$

Tangente der Kurve (13) sei, erhält man die Bedingung (Tangentialgleichung der Kurve):

$$A' t^k = B' u^l,$$

wo A', B' aus A, B, k, l zusammengesetzt sind. Eine solche Gleichung entsteht aus (13), indem man setzt:

$$x = at,$$
$$y = bu,$$

und diese Transformation stellt die Umformung durch reziproke Polaren hinsichtlich des Kegelschnittes dar:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + 1 = 0,$$

der ein beliebiger Kegelschnitt ist, für welchen das Fundamentaldreieck Polardreieck ist.

Ferner haben die W-Kurven dieselbe Eigenschaft hinsichtlich derjenigen Transformationen, die sich aus den genannten zusammensetzen lassen usf.

Wir werden nun im nachstehenden, anknüpfend an die Erzeugung der W-Kurven, auf geometrischem Wege den Grund dieses Verhaltens suchen. Dabei werden wir zur Aufstellung einer unbegrenzten Reihe von Transformationen, oder, wie wir, weil bei ihnen ein Wechsel des Raumelementes eintritt, lieber sagen wollen, geometrischen Verwandtschaften gelangen, durch die jedesmal die W-Kurven in W-Kurven desselben Systems, bzw. bei passender Wahl der in denselben vorkommenden zwei willkürlichen Konstanten einfach unendlich oft in sich selbst übergehen. *Diese Verwandtschaften umfassen eine große Zahl sonst angewandter*

Verwandtschaften; abgesehen von ihrer Beziehung zu den W-Kurven, die hier in den Vordergrund tritt, scheinen dieselben auch darum Interesse zu besitzen, weil durch ihre Aufstellung diese spezielleren Verwandtschaften auf einen einheitlichen Algorithmus zurückgeführt werden. Das Wesentliche bei diesen Verwandtschaften ist, daß sie nach einer festen Regel erzeugt werden, indem wir von den zu dem Fundamentaldreiecke gehörigen linearen Transformationen als Grundoperationen ausgehen. In ähnlicher Weise kann man an jedes geschlossene System vertauschbarer Transformationen bei beliebig viel Veränderlichen einen Verwandtschaftszyklus anknüpfen. Die hiermit angedeutete Theorie scheint an und für sich beachtenswert zu sein.

17. Wir betrachten zunächst die Transformationen:

$$x' = ax^m, \quad y' = by^m. \tag{14}$$

Die Punkte der XY-Ebene, sowie die der $X'Y'$-Ebene, kann man sich — und diese Vorstellungsweise ist hier für uns fundamental — in der Art und Weise entstehend denken, daß man von einem Punkte x_0, y_0 bzw. x_0', y_0' als gegeben ausgeht und auf denselben alle zu dem Fundamentaldreiecke von A. gehörigen linearen Transformationen anwendet.

Gemäß dieser Anschauung kann man nun in der folgenden Weise eine Beziehung (Verwandtschaft) zwischen den beiden Ebenen feststellen.

Die Punkte x_0, y_0 und x_0', y_0' betrachte man als entsprechend. Man betrachte ferner als entsprechend jedesmal diejenigen Punkte x, y und x', y', welche aus den gegebenen durch *dieselbe* zu dem Fundamentaldreieck von A. gehörige lineare Transformation hervorgehen. Ist also etwa $x = ax_0$, $y = by_0$, so ist $x' = ax_0'$, $y' = by_0'$. Die in dieser Weise festgelegte Beziehung zwischen den beiden Ebenen ist keine andere, als die durch eine lineare Transformation, welche zu dem Fundamentaldreieck gehört, ausgedrückte Verwandtschaft. In der Tat, bei dem angegebenen Verfahren ist immer $\frac{x}{x_0} = \frac{x'}{x_0'}$, $\frac{y}{y'} = \frac{y'}{y_0'}$ und diese Formeln stellen eben eine solche lineare Transformation dar. Worauf es aber hier ankommt, ist, daß man bei dieser Auffassung der linearen Verwandtschaft ohne weiteres einsieht, daß W-Kurven durch dieselbe in W-Kurven desselben Systems übergeführt werden. Transformiert man nämlich den Punkt x_0, y_0 durch solche zu dem Fundamentaldreiecke gehörige lineare Transformationen, daß er auf einer W-Kurve fortrückt, so bewegt sich der entsprechende Punkt x_0', y_0' notwendig auf einer W-Kurve desselben Systems, da er durch ganz dieselben linearen Transformationen versetzt wird. Zugleich aber sieht man ein, daß, wenn x_0, y_0 und x_0', y_0' von vornherein auf derselben in Betracht kommenden W-Kurve liegen, daß dann diese W-

Kurve und auch alle W-Kurven desselben Systems in sich selbst übergeführt werden. — Wir machen noch darauf aufmerksam, was auch für alle im folgenden aufzustellenden Verwandtschaften gilt, daß die Art der Beziehung unverändert dieselbe bleibt, wenn wir, statt von x_0, y_0 und x_0', y_0' als gegebenen entsprechenden Punkten auszugehen, von irgendeinem anderen Punktepaare ausgegangen wären, das aus x_0, y_0 und x_0', y_0' durch dieselbe zu dem Fundamentaldreiecke gehörige lineare Transformation hervorgeht.

Wir wollen wieder von x_0, y_0 und x_0', y_0' als gegebenen, einander entsprechenden Punkten ausgehen. Dem Punkte x, y, der aus x_0, y_0 durch eine gewisse zu dem Fundamentaldreieck gehörige Operation hervorgeht, wollen wir denjenigen Punkt x', y' zuordnen, der sich aus x_0', y_0' nicht durch dieselbe Transformation, sondern *durch m-malige Wiederholung derselben Transformation* ergibt. Sei $x = a x_0$, $y = b y_0$, so wird $x' = a^m x_0'$, $y' = b^m y_0'$. Eliminiert man hieraus a und b, so erhält man:

$$\frac{x'}{x_0'} = \frac{x^m}{x_0^m}, \qquad \frac{y'}{y_0'} = \frac{y^m}{y_0^m}.$$

Die so festgelegte Verwandtschaft ist also gerade von der unter (14) *dargestellten Art.*

Nun wende man auf den Punkt x_0, y_0 solche zu dem Fundamentaldreieck gehörige lineare Transformationen an, daß er eine bestimmte W-Kurve durchläuft. Dann wird x_0', y_0' eine W-Kurve desselben Systems durchlaufen. Denn die Reihe der Transformationen, durch welche die W-Kurven eines Systems in sich übergehen: $x = A^\lambda x_0$, $y = B^\lambda y_0$, und die Reihe der Transformationen, die durch m-malige Wiederholung derselben entstehen: $x = A^{\lambda m} x_0$, $y = B^{\lambda m} y_0$, sind in ihrer Gesamtheit nicht voneinander verschieden, und können es auch nicht sein, da ja überhaupt die Reihe dieser Transformationen durch fortwährende Wiederholung einer (unendlich kleinen) Transformation entsteht. Der Punkt x_0', y_0' wird also eine W-Kurve desselben Systems durchlaufen, wie der Punkt x_0, y_0, nur, um uns so auszudrücken, m-mal so schnell.

Es ist also bewiesen, daß W-Kurven durch eine Transformation (14) *in W-Kurven desselben Systems übergehen.*

Wählt man insbesondere die Punkte x_0, y_0 und x_0', y_0' auf der W-Kurve, die man betrachtet, *so geht dieselbe durch die Transformation in sich über.*

18. Die allgemeineren Verwandtschaften, in welchen die in der letzten Nummer betrachteten als eine besondere Gattung enthalten sind, erhält man in ganz ähnlicher Weise, wie diese letzteren, indem man gleichzeitig an Stelle des Punktes ein anderes Gebilde als Element der Ebene einführt.

Wir wollen nämlich als Elemente der Ebene die zweifach unendlich vielen Kurven betrachten, die aus einer beliebig[20]) *gewählten:*

$$\varphi(x y) = 0,$$

durch die zu dem Fundamentaldreiecke gehörigen linearen Transformationen hervorgehen.

Die Gleichung dieses Kurvensystems wird sein, unter α, β Parameter verstanden:

$$\varphi(\alpha x, \beta y) = 0.$$

Die Parameter α, β mag man geradezu als *Koordinaten* der Kurven betrachten.

Eine Gleichung zwischen α, β stellt, sagen wir, diejenige Kurve dar, die von solchen Kurven φ umhüllt wird, deren α, β der Gleichung genügen.

Die allgemeineren Verwandtschaften bestehen nun darin, daß man einem Punkte x', y' eine Kurve φ entsprechen läßt, wo:

$$x' = a\alpha^m, \qquad y' = b\beta^m. \tag{15}$$

In Worten ausgesprochen: *Man ordne einem willkürlich gewählten Anfangspunkte x_0', y_0' eine bestimmte Kurve φ_0 zu. Eine jede andere Kurve φ geht aus φ_0 durch eine bestimmte zu dem Fundamentaldreiecke gehörige lineare Transformation hervor. Man lasse ihr denjenigen Punkt x', y' entsprechen, der aus x_0', y_0' durch m-malige Wiederholung derselben Transformation entsteht.*

Den Beweis, daß durch eine solche Transformation W-Kurven in W-Kurven desselben Systems übergeführt werden, mag man dadurch in zwei Schritte zerlegen, daß man die Gleichungen (15) durch die Aufeinanderfolge der beiden Gleichungen ersetzt:

$$x' = a x^m, \qquad y' = b y^m, \tag{16}$$

$$x = \alpha, \qquad y = \beta. \tag{17}$$

Durch (16) gehen die W-Kurven in W-Kurven desselben Systems über, wie in der vorstehenden Nummer gezeigt ist. Es ist also nur noch von (17) zu zeigen. In Worten: es ist zu zeigen, daß eine beliebige Kurve φ eine W-Kurve, und zwar eine W-Kurve desselben Systems umhüllt, wenn man auf sie diejenigen zu dem Fundamentaldreiecke gehörigen linearen Transformationen anwendet, vermöge deren ein Punkt x, y eine bestimmte W-Kurve durchläuft. Das aber ist der letzte Satz der 10. Nummer.

Wählt man den Anfangspunkt x_0, y_0 und die Kurve φ_0 so, daß der erstere auf der W-Kurve liegt, die man betrachtet, die zweite eben diese

[20]) Ausgeschlossen bleibt dabei die Annahme, daß die Kurve $\varphi = 0$ eine zu dem Fundamentaldreiecke gehörige W-Kurve sei. In diesem Falle würde man nur einfach unendlich viele Kurven φ erhalten.

Kurve berührt, so geht die W-Kurve durch die Verwandtschaft (15) in sich selbst über. Es muß dabei nur eine Bemerkung hinzugefügt werden. Die den Punkten der W-Kurve entsprechenden φ umhüllen die W-Kurve, aber sie können recht wohl noch weitere Umhüllungskurven haben. Diese weiteren Umhüllungskurven sind dann aber immer W-Kurven desselben Systems.

19. Wir wollen den Satz: daß W-Kurven durch die Verwandtschaften (15) in W-Kurven desselben Systems übergehen, auch noch analytisch beweisen.

Eine solche Verwandtschaft ist analytisch durch eine sogenannte aequatio directrix[21]) dargestellt. Man erhält dieselbe, wenn man die Werte für α und β aus (15) in die Gleichung der Kurve:

$$\varphi(\alpha x,\ \beta y) = 0$$

einträgt. So entsteht:

$$\varphi\left[x\left(\frac{x'}{a}\right)^{\frac{1}{m}},\ y\left(\frac{y'}{b}\right)^{\frac{1}{m}}\right] = 0. \tag{18}$$

Betrachtet man in dieser Gleichung x', y' als fest, so stellt sie das dem Punkte x', y' entsprechende φ dar. Umgekehrt, hält man x, y fest, so stellt sie diejenige Kurve dar, deren Punkten solche Kurven φ entsprechen, welche durch x, y hindurchgehen.

Einem bestimmten Punkte x', y' oder x, y wird durch eine aequatio directrix erst dann ein bestimmter Punkt x, y oder x', y' zugeordnet, wenn man $\frac{dy'}{dx'}$ oder $\frac{dy}{dx}$ kennt. Und zwar bestimmt sich, wenn man x, y, $\frac{dy}{dx}$ kennt, x', y', $\frac{dy'}{dx'}$ und umgekehrt. Es ist dies geometrisch evident. Denn dem Punkte x, y entspricht zunächst eine ganze Kurve von Punkten x', y'. Dadurch, daß man von x, y zu einem benachbarten Punkte übergeht, dem seinerseits eine benachbarte Kurve entspricht, fixiert man auf dieser Kurve, als Durchschnittspunkte mit der benachbarten, eine diskrete Mannigfaltigkeit von Punkten x', y'. Aber gleichzeitig ist für diese Punkte die Fortschreitungsrichtung, d. h. $\frac{dy'}{dx'}$, gegeben. Sie fällt nämlich bzw. in die Tangenten der beiden benachbarten Kurven in ihren Durchschnittspunkten. Analytisch stellt sich dies so. Sei

$$\varphi = 0$$

die aequatio directrix. Betrachtet man x, y als veränderlich, so kommt:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cdot dy = 0.$$

[21]) Vgl. Plücker: Analytisch-geometrische Entwicklungen. Band 2, S. 265 (1831).

Sieht man dagegen x', y' als veränderlich an, so hat man:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'}\cdot dx' + \frac{\partial\varphi}{\partial y'}\cdot dy' = 0.$$

Aus den vorstehenden drei Gleichungen kann man entweder x, y, $\frac{dy}{dx}$ durch x', y', $\frac{dy'}{dx'}$ oder x', y', $\frac{dy'}{dx'}$ durch x, y, $\frac{dy}{dx}$ bestimmen.

In unserem Falle hat man nun offenbar:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \left(\frac{x'}{a}\right)^{\frac{1}{m}}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\left[x\left(\frac{x'}{a}\right)^{\frac{1}{m}}\right]}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \left(\frac{y'}{b}\right)^{\frac{1}{m}}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial\left[y\left(\frac{y'}{b}\right)^{\frac{1}{m}}\right]},$$

und

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x'} = \frac{1}{m}\,\frac{x\,x'^{\frac{1}{m}-1}}{a^{\frac{1}{m}}}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\left[x\left(\frac{x'}{a}\right)^{\frac{1}{m}}\right]}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y'} = \frac{1}{m}\,\frac{y\,y'^{\frac{1}{m}-1}}{b^{\frac{1}{m}}}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\left[y\left(\frac{y'}{b}\right)^{\frac{1}{m}}\right]}.$$

Hieraus schließt man, unabhängig von der besonderen Form, die φ hat:

$$\frac{dx}{x} : \frac{dy}{y} = \frac{dx'}{x'} : \frac{dy'}{y'}.$$

Nun aber ist die Differentialgleichung der W-Kurven (Nr. 5):

$$\frac{dx}{x} = C\cdot\frac{dy}{y}.$$

Dieselbe bleibt also bei der Umformung ungeändert.

Mit anderen Worten: durch die Umformung gehen W-Kurven in W-Kurven desselben Systems über, w. z. b. w.

20. Auf dieselbe Art, wie wir in Nr. 18 zwei Punkte, in Nr. 19 einen Punkt und eine Kurve einander zugeordnet haben, kann man auch zwei Kurven einander entsprechen lassen. Sei die eine Kurve:

$$\varphi(x,\ y) = 0,$$

die andere:

$$\psi(x,\ y) = 0.$$

Dann würde man die zweifach unendlich vielen Kurven, die aus $\varphi = 0$ durch die zu dem Fundamentaldreiecke gehörigen linearen Transformationen hervorgehen, nämlich:

$$\varphi(\alpha x,\ \beta y) = 0$$

den zweifach unendlich vielen, die sich auf gleiche Weise aus $\psi = 0$ ergeben, nämlich:

$$\psi(\alpha' x,\ \beta' y) = 0$$

entsprechend der Gleichung (15) in der folgenden Art zuordnen:

$$\alpha' = a\,\alpha^m, \quad \beta' = b\,\beta^m,$$

und dadurch eine Verwandschaft begründen. Durch eine solche Verwandtschaft würden dann wieder W-Kurven in W-Kurven desselben Systems übergehen.

Allein diese Verwandtschaften, die begrifflich die in Nr. 18 und Nr. 19 aufgestellten Verwandtschaften umfassen, insofern man den Punkt als eine Kurve spezieller Art ansehen kann, sind von den bisher behandelten nicht verschieden. Den unendlich vielen Kurven ψ nämlich, welche durch einen Punkt gehen, entsprechen unendlich viele Kurven φ und diese haben eine Umhüllungskurve $\Phi = 0$ (die in besonderen Fällen auch ein Punkt sein kann). Die Beziehung der Punkte der Ebene zu den ihnen zugehörigen Φ ist dabei offenbar ganz von der in der Nr. 19 betrachteten Art. Weiter ist aber auch klar, daß man die Verwandtschaft, welche durch den Übergang von den ψ zu den φ definiert war, ebenso gut durch den Übergang von den Punkten zu den entsprechenden Φ definieren kann. Es folgt das aus dem nachstehenden Räsonnement, das übrigens in ganz gleicher Weise bei allen Verwandtschaften seine Stelle findet, welche zweifach unendlich viele Kurven der Ebene zweifach unendlich vielen anderen Kurven entsprechen lassen.

Den Kurven φ, welche irgendeine Kurve C berühren, mögen ψ entsprechen, die eine andere Kurve C' berühren. Durch einen Punkt von C gehen zwei konsekutive ψ, denen zwei konsekutive φ entsprechen, welche C' berühren. Dieselben φ müssen aber auch das dem Punkte zugehörige Φ berühren, da ja das Φ die Enveloppe aller φ ist, die solchen ψ entsprechen, die durch den Punkt gehen. Mithin wird C' auch von Φ berührt. Mit anderen Worten: Wenn der Punkt die Kurve C durchläuft, so umhüllt die Kurve Φ die Kurve C'. Die Verwandtschaft zwischen den ψ und den φ ist also dieselbe, wie die zwischen den Punkten und den Φ, w. z. b. w.

§ 5.

Aufzählung einiger unter den allgemeinen Verwandtschaften enthaltenen besonderen Fälle.

21. Wir wollen hier einige unter den eben aufgestellten Verwandtschaften enthaltene besondere Fälle herausheben, die besonderes Interesse zu haben scheinen.

Zunächst mögen wir bemerken, daß wir in der im Eingange erwähnten Arbeit in den Comptes Rendus die beiden Fälle, welche den Werten $m = +1$ und $m = -1$ entsprechen, unter dem Namen der *kogredienten* und *kontragredienten* Verwandtschaften behandelt haben. Die kontragredienten Verwandtschaften haben zunächst das größere Interesse. Für sie gilt nämlich der Satz: *daß sie zweimal hintereinander angewandt*

zur Identität führen, daß also bei ihnen die Beziehung zwischen dem ursprünglichen und dem verwandten Gebilde eine gegenseitige ist.

Für die betreffende Verwandtschaft der Nr. 18 überzeugt man sich davon unmittelbar aus der Gleichung (14). Setzt man in derselben $m = -1$, so kommt:

$$x x' = a, \quad y y' = b.$$

Eine Vertauschung von x, y mit x', y' läßt diese Formeln ungeändert. Wird man also durch sie von x, y zu x', y' geführt, so gelangt man bei Wiederholung derselben von x', y' zu x, y zurück.

Dasselbe gilt für die betreffenden Verwandtschaften der Nr. 19. Für $m = 1$ wird die aequatio directrix (18):

$$\varphi\left(\frac{x x'}{a}, \frac{y y'}{b}\right) = 0$$

und ist also wieder mit Bezug auf x und x', y und y' symmetrisch, was denselben Schluß wie im vorhergehenden Falle begründet[22]).

22. Die allgemeinen, in Nr. 18 auseinandergesetzten Verwandtschaften sind vielfach Gegenstand geometrischer Untersuchung gewesen. Wir verweisen insbesondere auf Salmons Treatise on the Higher Plane Curves, wo S. 238 bis 242 eine Zusammenstellung derartiger Forschungen gegeben ist.

Für $m = +1$ sind diese Verwandtschaften, wie schon gesagt, von der kollinearen Verwandtschaft nicht verschieden.

Für $m = -1$ geben sie die bekannte Verwandtschaft, welche eine gerade Linie in einen durch die drei Ecken des Fundamentaldreiecks gehenden Kegelschnitt verwandelt.

Besonderes Interesse haben diese Transformationen in dem Falle, daß zwei Ecken des Fundamentaldreiecks in die beiden Kreispunkte fallen. Dieselben lassen dann die Winkel[23]) der Ebene unverändert, ein Umstand, den Herr M. Roberts zur Ableitung einer Reihe schöner Sätze benutzt hat. Ist in diesem Falle insbesondere $m = -1$ und setzt man

[22]) In unserer Arbeit in den Comptes Rendus haben wir diesen Satz auf geometrische Weise begründet, indem wir das System Δ. aller Translationen zu Hilfe nahmen. In diesem Falle wird nämlich der Satz des Textes identisch mit dem Satze über relative Verschiebung: Wenn zwei Körper gegeneinander verschoben werden, so ist es gleichgültig, ob der eine ruht und der andere sich bewegt, oder ob der andere ruht und der erste sich im umgekehrten Sinne bewegt.

[23]) Es ist dies eine Folge davon, daß durch die Transformation die W-Kurven, d. h. in diesem Falle die logarithmischen Spiralen, in W-Kurven desselben Systems übergeführt werden. Die logarithmischen Spiralen zweier Systeme schneiden sich nämlich unter konstantem Winkel; bleiben bei der Transformation nun die Systeme ungeändert, so müssen es auch die Winkel tun. Es gilt diese Bemerkung auch für die in der folgenden Nummer betrachteten Verwandtschaften, soweit sie sich auf das Fundamentaldreieck der logarithmischen Spirale beziehen. — Die betreffende Arbeit von Herrn M. Roberts findet sich: Liouvilles Journal, Bd. 13 (1848).

gleichzeitig statt x $(-x)$, so hat man die Transformation der reziproken Radien. Im übrigen vergleiche man Salmon, die angeführte Stelle.

23. Unter den Verwandtschaften der Nr. 19 sind diejenigen besonders bemerkenswert, welche man erhält, wenn man für die Kutven $\varphi = 0$ gerade Linien nimmt. Dann entsprechen den Punkten der Ebene die geraden Linien derselben. Die Parameter α, β, welche wir als Koordinaten der Kurven φ auffaßten, sind dabei die reziproken Werte der gewöhnlichen Linienkoordinaten t und u.

A. Betrachten wir zunächst den Fall $m = -1$, d. h.

$$\begin{aligned} a t &= x, \\ b u &= y. \end{aligned} \tag{19}$$

Diese Formeln stellen die Verwandtschaft der reziproken Polaren hinsichtlich des Kegelschnittes:

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + 1 = 0$$

dar, d. h. also hinsichtlich eines Kegelschnittes, welcher das Fundamentaldreieck zum Polardreieck hat. Wir haben also den folgenden Satz, den wir, unmittelbar aus der Gleichung bewiesen, bereits in Nr. 19 anführten:

Die reziproke Polare einer W-Kurve hinsichtlich eines Kegelschnittes, der das Fundamentaldreieck zum Polardreieck hat, ist eine W-Kurve desselben Systems.

Hieran knüpft sich noch das folgende Korollar:

Die W-Kurve ist ihre eigene reziproke Polare hinsichtlich eines solchen Kegelschnitts, wenn sie von dem Kegelschnitte berührt wird[24].

Denn bei der durch einen solchen Kegelschnitt vermittelten Zuordnung von Punkt und gerader Linie entspricht einem Punkte der W-Kurve — nämlich dem Berührungspunkte mit dem Kegelschnitt — eine Tangente derselben Kurve — nämlich die Tangente im Berührungspunkte, und also (Nr. 18) allen Punkten der W-Kurve eine Tangente derselben Kurve.

Durch Übertragung früher aufgestellter Eigenschaften der W-Kurven vermöge der Theorie der reziproken Polaren finden wir unter anderen, was man übrigens vermöge der von uns immer gebrauchten Schlußweise ohne weiteres einsehen kann: *Das Doppelverhältnis der Tangente einer W-Kurve zu den drei geraden Linien, welche ihren Berührungspunkt mit den Ecken des Fundamentaldreiecks verbinden, ist konstant.* Wir

[24]) Für die logarithmische Spirale sagt dieser Satz aus: Die logarithmische Spirale ist ihre eigene reziproke Polare in bezug auf jede gleichseitige Hyperbel, deren Mittelpunkt in ihren Pol fällt, und welche sie berührt.

führen diesen Satz hier an, weil er für die logarithmische Spirale diejenige Eigenschaft ausspricht, die man gewöhnlich als Definition derselben gibt: daß nämlich für sie die Radiivektores vom Pole aus mit der Kurve gleiche Winkel bilden. — Man schließt ferner noch, daß dieses Doppelverhältnis dasselbe ist, welches der Berührungspunkt und die drei Durchschnittspunkte der Tangente mit den Seiten des Fundamentaldreiecks miteinander bilden, wie dies auch aus bekannten Eigenschaften des Dreiecks ersichtlich ist.

B. Sei zweitens $m = +1$. So sind die Formeln für die Verwandtschaft:

$$x t = a, \quad y u = b. \tag{20}$$

Man kann diese aus den Formeln

$$x x' = a, \quad y y' = b,$$

und

$$x' = t, \quad y' = u$$

zusammensetzen; die hier betrachtete Verwandtschaft entsteht also, wenn man die Verwandschaft

$$x x' = a, \quad y y' = b$$

mit der der reziproken Polaren verbindet.

Die Transformation (20), wie überhaupt jede Transformation, die nicht reziprok ist, kann in doppeltem Sinne aufgefaßt werden, je nachdem man von den x, y der ersten Ebene zu den t, u der zweiten, oder von den t, u der ersten zu den x, y der zweiten übergeht.

In dem ersten Falle läßt sie dem Punkte eine gerade Linie, der geraden Linie einen Kegelschnitt entsprechen, welcher die drei Seiten des Fundamentaldreiecks berührt. — In dem zweiten Falle entspricht der geraden Linie ein Punkt, dem Punkte ein Kegelschnitt, der durch die drei Ecken geht.

Es ist dabei ein besonderer Fall bemerkenswert. Derselbe entspricht der Annahme $a + b + 1 = 0$, also:

$$t x + u y + 1 = 0.$$

Alsdann liegen Punkt und entsprechende gerade Linie (unter beiden Annahmen) jedesmal vereinigt.

Unter diesen Fall gehört namentlich auch die Beziehung der Punkte der W-Kurven eines Systems zu deren Tangenten, wie man dies an der Gleichung der W-Kurven unmittelbar verifiziert. Die vorstehend ausgesprochenen Eigenschaften der Transformation (20) ergeben für diesen besonderen Fall die beiden Sätze:

Die Tangenten in den Schnittpunkten einer geraden Linie mit einer

W-Kurve berühren einen dem Fundamentaldreiecke eingeschriebenen Kegelschnitt[25]).

Die Berührungspunkte der von einem Punkte aus an eine W-Kurve gelegten Tangenten liegen auf einem durch die drei Ecken des Fundamentaldreiecks gehenden Kegelschnitt[26]).

Noch mag als ein besonderer Fall der durch (20) dargestellten Verwandtschaft die Beziehung angesehen werden, die Plücker in seinem „Systeme der analytischen Geometrie" (1835) S. 10 als Polarität hinsichtlich eines Dreiecks[27]) bezeichnet. Dieselbe entsteht aus (20), wenn man $a = b = 1$ nimmt. [Geometrisch ist diese Beziehung in folgender Weise definiert. Man verbinde einen Punkt der Ebene mit den drei Ecken des Fundamentaldreiecks durch drei gerade Linien. Auf jeder Dreiecksseite wird durch eine von den Verbindungslinien ein neuer Punkt ausgeschnitten. Man bilde den zu diesem Punkt in bezug auf die beiden in der betreffenden Seite liegenden Ecken harmonischen Punkt. So erhält man drei Punkte, auf jeder Dreiecksseite einen, die auf einer geraden Linie liegen. Diese Gerade ist die Plückersche Polare des gegebenen Punktes.]

§ 6.

Allgemeine Probleme, die sich an das Vorige anknüpfen.

24. Mit der im vorstehenden Paragraphen gegebenen Aufzählung spezieller Verwandtschaften schließen wir unsere Auseinandersetzungen über die *W*-Kurven. Es soll hier nur noch kurz angedeutet werden, zu welchen allgemeineren Problemen dieselben hinführen.

Indem wir auf einen Punkt alle Transformationen eines einfach unendlichen geschlossenen Systems vertauschbarer linearer Transformationen anwandten, erhielten wir die *W*-Kurven.

Aber statt des Punktes können wir eine beliebige Kurve wählen. Indem wir auf sie die nämlichen Transformationen anwenden, erhalten wir eine Kurvenreihe, deren Umhüllungskurve, wie schon gesagt, aus *W*-Kurven desselben Systems besteht. Diese Kurvenreihe nun können wir statt der Punktreihe, die wir seither betrachteten, in die Untersuchung einführen.

Wir können weiter gehen. Auf eine beliebig angenommene Kurve wende man die Transformationen eines geschlossenen zweifach unendlichen

[25]) Für die logarithmische Spirale ist dies eine Parabel, deren Brennpunkt in den Pol fällt.

[26]) Für die logarithmische Spirale ein durch den Pol gehender Kreis. Der Satz kommt darauf hinaus, daß im Kreise Peripheriewinkel auf gleichen Bogen konstant sind.

[27]) Man kann ein Dreieck als eine Kurve dritter Ordnung betrachten. Die dem Punkte zugeordnete Linie ist seine gerade Polare mit bezug auf diese Kurve.

Systems vertauschbarer linearer Transformationen an. Dann erhält man ein zweifach unendliches System von Kurven, und nach dessen Eigenschaften kann man fragen. Auf dasselbe wird ebenso wie auf die vorstehend genannten Kurvenreihen unsere Schlußweise Anwendung finden. Wenn wir seither nicht zur Betrachtung solcher Systeme als selbständiger geometrischer Gebilde geführt wurden, so liegt das daran, weil wir vom Punkte als Element der Ebene ausgingen. Ein System von zweifach unendlich vielen Punkten fällt nämlich mit der Gesamtheit der Punkte der Ebene zusammen und erscheint deswegen nicht als ein in der Ebene enthaltenes besonderes geometrisches Gebilde.

Implizite haben wir übrigens wiederholt von solchen Kurvensystemen gehandelt. Einmal betrachteten wir solche Systeme in Nr. 19 und Nr. 20 bei der Begründung der allgemeinen Verwandtschaften. Andererseits ist das, was wir ein System von *W*-Kurven genannt haben, eben ein solches System. Dasselbe umfaßt, im Gegensatze zu den allgemeinen Systemen dieser Art, nur einfach unendlich viele Kurven, weil seine Konstituenten, die *W*-Kurven, selbst durch einfach unendlich viele Transformationen in sich übergehen. Die *W*-Kurven eines Systems wurden durch die aufgestellten Verwandtschaften immer in *W*-Kurven desselben Systems übergeführt. Wir können das so aussprechen:

Die W-Kurvensysteme, als selbständige Gebilde aufgefaßt, bleiben bei den aufgestellten Verwandtschaften ungeändert.

Insofern die hier definierten Kurvensysteme durch ein geschlossenes System von zweifach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen, schließt sich ihre Untersuchung unmittelbar an das Studium der *W*-Kurven an, d. h. derjenigen Mannigfaltigkeiten, welche durch ein geschlossenes System von nur einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen. Hiermit ist zugleich das allgemeinste Problem angedeutet, unter welches sich die Untersuchung der *W*-Kurven als einfachster Fall subsumiert. Dasselbe lautet:

Man soll nach der im Eingange auseinandergesetzten Schlußweise die Eigenschaften solcher geometrischer Gebilde entwickeln, die aus einem willkürlich gewählten durch Anwendung geschlossener Systeme beliebig unendlich vieler unter sich vertauschbarer linearer Transformationen hervorgehen.

Es ist hier nicht unsere Absicht, auf diese Frage einzugehen; wir haben nur das allgemeine Problem bezeichnen wollen, unter welches die hier gegebenen speziellen Betrachtungen fallen.

§ 7.
Über die Integration gewisser Differentialgleichungen[28]).

25. In diesem letzten Paragraphen wollen wir einige Betrachtungen anstellen, die mit der Transformierbarkeit geometrischer Gebilde in sich selbst nahe zusammenhängen. Dieselben betreffen die Integration solcher Differentialgleichungen erster Ordnung mit zwei Variabeln, welche durch unendlich viele Transformationen in sich übergeführt werden.

Bekanntlich kann man die Veränderlichen in den sogenannten homogenen Differentialgleichungen:

$$(\alpha) \qquad \frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

ohne weiteres separieren. Denn man setze $\frac{y}{x} = t$, so wird $y = xt$ und $\frac{dy}{dx} = t + x\frac{dt}{dx}$, folglich verwandelt sich die Gleichung in die folgende:

$$t + x\frac{dt}{dx} = f(t), \quad \text{oder} \quad \frac{dt}{-t+f(t)} = \frac{dx}{x},$$

in welcher die Veränderlichen separiert sind.

Wir wollen den inneren Grund für diese Eigenschaft der Gleichungen (α) suchen.

Es mögen x, y Punktkoordinaten in der Ebene sein. Dann bestimmt die Gleichung (α) für jeden Punkt der Ebene eine Fortschreitungsrichtung. Diese Fortschreitungsrichtung ist nun für alle Punkte dieselbe, welche auf einer durch den Koordinatenanfangspunkt gehenden Geraden liegen. Denn (α) bleibt unverändert, wenn man statt x, y Multipla derselben, etwa ax, ay, setzt. Statt nun die Punkte der Ebene durch die Parallelen zur X- und Y-Achse zu bestimmen, kann man sie durch die Parallelen zur X-Achse und das vom Koordinatenanfangspunkte ausgehende Strahlbüschel festlegen. Dies ist gerade der Sinn der Substitution $y = xt$; t ist dabei ein Parameter für die Geraden des genannten Strahlbüschels. Durch Einführung von t an Stelle von y geht Gleichung (α) in eine neue Gleichung über:

$$(\beta) \qquad \frac{dt}{dx} = \varphi(x, t).$$

Von dieser Differentialgleichung weiß man nun: sie ändert sich nicht, wenn man statt x ein Multiplum ax setzt und t konstant läßt. Dadurch geht aber $\frac{dt}{dx}$ in $\frac{1}{a}\cdot\frac{dt}{dx}$ über. Es muß also auch $\varphi(x, t)$ bei dieser Substitution sich um einen Faktor $\frac{1}{a}$ ändern. Man hat somit:

$$\varphi(ax, t) = \frac{1}{a}\cdot\varphi(x, t).$$

[28]) [Dieser Paragraph geht inhaltlich ausschließlich auf Liesche Überlegungen zurück. K.]

Setzt man x gleich 1 und sodann a gleich x, so kommt:

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{x}\varphi(1, t) = \frac{1}{x}\psi(t).$$

$\varphi(x, t)$ ist also notwendig von der Form $\frac{\psi(t)}{x}$. In der Gleichung (β) sind mithin, wie dies ja auch die wirkliche Ausrechnung zeigt, die Veränderlichen separiert.

26. Der allgemeine in dem vorstehenden Räsonnement enthaltene Gedankengang ist der folgende.

Es sei eine Differentialgleichung gegeben:

$$(\gamma) \qquad \frac{dy}{dx} = f(y, x)$$

und man wisse von derselben, daß sie durch einfach unendlich viele Transformationen in sich übergeht.

So führe man statt der Veränderlichen y, x zwei neue Veränderliche η, ξ ein, welche die folgende geometrische Bedeutung haben. $\eta = \varkappa$ ist die Gleichung aller solcher Kurven, welche durch dieselben unendlich vielen Transformationen in sich übergehen, durch welche die vorgelegte Differentialgleichung unverändert bleibt. $\xi = \lambda$ ist die Gleichung desjenigen Kurvensystems, das aus einer beliebig angenommenen Kurve $\xi = \lambda_1$ durch Anwendung der betreffenden unendlich vielen Transformationen entsteht.

Durch Einführung der Variabeln ξ, η geht die gegebene Differentialgleichung in eine neue über, in welcher die Veränderlichen separiert sind.

Ehe wir dies beweisen, werde gezeigt, daß die Separation der Veränderlichen in der homogenen Differentialgleichung (α) in der hiermit ausgesprochenen allgemeinen Regel als etwas Spezielles enthalten ist. Die Kurven $\eta = \varkappa$ sind dort die durch den Anfangspunkt gehenden Geraden $t =$ Konst., da diese bei den Transformationen $x' = ax$, $y' = ay$, durch die (α) unverändert bleibt, ebenfalls unverändert bleiben. Weiter an Stelle der Kurven $\xi = \lambda$ sind die Geraden $x =$ Konst. gewählt, die in der Tat der für die Kurven ξ aufgestellten Bedingung genügen: daß alle aus einer durch die zu der Differentialgleichung gehörigen Transformationen hervorgehen.

27. Der Beweis dafür, daß bei der Einführung von η, ξ in die Gleichung (γ) allgemein Separation der Veränderlichen stattfindet, ist der folgende.

Die Differentialgleichung (γ) geht durch Einführung der η, ξ in eine andere über, die die folgende sein mag:

$$(\delta) \qquad \frac{d\eta}{d\xi} = \varphi(\eta, \xi).$$

Von dieser Differentialgleichung weiß man nun, daß sie unverändert bleibt, wenn man, ohne η irgendwie zu ändern, ξ gewissen einfach unendlich vielen Transformationen unterwirft. Dies ist nicht anders möglich, als wenn $\varphi(\eta, \xi)$ in zwei Faktoren zerfällt, von denen der eine nur η, der andere nur ξ enthält.

Um dies deutlich einzusehen, führe man statt ξ eine Funktion ζ von ξ als Veränderliche ein, die dadurch bestimmt ist, daß sie durch die einfach unendlich vielen Transformationen, denen man ξ unterwirft, in Multipla ihrer selbst übergeht. Durch Einführung dieses ζ an Stelle von ξ wird die Differentialgleichung (δ) die folgende:

$$\frac{d\eta}{d\zeta} = \psi(\eta, \zeta).$$

Dieselbe bleibt ungeändert, wenn man, bei konstantem η, statt ζ ein Multiplum setzt. Man schließt also ganz nach der Methode, die in Nr. 25 für die homogene Gleichung angewandt wurde, daß $\psi(\eta, \zeta)$ zerfällt in eine Funktion von η, dividiert durch ζ. Die Veränderlichen in der Gleichung sind also separiert. Setzt man nun statt ζ wieder rückwärts ξ, so kommt man zu der Gleichung (δ) zurück, und in dieser sind also auch die Veränderlichen separiert, wie behauptet wurde.

28. Die Bestimmung der Kurven $\eta = \varkappa$, welche durch die einfach unendlich vielen gegebenen Transformationen in sich übergehen, wird im allgemeinen die Integration einer neuen Differentialgleichung verlangen, nämlich derjenigen Differentialgleichung, welche aussagt, daß eine Kurve durch die unter den einfach unendlich vielen Transformationen enthaltene unendlich kleine Transformation in sich übergeht (vgl. Nr. 3). *Ist die Integration dieser Gleichung, die nur noch von der Art der Transformationen, welche* (γ) *zuläßt, abhängt, geleistet, so verlangt die Integration von* (γ) *nur noch Quadraturen.*

Sind nun die Transformationen, durch welche (γ) in sich selbst übergeht, insbesondere linear, wie dies in dem Beispiele der Gleichung (α) war, so lassen sich die Kurven $\eta = \varkappa$ ohne weiteres bestimmen. Es sind nämlich diejenigen W-Kurven, welche durch die betreffenden unendlich vielen linearen Transformationen in sich übergehen. Man hat also den Satz: *Differentialgleichungen* (γ), *welche durch unendlich viele lineare Transformationen in sich übergehen, verlangen zu ihrer Integration nur Quadraturen.*

29. Von diesem Satze wollen wir eine Anwendung geben, die sich auf Raumgeometrie bezieht.

Nach den Auseinandersetzungen des § 1, Nr. 3 wird es deutlich sein, was man unter einer unendlich kleinen linearen Transformation nicht nur der Ebene, sondern auch des Raumes zu verstehen hat. Wendet man eine solche unendlich oft auf einen Punkt an, so durchläuft er eine *räumliche W-Kurve.* Die W-Kurven, welche gleichzeitig von den verschiedenen Punkten des Raumes erzeugt werden, heißen W-Kurven eines Systems.

Man betrachte nun die Fläche, welche erzeugt wird von den W-Kurven eines Systems, die eine beliebige feste Kurve schneiden. *Auf dieser Fläche lassen sich die Haupttangentenkurven durch Quadratur bestimmen.*

Die Fläche geht nämlich offenbar durch dieselben unendlich vielen linearen Transformationen in sich über, durch welche die W-Kurven des Systems unverändert bleiben. Dieselben Transformationen werden auch die Haupttangentenkurven der Fläche in Haupttangentenkurven der Fläche überführen, da bei linearer Transformation Haupttangenten Haupttangenten bleiben. Die Differentialgleichung der Haupttangentenkurven wird also bei den bez. linearen Transformationen ungeändert bleiben. Sie wird also, nach unserem Satze, quadrierbar, wenn man, auf der Fläche, die folgende Koordinatenbestimmung macht. Man bestimme jeden Punkt derselben als den Durchschnitt zweier Kurven: $\eta = \varkappa_1$, $\xi = \lambda_1$, wo $\eta = \varkappa$ die auf der Fläche liegenden W-Kurven darstellt, $\xi = \lambda$ ein Kurvensystem ist, das sich aus einer auf der Fläche beliebig gezogenen Kurve durch Anwendung der zugehörigen unendlich vielen linearen Transformationen ergibt.

Wir wollen noch zwei besondere Fälle dieses Satzes hervorheben.

Unter den verschiedenen W-Systemen, welche es im Raume gibt, finden sich insonderheit die geraden Linien, welche zwei feste Geraden schneiden. Man kann nun nach unserem Satze die Haupttangentenkurven durch Quadratur bestimmen auf jeder aus solchen Linien gebildeten Fläche, d. h. also *auf jeder Linienfläche, deren Erzeugende zwei feste Geraden schneiden*[29]).

Ein zweiter besonderer Fall ist der folgende. Gleichgewundene Schraubenlinien von gleicher Achse und gleicher Ganghöhe bilden ebenfalls ein W-Kurvensystem. Die zugehörigen linearen Transformationen, durch welche dieselben in sich übergehen, sind die betreffenden Schraubenbewegungen um die gemeinsame Achse. Bei einer Bewegung bleiben nun nicht nur die projektivischen Beziehungen, sondern auch die metrischen ungeändert. Man wird also auf einer von solchen Schraubenlinien gebildeten Fläche nicht nur die Haupttangentenkurven, sondern auch die Krümmungskurven durch Quadratur bestimmen können. Wir haben also den Satz:

Wenn man auf irgendeine Kurve eine beliebige Schraubenbewegung anwendet, so beschreibt sie eine Fläche, auf der man die Haupttangentenkurven und Krümmungskurven durch Quadratur bestimmen kann.

Göttingen und Christiania, im März 1871.

[29]) Dieser Satz ist in umfassenderen Sätzen mit enthalten, die von Herrn Clebsch [Crelles Journal, Bd. 68, S. 151 (1868)] und von Herrn Cremona [Annali di Matematica. 1869, (2) 1] über die Haupttangentenkurven von Linienflächen aufgestellt worden sind.

XXVII. Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen.

[Programm zum Eintritt in die philosophische Fakultät und den Senat der k. Friedrich-Alexanders-Universität zu Erlangen. Erlangen, A. Deichert. 1872.[1])]

Unter den Leistungen der letzten fünfzig Jahre auf dem Gebiete der Geometrie nimmt die Ausbildung der *projektivischen Geometrie* die erste Stelle ein. Wenn es anfänglich schien, als sollten die sogenannten metrischen Beziehungen ihrer Behandlung nicht zugänglich sein, da sie beim Projizieren nicht ungeändert bleiben, so hat man in neuerer Zeit gelernt, auch sie vom projektivischen Standpunkte aufzufassen, so daß nun die projektivische Methode die gesamte Geometrie umspannt. Die metrischen Eigenschaften erscheinen in ihr nur nicht mehr als Eigenschaften der räumlichen Dinge an sich, sondern als Beziehungen derselben zu einem Fundamentalgebilde, dem unendlich fernen Kugelkreise[2]).

Vergleicht man mit der so allmählich gewonnenen Auffassungsweise der räumlichen Dinge die Vorstellungen der gewöhnlichen (elementaren) Geometrie, so entsteht die Frage nach einem allgemeinen Prinzipe, nach welchem die beiden Methoden sich ausbilden konnten. Diese Frage erscheint um so wichtiger, als sich neben die elementare und die projektivische Geometrie, ob auch minder entwickelt, eine Reihe anderer Methoden stellt, denen man dasselbe Recht selbständiger Existenz zugestehen muß. Dahin gehören die Geometrie der reziproken Radien, die Geometrie der rationalen Umformungen usw., wie sie in der Folge noch erwähnt und dargestellt werden sollen.

Wenn wir es im nachstehenden unternehmen, ein solches Prinzip aufzustellen, so entwickeln wir wohl keinen eigentlich neuen Gedanken, sondern umgrenzen nur klar und deutlich, was mehr oder minder bestimmt von manchem gedacht worden ist. Aber es schien um so berechtigter, derartige

[1]) [Das Erlanger Programm wurde von mir im Jahre 1893 im Bd. 43 der Math. Annalen abgedruckt und damals von mir mit einer Reihe von Bemerkungen versehen, die ich im folgenden der Mehrzahl nach ungeändert übernehme. Sie sind gleich den anderen, nun erst hinzugefügten in eckige Klammern eingeschlossen, denen aber zur Unterscheidung immer die Jahreszahl 1893 hinzugefügt ist. K.]

[2]) Vgl. Note I des Anhangs.

zusammenfassende Betrachtungen zu publizieren, als die Geometrie, die doch ihrem Stoffe nach einheitlich ist, bei der raschen Entwicklung, die sie in der letzten Zeit genommen hat, nur zu sehr in eine Reihe von beinahe getrennten Disziplinen zerfallen ist[3]), die sich ziemlich unabhängig voneinander weiter bilden. Es lag dabei aber auch noch die besondere Absicht vor, Methoden und Gesichtspunkte darzulegen, welche von Lie und mir in neueren Arbeiten entwickelt wurden. Es haben unsere beiderseitigen Arbeiten, auf wie verschiedenartige Gegenstände sie sich auch bezogen, übereinstimmend auf die hier dargelegte allgemeine Auffassungsweise hingedrängt, so daß es eine Art von Notwendigkeit war, auch einmal diese zu erörtern und von ihr aus die betreffenden Arbeiten nach Inhalt und Tendenz zu charakterisieren.

War bisher nur von geometrischen Forschungen die Rede, so sollen darunter mit verstanden sein die Untersuchungen über beliebig ausgedehnte Mannigfaltigkeiten, die sich, unter Abstreifung des für die rein mathematische Betrachtung unwesentlichen räumlichen Bildes[4]), aus der Geometrie entwickelt haben[5]). Es gibt bei der Untersuchung von Mannigfaltigkeiten ebensolche verschiedene Typen wie in der Geometrie, und es gilt, wie bei der Geometrie, das Gemeinsame und das Unterscheidende unabhängig voneinander unternommener Forschungen hervorzuheben. Abstrakt genommen wäre es im folgenden nur nötig, schlechthin von mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten zu reden; aber durch Anknüpfung an die geläufigeren räumlichen Vorstellungen wird die Auseinandersetzung einfacher und verständlicher. Indem wir von der Betrachtung der geometrischen Dinge ausgehen und an ihnen als einem Beispiele die allgemeinen Gedanken entwickeln, verfolgen wir den Gang, den die Wissenschaft in ihrer Ausbildung genommen hat, und den bei der Darstellung zugrunde zu legen gewöhnlich das Vorteilhafteste ist.

Eine vorläufige Exposition des im folgenden besprochenen Inhaltes ist hier wohl nicht möglich, da sich derselbe kaum in eine knappere Form[6]) fügen will; die Überschriften der Paragraphen werden den allgemeinen Fortschritt des Gedankens angeben. Ich habe zum Schlusse eine Reihe von Noten zugefügt, in welchen ich entweder, wo es im Interesse der allgemeinen Auseinandersetzung des Textes nützlich schien, besondere

[3]) Vgl. Note II.

[4]) Vgl. Note III.

[5]) Vgl. Note IV.

[6]) Diese knappe Form ist ein Mangel der im folgenden gegebenen Darstellung, der das Verständnis, wie ich fürchte, wesentlich erschweren wird. Aber dem hätte wohl nur durch eine sehr viel weitere Auseinandersetzung abgeholfen werden können, in der die Einzeltheorien, die hier nur berührt werden, ausführlich entwickelt worden wären.

Punkte weiterentwickelt habe, oder in denen ich bemüht war, den abstrakt mathematischen Standpunkt, der für die Betrachtungen des Textes maßgebend ist, gegen verwandte abzugrenzen.

§ 1.

Gruppen von räumlichen Transformationen. Hauptgruppe. Aufstellung eines allgemeinen Problems.

Der wesentlichste Begriff, der bei den folgenden Auseinandersetzungen notwendig ist, ist der einer *Gruppe* von räumlichen Änderungen.

Beliebig viele Transformationen eines Raumes[7]) ergeben zusammengesetzt immer wieder eine Transformation. Hat nun eine gegebene Reihe von Transformationen die Eigenschaft, daß jede Änderung, die aus den ihr angehörigen durch Zusammensetzung hervorgeht, ihr selbst wieder angehört, so soll die Reihe eine *Transformationsgruppe*[8]) genannt werden.

Ein Beispiel für eine Transformationsgruppe bildet die Gesamtheit der Bewegungen (jede Bewegung als eine auf den ganzen Raum ausgeführte Operation betrachtet). Eine in ihr enthaltene Gruppe bilden etwa die Rotationen um einen Punkt[9]). Eine Gruppe, welche umgekehrt die Gruppe der Bewegungen umfaßt, wird durch die Gesamtheit der Kollineationen vorgestellt. Die Gesamtheit der dualistischen Umformungen bildet dagegen keine Gruppe — denn zwei dualistische Umformungen ergeben zusammen wieder eine Kollineation —, wohl aber wird wieder eine Gruppe erzeugt, wenn man die Gesamtheit der dualistischen mit der Gesamtheit der kollinearen zusammenfügt[10]).

[7]) Wir denken von den Transformationen immer die Gesamtheit der räumlichen Gebilde gleichzeitig betroffen und reden deshalb schlechthin von Transformationen des Raumes. Die Transformationen können, wie z. B. die dualistischen, statt der Punkte andere Elemente einführen; es wird dies im Texte nicht unterschieden.

[8]) Begriffsbildung wie Bezeichnung sind herübergenommen von der *Substitutionstheorie*, in der nur an Stelle der Transformationen eines kontinuierlichen Gebietes die Vertauschungen einer endlichen Zahl diskreter Größen auftreten. [Diese Definition bedarf noch der Ergänzung. Bei den Gruppen des Textes wird nämlich stillschweigend vorausgesetzt, daß dieselben neben jeder Operation, die sie enthalten mögen, immer auch deren inverse enthalten; dies ist aber, wie wohl zuerst Lie hervorhob, bei unendlicher Zahl der Operationen keineswegs eine Folge des Gruppenbegriffs als solchen; unsere Voraussetzung sollte also der im Texte gegebenen Definition dieses Begriffs ausdrücklich zugefügt werden. 1893.]

[9]) Camille Jordan hat alle Gruppen aufgestellt, die überhaupt in der Gruppe der Bewegungen enthalten sind: Sur les groupes de mouvements. Annali di Matematica. Bd. 2 (1869).

[10]) Die Transformationen einer Gruppe brauchen übrigens durchaus nicht, wie das bei den im Texte zu nennenden Gruppen allerdings immer der Fall sein wird, in stetiger Aufeinanderfolge vorhanden zu sein. Eine Gruppe bildet z. B. auch die endliche Reihe von Bewegungen, die einen regelmäßigen Körper mit sich selbst zur Deckung bringen, oder die unendliche, aber diskrete Reihe, welche eine Sinuslinie sich selber superponiert.

Es gibt nun räumliche Transformationen, welche die geometrischen Eigenschaften räumlicher Gebilde überhaupt ungeändert lassen. Geometrische Eigenschaften sind nämlich ihrem Begriffe nach unabhängig von der Lage, die das zu untersuchende Gebilde im Raume einnimmt, von seiner absoluten Größe, endlich auch von dem Sinne[11]), in welchem seine Teile geordnet sind. Die Eigenschaften eines räumlichen Gebildes bleiben also ungeändert durch alle Bewegungen des Raumes, durch seine Ähnlichkeitstransformationen, durch den Prozeß der Spiegelung, sowie durch alle Transformationen, die sich aus diesen zusammensetzen. Den Inbegriff aller dieser Transformationen bezeichnen wir als die *Hauptgruppe*[12]) räumlicher Änderungen; *geometrische Eigenschaften werden durch die Transformationen der Hauptgruppe nicht geändert.* Auch umgekehrt kann man sagen: *Geometrische Eigenschaften sind durch ihre Unveränderlichkeit gegenüber den Transformationen der Hauptgruppe charakterisiert.* Betrachtet man nämlich den Raum einen Augenblick als unbeweglich usw., als eine starre Mannigfaltigkeit, so hat jede Figur ein individuelles Interesse; von den Eigenschaften, die sie als Individuum hat, sind es nur die eigentlich geometrischen, welche bei den Änderungen der Hauptgruppe erhalten bleiben. Dieser hier etwas unbestimmt formulierte Gedanke wird im weiteren Verlaufe der Auseinandersetzung deutlicher erscheinen.

Streifen wir jetzt das mathematisch unwesentliche sinnliche Bild ab, und erblicken im Raume nur eine mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, also, indem wir an der gewohnten Vorstellung des Punktes als Raumelement festhalten, eine dreifach ausgedehnte. Nach Analogie mit den räumlichen Transformationen reden wir von Transformationen der Mannigfaltigkeit; auch sie bilden *Gruppen*. Nur ist nicht mehr, wie im Raume, eine Gruppe vor den übrigen durch ihre Bedeutung ausgezeichnet; jede Gruppe ist mit jeder anderen gleichberechtigt. Als Verallgemeinerung der Geometrie entsteht so das folgende umfassende Problem:

Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden.

In Anlehnung an die moderne Ausdrucksweise, die man freilich nur auf eine bestimmte Gruppe, die Gruppe aller linearen Umformungen, zu beziehen pflegt, mag man auch so sagen:

[11]) Unter dem Sinne verstehe ich hier die Eigenschaft der Anordnung, welche den Unterschied von der symmetrischen Figur (dem Spiegelbilde) begründet. Ihrem Sinne nach unterschieden sind also z. B. eine rechts- und eine linksgewundene Schraubenlinie.

[12]) Daß diese Transformationen eine Gruppe bilden, ist begrifflich notwendig.

Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben. Man entwickle die auf die Gruppe bezügliche Invariantentheorie[13]).

Dies ist das allgemeine Problem, welches die gewöhnliche Geometrie nicht nur, sondern namentlich auch die hier zu nennenden neueren geometrischen Methoden und die verschiedenen Behandlungsweisen beliebig ausgedehnter Mannigfaltigkeiten unter sich begreift. Was besonders betont sein mag, ist die Willkürlichkeit, die hinsichtlich der Wahl der zu adjungierenden Transformationsgruppe besteht, und die daraus fließende und in diesem Sinne zu verstehende gleiche Berechtigung aller sich unter die allgemeine Forderung subsumierenden Betrachtungsweisen.

§ 2.

Transformationsgruppen, von denen die eine die andere umfaßt, werden nacheinander adjungiert. Die verschiedenen Typen geometrischer Forschung und ihr gegenseitiges Verhältnis.

Da die geometrischen Eigenschaften räumlicher Dinge durch *alle* Transformationen der Hauptgruppe ungeändert bleiben, so ist es an und für sich absurd, nach solchen Eigenschaften derselben zu fragen, bei denen dies nur gegenüber einem Teile dieser Transformationen der Fall ist. Diese Fragestellung wird indes berechtigt, ob auch nur *formal*, wenn wir die räumlichen Gebilde in ihrer Beziehung zu fest gedachten Elementen untersuchen. Betrachten wir z. B., wie in der sphärischen Trigonometrie, die räumlichen Dinge unter Auszeichnung eines Punktes. Dann ist zunächst die Forderung: die unter Adjunktion der Hauptgruppe invarianten Eigenschaften nicht mehr der räumlichen Dinge an sich, sondern des von ihnen mit dem gegebenen Punkte gebildeten Systems zu entwickeln. Aber dieser Forderung können wir die andere Form erteilen: Man untersuche die räumlichen Gebilde an sich hinsichtlich solcher Eigenschaften, welche ungeändert bleiben durch diejenigen Transformationen der Hauptgruppe, welche noch stattfinden können, wenn wir den Punkt festhalten. Mit anderen Worten: Es ist

13) [Bei diesem Term ist hier und in der Folge keineswegs an die Frage der jeweiligen rationalen ganzen Invarianten irgendwelcher vorgelegter Formen bzw. der zwischen ihnen bestehenden rationalen, ganzen Syzygien gedacht. Diese Frage war mir 1872, entsprechend meinem Verkehr mit Clebsch (der erst 1871 seine Theorie der binären Formen herausgegeben hatte) selbstverständlich durchaus geläufig. Trotzdem fühlte ich mich an sie keineswegs gebunden. Ich verstand unter der Invariantentheorie einer Gruppe schlechtweg die Lehre von den bei der Gruppe unverändert bleibenden Beziehungen irgendwelcher vorgelegter Gebilde. Man vergleiche auch die ausdrückliche Erklärung in § 5 meiner zweiten Abhandlung über Nicht-Euklidische Geometrie, Abh. XVIII der vorliegenden Ausgabe. Zur Invariantentheorie der Elementargeometrie gehören in diesem Sinne beispielsweise die gesamte ebene und sphärische Trigonometrie, die doch gewiß mit dem genannten Schema nicht erschöpft sind. K.]

dasselbe, ob wir die räumlichen Gebilde im Sinne der Hauptgruppe untersuchen und ihnen den gegebenen Punkt hinzufügen, oder ob wir, ohne ihnen irgendein Gegebenes hinzuzufügen, die Hauptgruppe durch die in ihr enthaltene Gruppe ersetzen, deren Transformationen den bez. Punkt ungeändert lassen.

Es ist dies ein in der Folge häufig angewandtes Prinzip, das wir deshalb gleich hier allgemein formulieren wollen; etwa in der folgenden Weise:

Es sei eine Mannigfaltigkeit und zu ihrer Behandlung eine auf sie bezügliche Transformationsgruppe gegeben. Es werde das Problem vorgelegt, die in der Mannigfaltigkeit enthaltenen Gebilde hinsichtlich eines gegebenen Gebildes zu untersuchen. *So kann man entweder dem Systeme der Gebilde das gegebene hinzufügen, und es fragt sich dann nach den Eigenschaften des erweiterten Systems im Sinne der gegebenen Gruppe — oder, man lasse das System unerweitert, beschränke aber die Transformationen, die man bei der Behandlung zugrunde legt, auf diejenigen in der gegebenen Gruppe enthaltenen, welche das gegebene Gebilde ungeändert lassen (und die notwendig wieder eine Gruppe bilden).*

Im Gegensatze zu der zu Anfang des Paragraphen aufgeworfenen Frage beschäftige uns nun die umgekehrte, die von vornherein verständlich ist. Wir fragen nach denjenigen Eigenschaften räumlicher Dinge, welche bei einer Transformationsgruppe erhalten bleiben, die die Hauptgruppe als einen Teil umfaßt. Jede Eigenschaft, die wir bei einer solchen Untersuchung finden, ist eine geometrische Eigenschaft des Dings an sich, aber das Umgekehrte gilt nicht. Bei der Umkehr tritt vielmehr das eben vorgetragene Prinzip in Kraft, wobei die Hauptgruppe nun die kleinere Gruppe ist. Wir erhalten so:

Ersetzt man die Hauptgruppe durch eine umfassendere Gruppe, so bleibt nur ein Teil der geometrischen Eigenschaften erhalten. Die übrigen erscheinen nicht mehr als Eigenschaften der räumlichen Dinge an sich, sondern als Eigenschaften des Systems, welches hervorgeht, wenn man denselben ein ausgezeichnetes Gebilde hinzufügt. Dieses ausgezeichnete Gebilde ist (soweit es überhaupt ein bestimmtes[14]) *ist) dadurch definiert, daß es, fest gedacht, dem Raume unter den Transformationen der gegebenen Gruppe nur noch die Transformationen der Hauptgruppe gestattet.*

14) Man erzeugt ein solches Gebilde beispielsweise, indem man auf ein beliebiges Anfangselement, das durch keine Transformation der gegebenen Gruppe in sich selbst überzuführen ist, die Transformationen der Hauptgruppe anwendet. [Der Satz des Textes bildet ohne Zweifel den Mittelpunkt aller Überlegungen meines Programms und ist dementsprechend von neueren Autoren mit dem besonderen Namen des „Adjunktionssatzes" belegt worden. Aber er wird in dem in der vorigen Fußnote angedeuteten Sinne vielfach mißverstanden. Indem man nur an rationale ganze Invarianten bzw. Syzygien denkt, nennt man den Satz eine bloße Vermutung, oder konstruiert auch Fälle, wo er sich, in falscher Weise interpretiert, nicht bewährt. Man sucht in dem Satze eben viel mehr, als gemeint ist. Ich meine genau das, was

In diesem Satze beruht die Eigenart der hier zu besprechenden neueren geometrischen Richtungen und ihr Verhältnis zur elementaren Methode. Sie sind dadurch eben zu charakterisieren, daß sie an Stelle der Hauptgruppe eine erweiterte Gruppe räumlicher Umformungen der Betrachtung zugrunde legen. Ihr gegenseitiges Verhältnis ist, sofern sich ihre Gruppen einschließen, durch einen entsprechenden Satz bestimmt. Dasselbe gilt von den verschiedenen hier zu betrachtenden Behandlungsweisen mehrfach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten. Es soll dies nun an den einzelnen Methoden gezeigt werden, wobei denn die Sätze, die in diesem und dem vorigen Paragraphen allgemein hingestellt wurden, ihre Erläuterung an konkreten Gegenständen finden.

§ 3.

Die projektivische Geometrie.

Jede räumliche Umformung, die nicht gerade der Hauptgruppe angehört, kann dazu benutzt werden, um Eigenschaften bekannter Gebilde auf neue Gebilde zu übertragen. So verwerten wir die Geometrie der Ebene für die Geometrie der Flächen, die sich auf die Ebene abbilden

Cayley im Sixth Memoir upon Quantics 1859 (Phil.Trans. 1859, Coll.Pap., Bd. II, S. 560 ff., insbesondere die Schlußbemerkung S. 592) für den besonderen Fall der projektiven Geometrie und der elementaren metrischen Geometrie entwickelt hat und was übrigens bereits Laguerre 1853 in seinen oben S. 242—243 abgedruckten Sätzen in mehr partikulärer Fassung zum Ausdruck brachte. Cayley prägt am Schluß seiner Abhandlung den Satz: „Metrical geometry is a part of descriptive geometry and descriptive geometry is all geometry and reciprocally". Ich will das von mir aus hier in einer Fassung ausdrücken, die in ihrer prosaischen Form jedes Mißverständnis ausschließen dürfte: Jede Tatsache der elementaren Geometrie läßt sich durch Beziehungen zwischen Tetraederkoordinaten beschreiben, sofern man nur hinzunimmt, wie sich in den gerade gewählten Koordinaten der Kugelkreis darstellt.

Vielleicht ist es gut, noch folgendes hinzuzufügen: Der Kugelkreis ist mit einem beliebigen nicht zerfallenden Kegelschnitt projektiv, das Koordinatensystem läßt sich daher so wählen, daß er in seiner Ebene durch Nullsetzen einer beliebigen ternären quadratischen Form von nicht verschwindender Determinante dargestellt wird. Wir mögen nun etwa statt seiner, als Beispiel, eine in der unendlich fernen Ebene gelegene C_3 mit Spitze nehmen (welche eine W-Kurve ist, d. h. durch eine kontinuierliche Gruppe von Kollineationen mit einem Parameter in sich übergeht). Die sämtlichen Punkte der unendlich fernen Ebene bleiben bei der G_4 fest, die durch folgende Formeln gegeben ist:

$$x' = \lambda x + a, \quad y' = \lambda y + b, \quad z' = \lambda z + c.$$

Halten wir nun die C_3 nur als Ganzes fest, so haben wir eine G_5 von Kollineationen und können uns eine zugehörige Geometrie entworfen denken. Will man hernach diese Geometrie in die allgemeine projektive Geometrie einordnen, so darf man natürlich nicht eine in der unendlich fernen Ebene gelegene beliebige C_3 adjungieren (wie sie durch Nullsetzen einer *allgemeinen* ternären kubischen Form gegeben ist). Vielmehr wird man besagte Form gleich so spezialisiert einführen müssen, daß sie, gleich Null gesetzt, eben eine C_3 mit Spitze vorstellt. Letztere Bedingung genügt aber auch, weil alle C_3 mit Spitze untereinander projektiv verwandt sind. Und so ähnlich in allen weiteren Fällen, die man ersinnen mag. K.]

lassen; so schloß man schon lange vor dem Entstehen einer eigentlichen projektivischen Geometrie von den Eigenschaften einer gegebenen Figur auf Eigenschaften anderer, die durch Projektion aus ihr hervorgingen. Aber die projektivische Geometrie erwuchs erst, als man sich gewöhnte, die ursprüngliche Figur mit allen aus ihr projektivisch ableitbaren als wesentlich identisch zu erachten und die Eigenschaften, welche sich beim Projizieren übertragen, so auszusprechen, daß ihre Unabhängigkeit von der mit dem Projizieren verknüpften Änderung in Evidenz tritt. Hiermit war denn der Behandlung im Sinne von § 1 *die Gruppe aller projektivischen Umformungen* zugrunde gelegt und *dadurch eben der Gegensatz zwischen projektivischer und gewöhnlicher Geometrie geschaffen.*

Ein ähnlicher Entwicklungsgang, wie der hier geschilderte, kann bei jeder Art von räumlicher Transformation als möglich gedacht werden; wir werden noch öfter darauf zurückkommen. Er hat sich innerhalb der projektivischen Geometrie selbst noch nach zwei Seiten vollzogen. Die eine Weiterbildung der Auffassung geschah durch Aufnahme der *dualistischen* Umformungen in die Gruppe der zugrunde gelegten Änderungen. Für den heutigen Standpunkt sind zwei einander dualistisch entgegenstehende Figuren nicht mehr als zwei unterschiedene, sondern als wesentlich dieselben Figuren anzusehen. Ein anderer Schritt bestand in der Erweiterung der zugrunde gelegten Gruppe kollinearer und dualistischer Umformungen durch Aufnahme der bez. *imaginären* Transformationen. Dieser Schritt bedingt, daß man vorher den Kreis der eigentlichen Raumelemente durch Hinzunahme der imaginären erweitert habe — ganz dem entsprechend, wie die Aufnahme der dualistischen Umformungen in die zugrunde gelegte Gruppe die gleichzeitige Einführung von Punkt und Ebene als Raumelement nach sich zieht. Es ist hier nicht der Ort, auf die Zweckmäßigkeit der Einführung imaginärer Elemente zu verweisen, durch welche allein der genaue Anschluß der Raumlehre an das einmal gewählte Gebiet algebraischer Operationen erreicht wird. Dagegen muß betont werden, daß der Grund für die Einführung eben in der Betrachtung algebraischer Operationen, nicht aber in der Gruppe der projektivischen und dualistischen Umformungen liegt. So gut wir uns bei den letzteren auf reelle Transformationen beschränken können, da schon die reellen Kollineationen und dualistischen Transformationen eine Gruppe bilden, — so gut können wir imaginäre Raumelemente einführen, auch wenn wir nicht auf projektivischem Standpunkte stehen, und sollen es, sofern wir prinzipiell algebraische Gebilde untersuchen.

Wie man vom projektivischen Standpunkte aus die metrischen Eigenschaften aufzufassen hat, bestimmt sich nach dem allgemeinen Satze des vorangehenden Paragraphen. Die metrischen Eigenschaften sind als projektivische Beziehungen zu einem Fundamentalgebilde, dem unendlich fernen Kugelkreise[15]), zu betrachten, einem Gebilde, das die Eigenschaft hat, nur durch diejenigen Transformationen der projektivischen Gruppe, die eben auch Transformationen der Hauptgruppe sind, in sich überzugehen. Der so schlechthin ausgesprochene Satz bedarf noch einer wesentlichen Ergänzung, die der Beschränkung der gewöhnlichen Anschauungsweise auf reelle Raumelemente (und reelle Transformationen) entspricht. Man muß dem Kugelkreise, um diesem Standpunkte gerecht zu werden, noch das System der reellen Raumelemente (Punkte) ausdrücklich hinzufügen; Eigenschaften im Sinne der elementaren Geometrie sind projektivisch entweder Eigenschaften der Dinge an sich oder Beziehungen zu diesem Systeme der reellen Elemente, oder zum Kugelkreise, oder endlich zu beiden.

Es mag hier noch der Art gedacht werden, wie v. Staudt in seiner Geometrie der Lage (1847) die projektivische Geometrie aufbaut — d. h. diejenige projektivische Geometrie, welche sich auf Zugrundelegung der Gruppe aller reeller projektivisch-dualistischer Umformungen beschränkt[16]).

Es ist bekannt, wie er dabei aus dem gewöhnlichen Anschauungsmaterial nur solche Momente herausgreift, die auch bei projektivischen Umformungen erhalten bleiben. Wollte man weiterhin zur Betrachtung auch metrischer Eigenschaften übergehen, so hätte man die letzteren geradezu als Beziehungen zum Kugelkreise einzuführen. Der so vervollständigte Gedankengang ist für die hier vorliegenden Betrachtungen insofern von großer Bedeutung, als ein entsprechender Aufbau der Geometrie im Sinne jeder einzelnen der noch anzuführenden Methoden möglich ist.

§ 4.

Übertragung durch Abbildung.

Ehe wir in der Besprechung der geometrischen Methoden, die sich neben die elementare und die projektivische Geometrie stellen, weitergehen, mögen allgemein einige Betrachtungen entwickelt werden, die im folgenden immer wieder vorkommen und zu denen die bisher berührten Dinge bereits hinreichend viele Beispiele liefern. Auf diese Erörterungen bezieht sich der gegenwärtige und der nächstfolgende Paragraph.

Gesetzt, man habe eine Mannigfaltigkeit A unter Zugrundelegung einer Gruppe B untersucht. Führt man sodann A durch irgendwelche Transformation in eine andere Mannigfaltigkeit A' über, so wird aus der

[15]) Diese Anschauungsweise ist als eine der schönsten Leistungen der französischen Schule zu betrachten; durch sie erst gewinnt die Einteilung in Eigenschaften der Lage und Eigenschaften des Maßes, wie man sie gern an die Spitze der projektivischen Geometrie stellt, einen präzisen Inhalt.

[16]) Den erweiterten Kreis, der auch imaginäre Umformungen umspannt, hat v. Staudt erst in den „Beiträgen zur Geometrie der Lage“ (1856) zugrunde gelegt.

Gruppe B von Änderungen, die A in sich transformierten, nunmehr eine Gruppe B', deren Transformationen sich auf A' beziehen. Dann ist es ein selbstverständliches Prinzip, *daß die Behandlungsweise von A unter Zugrundelegung von B die Behandlungsweise von A' unter Zugrundelegung von B' ergibt*, d. h. jede Eigenschaft, welche ein in A enthaltenes Gebilde mit Bezug auf die Gruppe B hat, ergibt eine Eigenschaft des entsprechenden Gebildes in A' mit Bezug auf die Gruppe B'.

Lassen wir z. B. A eine gerade Linie, B die dreifach unendlich vielen linearen Transformationen bedeuten, welche dieselbe in sich überführen. Die Behandlungsweise von A ist dann eben diejenige, welche die neuere Algebra als Theorie der binären Formen bezeichnet. Nun kann man die gerade Linie auf einen Kegelschnitt A' der Ebene durch Projektion von einem Punkte des letzteren aus beziehen. Aus den linearen Transformationen B der Geraden in sich selbst werden dann die linearen Transformationen B' des Kegelschnittes in sich selbst, wie man leicht zeigt, d. h. diejenigen Änderungen des Kegelschnittes, welche mit den linearen Transformationen der Ebene, die den Kegelschnitt in sich überführen, verknüpft sind.

Es ist nun aber nach dem Prinzip des zweiten Paragraphen[17]) dasselbe: nach der Geometrie auf einem Kegelschnitte zu fragen, wenn man sich den Kegelschnitt als fest denkt und nur auf diejenigen linearen Transformationen der Ebene achtet, welche ihn in sich überführen, oder die Geometrie auf dem Kegelschnitte zu studieren, indem man überhaupt die linearen Transformationen der Ebene betrachtet und sich den Kegelschnitt mit ändern läßt. Die Eigenschaften, welche wir an den Punktsystemen auf dem Kegelschnitte auffaßten, sind mithin im gewöhnlichen Sinne projektivische. Die Verknüpfung der letzten Überlegung mit dem eben abgeleiteten Resultate gibt also:

Binäre Formentheorie und projektivische Geometrie der Punktsysteme auf einem Kegelschnitte ist dasselbe, d. h. jedem binären Satze entspricht ein Satz über derartige Punktsysteme und umgekehrt[18]).

Ein anderes Beispiel, welches geeignet ist, diese Art von Betrachtungen zu veranschaulichen, ist das folgende: Wenn man eine Fläche zweiten Grades mit einer Ebene durch stereographische Projektion in Verbindung setzt, so tritt auf der Fläche ein Fundamentalpunkt auf: der Projektionspunkt, in der Ebene sind es zwei: die Bilder der durch den

[17]) Wenn man will, ist hier das Prinzip unter etwas erweiterter Form angewendet.

[18]) Statt des Kegelschnittes in der Ebene kann man mit gleichem Erfolge eine Raumkurve dritter Ordnung einführen, überhaupt bei n Dimensionen etwas Entsprechendes aufstellen.

Projektionspunkt gehenden Erzeugenden. Man zeigt nun ohne weiteres: Die linearen Transformationen der Ebene, welche die beiden Fundamentalpunkte derselben ungeändert lassen, gehen durch die Abbildung in lineare Transformationen der Fläche zweiten Grades in sich selbst über, aber nur in diejenigen, welche den Projektionspunkt ungeändert lassen. Unter linearen Transformationen der Fläche in sich selbst sind dabei diejenigen Änderungen verstanden, welche die Fläche erfährt, wenn man lineare Raumtransformationen ausführt, welche die Fläche mit sich selbst zur Deckung bringen. Hiernach wird also die projektivische Untersuchung einer Ebene unter Zugrundelegung zweier Punkte und die projektivische Untersuchung einer Fläche zweiten Grades unter Zugrundelegung eines Punktes identisch. Die erstere ist nun — sofern man imaginäre Elemente mit in Betracht zieht — nichts anderes, als die Untersuchung der Ebene im Sinne der elementaren Geometrie. Denn die Hauptgruppe der ebenen Transformationen besteht eben in den linearen Umformungen, welche ein Punktepaar (die unendlich fernen Kreispunkte) ungeändert lassen. Wir erhalten also schließlich:

Die elementare Geometrie der Ebene und die projektivische Untersuchung einer Fläche zweiten Grades unter Hinzunahme eines ihrer Punkte sind dasselbe.

Diese Beispiele ließen sich beliebig vervielfachen[19]); die beiden hier entwickelten sind gewählt worden, da wir in der Folge noch Gelegenheit haben werden, auf dieselben zurückzukommen.

§ 5.

Von der Willkürlichkeit in der Wahl des Raumelements. Das Hessesche Übertragungsprinzip. Die Liniengeometrie.

Als Element der geraden Linie, der Ebene, des Raumes, überhaupt einer zu untersuchenden Mannigfaltigkeit kann statt des Punktes jedes in der Mannigfaltigkeit enthaltene Gebilde: die Punktgruppe, event. die Kurve, die Fläche usw. verwandt werden[20]). Indem über die Zahl willkürlicher Parameter, von denen man diese Gebilde abhängig setzen will, von vornherein gar nichts feststeht, erscheinen Linie, Ebene, Raum usw. je nach der Wahl des Elementes mit beliebig vielen Dimensionen behaftet. *Aber solange wir der geometrischen Untersuchung dieselbe Gruppe von*

[19]) Bez. anderer Beispiele, sowie namentlich der Erweiterungen auf mehr Dimensionen, deren die angeführten fähig sind, verweise ich auf bez. Auseinandersetzungen in einem Aufsatze von mir: *Über Liniengeometrie und metrische Geometrie.* Math. Annalen, Bd. 5 [s. Abh. VIII dieser Ausgabe], sowie auf die sogleich noch zu nennenden Lieschen Arbeiten.

[20]) Vgl. Note III.

Änderungen zugrunde legen, bleibt der Inhalt der Geometrie unverändert, das heißt, jeder Satz, der bei *einer* Annahme des Raumelements sich ergab, ist auch ein Satz bei beliebiger anderer Annahme, nur die Anordnung und Verknüpfung der Sätze ist geändert.

Das Wesentliche ist also die Transformationsgruppe; die Zahl der Dimensionen, die wir einer Mannigfaltigkeit beilegen wollen, erscheint als etwas Sekundäres.

Diese Verknüpfung dieser Bemerkung mit dem Prinzip des vorigen Paragraphen ergibt eine Reihe schöner Anwendungen, von denen hier einige entwickelt werden mögen, da diese Beispiele mehr als alle langen Auseinandersetzungen geeignet scheinen, den Sinn der allgemeinen Betrachtung darzulegen.

Die projektivische Geometrie auf der Geraden (die Theorie der binären Formen) ist nach dem vorigen Paragraphen mit der projektivischen Geometrie auf dem Kegelschnitte gleichbedeutend. Auf letzterem mögen wir jetzt statt des Punktes das Punktepaar als Element betrachten. Die Gesamtheit der Punktepaare des Kegelschnitts läßt sich aber auf die Gesamtheit der Geraden der Ebene beziehen, indem man jede Gerade dem Punktepaare zuordnet, in welchem sie den Kegelschnitt trifft. Bei dieser Abbildung gehen die linearen Transformationen des Kegelschnitts in sich selbst in die linearen Transformationen der (aus Geraden bestehend gedachten) Ebene über, welche den Kegelschnitt ungeändert lassen. Ob wir aber die aus den letzteren bestehende Gruppe betrachten, oder die Gesamtheit der linearen Transformationen der Ebene zugrunde legen und den zu untersuchenden Gebilden der Ebene den Kegelschnitt allemal hinzufügen, ist nach § 2 gleichbedeutend. Indem wir alle diese Überlegungen zusammennehmen, haben wir:

Die Theorie der binären Formen und die projektivische Geometrie der Ebene unter Zugrundelegung eines Kegelschnittes sind gleichbedeutend.

Da endlich projektivische Geometrie der Ebene unter Zugrundelegung eines Kegelschnittes wegen der Gleichheit der Gruppe mit der projektivischen Maßgeometrie koinzidiert, die man in der Ebene auf einen Kegelschnitt gründen kann[21]), so mögen wir auch so sagen:

Die Theorie der binären Formen und die allgemeine projektivische Maßgeometrie in der Ebene sind dasselbe.

Statt des Kegelschnitts in der Ebene können wir in der vorstehenden Betrachtung die Kurve dritter Ordnung im Raume setzen usw., doch mag dies unausgeführt bleiben. Der hier dargelegte Zusammenhang zwischen der Geometrie der Ebene, weiterhin des Raumes oder einer beliebig aus-

[21]) Vgl. Note V.

gedehnten Mannigfaltigkeit deckt sich im wesentlichen mit dem von Hesse vorgeschlagenen Übertragungsprinzipe (Borchardts Journal, Bd. 66 (1866)).

Ein Beispiel ganz ähnlicher Art ergibt die projektivische Geometrie des Raumes, oder, anders ausgedrückt, die Theorie der quaternären Formen. Faßt man die gerade Linie als Raumelement und erteilt ihr, wie in der Liniengeometrie geschieht, sechs homogene Koordinaten, zwischen denen eine Bedingungsgleichung vom zweiten Grade stattfindet, so erscheinen die linearen und dualistischen Transformationen des Raumes als diejenigen linearen Transformationen der unabhängig gedachten sechs Veränderlichen, welche die Bedingungsgleichung in sich überführen. Durch eine Verknüpfung ähnlicher Überlegungen, wie sie soeben entwickelt wurden, erhält man hieraus den Satz:

Die Theorie der quaternären Formen deckt sich mit der projektivischen Maßbestimmung in einer durch sechs homogene Veränderliche erzeugten Mannigfaltigkeit.

Wegen der näheren Ausführung dieser Auffassung verweise ich auf einen demnächst in den Math. Annalen, Bd. 6 [s. Abh. XVIII dieser Ausgabe] erscheinenden Aufsatz: „Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie" zweite Abhandlung), sowie auf eine Note am Schlusse dieser Mitteilung[22]).

Ich knüpfe an die vorstehenden Auseinandersetzungen noch zwei Bemerkungen, von denen die erste zwar schon implizite in dem Bisherigen enthalten ist, aber ausgeführt werden soll, weil der Gegenstand, auf den sie sich bezieht, zu leicht Mißverständnissen ausgesetzt ist.

Wenn wir beliebige Gebilde als Raumelemente einführen, so erhält der Raum beliebig viele Dimensionen. Wenn wir dann aber an der uns geläufigen (elementaren oder projektivischen) Anschauungsweise festhalten, so ist die Gruppe, welche wir für die mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit zugrunde zu legen haben, von vornherein gegeben; es ist eben die Hauptgruppe bez. die Gruppe der projektivischen Umformungen. Wollten wir eine andere Gruppe zugrunde legen, so müßten wir von der gewöhnlichen bez. der projektivischen Anschauung abgehen. So richtig es also ist, daß bei geschickter Wahl der Raumelemente der Raum Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Ausdehnungen repräsentiert, so wichtig ist es, hinzuzufügen, *daß bei dieser Repräsentation entweder von vornherein eine bestimmte Gruppe der Behandlung der Mannigfaltigkeiten zugrunde zu legen ist, oder daß wir, wollen wir über die Gruppe verfügen, unsere geometrische Auffassung entsprechend auszubilden haben.* — Es könnte, ohne diese Bemerkung, z. B. eine Repräsentation der Liniengeometrie in der folgenden Weise gesucht werden. Die Gerade erhält in der Liniengeometrie

[22]) Vgl. Note VI.

sechs Koordinaten, ebensoviele Koeffizienten besitzt der Kegelschnitt in der Ebene. Das Bild der Liniengeometrie würde also die Geometrie in einem Kegelschnittsysteme sein, das aus der Gesamtheit der Kegelschnitte durch eine quadratische Gleichung zwischen den Koeffizienten ausgesondert wird. Das ist richtig, sowie wir als Gruppe der ebenen Geometrie die Gesamtheit der Transformationen zugrunde legen, die durch lineare Umformungen der Kegelschnittskoeffizienten repräsentiert werden, welche die quadratische Bedingungsgleichung in sich überführen. Halten wir aber an der elementaren bez. der projektivischen Auffassung der ebenen Geometrie fest, so haben wir eben *kein* Bild.

Die zweite Bemerkung bezieht sich auf folgende Begriffsbildung. Sei im Raume irgendeine Gruppe, etwa die Hauptgruppe gegeben. So wähle man ein einzelnes räumliches Gebilde, etwa einen Punkt, oder eine Gerade, oder auch ein Ellipsoid usw. aus und wende auf dasselbe alle Transformationen der Hauptgruppe an. Man erhält dann eine mehrfach unendliche Mannigfaltigkeit mit einer Anzahl von Dimensionen, die im allgemeinen gleich der Zahl der in der Gruppe enthaltenen willkürlichen Parameter ist, die in besonderen Fällen herabsinkt, wenn nämlich das ursprünglich gewählte Gebilde die Eigenschaften besitzt, durch unendlich viele Transformationen der Gruppe in sich übergeführt zu werden. Jede so erzeugte Mannigfaltigkeit heiße mit Bezug auf die erzeugende Gruppe ein *Körper*[23]). Wollen wir nun den Raum im Sinne der Gruppe untersuchen und dabei bestimmte Gebilde als Raumelemente auszeichnen, und wollen wir nicht, daß Gleichberechtigtes ungleichartig dargestellt werde, *so müssen wir die Raumelemente ersichtlich so wählen, daß ihre Mannigfaltigkeit entweder selbst einen Körper bildet oder in Körper zerlegt werden kann*[24]). Von dieser evidenten Bemerkung soll später (§ 9) eine Anwendung gemacht werden. Der Körperbegriff selbst wird im Schlußparagraphen in Verbindung mit verwandten Begriffen noch einmal zur Sprache kommen.

[23]) Ich wähle den Namen nach dem Vorgange von Dedekind, der in der Zahlentheorie ein Zahlengebiet als Körper bezeichnet, wenn es aus gegebenen Elementen durch gegebene Operationen entstanden ist. (Zweite Auflage von Dirichlets Vorlesungen über Zahlentheorie.)

[24]) [Im Texte ist nicht hinreichend beachtet, daß die vorgelegte Gruppe sogenannte ausgezeichnete Untergruppen enthalten kann. Bleibt ein geometrisches Gebilde bei den Operationen einer ausgezeichneten Untergruppe ungeändert, so gilt das Gleiche für alle Gebilde, die aus ihm durch die Operationen der Gesamtgruppe hervorgehen, d. h. für alle Gebilde des aus ihm entspringenden Körpers. Ein so beschaffener Körper würde aber zur Darstellung der Operationen der Gruppe durchaus ungeeignet sein. Es sind also im Texte nur solche Körper zuzulassen, die aus Raumelementen entstehen, welche bei keiner einzigen ausgezeichneten Untergruppe der vorgelegten Gruppe ungeändert bleiben. (1893).]

§ 6.

Die Geometrie der reziproken Radien. Die Interpretation von $x+iy$.

Wir kehren mit diesem Paragraphen zur Besprechung der verschiedenen Richtungen der geometrischen Forschung zurück, wie sie in §§ 2, 3 begonnen wurde.

Als ein Seitenstück zu den Betrachtungsweisen der projektivischen Geometrie kann man in vielfacher Hinsicht eine Klasse geometrischer Überlegungen betrachten, bei denen von der Umformung durch reziproke Radien fortlaufender Gebrauch gemacht wird. Es gehören hierher die Untersuchungen über die sog. Zykliden und anallagmatischen Flächen, über die allgemeine Theorie der Orthogonalsysteme, ferner Untersuchungen über das Potential usw. Wenn man die in denselben enthaltenen Betrachtungen noch nicht gleich den projektivischen zu einer besonderen Geometrie zusammengefaßt hat, *die dann als Gruppe die Gesamtheit derjenigen Umformungen zugrunde zu legen hätte, welche durch Verbindung der Hauptgruppe mit der Transformation durch reziproke Radien entstehen*, so ist das wohl dem zufälligen Umstande zuzuschreiben, daß die genannten Theorien seither nicht im Zusammenhange dargestellt worden sind; den einzelnen Autoren, die in dieser Richtung arbeiteten, wird eine solche methodische Auffassung nicht fern gelegen haben.

Die Parallele zwischen dieser Geometrie der reziproken Radien und der projektivischen ergibt sich, sowie einmal die Frage nach einem Vergleiche vorhanden ist, von selbst, und es mag daher nur ganz im allgemeinen auf die folgenden Punkte aufmerksam gemacht werden:

In der projektivischen Geometrie sind Punkt, Gerade, Ebene die Elementarbegriffe. Kreis und Kugel sind nur spezielle Fälle von Kegelschnitt und Fläche zweiten Grades. Das unendlich Ferne der elementaren Geometrie erscheint als Ebene; das Fundamentalgebilde, auf welches sich die elementare Geometrie bezieht, ist ein unendlich ferner, imaginärer Kegelschnitt.

In der Geometrie der reziproken Radien sind Punkt, Kreis und Kugel die Elementarbegriffe. Gerade und Ebene sind spezielle Fälle der letzteren, dadurch charakterisiert, daß sie einen, im Sinne der Methode übrigens nicht weiter ausgezeichneten Punkt, den unendlich fernen Punkt, enthalten. Die elementare Geometrie erwächst, sowie man diesen Punkt fest denkt.

Die Geometrie der reziproken Radien ist einer Einkleidung fähig, welche sie neben die Theorie der binären Formen und die Liniengeometrie stellt, falls man die letzteren in der Weise behandelt, wie das im vorigen Paragraphen angedeutet wurde. Wir mögen zu diesem Zwecke die Betrachtung zunächst auf ebene Geometrie und also auf Geometrie der reziproken Radien in der Ebene[25]) beschränken.

Es wurde bereits des Zusammenhangs gedacht, der zwischen der elementaren Geometrie der Ebene und der projektivischen Geometrie der mit einem ausgezeichneten Punkte versehenen Fläche zweiten Grades besteht (§ 4). Sieht man von dem ausgezeichneten Punkte ab und betrachtet also die projektivische Geometrie auf der Fläche an sich, so hat man ein Bild der Geometrie der reziproken Radien in der Ebene. Denn man überzeugt sich leicht[26]), daß der Transformationsgruppe der reziproken Radien in der Ebene vermöge der Abbildung der Fläche zweiten Grades die Gesamtheit der linearen Transformationen der letzteren in sich selbst entspricht. Man hat also:

Geometrie der reziproken Radien in der Ebene und projektivische Geometrie auf einer Fläche zweiten Grades ist dasselbe,

und ganz entsprechend:

Geometrie der reziproken Radien im Raume ist mit der projektivischen Behandlung einer Mannigfaltigkeit gleichbedeutend, die durch eine quadratische Gleichung zwischen fünf homogenen Veränderlichen dargestellt wird.

Die Raumgeometrie ist also durch die Geometrie der reziproken Radien in ganz dieselbe Verbindung mit einer Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen gesetzt, wie vermöge der Liniengeometrie mit einer Mannigfaltigkeit von fünf Ausdehnungen.

Die Geometrie der reziproken Radien in der Ebene gestattet, sofern man nur auf *reelle* Transformationen achten will, noch nach einer anderen Seite eine interessante Darstellung resp. Verwendung. Breitet man nämlich eine komplexe Variable $x+iy$ in gewöhnlicher Weise in der Ebene aus, so entspricht ihren linearen Transformationen die Gruppe der reziproken Radien, mit der erwähnten Beschränkung auf das Reelle[27]). Die Untersuchung der Funktionen einer komplexen Veränderlichen, die beliebigen

[25]) Geometrie der reziproken Radien auf der Geraden ist mit der projektivischen Untersuchung der Geraden gleichbedeutend, da die bez. Umformungen die nämlichen sind. Man kann daher auch in der Geometrie der reziproken Radien von einem *Doppelverhältnisse* von vier Punkten einer Geraden und weiterhin eines Kreises reden.

[26]) Vgl. die bereits genannte Arbeit: Über Liniengeometrie und metrische Geometrie. Math. Annalen, Bd. 5 [s. Abh. VIII dieser Ausgabe].

[27]) [Die Ausdrucksweise des Textes ist ungenau. Den linearen Transformationen $z'=\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}$ (wo $z'=x'+iy'$, $z=x+iy$) entsprechen nur diejenigen Operationen aus der Gruppe der reziproken Radien, bei denen keine Umlegung der Winkel stattfindet (bei denen die beiden Kreispunkte der Ebene nicht miteinander vertauscht werden). Will man die Gesamtgruppe der reziproken Radien umspannen, so hat man den genannten Transformationen noch die anderen (nicht minder wichtigen) hinzuzufügen: $z'=\frac{\alpha\bar z+\beta}{\gamma\bar z+\delta}$, wo z' wieder $=x'+iy'$, $\bar z$ aber $=x-iy$. (1893).]

linearen Transformationen unterworfen gedacht ist, ist aber nichts anderes, als was bei einer etwas abgeänderten Darstellungsweise Theorie der binären Formen genannt wird. Also:

Die Theorie der binären Formen findet ihre Darstellung durch die Geometrie der reziproken Radien in der reellen Ebene, so zwar, daß auch die komplexen Werte der Variabeln repräsentiert werden.

Von der Ebene mögen wir, um in den gewohnteren Vorstellungskreis der projektivischen Umformungen zu gelangen, zur Fläche zweiten Grades aufsteigen. Da wir nur reelle Elemente der Ebene betrachteten, ist es nicht mehr gleichgültig, wie man die Fläche wählt; sie ist ersichtlich nicht geradlinig zu nehmen. Insbesondere können wir uns dieselbe — wie man das zur Interpretation einer komplexen Veränderlichen auch sonst tut — als Kugelfläche denken und erhalten so den Satz:

Die Theorie der binären Formen komplexer Variabeln findet ihre Repräsentation in der projektivischen Geometrie der reellen Kugelfläche.

Ich habe mir nicht versagen mögen, in einer Note[28]) noch auseinanderzusetzen, wie schön dieses Bild die Theorie der binären kubischen und biquadratischen Formen erläutert.

§ 7.

Erweiterungen des Vorangehenden. Lies Kugelgeometrie.

An die Theorie der binären Formen, die Geometrie der reziproken Radien und die Liniengeometrie, welche im vorstehenden koordiniert und nur durch die Zahl der Veränderlichen unterschieden scheinen, lassen sich gewisse Erweiterungen knüpfen, die nun auseinandergesetzt werden mögen. Dieselben sollen einmal dazu beitragen, den Gedanken, daß die Gruppe, welche die Behandlungsweise gegebener Gebiete bestimmt, beliebig erweitert werden kann, an neuen Beispielen zu erläutern; dann aber ist namentlich die Absicht gewesen, Betrachtungen, welche Lie in einer neueren Abhandlung niedergelegt hat[29]), in ihrer Beziehung zu den hier vorgetragenen Überlegungen darzulegen. Der Weg, auf welchem wir zu Lies Kugelgeometrie gelangen, weicht insofern von dem von Lie eingeschlagenen ab, als Lie an liniengeometrische Vorstellungen anknüpft, während wir, um uns mehr der gewöhnlichen geometrischen Anschauung anzuschließen und im Zusammenhang mit dem Vorhergehenden zu bleiben, bei den bez. Auseinandersetzungen eine geringere Zahl von Veränderlichen voraussetzen. Die Betrachtungen sind, wie bereits Lie selbst hervorgehoben hat (Göttinger Nachrichten 1871, Nr. 7, 22) von der Zahl der Variabeln unabhängig. Sie

[28]) Vgl. Note VII.

[29]) Partielle Differentialgleichungen und Komplexe. Math. Annalen, Bd. 5 (1870).

gehören dem großen Kreise von Untersuchungen an, welche sich mit der projektivischen Untersuchung quadratischer Gleichungen zwischen beliebig vielen Veränderlichen beschäftigen, Untersuchungen, die wir bereits öfter berührt haben und die uns noch wiederholt begegnen werden (vgl. § 10 u. a.).

Ich knüpfe an den Zusammenhang an, der zwischen der reellen Ebene und der Kugelfläche durch stereographische Projektion hergestellt wird. Wir setzten bereits in § 5 die Geometrie der Ebene mit der Geometrie auf einem Kegelschnitte in Verbindung, indem wir der Geraden der Ebene das Punktepaar zuordneten, in welchem sie den Kegelschnitt trifft. Entsprechend können wir einen Zusammenhang zwischen der Raumgeometrie und der Geometrie auf der Kugel aufstellen, indem wir jeder Ebene des Raumes den Kreis zuordnen, in welchem sie die Kugel schneidet. Übertragen wir dann durch stereographische Projektion die Geometrie auf der Kugel von derselben auf die Ebene, wobei jeder Kreis in einen Kreis übergeht, so entsprechen einander also:

die Raumgeometrie, welche als Element die Ebene, als Gruppe diejenigen linearen Transformationen benutzt, welche eine Kugel in sich überführen;

die ebene Geometrie, deren Element der Kreis, deren Gruppe die Gruppe der reziproken Radien ist.

Die erstere Geometrie wollen wir nun nach zwei Seiten verallgemeinern, indem wir statt ihrer Gruppe eine umfassendere setzen. Die resultierende Erweiterung überträgt sich dann durch die Abbildung ohne weiteres auf ebene Geometrie.

Statt der linearen Transformationen des aus Ebenen bestehenden Raumes, welche die Kugel in sich überführen, liegt es nahe, entweder die Gesamtheit der linearen Transformationen des Raumes, oder die Gesamtheit der Ebenentransformationen des Raumes zu wählen, welche [in einem noch erst anzugebenden Sinne] die Kugel ungeändert lassen, indem wir das eine Mal von der Kugel, das andere Mal von dem linearen Charakter der anzuwendenden Transformationen absehen. Die erste Verallgemeinerung ist ohne weiteres verständlich und wir mögen sie also zuerst betrachten und in ihrer Bedeutung für ebene Geometrie verfolgen; auf die zweite kommen wir hernach zurück, wobei es sich denn zunächst darum handelt, die allgemeinste betreffende Transformation zu bestimmen.

Die linearen Transformationen des Raumes haben die Eigenschaft gemein, Ebenenbüschel und Ebenenbündel wieder in solche überzuführen. Aber auf die Kugel übertragen ergibt das Ebenenbüschel ein Kreisbüschel, d. h. eine einfach unendliche Reihe von Kreisen mit gemeinsamen Schnittpunkten; das Ebenenbündel ergibt ein Kreisbündel, d. h. eine zweifach unendliche Schar von Kreisen, die auf einem festen Kreise senkrecht stehen (dem Kreise, dessen Ebene die Polarebene des den Ebenen des gegebenen Bündels gemeinsamen Punktes ist). Den linearen Transformationen des Raumes entsprechen also auf der Kugel und weiterhin in der Ebene Kreistransformationen von der charakteristischen Eigenschaft, Kreisbüschel und Kreisbündel in ebensolche überzuführen[30]). *Die ebene Geometrie, welche die Gruppe der so gewonnenen Transformationen benutzt, ist das Bild der gewöhnlichen projektivischen Raumgeometrie.* Als Element der Ebene wird man in dieser Geometrie nicht den Punkt benutzen können, da die Punkte für die gewählte Transformationsgruppe keinen Körper bilden (§ 5), sondern man wird die Kreise als Elemente wählen.

Bei der zweiten Erweiterung, die wir nannten, gilt es zunächst die Frage nach der Art der bezüglichen Transformationsgruppe zu erledigen. Es handelt sich darum, Ebenentransformationen zu finden, die aus jedem [Ebenenbüschel, dessen Achse die Kugel berührt, wieder ein solches Büschel] machen. Wir mögen der kürzeren Ausdrucksweise wegen zunächst die Frage dualistisch umkehren und überdies einen Schritt in der Zahl der Dimensionen hinabgehen; wir wollen also nach Punkttransformationen der Ebene fragen, welche aus jeder Tangente eines gegebenen Kegelschnittes wiederum eine Tangente erzeugen. Zu dem Zwecke betrachten wir die Ebene mit ihrem Kegelschnitte als Bild einer Fläche zweiten Grades, die man von einem nicht auf ihr befindlichen Raumpunkte aus so auf die Ebene projiziert hat, daß der bezeichnete Kegelschnitt die Übergangskurve vorstellt. Den Tangenten des Kegelschnitts entsprechen die Erzeugenden der Fläche, und die Frage ist auf die andere zurückgeführt nach der Gesamtheit der Punkttransformationen der Fläche in sich selbst, bei denen die Erzeugenden Erzeugende bleiben.

Solcher Transformationen gibt es nun zwar beliebig unendlich viele: denn man braucht nur den Punkt der Fläche als Durchschnitt der Erzeugenden zweierlei Art zu betrachten und jedes der Geradensysteme beliebig in sich zu transformieren. Aber unter den Transformationen sind insbesondere die linearen. Nur auf diese wollen wir achten. Hätten wir nämlich nicht mit einer Fläche, sondern mit einer mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeit zu tun, die durch eine quadratische Gleichung repräsentiert wird, so blieben nur die linearen Transformationen, die anderen kämen in Wegfall[31]).

Diese linearen Transformationen der Fläche in sich selbst ergeben, durch (nicht stereographische) Projektion auf die Ebene übertragen, zwei-

[30]) Diese Transformationen werden gelegentlich in Graßmanns Ausdehnungslehre betrachtet (in der Auflage von 1862, S. 278).

[31]) Projiziert man die Mannigfaltigkeit stereographisch, so erhält man den bekannten Satz: In mehrfach ausgedehnten Gebieten (schon im Raume) gibt es außer den Transformationen, die sich in der Gruppe der reziproken Radien befinden, keine konformen Punkttransformationen. In der Ebene gibt es dagegen beliebig viele andere. Vgl. auch die zitierten Arbeiten von Lie.

deutige Punkttransformationen, vermöge deren aus jeder Tangente des Kegelschnittes, der die Übergangskurve bildet, allerdings wieder eine Tangente wird, aus jeder anderen Geraden aber im allgemeinen ein Kegelschnitt, der die Übergangskurve doppelt berührt. Es läßt sich diese Transformationsgruppe passend charakterisieren, wenn man auf den Kegelschnitt, der die Übergangskurve bildet, eine projektivische Maßbestimmung gründet. Die Transformationen haben dann die Eigenschaft, Punkte, welche im Sinne der Maßbestimmung voneinander eine Entfernung gleich Null haben, sowie Punkte, welche von einem anderen Punkte eine konstante Entfernung haben, wieder in solche Punkte zu verwandeln.

Alle diese Betrachtungen lassen sich auf beliebig viele Variabeln übertragen, insbesondere also für die ursprüngliche Fragestellung, die sich auf die Kugel und die Ebene als Element bezog, verwerten. Man kann dem Resultate dabei eine besonders anschauliche Form geben, weil der Winkel, den zwei Ebenen im Sinne der auf eine Kugel gegründeten projektivischen Maßbestimmung miteinander bilden, mit dem Winkel gleich ist, den ihre Durchschnittskreise mit der Kugel im gewöhnlichen Sinne miteinander bilden.

Wir erhalten also auf der Kugel und weiterhin auf der Ebene eine Gruppe von Kreistransformationen, welche die Eigenschaft haben, *Kreise die einander berühren (einen Winkel gleich Null einschließen), sowie Kreise, die einen anderen Kreis unter demselben Winkel schneiden, in ebensolche Kreise überzuführen.* In der Gruppe dieser Transformationen sind auf der Kugel die bez. linearen, in der Ebene die Transformationen der Gruppe der reziproken Radien enthalten[32]).

[32]) [Die Betrachtungen des Textes dürften durch Zufügung einiger weniger analytischer Formeln wesentlich klarer werden. Sei die Gleichung der Kugel, die wir stereographisch auf unsere Ebene beziehen, in gewöhnlichen Tetraederkoordinaten:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0;$$

die an diese Bedingungsgleichung gebundenen x erhalten dann bei uns die Bedeutung ebener tetrazyklischer Punktkoordinaten,

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 + u_4 x_4 = 0$$

wird die allgemeine Kreisgleichung der Ebene. Berechnet man den Radius des solcherweise dargestellten Kreises, so kommt man dabei auf die Quadratwurzel

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2},$$

die wir mit $i u_5$ bezeichnen mögen. Wir können jetzt die Kreise als Elemente der Ebene betrachten. Die Gruppe der reziproken Radien stellt sich dann durch die Gesamtheit der homogenen linearen Umsetzungen der $u_1 u_2 u_3 u_4$ dar, bei denen

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2$$

in ein Multiplum seiner selbst übergeht. Die erweiterte Gruppe aber derjenigen Kreisgeometrie, welche der Lieschen Kugelgeometrie entspricht, besteht aus den homogenen linearen Umsetzungen der *fünf* Variabelen $u_1 u_2 u_3 u_4 u_5$, welche

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2 + u_5^2$$

in ein Multiplum seiner selbst verwandeln (1893).]

Die auf diese Gruppe zu gründende Kreisgeometrie ist nun das Analogon zu der *Kugelgeometrie*, wie sie Lie für den Raum entworfen hat, und wie sie bei Untersuchungen über Krümmung der Flächen von ausgezeichneter Bedeutung scheint. Sie schließt die Geometrie der reziproken Radien in demselben Sinne in sich, wie letztere wieder die elementare Geometrie. —

Die nunmehr gewonnenen Kreis- (Kugel-)Transformationen haben insbesondere die Eigenschaft, sich berührende Kreise (Kugeln) in ebensolche überzuführen. Betrachtet man alle Kurven (Flächen) als Umhüllungsgebilde von Kreisen (Kugeln), so werden infolgedessen Kurven (Flächen), die sich berühren, immer wieder in solche übergehen. Die fraglichen Transformationen gehören also in die Klasse der später allgemein zu betrachtenden *Berührungstransformationen*, d. h. solcher Umformungen, bei denen Berührung von Punktgebilden eine invariante Beziehung ist. Die im vorliegenden Paragraphen zuerst erwähnten Graßmannschen Kreistransformationen, denen man analoge Kugeltransformationen an die Seite stellen kann, sind keine Berührungstransformationen. —

Wurden vorstehend die zweierlei Erweiterungen nur an die Geometrie der reziproken Radien angeknüpft, so gelten dieselben in entsprechender Weise für Liniengeometrie, überhaupt für die projektivische Untersuchung einer durch eine quadratische Gleichung ausgeschiedenen Mannigfaltigkeit, wie bereits angedeutet wurde, hier aber nicht weiter ausgeführt werden soll.

§ 8.

Aufzählung weiterer Methoden, denen eine Gruppe von Punkttransformationen zugrunde liegt.

Elementare Geometrie, Geometrie der reziproken Radien und auch projektivische Geometrie, sofern man von den mit Wechsel des Raumelements verknüpften dualistischen Umformungen absieht, subsumieren sich als einzelne Glieder unter die große Menge von denkbaren Betrachtungsweisen, welche überhaupt Gruppen von Punkttransformationen zugrunde legen. Wir mögen hier nur die folgenden drei Methoden, die hierin mit den genannten übereinstimmen, hervorheben. Sind diese Methoden auch lange nicht in dem Maße, wie die projektivische Geometrie, zu selbständigen Disziplinen entwickelt, so treten sie doch deutlich erkennbar in den neueren Untersuchungen auf[33]).

[33]) [Während es sich bei den bis jetzt behandelten Beispielen um Gruppen mit endlicher Parameterzahl handelte, kommen nunmehr im Texte sogenannte unendliche Gruppen in Betracht (1893).] [Zur Vermeidung von Mißverständnissen ist aber zu bemerken, daß in den späteren Untersuchungen von Lie der Begriff der unendlichen Gruppen viel enger gefaßt, nämlich auf solche Gruppen eingeschränkt wurde, die sich durch Differentialgleichungen definieren lassen. K.]

1. *Die Gruppe der rationalen Umformungen.*

Bei rationalen Umformungen muß wohl unterschieden werden, ob dieselben für *alle* Punkte des Gebietes, in welchem man operiert, also des Raumes oder der Ebene usw., rational sind, oder nur für die Punkte einer in dem Gebiete enthaltenen Mannigfaltigkeit, einer Fläche, einer Kurve. Nur die ersteren sind zu verwenden, wenn es gilt, im bisherigen Sinne eine Geometrie des Raumes, der Ebene zu entwerfen; die letzteren gewinnen von dem hier gegebenen Standpunkte aus erst Bedeutung, wenn Geometrie auf einer gegebenen Fläche, Kurve studiert werden soll. Dieselbe Unterscheidung gilt bei der sogleich anzuführenden Analysis situs.

Die seitherigen Untersuchungen, hier wie dort, haben sich aber wesentlich mit Transformationen der zweiten Art beschäftigt. Insofern dabei nicht die Frage nach der Geometrie auf der Fläche, der Kurve war, es sich vielmehr darum handelte, Kriterien zu finden, damit zwei Flächen, Kurven ineinander transformiert werden können, treten diese Untersuchungen aus dem Kreise der hier zu betrachtenden heraus[34]). Der hier aufgestellte allgemeine Schematismus umspannt eben nicht die Gesamtheit mathematischer Forschung überhaupt, sondern er bringt nur gewisse Richtungen unter einen gemeinsamen Gesichtspunkt.

Für eine Geometrie der rationalen Umformungen, wie sie sich unter Zugrundelegung der Transformationen der ersten Art ergeben muß, sind bis jetzt erst die Anfänge vorhanden. Im Gebiete erster Stufe, auf der geraden Linie, sind die rationalen Umformungen mit den linearen identisch und liefern also nichts Neues. In der Ebene kennt man freilich die Gesamtheit der rationalen Umformungen (der Cremonaschen Transformationen), man weiß, daß sie sich durch Zusammensetzung quadratischer erzeugen lassen. Man kennt auch invariante Charaktere der ebenen Kurven: ihr Geschlecht, die Existenz der Moduln; aber eigentlich zu einer Geo-

[34]) [Von einer anderen Seite ordnen sie sich wieder, was mir 1872 noch nicht bekannt war, aufs beste in die Betrachtungen des Textes ein. Ist irgendein algebraisches Gebilde (Kurve, oder Fläche, ...) vorgelegt, so übertrage man dasselbe in einen höheren Raum, indem man die Verhältnisse

$$\varphi_1 : \varphi_2 : \cdots : \varphi_p$$

der zugehörigen Integranden erster Gattung als homogene Koordinaten einführt. In diesem Raume hat man dann einfach der weiteren Betrachtung die Gruppe der homogenen linearen Umsetzungen der φ zugrunde zu legen. Vgl. verschiedene Arbeiten der Herren Brill, Nöther und Weber, sowie z. B. meine eigene Abhandlung: „Zur Theorie der Abelschen Funktionen" in Bd. 36 der Math. Annalen [s. Bd. III dieser Ausgabe] (1893)]. [Auch bei den in den vorangehenden Paragraphen behandelten Beispielen konnte die jeweils in Betracht kommende Gruppe bei Übergang zu einem zweckmäßig gewählten höheren Raum durch eine Gruppe linearer Transformationen ersetzt werden. Die Untersuchung kann daraufhin immer projektiv gewandt werden. Die naheliegende Frage, wie weit sich hieraus ein allgemeines Prinzip machen läßt, scheint immer noch nicht erledigt zu sein. K.]

metrie der Ebene in dem hier gemeinten Sinne entwickelt sind diese Betrachtungen noch nicht. Im Raume ist die ganze Theorie noch erst im Entstehen begriffen. Von den rationalen Umformungen kennt man bis jetzt nur wenige und benutzt dieselben, um bekannte Flächen mit unbekannten durch Abbildung in Verbindung zu setzen. —

2. *Die Analysis situs.*

In der sogenannten Analysis situs sucht man das Bleibende gegenüber solchen Umformungen, die aus unendlich kleinen Verzerrungen durch Zusammensetzung entstehen. Auch hier muß man, wie bereits gesagt, unterscheiden, ob das ganze Gebiet, also etwa der Raum, als Objekt der Transformationen gedacht werden soll, oder nur eine aus ihm ausgesonderte Mannigfaltigkeit, eine Fläche. Die Transformationen der ersten Art sind es, die man einer Raumgeometrie würde zugrunde legen können. Ihre Gruppe wäre wesentlich anders konstituiert, als die bisher betrachteten es waren. Indem sie alle Transformationen umfaßt, die sich aus reell gedachten unendlich kleinen Punkttransformationen zusammensetzen, trägt sie die prinzipielle Beschränkung auf reelle Raumelemente in sich, und bewegt sich auf dem Gebiete der willkürlichen Funktion. Man kann diese Transformationsgruppe nicht ungeschickt erweitern, indem man sie noch mit den reellen Kollineationen, die auch das unendlich Ferne modifizieren, verbindet. —

3. *Die Gruppe aller Punkttransformationen.*

Wenn gegenüber dieser Gruppe keine Fläche mehr individuelle Eigenschaften besitzt, da jede in jede andere durch Transformationen der Gruppe übergeführt werden kann, so sind es höhere Gebilde, bei deren Untersuchung die Gruppe mit Vorteil Anwendung findet. Bei der Auffassung der Geometrie, wie sie hier zugrunde gelegt ist, kann es gleichgültig sein, wenn diese Gebilde seither nicht sowohl als geometrische, sondern nur als analytische betrachtet wurden, die gelegentlich geometrische Anwendung fanden, und wenn man bei ihrer Untersuchung Prozesse anwandte (wie eben beliebige Punkttransformationen), die man erst in neuerer Zeit bewußt als geometrische Umformungen aufzufassen begonnen hat. Unter diese analytischen Gebilde gehören vor allen die homogenen Differentialausdrücke, sodann auch die partiellen Differentialgleichungen. Bei der allgemeinen Diskussion der letzteren scheint aber, wie in dem folgenden Paragraphen ausgeführt wird, die umfassendere Gruppe aller Berührungstransformationen noch vorteilhafter.

Der Hauptsatz, der in der Geometrie, welche die Gruppe aller Punkttransformationen zugrunde legt, in Geltung ist, ist der, *daß eine Punkttransformation für eine unendlich kleine Partie des Raumes immer den Wert einer linearen Transformation hat.* Die Entwicklungen der projektivischen Geometrie haben also nun ihren Wert für das Unendlichkleine, und hierin liegt, mag sonst die Wahl der Gruppe bei Behandlung von Mannigfaltigkeiten willkürlich sein — *hierin liegt ein auszeichnender Charakter für die projektivische Anschauungsweise.*

Nachdem nun schon lange von dem Verhältnisse der Betrachtungsweisen, die einander einschließende Gruppen zugrunde legen, nicht mehr die Rede war, mag hier noch einmal ein Beispiel für die allgemeine Theorie des § 2 gegeben werden. Wir mögen uns die Frage vorlegen, wie denn vom Standpunkte „aller Punkttransformationen" die gewöhnlichen projektivischen Eigenschaften aufzufassen sind, wobei von den dualistischen Umformungen, die eigentlich mit zur Gruppe der projektivischen Geometrie gehören, abgesehen werden mag. Die Frage deckt sich dann mit der andern: durch welche Bedingung aus der Gesamtheit der Punkttransformationen die Gruppe der linearen ausgeschieden wird. Das Charakteristische der letzteren ist, daß sie jeder Ebene eine Ebene zuordnen: sie sind diejenigen Punkttransformationen, vermöge deren die Mannigfaltigkeit der Ebenen (oder, was auf dasselbe hinauskommt, der geraden Linien) erhalten bleibt. *Die projektivische Geometrie ist aus der Geometrie aller Punkttransformationen ebenso durch Adjunktion der Mannigfaltigkeit der Ebenen zu gewinnen, wie die elementare Geometrie aus der projektivischen durch Adjunktion des unendlich fernen Kugelkreises.* Insbesondere haben wir z. B. vom Standpunkte aller Punkttransformationen die Bezeichnung einer Fläche als einer algebraischen von einer gewissen Ordnung als eine invariante Beziehung zur Mannigfaltigkeit der Ebenen aufzufassen. Es wird dies recht deutlich, wenn man, mit Graßmann, die Erzeugung der algebraischen Gebilde an ihre lineale Konstruktion knüpft.

§ 9.

Von der Gruppe aller Berührungstransformationen.

Berührungstransformationen sind zwar in einzelnen Fällen schon lange betrachtet; auch hat Jacobi bei analytischen Untersuchungen bereits von den allgemeinsten Berührungstransformationen Gebrauch gemacht; aber in die lebendige geometrische Anschauung wurden sie erst durch neuere Arbeiten von Lie eingeführt[35]. Es ist daher wohl nicht überflüssig, hier ausdrücklich auseinanderzusetzen, was eine Berührungstransformation ist,

[35]) Vgl. besonders die bereits zitierte Arbeit: Über partielle Differentialgleichungen und Komplexe. Math. Ann., Bd. 5. Die im Texte gegebenen Ausführungen betr. partielle Differentialgleichungen habe ich wesentlich mündlichen Mitteilungen von Lie entnommen; vgl. dessen Note: Zur Theorie partieller Differentialgleichungen. Göttinger Nachrichten. Okt. 1872.

wobei wir uns, wie immer, auf den Punktraum mit seinen drei Dimensionen beschränken.

Unter einer Berührungstransformation hat man, analytisch zu reden, jede Substitution zu verstehen, welche die Variabelwerte x, y, z und ihre partiellen Differentialquotienten $\frac{dz}{dx} = p$, $\frac{dz}{dy} = q$ durch neue x', y', z', p', q' ausdrückt. Dabei gehen, wie ersichtlich, sich berührende Flächen im allgemeinen wieder in sich berührende Flächen über, was den Namen Berührungstransformation begründet. Die Berührungstransformationen zerfallen, wenn man vom Punkte als Raumelement ausgeht, in drei Klassen: solche, die den dreifach unendlich vielen Punkten wieder Punkte zuordnen — das sind die eben betrachteten Punkttransformationen —, solche, die sie in Kurven, endlich solche, die sie in Flächen überführen. Diese Einteilung hat man insofern nicht als eine wesentliche zu betrachten, als bei Benutzung anderer dreifach unendlich vieler Raumelemente, etwa der Ebenen, allerdings wieder eine Teilung in drei Gruppen eintritt, die aber mit der Teilung, die unter Zugrundelegung der Punkte stattfand, nicht koinzidiert.

Wenden wir auf einen Punkt alle Berührungstransformationen an, so geht er in die Gesamtheit aller Punkte, Kurven und Flächen über. In ihrer Gesamtheit erst bilden also Punkte, Kurven und Flächen einen *Körper* unserer Gruppe. Man mag daraus die allgemeine Regel abnehmen, daß die formale Behandlung eines Problems im Sinne aller Berührungstransformationen (also etwa die sogleich vorzutragende Theorie der partiellen Differentialgleichungen) eine unvollkommene werden muß, sowie man mit Punkt- (oder Ebenen-) Koordinaten operiert, da die zugrunde gelegten Raumelemente eben keinen Körper bilden.

Alle in dem genannten Körper enthaltenen Individuen als Raumelemente einzuführen, geht aber, will man in Verbindung mit den gewöhnlichen Methoden bleiben, nicht an, da deren Zahl unendlichfach unendlich ist. Hierin liegt die Notwendigkeit, bei diesen Betrachtungen nicht den Punkt, nicht die Kurve oder die Fläche, sondern das *Flächenelement*, d. h. das Wertsystem x, y, z, p, q als *Raumelement* einzuführen. Bei jeder Berührungstransformation wird aus jedem Flächenelemente ein neues; die fünffach unendlich vielen Flächenelemente bilden also einen Körper.

Bei diesem Standpunkte muß man Punkt, Kurve, Fläche gleichmäßig als Aggregate von Flächenelementen auffassen, und zwar von zweifach unendlich vielen. Denn die Fläche wird von ∞^2 Elementen bedeckt, die Kurve von ebenso vielen berührt, durch den Punkt gehen ∞^2 hindurch. Aber diese zweifach unendlichen Aggregate von Elementen haben noch eine charakteristische Eigenschaft gemein. Man bezeichne als *vereinigte Lage* zweier konsekutiven Flächenelemente x, y, z, p, q und $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$, $p + dp$, $q + dq$ die Beziehung, welche durch

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

dargestellt wird. So sind Punkt, Kurve, Fläche übereinstimmend *zweifach unendliche Mannigfaltigkeiten von Elementen, deren jedes mit den einfach unendlich vielen ihm benachbarten vereinigt liegt.* Dadurch sind Punkt, Kurve, Fläche gemeinsam charakterisiert, und so müssen sie auch, wenn man die Gruppe der Berührungstransformationen zugrunde legen will, analytisch repräsentiert werden.

Die vereinigte Lage konsekutiver Elemente ist eine bei beliebiger Berührungstransformation invariante Beziehung. Aber auch umgekehrt können die Berührungstransformationen definiert werden *als diejenigen Substitutionen der fünf Veränderlichen x, y, z, p, q, vermöge deren die Relation $dz - p\,dx - q\,dy = 0$ in sich selbst übergeführt wird.* Der Raum ist also bei diesen Untersuchungen als eine Mannigfaltigkeit von fünf Dimensionen anzusehen, und diese Mannigfaltigkeit hat man zu behandeln, indem man als Gruppe die Gesamtheit aller Transformationen der Variablen zugrunde legt, welche eine bestimmte Relation zwischen den Differentialen ungeändert lassen.

Gegenstand der Untersuchung werden in erster Linie diejenigen Mannigfaltigkeiten, welche durch eine oder mehrere Gleichungen zwischen den Variabeln dargestellt werden, d. h. *die partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung und ihre Systeme.* Eine Hauptfrage wird, wie sich aus den Mannigfaltigkeiten von Elementen, die gegebenen Gleichungen genügen, einfach, zweifach unendliche Reihen von Elementen ausscheiden lassen, deren jedes mit jedem benachbarten vereinigt liegt. Auf eine solche Frage läuft z. B. die Aufgabe der Lösung einer partiellen Differentialgleichung erster Ordnung hinaus. Man soll — so kann man sie formulieren — aus den vierfach unendlich vielen Elementen, die der Gleichung genügen, alle zweifach unendlichen Mannigfaltigkeiten der bewußten Art ausscheiden. Insbesondere die Aufgabe der vollständigen Lösung nimmt jetzt die präzise Form an: man soll die vierfach unendlich vielen Elemente, die der Gleichung genügen, auf irgendeine Weise in zweifach unendlich viele derartige Mannigfaltigkeiten zerlegen.

Ein Verfolg dieser Betrachtung über partielle Differentialgleichungen kann hier nicht in der Absicht liegen; ich verweise in bezug hierauf auf die zitierten Lieschen Arbeiten. Es sei nur noch hervorgehoben, daß für den Standpunkt der Berührungstransformationen eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung keine Invariante hat, daß jede in jede andere übergeführt werden kann, daß also namentlich die linearen Gleichungen nicht weiter ausgezeichnet sind. Unterscheidungen treten erst ein, wenn man zu dem Standpunkte der Punkttransformationen zurückgeht.

Die Gruppen der Berührungstransformationen, der Punkttransformationen, endlich der projektivischen Umformungen lassen sich in einer einheitlichen Weise charakterisieren, die ich nicht unterdrücken mag[36]). Berührungstransformationen wurden bereits definiert als diejenigen Umformungen, bei denen die vereinigte Lage konsekutiver Flächenelemente erhalten bleibt. Die Punkttransformationen haben dagegen die charakteristische Eigenschaft, vereinigt gelegene konsekutive Linienelemente in ebensolche zu verwandeln: die linearen und dualistischen Transformationen endlich bewahren die vereinigte Lage konsekutiver Konnexelemente. Unter einem Konnexelemente verstehe ich die Vereinigung eines Flächenelementes mit einem in ihm enthaltenen Linienelemente; konsekutive Konnexelemente heißen vereinigt gelegen, wenn nicht nur der Punkt, sondern auch das Linienelement des einen in dem Flächenelemente des anderen enthalten ist. Die (übrigens vorläufige) Bezeichnung Konnexelement bezieht sich auf die von Clebsch neuerdings[37]) in die Geometrie eingeführten Gebilde, welche durch eine Gleichung dargestellt werden, die gleichzeitig eine Reihe Punkt-, eine Reihe Ebenen- und eine Reihe Linienkoordinaten enthalten, und deren Analoga in der Ebene Clebsch als Konnexe bezeichnet.

§ 10.

Über beliebig ausgedehnte Mannigfaltigkeiten.

Es wurde bereits wiederholt hervorgehoben, wie bei der Anknüpfung der bisherigen Auseinandersetzungen an die räumliche Vorstellung nur der Wunsch maßgebend war, die abstrakten Begriffe durch Anlehnung an anschauliche Beispiele leichter entwickeln zu können. An und für sich sind diese Betrachtungen von dem sinnlichen Bilde unabhängig und gehören dem allgemeinen Gebiete mathematischer Forschung an, das man als die Lehre von den ausgedehnten Mannigfaltigkeiten oder (nach Graßmann) kurz als *Ausdehnungslehre* bezeichnet. Wie man die Übertragung des Vorhergehenden vom Raume auf den bloßen Mannigfaltigkeitsbegriff zu bewerkstelligen hat, ist ersichtlich. Es sei dabei nur noch einmal bemerkt, daß wir bei der abstrakten Untersuchung, der Geometrie gegenüber, den Vorteil haben, die Gruppe von Transformationen, welche wir zugrunde

[36]) Ich verdanke diese Definitionen einer Bemerkung von Lie. [Lie scheint auf diese doch gewiß interessanten Definitionen in seinen späteren Arbeiten nie zurückgekommen zu sein. K.]

[37]) Gött. Abhandlungen, 1872, Bd. 17: Über eine Fundamentalaufgabe der Invariantentheorie, sowie namentlich Gött. Nachrichten, 1872, Nr. 22: Über ein neues Grundgebilde der analytischen Geometrie der Ebene.

legen wollen, ganz willkürlich wählen zu können, während in der Geometrie eine kleinste Gruppe, die Hauptgruppe, von vornherein gegeben war.

Wir mögen hier nur die folgenden drei Behandlungsweisen, und auch diese ganz kurz, berühren.

1. *Die projektivische Behandlungsweise oder die moderne Algebra (Invariantentheorie).*

Ihre Gruppe besteht in der Gesamtheit der linearen und dualistischen Transformationen der zur Darstellung des Einzelnen in der Mannigfaltigkeit verwendeten Veränderlichen; sie ist die Verallgemeinerung der projektivischen Geometrie. Es wurde bereits hervorgehoben, wie diese Behandlungsweise bei der Diskussion des unendlich Kleinen in einer um eine Dimension mehr ausgedehnten Mannigfaltigkeit zur Verwendung kommt. Sie schließt die beiden noch zu nennenden Behandlungsweisen in dem Sinne ein, als ihre Gruppe die bei jenen zugrunde zu legende Gruppe umfaßt.

2. *Die Mannigfaltigkeit von konstantem Krümmungsmaße.*

Die Vorstellung einer solchen erwuchs bei Riemann aus der allgemeineren einer Mannigfaltigkeit, in der ein Differentialausdruck der Veränderlichen gegeben ist. Die Gruppe besteht bei ihm aus der Gesamtheit der Transformationen der Variabeln, welche den gegebenen Ausdruck ungeändert lassen. Von einer anderen Seite kommt man zur Vorstellung einer Mannigfaltigkeit von konstanter Krümmung, wenn man im projektivischen Sinne auf eine zwischen den Veränderlichen gegebene quadratische Gleichung eine Maßbestimmung gründet. Bei dieser Weise tritt gegenüber der Riemannschen die Erweiterung ein, daß die Variabeln als komplex gedacht werden; man mag hinterher die Veränderlichkeit auf das reelle Gebiet beschränken. Hierher gehören die große Reihe von Untersuchungen, die wir in §§ 5, 6, 7 berührt haben.

3. *Die ebene Mannigfaltigkeit.*

Als ebene Mannigfaltigkeit bezeichnet Riemann die Mannigfaltigkeit von konstantem verschwindenden Krümmungsmaße. Ihre Theorie ist die unmittelbare Verallgemeinerung der elementaren Geometrie. Ihre Gruppe kann — wie die Hauptgruppe der Geometrie — aus der Gruppe der projektivischen dadurch ausgeschieden werden, daß man ein Gebilde fest hält, welches durch zwei Gleichungen, eine lineare und eine quadratische, dargestellt wird. Dabei hat man zwischen Reellem und Imaginärem zu unterscheiden, wenn man sich der Form, unter der die Theorie gewöhnlich dargestellt wird, anschließen will. Hierher zu rechnen sind vor allem die elementare Geometrie selbst, dann z. B. die in neuerer Zeit entwickelten Verallgemeinerungen der gewöhnlichen Krümmungstheorie usw.

Schlußbemerkungen.

Zum Schlusse mögen noch zwei Bemerkungen ihre Stelle finden, die mit dem bisher Vorgetragenen in enger Beziehung stehen; die eine betrifft den Formalismus, durch welchen man die begrifflichen Entwicklungen des Vorangehenden repräsentieren will, die andere soll einige Probleme kennzeichnen, deren Inangriffnahme nach den hier gegebenen Auseinandersetzungen als wichtig und lohnend erscheint.

Man hat der analytischen Geometrie häufig den Vorwurf gemacht, durch Einführung des Koordinatensystems willkürliche Elemente zu bevorzugen, und dieser Vorwurf trifft gleichmäßig jede Behandlungsweise ausgedehnter Mannigfaltigkeiten, welche das einzelne durch die Werte von Veränderlichen charakterisiert. War dieser Vorwurf bei der mangelhaften Art, mit der man namentlich früher die Koordinatenmethode handhabte, nur zu oft gerechtfertigt, so verschwindet er bei einer rationellen Behandlung der Methode. Die analytischen Ausdrücke, welche bei der Untersuchung einer Mannigfaltigkeit im Sinne einer Gruppe entstehen können, müssen, ihrer Bedeutung nach, von dem Koordinatensysteme, insofern es zufällig gewählt ist, unabhängig sein, und es gilt nun, diese Unabhängigkeit auch *formal* in Evidenz zu setzen. Daß dies möglich ist und wie es zu geschehen hat, zeigt die moderne Algebra, in der der formale Invariantenbegriff, um den es sich hier handelt, am deutlichsten ausgeprägt ist. Sie besitzt ein allgemeines und erschöpfendes Bildungsgesetz für invariante Ausdrücke und operiert prinzipiell nur mit solchen. Die gleiche Forderung soll man an die formale Behandlung stellen, auch wenn andere Gruppen, als die projektivische, zugrunde gelegt sind[38]). Denn der Formalismus soll sich doch mit der Begriffsbildung decken, mag man nun den Formalismus nur als präzisen und durchsichtigen Ausdruck der Begriffsbildung verwerten, oder will man ihn benutzen, um an seiner Hand in noch unerforschte Gebiete einzudringen. —

[38]) [Beispielsweise stellen für die Gruppe der Drehungen des dreidimensionalen Raumes um einen festen Punkt die Quaternionen einen solchen Formalismus dar (1893).]

[Aber ich habe späterhin die Forderung des Textes meinerseits nur wenig befolgt. Maßgebend hierfür war mir die Erfahrung, die ich an mir selbst und insbesondere im Unterricht machte, daß das Erlernen immer wieder neuer Arten symbolischer Schreibweise im allgemeinen mehr Zeit kostet, als durch deren Anwendung gewonnen wird. Hiermit dürfte die Tatsache zusammenhängen, daß immer nur ganz wenige Mathematiker sich die von ihrem jeweiligen Schöpfer lebhaft empfohlene Art der Symbolik aneignen (während umgekehrt sehr viele Mathematiker es bequem finden, ihre Gedanken in irgendwelcher, von ihnen selbst geschaffenen, neuen Symbolik zur Darstellung zu bringen). Wir haben auf Grund des hiermit beschriebenen Verhaltens zurzeit in der Mathematik bereits eine weitgehende Sprachverwirrung, als deren bedenkliches, wenn auch nicht gewolltes Endziel die Selbstsperrung alles mathematischen Fortschritts erscheint. K.]

Die Problemstellung, deren wir noch erwähnen wollten, erwächst durch einen Vergleich der vorgetragenen Anschauungen mit der sogenannten Galoisschen Theorie der Gleichungen.

In der Galoisschen Theorie, wie hier, konzentriert sich das Interesse auf *Gruppen* von Änderungen. Die Objekte, auf welche sich die Änderungen beziehen, sind allerdings verschieden; man hat es dort mit einer endlichen Zahl diskreter Elemente, hier mit der unendlichen Zahl von Elementen einer stetigen Mannigfaltigkeit zu tun. Aber der Vergleich läßt sich bei der Identität des Gruppenbegriffes doch weiter verfolgen[39]), und es mag dies hier um so lieber angedeutet werden, als dadurch die Stellung charakterisiert wird, die man gewissen von Lie und mir begonnenen Untersuchungen[40]) im Sinne der hier entwickelten Anschauungen zuzuweisen hat.

In der Galoisschen Theorie, wie sie z. B. in Serrets Traité d'Algèbre supérieure oder in C. Jordans Traité des substitutions dargestellt wird, ist der eigentliche Untersuchungsgegenstand die Gruppen- oder Substitutionstheorie selbst, die Gleichungstheorie fließt aus ihr als eine Anwendung. Entsprechend verlangen wir eine *Transformationstheorie*, eine Lehre von den Gruppen, welche von Transformationen gegebener Beschaffenheit erzeugt werden können. Die Begriffe der Vertauschbarkeit, der Ähnlichkeit usw. kommen, wie in der Substitutionstheorie, zur Verwendung. Als eine Anwendung der Transformationstheorie erscheint die aus der Zugrundelegung der Transformationsgruppen fließende Behandlung der Mannigfaltigkeit.

In der Gleichungstheorie sind es zunächst die symmetrischen Funktionen der Koeffizienten, die das Interesse auf sich ziehen, sodann aber diejenigen Ausdrücke, welche, wenn nicht bei allen, so durch eine größere Reihe von Vertauschungen der Wurzeln ungeändert bleiben. Bei der Behandlung einer Mannigfaltigkeit unter Zugrundelegung einer Gruppe fragen wir entsprechend zunächst nach den Körpern (§ 5), nach den Gebilden, die durch alle Transformationen der Gruppe ungeändert bleiben. Aber es gibt Gebilde, welche nicht alle aber einige Transformationen der Gruppe zulassen, und diese sind dann im Sinne der auf die Gruppe gegründeten Behandlung besonders interessant, sie haben ausgezeichnete Eigenschaften. Es kommt das also darauf hinaus, im Sinne der gewöhnlichen Geometrie symmetrische, reguläre Körper, Rotations- und Schraubenflächen auszu-

[39]) Ich erinnere hier daran, daß Graßmann bereits in der Einleitung zur ersten Auflage seiner Ausdehnungslehre (1844) die Kombinatorik und die Ausdehnungslehre parallelisiert.

[40]) Vgl. den gemeinsamen Aufsatz: Über diejenigen ebenen Kurven, welche durch ein geschlossenes System von einfach unendlich vielen vertauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen. Math. Annalen, Bd. 4 [s. Abh. XXVI dieser Ausgabe

zeichnen. Stellt man sich auf den Standpunkt der projektivischen Geometrie und verlangt insbesondere, daß die Transformationen, durch welche die Gebilde in sich übergehen, vertauschbar sein sollen, so kommt man auf die von Lie und mir in dem zitierten Aufsatze betrachteten Gebilde und auf das in § 6 desselben gestellte allgemeine Problem. Die dort in §§ 1, 3 gegebene Bestimmung aller Gruppen unendlich vieler vertauschbarer linearer Transformationen in der Ebene gehört als ein Teil in die soeben genannte allgemeine Transformationstheorie[41]).

Noten.

I. *Über den Gegensatz der synthetischen und analytischen Richtung in der neueren Geometrie.*

Den Unterschied zwischen neuerer Synthese und neuerer analytischer Geometrie hat man zurzeit nicht mehr als einen wesentlichen zu betrachten, da der gedankliche Inhalt sowohl als die Schlußweise sich auf beiden Seiten allmählich ganz ähnlich gestaltet haben. Daher wählen wir im Texte zur gemeinsamen Bezeichnung beider das Wort „projektivische Geometrie". Wenn die synthetische Methode mehr mit räumlicher Anschauung arbeitet und ihren ersten, einfachen Entwicklungen dadurch einen ungemeinen Reiz erteilt, so ist das Gebiet räumlicher Anschauung der analytischen Methode nicht verschlossen, und man kann die Formeln der analytischen Geometrie als einen präzisen und durchsichtigen Ausdruck der geometrischen Beziehungen auffassen. Man hat auf der anderen Seite den Vorteil nicht zu unterschätzen, den ein gut angelegter Formalismus der Weiterforschung dadurch leistet, daß er gewissermaßen dem Gedanken vorauseilt. Es ist zwar immer an der Forderung festzuhalten, daß man einen mathematischen Gegenstand noch nicht als erledigt betrachten soll,

[41]) Ich muß mir versagen, im Texte auf die Fruchtbarkeit hinzuweisen, welche die Betrachtung unendlich kleiner Transformationen in der Theorie der Differentialgleichungen hat. In § 7 der zitierten Arbeit haben Lie und ich gezeigt: Gewöhnliche Differentialgleichungen, welche gleiche unendlich kleine Transformationen zulassen, bieten gleiche Integrationsschwierigkeiten. Wie die Betrachtungen für partielle Differentialgleichungen zu verwerten seien, hat Lie an verschiedenen Orten, so besonders in dem früher genannten Aufsatze (Math. Annalen, Bd. 5), an verschiedenen Beispielen auseinandergesetzt (vgl. namentlich auch Mitteilungen der Akademie zu Christiania, 3. Mai 1872).

[Durch die Auffassungsweise des Textes ordnen sich insbesondere auch meine späteren Untersuchungen über algebraische Gleichungen, wie diejenigen über transzendente automorphe Funktionen (die in den folgenden beiden Bänden dieser Gesamtausgabe abgedruckt werden sollen) mit den Darlegungen des Erlanger Programms zusammen. Vgl. hierzu die Vorrede zu meinen „Vorlesungen über das Ikosaeder" (Leipzig, Teubner, 1883) wo ich auf den Parallelismus meiner einschlägigen Arbeiten zu den gleichzeitigen Untersuchungen Lies über kontinuierliche Transformationsgruppen ausdrücklich hinwies. K.]

solange er nicht begrifflich evident geworden ist, und es ist das Vordringen an der Hand des Formalismus eben nur ein erster aber schon sehr wichtiger Schritt.

II. *Trennung der heutigen Geometrie in Disziplinen.*

Wenn man z. B. beachtet, wie der mathematische Physiker sich durchgängig der Vorteile entschlägt, die ihm eine nur einigermaßen ausgebildete projektivische Anschauung in vielen Fällen gewähren kann, wie auf der anderen Seite der Projektiviker die reiche Fundgrube mathematischer Wahrheiten unberührt läßt, welche die Theorie der Krümmung der Flächen aufgedeckt hat, so muß man den gegenwärtigen Zustand des geometrischen Wissens als recht unvollkommen und als hoffentlich vorübergehend betrachten.

III. *Über den Wert räumlicher Anschauung.*

Wenn wir im Texte die räumliche Anschauung als etwas Beiläufiges bezeichnen, so ist dies mit Bezug auf den rein mathematischen Inhalt der zu formulierenden Betrachtungen gemeint. Die Anschauung hat für ihn nur den Wert der Veranschaulichung, der allerdings in pädagogischer Beziehung sehr hoch anzuschlagen ist. Ein geometrisches Modell z. B. ist auf diesem Standpunkte sehr lehrreich und interessant.

Ganz anders stellt sich aber die Frage nach dem Werte der räumlichen Anschauung überhaupt. Ich stelle denselben als etwas Selbständiges hin. Es gibt eine eigentliche Geometrie, die nicht, wie die im Texte besprochenen Untersuchungen, nur eine veranschaulichte Form abstrakter Untersuchungen sein will. In ihr gilt es, die räumlichen Figuren nach ihrer vollen gestaltlichen Wirklichkeit aufzufassen, und (was die mathematische Seite ist) die für sie geltenden Beziehungen als evidente Folgen der Grundsätze räumlicher Anschauung zu verstehen. Ein Modell — mag es nun ausgeführt und angeschaut oder nur lebhaft vorgestellt sein — ist für diese Geometrie nicht ein Mittel zum Zwecke, sondern die Sache selbst.

Wenn wir so, neben und unabhängig von der reinen Mathematik, Geometrie als etwas Selbständiges hinstellen, so ist das an und für sich gewiß nichts Neues. Es ist aber wünschenswert, diesen Gesichtspunkt ausdrücklich einmal wieder hervorzuheben, da die neuere Forschung ihn fast ganz übergeht. Hiermit hängt zusammen, daß umgekehrt die neuere Forschung selten dazu verwendet wurde, gestaltliche Verhältnisse räumlicher Erzeugnisse zu beherrschen, und doch scheint sie gerade in dieser Richtung sehr fruchtbar[42]).

[42]) [Meine Arbeiten über die Gestalten insbesondere der algebraischen Kurven und Flächen sollen in Bd. II dieser Gesamtausgabe ihre Stelle finden. K.]

IV. *Über Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Dimensionen.*

Daß der Raum, als Ort für Punkte aufgefaßt, nur drei Dimensionen hat, braucht vom mathematischen Standpunkte aus nicht diskutiert zu werden; ebensowenig kann man aber vom mathematischen Standpunkte aus jemanden hindern, zu behaupten, der Raum habe eigentlich vier, oder unbegrenzt viele Dimensionen, wir seien aber nur imstande, drei wahrzunehmen. Die Theorie der mehrfach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten, wie sie je länger je mehr in den Vordergrund neuerer mathematischer Forschung tritt, ist, ihrem Wesen nach, von einer solchen Behauptung vollkommen unabhängig. Es hat sich in ihr aber eine Redeweise eingebürgert, die allerdings dieser Vorstellung entflossen ist. Man spricht, statt von den Individuen einer Mannigfaltigkeit, von den Punkten eines höheren Raumes usw. An und für sich hat diese Redeweise manches Gute, insofern sie durch Erinnern an die geometrischen Anschauungen das Verständnis erleichtert. Sie hat aber die nachteilige Folge gehabt, daß in ausgedehnten Kreisen die Untersuchungen über Mannigfaltigkeiten mit beliebig vielen Dimensionen als solidarisch erachtet werden mit der erwähnten Vorstellung von der Beschaffenheit des Raumes. Nichts ist grundloser als diese Auffassung. Die betreffenden mathematischen Untersuchungen würden allerdings sofort geometrische Verwendung finden, wenn die Vorstellung richtig wäre, — aber ihr Wert und ihre Absicht ruht, gänzlich unabhängig von dieser Vorstellung, in ihrem eigenen mathematischen Inhalte.

Etwas ganz anderes ist es, wenn Plücker gelehrt hat, den wirklichen Raum als eine Mannigfaltigkeit von beliebig vielen Dimensionen aufzufassen, indem man als Element des Raumes ein von beliebig vielen Parametern abhängendes Gebilde (Kurve, Fläche usw.) einführt (vgl. §5 des Textes).

Die Vorstellungsweise, welche das Element der beliebig ausgedehnten Mannigfaltigkeit als ein Analogon zum Punkte des Raumes betrachtet, ist wohl zuerst von Graßmann in seiner Ausdehnungslehre (1844) entwickelt worden. Bei ihm ist der Gedanke völlig frei von der erwähnten Vorstellung von der Natur des Raumes; letztere geht auf gelegentliche Bemerkungen von Gauß zurück und wurde durch Riemanns Untersuchungen über mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeiten, in welche sie mit eingeflochten ist, in weiteren Kreisen bekannt.

Beide Auffassungsweisen — die Graßmannsche wie die Plückersche — haben ihre eigentümlichen Vorzüge; man verwendet sie beide, zwischen ihnen abwechselnd, mit Vorteil[43]).

[43]) [Unnötig zu bemerken, welche Entwicklung das mehrdimensionale Denken in den letzten Jahrzehnten genommen hat. Ich verweise, was speziell die Graßmannsche Auffassung und die ihr entsprechende Behandlung algebraischer Gebilde angeht, auf Segres Referat in III_2, Heft 7, der Mathematischen Enzyklopädie, 1918. K.]

V. *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.*

Die im Texte gemeinte projektivische Maßgeometrie koinzidiert, wie neuere Untersuchungen gelehrt haben, dem Wesen nach mit der Maßgeometrie, welche unter Nichtannahme des Parallelenaxioms entworfen werden kann und die zurzeit unter dem Namen der Nicht-Euklidischen Geometrie vielfach besprochen und diskutiert wird. Wenn wir im Texte diesen Namen überhaupt nicht berührt haben, so geschah es aus einem Grunde, der mit den in der vorstehenden Note gegebenen Auseinandersetzungen verwandt ist. Man verknüpft mit dem Namen Nicht-Euklidische Geometrie eine Menge unmathematischer Vorstellungen, die auf der einen Seite mit ebenso viel Eifer gepflegt als auf der anderen perhorresziert werden, mit denen aber unsere rein mathematischen Betrachtungen gar nichts zu schaffen haben. Der Wunsch, in dieser Richtung etwas zur Klärung der Begriffe beizutragen, mag die folgenden Auseinandersetzungen motivieren.

Die gemeinten Untersuchungen über Parallelentheorie haben mit ihren Weiterbildungen mathematisch nach zwei Seiten einen bestimmten Wert.

Sie zeigen einmal — und dieses ihr Geschäft kann man als ein einmaliges, abgeschlossenes betrachten —, daß das Parallelenaxiom keine mathematische Folge der gewöhnlich vorangestellten Axiome ist, sondern daß ein wesentlich neues Anschauungselement, welches in den vorhergehenden Untersuchungen nicht berührt wurde, in ihm zum Ausdruck gelangt. Ähnliche Untersuchungen könnte man und sollte man mit Bezug auf jedes Axiom nicht nur der Geometrie durchführen; man würde dadurch an Einsicht in die gegenseitige Stellung der Axiome gewinnen.

Dann aber haben uns diese Untersuchungen mit einem wertvollen mathematischen Begriffe beschenkt: dem Begriffe einer Mannigfaltigkeit von konstanter Krümmung. Er hängt, wie bereits bemerkt und wie in § 10 des Textes noch weiter ausgeführt ist, mit der unabhängig von aller Parallelentheorie erwachsenen projektivischen Maßbestimmung auf das innigste zusammen. Wenn das Studium dieser Maßbestimmung an und für sich hohes mathematisches Interesse bietet und zahlreiche Anwendungen gestattet, so kommt hinzu, daß sie die in der Geometrie gegebene Maßbestimmung als speziellen Fall (Grenzfall) umfaßt und uns lehrt, dieselbe von einem erhöhten Standpunkte aufzufassen.

Völlig unabhängig von den entwickelten Gesichtspunkten steht die Frage, welche Gründe das Parallelenaxiom stützen, ob wir dasselbe als absolut gegeben — wie die einen wollen — oder als durch Erfahrung nur approximativ erwiesen — wie die anderen sagen — betrachten wollen. Sollten Gründe sein, das letztere anzunehmen, so geben uns die fraglichen mathematischen Untersuchungen an die Hand, wie man dann eine exaktere Geometrie zu konstruieren habe. Aber die Fragestellung ist offenbar eine philosophische, welche die allgemeinsten Grundlagen unserer Erkenntnis betrifft. Den Mathematiker *als solchen* interessiert die Fragestellung nicht, und er wünscht, daß seine Untersuchungen nicht als abhängig betrachtet werden von der Antwort, die man von der einen oder der anderen Seite auf die Frage geben mag.

VI. *Liniengeometrie als Untersuchung einer Mannigfaltigkeit von konstantem Krümmungsmaße.*

Wenn wir Liniengeometrie mit der projektivischen Maßbestimmung in einer fünffach ausgedehnten Mannigfaltigkeit in Verbindung setzen, müssen wir beachten, daß wir in den geraden Linien nur die (im Sinne der Maßbestimmung) unendlich fernen Elemente der Mannigfaltigkeit vor uns haben. Es wird daher nötig, zu überlegen, welchen Wert eine projektivische Maßbestimmung für ihre unendlich fernen Elemente hat, und das mag hier etwas auseinandergesetzt werden, um Schwierigkeiten, die sich sonst der Auffassung der Liniengeometrie als einer Maßgeometrie entgegenstellen, zu entfernen. Wir knüpfen diese Auseinandersetzungen an das anschauliche Beispiel, welches die auf eine Fläche zweiten Grades gegründete projektivische Maßbestimmung ergibt.

Zwei beliebig angenommene Punkte des Raumes haben in bezug auf die Fläche eine absolute Invariante: ihr Doppelverhältnis zu den beiden Durchschnittspunkten ihrer Verbindungsgeraden mit der Fläche. Rücken aber die beiden Punkte auf die Fläche, so wird dies Doppelverhältnis unabhängig von der Lage der Punkte gleich Null, außer in dem Falle, daß die beiden Punkte auf eine Erzeugende zu liegen kommen, wo es unbestimmt wird. Dies ist die einzige Partikularisation, die in ihrer Beziehung eintreten kann, wenn sie nicht zusammenfallen, und wir haben also den Satz:

Die projektivische Maßbestimmung, welche man im Raume auf eine Fläche zweiten Grades gründen kann, ergibt für die Geometrie auf der Fläche noch keine Maßbestimmung.

Hiermit hängt zusammen, daß man durch lineare Transformationen der Fläche in sich selbst drei beliebige Punkte derselben mit drei anderen zusammenfallen lassen kann[44]).

Will man auf der Fläche selbst eine Maßbestimmung haben, so muß man die Gruppe der Transformationen beschränken, und dies erreicht man,

[44]) Diese Verhältnisse ändern sich bei der gew. Maßgeometrie; zwei unendlich ferne Punkte haben für sie freilich eine absolute Invariante. Der Widerspruch, den man in der Abzählung der linearen Transformationen der unendlich fernen Fläche in sich selbst hiermit finden könnte, erledigt sich dadurch, daß die unter ihnen befindlichen Translationen und Ähnlichkeitstransformationen das Unendlichferne überhaupt nicht ändern.

indem man einen beliebigen Raumpunkt (oder seine Polarebene) festhält. Der Raumpunkt sei zunächst nicht auf der Fläche gelegen. So projiziere man die Fläche von dem Punkte auf eine Ebene, wobei ein Kegelschnitt als Übergangskurve auftritt. Auf diesen Kegelschnitt gründe man in der Ebene eine projektivische Maßbestimmung, die man dann rückwärts auf die Fläche überträgt[45]). Dies ist eine eigentliche Maßbestimmung von konstanter Krümmung, und man hat also den Satz:

Auf der Fläche erhält man eine solche Maßbestimmung, sowie man einen außerhalb der Fläche gelegenen Punkt festhält.

Entsprechend findet man[46]):

Eine Maßbestimmung von verschwindender Krümmung erhält man auf der Fläche, wenn man für den festen Punkt einen Punkt der Fläche selbst wählt.

Für alle diese Maßbestimmungen auf der Fläche sind die Erzeugenden der Fläche Linien von verschwindender Länge. Der Ausdruck für das Bogenelement auf der Fläche ist also für die verschiedenen Bestimmungen nur um einen Faktor verschieden. Ein absolutes Bogenelement auf der Fläche gibt es nicht. Wohl aber kann man von dem Winkel sprechen, den Fortschreitungsrichtungen auf der Fläche miteinander bilden. —

Alle diese Sätze und Betrachtungen können nun ohne weiteres für Liniengeometrie benutzt werden. Für den Linienraum selbst existiert zunächst keine eigentliche Maßbestimmung. Eine solche erwächst erst, wenn wir einen linearen Komplex festhalten, und zwar erhält sie konstante oder verschwindende Krümmung, je nachdem der Komplex ein allgemeiner oder in spezieller (eine Gerade) ist. An die Auszeichnung eines Komplexes ist namentlich auch die Geltung eines absoluten Bogenelements geknüpft. Unabhängig davon sind die Fortschreitungsrichtungen zu benachbarten Geraden, welche die gegebene schneiden, von der Länge Null, und auch kann man von einem Winkel reden, den zwei beliebige Fortschreitungsrichtungen miteinander bilden[47]).

VII. *Zur Interpretation der binären Formen.*

Es mag hier der übersichtlichen Gestalt gedacht werden, welche, unter Zugrundelegung der Interpretation von $x + iy$ auf der Kugelfläche, dem Formensysteme der kubischen und der biquadratischen binären Form erteilt werden kann.

Eine kubische binäre Form f hat eine kubische Kovariante Q, eine

[45]) Vgl. § 5 des Textes S. 472.
[46]) Vgl. § 4 des Textes S. 470.
[47]) Vgl. den Aufsatz: Über Liniengeometrie und metrische Geometrie. Math. Annalen, Bd. 5 [s. Abh. VIII dieser Ausgabe].

quadratische Δ, und eine Invariante R[48]). Aus f und Q setzt sich eine ganze Reihe von Kovarianten sechsten Grades

$$Q^2 + \lambda \cdot R f^2$$

zusammen, unter denen auch Δ^3 enthalten ist. Man kann zeigen[49]), daß jede Kovariante der kubischen Form in solche Gruppen von sechs Punkten zerfallen muß. Insofern λ komplexe Werte annehmen kann, gibt es zweifach unendlich viele derselben.

Das ganze so umgrenzte Formensystem kann auf der Kugel nun folgendermaßen repräsentiert werden[50]). Durch geeignete lineare Transformation der Kugel in sich selbst bringe man die drei Punkte, welche f repräsentieren, in drei äquidistante Punkte eines größten Kreises. Derselbe mag als Äquator bezeichnet sein; auf ihm haben die drei Punkte f die geographische Länge 0^0, 120^0, 240^0. So wird Q durch die Punkte des Äquators mit der Länge 60^0, 180^0, 300^0, Δ durch die beiden Pole vorgestellt. Jede Form $Q^2 + \lambda R f^2$ ist durch sechs Punkte repräsentiert, deren geographische Breite und Länge, unter α und β beliebige Zahlen verstanden, in dem folgenden Schema enthalten ist:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|}
\alpha & \alpha & \alpha & -\alpha & -\alpha & -\alpha \\
\beta & 120+\beta & 240+\beta & -\beta & 120-\beta & 240-\beta
\end{array}.$$

Verfolgt man diese Punktsysteme auf der Kugel, so ist es interessant, zu sehen, wie f und Q doppelt, Δ dreifach zählend aus denselben entsteht.

Eine biquadratische Form f hat eine ebensolche Kovariante H, eine Kovariante sechsten Grades T, zwei Invarianten i und j. Besonders zu bemerken ist die Schar biquadratischer Formen $iH + \lambda j f$, die alle zu dem nämlichen T gehören, und unter denen die drei quadratischen Faktoren, in welche man T zerlegen kann, doppelt zählend enthalten sind. —

Man lege jetzt durch den Mittelpunkt der Kugel drei zueinander rechtwinklige Achsen OX, OY, OZ. Ihre sechs Durchstoßpunkte mit der Kugel bilden die Form T. Die vier Punkte eines Quadrupels $iH + \lambda j f$ sind, unter x, y, z Koordination eines beliebigen Kugelpunktes verstanden, durch das Schema

$$\begin{array}{rrr}
x, & y, & z, \\
x, & -y, & -z, \\
-x, & y, & -z, \\
-x, & -y, & z
\end{array}$$

[48]) Vgl. hierzu die betr. Abschnitte von Clebsch: Theorie der binären Formen (1871).

[49]) Durch Betrachtung der linearen Transformationen von f in sich selbst, vgl. Math. Annalen, Bd. 4, S. 352. [Über eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen. Siehe Bd. II dieser Ausgabe.]

[50]) [Man vgl. auch Beltrami, Ricerche sulla geometria delle forme binarie cubiche, Accademia di Bologna, Memorie, 1870 (1893).] [Beltramis Werke, Bd. II.]

vorgestellt. Die vier Punkte bilden jedesmal die Ecken eines symmetrischen Tetraeders, dessen gegenüberstehende Seiten von den Achsen des Koordinatensystems halbiert werden, wodurch die Rolle, welche T in der Theorie der biquadratischen Gleichungen als Resolvente von $iH + \lambda j f$ spielt, gekennzeichnet ist[51]).

Erlangen, im Oktober 1872.

[51]) [An die Andeutungen des Textes schließen sich als unmittelbare Ausführung meine im Band II dieser Ausgabe abzudruckenden Arbeiten über „Binäre Formen mit linearen Transformationen in sich" an (siehe insbesondere Math. Annalen, Bd. 9, 1875).

Im übrigen verweise ich gern noch, indem ich diesen Wiederabdruck des Erlanger Programms abschließe, auf die Arbeiten von Moebius (die ich selbst erst nach ihrem inneren Zusammenhang erfaßte, nachdem ich bei der von der sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften in den Jahren 1885—1887 veranstalteten Gesamtausgabe seiner Werke mitwirken durfte). Moebius hat den allgemeinen Gruppenbegriff und auch viele der geometrischen Transformationen, die zu seiner Illustration im Erlanger Programm herangezogen werden, noch nicht gekannt, aber er hat, von einem sicheren Gefühl geleitet, seine aufeinanderfolgenden geometrischen Arbeiten genau so eingerichtet, wie es dem Grundgedanken des Programms entspricht. Schon im Mittelabschnitt seines Baryzentrischen Kalkuls (1827) ordnet er die „geometrischen Aufgaben" nach den „Verwandtschaften" der „Gleichheit" (Kongruenz), „Ähnlichkeit", „Affinität" und „Kollineation". Von 1853 an beginnen seine Veröffentlichungen über „Kreisverwandtschaft" (= Geometrie der reziproken Radien in der Ebene). Schon vorher (1849) liegen seine ersten Mitteilungen über die Symmetrie der Kristalle. 1863 aber, im Alter von 73 Jahren, setzt er mit Mitteilungen über „Elementarverwandtschaft" ein (d. h. über dasjenige Gebiet der Geometrie, welches wir heute Analysis situs nennen). Mit diesen Angaben wolle man die interessanten Ausführungen vergleichen, welche Herr Curt Reinhardt in Bd. II und Bd. IV von Moebius' Gesammelten Werken über die Entstehung und den Zusammenhang der einzelnen Arbeiten gemäß dem reichen Inhalt des handschriftlichen Nachlasses hat geben können. K.]

XXVIII. Autographierte Vorlesungshefte.

[Math. Annalen, Bd. 45 (1894).]

Höhere Geometrie[1]).

(Doppelvorlesung 1892—93.)

Wenn wir die Untersuchungen über die Prinzipien der Geometrie beiseite lassen (also die Nicht-Euklidische Geometrie im engeren Sinne des Wortes, die Inbetrachtnahme nicht analytischer Kurven usw.), so gruppieren sich die Arbeiten der neueren Geometer oder auch die Geometer selbst in der Hauptsache um zwei Mittelpunkte. Wir haben auf der einen Seite die *Differentialgeometrie*, auf der anderen Seite die *Geometrie der algebraischen Gebilde* (bei der selbst wieder eine Scheidung nach analytischer und synthetischer Methode vorliegt). Und doch stehen die Materialien zu einer einheitlichen Auffassung des ganzen Gebietes seit lange bereit. Ich hatte zu dem Zwecke nur an die Arbeiten anzuknüpfen, welche von Lie und mir selbst in den Jahren 1869—1872 veröffentlicht worden sind, und dann den weitern Fortschritten der Lieschen Arbeiten sowie der geometrischen Funktionentheorie zu folgen. Natürlich bin ich nach keiner Seite in Einzelheiten gegangen.

Meine erste Einteilung ist, wie dies nicht anders sein kann, funktionentheoretischer Natur, nämlich die Unterscheidung zwischen analytischen und algebraischen Funktionen. Erstere sind, allgemein zu reden, nur in einem begrenzten Raumstücke definiert; es ist unmöglich (solange man nicht spezifizieren will) über ihr Verhalten bei weiterer „analytischer Fortsetzung" eine bestimmte Aussage zu machen. Letztere dagegen sind von vornherein im Gesamtraum gegeben. Dabei ist uns beidemal anheimgestellt, ob wir komplexe Wertsysteme mit in Betracht ziehen wollen oder nicht.

[1]) [Aus meinem ersten Referate über autographierte Vorlesungshefte. Die Einleitung wurde bereits auf S. 382—383 abgedruckt. Im übrigen ist über Vorlesungen funktionentheoretischen Inhaltes referiert, worauf im Band III dieser Ausgabe zurückzukommen sein wird.]

Des weiteren aber gruppiere ich den Stoff, ohne mich gerade ängstlich an die Einteilung zu binden, um drei Grundbegriffe: Koordinatensystem, Transformation, Gruppe.

1. Koordinatensystem.

Hier machen die verschiedenen Arten der Punktkoordinaten natürlich den Anfang, die geradlinigen wie die krummlinigen, deren Bedeutung insbesondere auch für die Anwendungen dargelegt wird. So erörtere ich bei den elliptischen Koordinaten die Staudesche Fadenkonstruktion des Ellipsoids, Henricis bewegliches Hyperboloid. Darbouxs pentasphärische Koordinaten geben den Anlaß zu einer Besprechung von Peaucelliers Inversor.

Aber statt des Punktes kann ebensowohl jedes andere Gebilde als „Raumelement" der Koordinatenbestimmung zugrunde gelegt werden (Plücker).

Ich verweile ganz besonders bei der Kugelgeometrie und ihrer von Lie entdeckten Beziehung zur Liniengeometrie; man vergleiche Lies Abhandlung über Komplexe in Bd. 5 der Math. Ann., die überhaupt für meine folgenden Entwicklungen fundamental ist. Wir haben zweierlei Kugelgeometrie zu unterscheiden: die elementare und die höhere (die Liesche). In der elementaren Kugelgeometrie kommt nur das Quadrat des Kugelradius in Betracht, in der höheren Kugelgeometrie aber der Radius selbst, d. h. der mit bestimmtem Vorzeichen genommene Radius. Liniengeometrie des R_3 ist soviel wie Punktgeometrie auf einer Fläche zweiten Grades des R_5. Projizieren wir diese Fläche stereographisch von einem ihrer Punkte aus auf den R_4, so erhalten wir hier die Punktgeometrie der reziproken Radien, d. h. diejenige Art der metrischen Geometrie, welche nur Beziehungen gelten läßt, die bei beliebiger Inversion invariant sind. Dies ist, was in meiner Arbeit über Liniengeometrie und metrische Geometrie auseinandergesetzt wird [ebenfalls in Bd. 5 der Math. Annalen (s. Abh. VIII dieser Ausgabe)]. Wie man von hier zur Kugelgeometrie kommt, wurde von Lie in den Göttinger Nachrichten von 1871 entwickelt. Es handelt sich um ein Verfahren, welches ich als Minimalprojektion bezeichne, d. h. man zieht durch den Punkt des R_4 alle Minimalgeraden (alle Geraden von der Länge Null) und schneidet diese mit dem R_3.

Wichtig ist auch, daß man sich hinsichtlich der Gebilde, die durch Gleichungen zwischen den Koordinaten dargestellt werden sollen, bez. hinsichtlich dieser Gleichungen selbst keine zu weitgehende Beschränkung auferlegt. Ich betone von vornherein, daß wir Gleichungen betrachten dürfen, welche mehrere Reihen von Koordinaten nebeneinander enthalten, daß insbesondere die Differentialgleichungen als solche Objekt der geometrischen Betrachtung sind.

2. Transformation.

Schon die Transformation der Punktkoordinaten gibt zu längeren Erörterungen Anlaß.

Ich bespreche zunächst die Entwicklung der projektiven Geometrie, die Kurven mit unendlich vielen linearen Transformationen in sich, die Theorie der projektiven Differentialinvarianten. Immerzu betone ich, daß die projektive Geometrie nur eines der möglichen geometrischen Abbilder der linearen Invariantentheorie ist, daß also letztere weiter reicht als erstere.

Ich bespreche ferner die Imaginärtransformation, d. h. die Methode, imaginäre Punkte genau so in die Betrachtungen einzuführen, als ob sie reell wären. Lies Theorie der Minimalflächen gibt ein neues vorzügliches Beispiel für die Wirksamkeit dieser Methode.

Dann weiter die Projektionen aus höheren Räumen. Hier finden Maxwells und Cremonas Untersuchungen zur graphischen Statik ihre gebührende Stellung.

Höhere Punkttransformationen der allgemeinsten Art kommen bei der Klassifikation der Differentialausdrücke zur Geltung. Ich verweise auf die Differentialparameter Beltramis und die Theorie der Biegungsinvarianten.

Birationale Punkttransformationen insbesondere sind für das Studium der algebraischen Gebilde fundamental. Clebsch stellte die Aufgabe, die genannten Transformationen im Gebiete der algebraischen Differentialgleichungen zur Geltung zu bringen. In dieser Richtung ist nur erst wenig gearbeitet, doch haben neuerdings die französischen Geometer eine Reihe bemerkenswerter Ansätze gefunden.

Sehr viel erweitert sich der Gesichtskreis, sobald Transformationen mit Wechsel des Raumelements in Betracht gezogen werden.

Hier ist die Stelle, wo ich die Lieschen „Flächenelemente" einführe, um dann gleich zum allgemeinen Begriff der „Berührungstransformation" überzugehen. Die dualistischen Transformationen, die Transformationen der Kugelgeometrie usw. werden mit gebührender Ausführlichkeit besprochen. Daneben ziehe ich Beispiele heran, welche in scheinbar sehr heterogene Teile der Mathematik eingreifen: die astronomische Methode der Variation der Konstanten und die kinematische Aufgabe der Konstruktion von Zahnrädern. —

Ich möchte hier eine Bemerkung einfügen, welche in der Vorlesung nur angedeutet wurde. Man kann sich die Aufgabe stellen, alle in der Analysis vorkommenden Transformationen auf ihren geometrischen Gehalt zu prüfen. Man nehme folgende Formeln aus der Theorie der Fourierschen Integrale:

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(\alpha) \cdot \cos \alpha x \cdot d\alpha,$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \varphi(\alpha) \cdot \cos \alpha x \cdot d\alpha.$$

Was bedeutet die so zwischen f und φ festgelegte Reziprozitätsbeziehung geometrisch? Man denke sich die beiden Kurven $y = \varphi(x)$ und $Y = f(x)$; welche geometrische Abhängigkeit findet zwischen ihnen statt? —

3. Gruppe.

Bei den Gruppen der Geometrie spielt die Unterscheidung der kontinuierlichen Gruppen und der diskontinuierlichen selbstverständlich eine Hauptrolle. Die letzteren trennt man wieder in eigentliche diskontinuierliche (bei denen die äquivalenten Elemente durch endliche Intervalle getrennt sind) und uneigentlich diskontinuierliche (bei denen die äquivalenten Elemente „überall dicht" liegen). Es scheint fast, als würden die uneigentlich diskontinuierlichen Gruppen nicht überall richtig verstanden oder doch nicht nach ihrer Wichtigkeit richtig gewürdigt. *Jede uneigentlich diskontinuierliche Gruppe wird eigentlich diskontinuierlich, wenn man in einen zweckmäßig gewählten höheren Raum aufsteigt.* Dieses Prinzip ist vielleicht noch nicht so explizite formuliert worden, wie mit den vorstehenden Worten geschieht, aber kommt tatsächlich in den verschiedensten Teilen der Mathematik seit lange zur Geltung. Man nehme die unimodularen ganzzahligen Kollineationen der Ebene. Dieselben bilden eine diskontinuierliche Gruppe, welche sofort eigentlich diskontinuierlich wird, wenn man die nullteiligen Kegelschnitte der Ebene als Elemente einführt. Hiervon wissen die Zahlentheoretiker ihren Vorteil zu ziehen. Oder man betrachte die Umkehr der Abelschen Integrale. Was ist der Kern des Jacobischen Umkehrproblems? Die vielfache Periodizität, welche das Integral besitzt, ergibt bei der Umkehr des einzelnen Integrals eine uneigentlich diskontinuierliche Gruppe, die aber eigentlich diskontinuierlich wird, sobald man eine hinreichend große Zahl zusammengehöriger Integrale nebeneinander betrachtet.

Das weiteren bespreche ich in meiner Vorlesung die *Systematik*, welche sich für die Geometrie bei Zugrundelegung des Gruppenbegriffs ergibt. Ich brauche hierauf an gegenwärtiger Stelle um so weniger einzugehen, als ich mein Programm von 1872, in welchem ich diesen Grundgedanken entwickelte, in Bd. 43 der Math. Annalen neuerdings habe abdrucken lassen [s. Abh. XXVII dieser Ausgabe].

Es folgt eine kurze Einleitung in die *Liesche Theorie der kontinuier-*

lichen Transformationsgruppen, bei der ich bemüht war, überall die geometrische Auffassung zur Geltung zu bringen. Ich nehme dabei insbesondere Gelegenheit, die neuen Untersuchungen von Lie über das Helmholtzsche Raumproblem darzulegen. Ich bin hierauf um so ausführlicher eingegangen, als mir daran lag, die bez. Entwicklungen meiner autographierten Vorlesung über die Nicht-Euklidische Geometrie zu berichtigen, bez. zu vervollständigen. Ich erkläre auch ausführlich meine Bemerkungen über die Monodromie des Raumes in Bd. 37 der Math. Annalen, S. 565 [Abh. XXI dieser Ausgabe, S. 373—374]. „Ich sehe diese meine Betrachtungen nur mehr als ein Aperçu an, durch welches deutlich wird, daß hier zwischen zwei und drei Dimensionen ein Unterschied besteht; durch welches aber die eingehenden Lieschen Untersuchungen keineswegs überflüssig gemacht werden.“ —

Dann weiter die *diskontinuierlichen Gruppen*. Sei hier nur angegeben, daß ich den Gegenstand möglichst vielseitig zu fassen suche, indem beispielsweise ebensowohl auf die Untersuchungen der Krystallographen Rücksicht genommen wird wie auf die hierher gehörigen Untersuchungen der Arithmetiker und Funktionentheoretiker.

Noch eine besondere Fragestellung habe ich berührt, welche in die Theorie der kontinuierlichen wie der diskontinuierlichen Gruppen gleichförmig eingreift. Ich meine die Klassifikation der linearen Differentialgleichungen nach den Prinzipien der Herren Picard und Vessiot. Indem ich die große Wichtigkeit der Sache hervorhebe, kritisiere ich gleichzeitig die Darstellung von Vessiot, die in einem wesentlichen Punkte unzureichend scheint. —

Ich schließe meine Vorlesung mit dem Plückerschen Zitate (1830, Vorrede zum zweiten Bande der analytisch-geometrischen Entwicklungen): „Man kann das Verhältnis der Geometrie zur Analysis aus verschiedenen Gesichtspunkten betrachten. Ich möchte mich zu der Ansicht bekennen, daß die Analysis eine Wissenschaft ist, die unabhängig von jeder Anwendung selbständig für sich allein dasteht, und die Geometrie, wie von einer anderen Seite die Mechanik, bloß als bildliche Darstellung gewisser Beziehungen aus dem großen erhabenen Ganzen erscheint.“

Göttingen, im März 1894.

XXIX. Zur Schraubentheorie von Sir Robert Ball.

[Zeitschrift f. Math. u. Physik Bd. 47 (1902); mit einem Zusatz wieder abgedruckt in den Math. Annalen, Bd. 62 (1906).]

Sir Robert Ball hat seine langjährigen Untersuchungen über Schraubentheorie im vorigen Jahre in einem stattlichen Bande zusammengefaßt[1]), der nicht verfehlen kann, dieser geometrischen Weiterbildung der Mechanik starrer Körper erneut das allgemeine Interesse zuzuwenden. Zwei Vorzüge sind es insbesondere, die dem Ballschen Werke von vornherein einen zahlreichen Leserkreis sichern dürften, nämlich die *Anschaulichkeit* und der *elementare Charakter* seiner grundlegenden Entwicklungen. Ich wünsche diese Vorzüge lebhaft anzuerkennen, will aber andererseits hervorheben, daß dieselben von einem gewissen Verzicht auf die Darlegung der im weiteren Verfolg der Theorie notwendig in Betracht kommenden tiefer greifenden Fragen begleitet werden (wie dies übrigens der Verfasser selbst an verschiedenen Stellen seines Buches deutlich hervorhebt[2])).

Jedenfalls möchte ich im folgenden einige Ergänzungen zum Ballschen Werke geben, die manchem Leser willkommen sein dürften. Diese Ergänzungen betreffen erstlich die *allgemeine Systematik* des Gebietes im Sinne moderner invariantentheoretischer (oder gruppentheoretischer) Prinzipien, zweitens aber die Verwendung der Schraubentheorie in der Lehre von den *endlichen* Bewegungen starrer Körper (wo ich übrigens in der Hauptsache nur systematisch zusammenstelle, was zerstreut in der Literatur vorliegt). Ich darf vielleicht hinzufügen, daß ich die betreffenden Überlegungen seit Jahren in Vorlesungen und gelegentlichen Vorträgen wiederholt zur Geltung gebracht habe; speziell knüpfe ich mit den Dar-

[1]) A Treatise on the Theory of Screws, Cambridge 1900.

[2]) Man vgl. z. B. die amüsante Auseinandersetzung, die der Verf. 1887 über die Ziele seiner Untersuchungen vor der British Association in Manchester gab und die nun aus den bez. Reports auf S. 496—509 des vorliegenden Buches wieder abgedruckt ist. Eine Kommission ist niedergesetzt, um die Bewegungen eines starren Körpers zu untersuchen. „Let it suffice for us“, sagt der Präsident der Kommission gleich zu Anfang, „to experiment upon the dynamics of this body so long it remains in or near the position it now occupies. We may leave to *some more ambitious committee* the task of following the body in all conceivable gyrations through the universe.“

legungen der nächstfolgenden Paragraphen an meine eigenen Beiträge zur Liniengeometrie und Schraubentheorie aus den Jahren 1869 und 1871[3]), sowie an die Auseinandersetzung meines Erlanger Programmes von 1872[4]) an. Es hat seinen guten Sinn, daß ich mich dabei von vornherein der Methoden der *analytischen* Geometrie bediene; in der Tat meine ich, dadurch die in Betracht kommenden Beziehungen kürzer und präziser bezeichnen zu können, als dies auf andere Weise möglich wäre.

§ 1.

Von der rationellen Klassifikation geometrischer und mechanischer Größen.

Als *Hauptgruppe räumlicher Änderungen* bezeichne ich in meinem Erlanger Programme den Inbegriff der Bewegungen des Raumes und seiner Ähnlichkeitstransformationen. Es möge ein rechtwinkliges Koordinatensystem zugrunde gelegt werden; ich deute an, wie die Operationen der Hauptgruppe auf die zugehörigen Punktkoordinaten wirken. Wir haben erstlich für *Drehungen um den Anfangspunkt* Formeln folgender Bauart:

$$(1)\qquad \begin{cases} x_1 = a\ x + b\ y + c\ z, \\ y_1 = a'\,x + b'\,y + c'\,z, \\ z_1 = a''x + b''y + c''z; \end{cases}$$

dabei hat man zwischen den $a, b, c, \ldots$ die bekannten Relationen, und insbesondere ist jede dieser Größen gleich der ihr in der Determinante

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

zugehörigen Unterdeterminante. Wir haben ferner für *Parallelverschiebungen des Raumes* Formeln, die ich so bezeichne:

$$(2)\qquad x_1 = x + A,\quad y_1 = y + B,\quad z_1 = z + C,$$

endlich für diejenigen *Ähnlichkeitstransformationen*, die den Koordinatenanfangspunkt festlassen:

$$(3)\qquad x_1 = \lambda x,\quad y_1 = \lambda y,\quad z_1 = \lambda z;$$

unter ihnen mögen wir die *Inversionen*

$$(4)\qquad x_1 = -x,\quad y_1 = -y,\quad z_1 = -z$$

[3]) Math. Annalen, Bd. 2 und 4 [Abh. II und XIV dieser Ausgabe]. Vgl. insbesondere die „Notiz, betreffend den Zusammenhang der Liniengeometrie mit der Mechanik starrer Körper" in Bd. 4 daselbst. [Siehe Abh. XIV dieser Ausgabe.]

[4]) „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen" (Erlangen 1872), abgedruckt in Bd. 43 der Math. Annalen und anderwärts. [Siehe Abh. XXVII dieser Ausgabe.]

besonders hervorheben. Die Formeln für beliebige Transformationen der Hauptgruppe ergeben sich aus (1), (2), (3) durch Kombination; wir mögen dementsprechend die (1), (2), (3) als *erzeugende Substitutionen* der Hauptgruppe bezeichnen. Es handelt sich dabei zunächst um *Raumtransformationen bei festem Koordinatensystem*. Es steht aber nichts im Wege, die Formeln auch so zu interpretieren, daß sie bei festgehaltenem Raume den Übergang je zu einem neuen rechtwinkligen Koordinatensysteme vorstellen (so daß es sich bei den Operationen der Hauptgruppe überhaupt um die allgemeinste Transformation der rechtwinkligen Koordinaten handelt). Wir werden in der Folge diese Auffassung, die zumal bei den Verallgemeinerungen eine Kleinigkeit bequemer erscheint, bevorzugen. Die Formeln (1) und (2) ergeben dann zusammengenommen die allgemeinste Abänderung des rechtwinkligen Koordinatensystems durch *Bewegung*, Formel (4) den Übergang zu einem *inversen Koordinatensystem*, Formel (3) für die allein nur noch in Betracht kommenden positiven Werte von λ die allgemeinste Abänderung, welche aus geänderter Wahl der *Längeneinheit* resultiert.

Wir legen nunmehr nicht bloß Punkte, sondern *beliebige andere geometrische Gebilde* hinsichtlich unseres Koordinatensystems durch „Koordinaten" fest, wobei wir uns diese Gebilde in geeigneter Weise durch Punkte definiert denken, so daß ihre „Koordinaten" Verbindungen verschiedener Reihen von Punktkoordinaten sind. *Den Inbegriff der solcherweise zur Festlegung eines geometrischen Gebildes dienenden Koordinaten mögen wir jeweils als „geometrische Größe" bezeichnen.* Und nun ruht die rationelle Klassifikation geometrischer Größen, von der im folgenden ausgegangen werden soll, einfach darauf, daß wir zusehen, wie sich die in Betracht kommenden Koordinaten bei den Operationen (1), (2), (3) bez. (4) (und also überhaupt bei den Operationen der Hauptgruppe) verhalten. *Wir werden alle diejenigen und nur diejenigen geometrischen Größen als gleichartig ansehen, deren Koordinaten bei den Operationen der Hauptgruppe die gleichen Änderungen erleiden.* Erleiden aber die Koordinaten zweier Gebilde verschiedene Änderungen, so ergibt sich die geometrische Beziehung der beiden Arten geometrischer Größen zueinander unmittelbar und in erschöpfender Weise durch den Vergleich der beiderlei Änderungen.

Ausführungen zu diesem Prinzip enthält u. a. der neuerdings erschienene Artikel von Abraham über die geometrischen Grundbegriffe in der Mechanik der deformierbaren Körper, Bd. IV der Math. Enzyklopädie, Art. 14 (1901)[5]). In der Sache hat man selbstverständlich immer

[5]) [Vgl. auch den Artikel von H. E. Timerding, Geometrische Grundlegung der Mechanik eines starren Körpers. Bd. IV der Math. Enzyklopädie, Art. 2 (1902)].

dem Prinzip entsprechend verfahren. Insbesondere ist die in der Mechanik (und Physik) übliche Unterscheidung der geometrischen Größen nach ihrer *Dimension* nichts anderes als eine Inbetrachtnahme der Substitutionen (3) im Sinne unseres Prinzips (wobei man sich stillschweigend auf positive Werte von λ beschränkt). In dieser Bemerkung liegt zugleich, wie unser Prinzip auf allgemeine, mechanische oder physikalische Größen auszudehnen ist. Es ist weiterhin bequem, neben der *Längeneinheit* und *Zeiteinheit* nicht, wie sonst üblich, eine Masseneinheit, sondern eine *Krafteinheit* eingeführt zu denken. Man wird daraufhin den Formeln (3) noch diejenigen zur Seite stellen, die sich auf die *Änderung der Zeiteinheit* bez. die *Änderung der Krafteinheit* beziehen:

$$(5)\qquad t_1 = \varrho t, \qquad\qquad (6)\qquad P_1 = \sigma P;$$

man wird dann sagen, daß die Formeln (1) bis (6) zusammen die *Hauptgruppe der Mechanik* (bez. der *Physik*) definieren, und ferner die mechanischen (bez. die physikalischen) Größen nach dem *Verhalten* einteilen, *welches ihre Koordinaten bei den Operationen dieser Hauptgruppe zeigen.* Übrigens werden wir auf diese erweiterten Festsetzungen nur bei Gelegenheit zurückkommen; für die laufenden Entwicklungen genügt uns die Inbetrachtnahme der räumlichen Hauptgruppe.

§ 2.

Koordinaten für die unendlich kleine Bewegung eines starren Körpers sowie für die an ihm angreifenden Kraftsysteme.

Eine unendlich kleine Bewegung mag durch folgende Formeln vorgestellt sein:

$$(7)\qquad \begin{cases} dx = (-ry + qz + u)dt, \\ dy = (-pz + rx + v)dt, \\ dz = (-qx + py + w)dt. \end{cases}$$

Wir bezeichnen die Größen

$$(8)\qquad p,\ q,\ r,\ u,\ v,\ w$$

als die *Koordinaten der instantanen Geschwindigkeit*, dagegen die Größen

$$(9)\qquad pdt,\ qdt,\ rdt,\ udt,\ vdt,\ wdt$$

als die *Koordinaten der unendlich kleinen Bewegung* selbst.

Kräfte am starren Körper stellen wir in üblicher Weise durch Strecken dar, welche auf bestimmte gerade Linien aufgetragen und längs dieser geraden Linien verschiebbar sind. Dabei werden wir die Länge dieser Strecken je der Größe der Kräfte gleich setzen; es ist gleichgültig, ob wir uns dabei die Kräfte sämtlich als Stoßkräfte oder als kontinuierlich

wirkende Kräfte denken[6]). Es seien x, y, z bzw. x', y', z' Anfangs- und Endpunkt einer „linienflüchtigen" Strecke. *Dann hat man in üblicher Weise als Koordinaten derselben:*

$$x'-x,\quad y'-y,\quad z'-z,\quad yz'-y'z,\quad zx'-z'x,\quad xy'-x'y;$$

dieselben sechs Größen werden als Koordinaten der Kraft gelten, sofern man die Länge l der Strecke gleich der Zahl P gewählt hat, welche die Größe der Kraft mißt. Wollen wir die Abhängigkeit von der Wahl der Krafteinheit und der Längeneinheit deutlicher hervorkehren, so wird es zweckmäßiger sein, als Koordinaten der Kraft folgende sechs Größen zu bezeichnen:

$$\frac{P}{l}(x'-x), \qquad \frac{P}{l}(y'-y), \qquad \frac{P}{l}(z'-z),$$
$$\frac{P}{l}(yz'-y'z), \qquad \frac{P}{l}(zx'-z'x), \qquad \frac{P}{l}(xy'-x'y).$$

Als *Kräftesystem* bezeichnen wir den Inbegriff beliebig vieler auf den starren Körper wirkender Einzelkräfte und wählen als Koordinaten desselben die Summen der zusammengehörigen Koordinaten dieser Einzelkräfte. *Solcherweise erhalten wir als Koordinaten eines Kräftesystems die sechs Größen:*

$$(10)\qquad \begin{aligned} X &= \sum \frac{P_i}{l_i}(x_i'-x_i), & Y &= \sum \frac{P_i}{l_i}(y_i'-y_i), & Z &= \sum \frac{P_i}{l_i}(z_i'-z_i), \\ L &= \sum \frac{P_i}{l_i}(y_i z_i'-y_i' z_i), & M &= \sum \frac{P_i}{l_i}(z_i x_i'-z_i' x_i), & N &= \sum \frac{P_i}{l_i}(x_i y_i'-x_i' y_i). \end{aligned}$$

Es wird nunmehr darauf ankommen, zuzusehen, wie sich die Koordinaten p, q, r, u, v, w (8) und die jetzt eingeführten X, Y, Z, L, M, N bei den Operationen (1) bis (6) der Hauptgruppe verhalten. Ich stelle hier die Resultate einfach zusammen:

1. *Drehung um den Koordinatenanfangspunkt* (Formel (1)).

Die Koordinaten p, q, r und die u, v, w, andererseits die X, Y, Z und die L, M, N erleiden je für sich genau dieselbe Substitution wie die Punktkoordinaten x, y, z. (Dies Resultat ruht wesentlich auf dem oben hervorgehobenen Umstande, daß die Substitutionskoeffizienten $a, b, c, \ldots$ ihren bez. Unterdeterminanten gleich sind.)

2. *Verschiebung* (Formel (2)).

Die p, q, r, andererseits die X, Y, Z bleiben ungeändert. Dagegen erleiden die u, v, w die folgende Substitution:

---

[6]) Die Unterscheidung tritt erst ein, wenn wir zur Kinetik schreiten, wo dann die Verabredung sein wird, daß die Einheit der Stoßkraft an irgendeinem Massenpunkte instantan dieselbe Geschwindigkeitsänderung hervorbringt, wie die Einheit der kontinuierlichen Kraft während der Zeiteinheit.

(11) $$\begin{cases} u_1 = u - Cq + Br, \\ v_1 = v - Ar + Cp, \\ w_1 = w - Bp + Aq, \end{cases}$$

und genau entsprechende Formeln ergeben sich für L, M, N:

(11′) $$\begin{cases} L_1 = L - CY + BZ, \\ M_1 = M - AZ + CX, \\ N_1 = N - BX + AY. \end{cases}$$

3. *Ähnlichkeitstransformation* (Formel (3) bez. (4)).

Ist λ positiv, so werden

(12) $p_1, q_1, r_1, u_1, v_1, w_1$ bez. gleich $p, q, r, \lambda u, \lambda v, \lambda w$

und genau so

(12′) $X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1$ bez. gleich $X, Y, Z, \lambda L, \lambda M, \lambda N$.

Dagegen tritt bei *negativem* λ ein Unterschied ein, der sich am einfachsten darin ausprägt, daß bei *Inversion*

(13) $p_1, q_1, r_1, u_1, v_1, w_1$ gleich $p, q, r, -u, -v, -w$,

dagegen

(13′) $X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1$ gleich $-X, -Y, -Z, L, M, N$

werden. (Dieser Unterschied kommt dadurch hervor, daß die in den Formeln (10) auftretenden Längen l_i absolute Beträge sind, welche als solche ihr Vorzeichen bei Inversion nicht wechseln.)

4. *Änderung der Zeiteinheit* (Formel (5)).

(14) $p_1, q_1, r_1, u_1, v_1, w_1$ sind bez. gleich $\frac{p}{\varrho}, \frac{q}{\varrho}, \frac{r}{\varrho}, \frac{u}{\varrho}, \frac{v}{\varrho}, \frac{w}{\varrho}$;

die Koordinaten des Kräftesystems bleiben ungeändert.

5. *Änderung der Krafteinheit* (Formel (6)).

Die p, q, r, u, v, w bleiben ungeändert, dagegen werden

(15) $X_1, Y_1, Z_1, L_1, M_1, N_1$ bzw. gleich $\sigma X, \sigma Y, \sigma Z, \sigma L, \sigma M, \sigma N$.

Indem wir uns der Kürze halber auf die *Hauptgruppe räumlicher Änderungen* beschränken, werden wir zusammenfassend sagen können:

Bei bloßer Bewegung des Koordinatensystems, ebenso auch bei Ähnlichkeitstransformation von positivem Ähnlichkeitsmodul, transformieren sich die Kraftkoordinaten

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad L, \quad M, \quad N$$

genau wie die Geschwindigkeitskoordinaten

$$p, \quad q, \quad r, \quad u, \quad v, \quad w.$$

Dagegen tritt bei Inversion des Koordinatensystems ein abweichendes Verhalten ein; während die

$$p, q, r, u, v, w \quad \textit{in} \quad p, q, r, -u, -v, -w$$

übergehen, verwandeln sich die

$$X, Y, Z, L, M, N \quad \textit{bez. in} \quad -X, -Y, -Z, L, M, N.$$

§ 3.

Die Analogie der unendlich kleinen Bewegungen und der Kräftesysteme (beim starren Körper). Schraubengrößen der ersten und zweiten Art. Ballsche Schrauben.

Durch die Formeln des vorigen Paragraphen ist die Analogie von unendlich kleinen Bewegungen und Kräftesystemen, welche die ganze Mechanik der starren Körper und insbesondere die Ballsche Schraubentheorie durchzieht, auf das klarste begründet und gleichzeitig umgrenzt.

Bemerken wir vorab, daß das Größensystem

$$pdt, \quad qdt, \quad rdt, \quad udt, \quad vdt, \quad wdt$$

vermöge der Formeln (7) ohne weiteres eine (unendlich kleine) *Schraubung* des Raumes der x, y, z (von bestimmter Achse, Ganghöhe und Amplitude) bedeutet, das Größensystem der

$$p, \quad q, \quad r, \quad u, \quad v, \quad w$$

dementsprechend eine *Schraubungsgeschwindigkeit*. Ich will in diesem Sinne den Inbegriff der p, q, r, u, v, w fortan als eine *Schraubengröße* bezeichnen, genauer, wenn es darauf ankommt, als eine *Schraubengröße erster Art*.

Nunmehr wolle man den Inbegriff der Koordinaten eines Kräftesystems, also die in (10) definierten

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad L, \quad M, \quad N$$

zum Vergleich heranziehen. Wir wollen insbesondere ein Kräftesystem und eine Schraubengröße erster Art in Zusammenhang bringen, indem wir setzen:

$$X = p, \quad Y = q, \quad Z = r, \quad L = u, \quad M = v, \quad N = w,$$

und uns fragen, wie weit diese Zusammenordnung *eine vom Koordinatensystem unabhängige Bedeutung* hat (also gegenüber den Operationen der Hauptgruppe invariant ist). Zunächst ergeben die Formeln (14), (15) des vorigen Paragraphen, *daß die Zuordnung von der Wahl der Zeiteinheit und der Krafteinheit abhängig ist.* Ferner aber ergeben die Formeln für Drehung, Parallelverschiebung und Ähnlichkeitstransformation mit positivem Ähnlichkeitsmodul, *daß die Zuordnung von allen in diese Worte einbegriffenen Änderungen des räumlichen Koordinatensystems unabhängig ist.* Endlich die Formeln (13), (13′), *daß sich die Zuordnung bei Inversion in ihr Gegenteil verkehrt:*

(17) $X_1 = -p_1, \ Y_1 = -q_1, \ Z_1 = -r_1, \ L_1 = -u_1, \ M_1 = -v_1, \ N_1 = -w_1.$

Die geometrische Überlegung bestätigt das so formulierte Resultat natürlich Schritt für Schritt. Ich will, um dies im Detail auszuführen, angeben, daß die *Achse* der Schraubengeschwindigkeit p, q, r, u, v, w die Linienkoordinaten hat:

$$p : q : r : u - kp : v - kq : w - kr, \tag{18}$$

wo der „Parameter"

$$k = \frac{pu + qv + rw}{p^2 + q^2 + r^2}, \tag{18'}$$

und daß die *Drehgeschwindigkeit* um diese Achse die Komponenten p, q, r, die *Translationsgeschwindigkeit* längs der Achse die Komponenten kp, kq, kr besitzt. Genau entsprechend kann man bei einem Kräftesystem X, Y, Z, L, M, N eine *Zentralachse* finden, deren Linienkoordinaten durch

$$X : Y : Z : L - kX : M - kY : N - kZ \tag{19}$$

gegeben sind, unter k die Größe

$$k = \frac{XL + YM + ZN}{X^2 + Y^2 + Z^2} \tag{19'}$$

verstanden, und das Kräftesystem läßt sich dann auf eine *Einzelkraft* mit den Komponenten X, Y, Z entlang dieser Achse und ein *Paar* mit den Komponenten kX, kY, kZ in einer zur Achse senkrechten Ebene reduzieren. Die Zusammenordnung verlangt, der Drehgeschwindigkeit *um* die Achse die *längs* der Achse wirkende Einzelkraft und der *in Richtung* der Achse liegenden Translationsgeschwindigkeit ein Paar in einer zur Achse *senkrechten* Ebene gleich zu setzen. Hierzu ist selbstverständlich eine vorherige Verständigung über die Zeiteinheit und die Krafteinheit notwendig. Erst wenn dies geschehen, kann man sagen, daß die *Intensität* eines Kräftesystems (gemessen durch $\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$) gleich der durch $\sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$ gemessenen *Intensität* einer Geschwindigkeit sei. *Darüber hinaus aber brauchen wir eine Verabredung, welchen Sinn um die Achse man einem entlang der Achse weisenden Sinne zuweisen will:* — ob denjenigen Sinn um die Achse, der beim Entlangblicken längs der Achse in der vorgegebenen Richtung durch die Bewegung des Uhrzeigers gegeben ist, oder den entgegengesetzten. Erst durch diese Verabredung wird die Zusammenordnung von Kräftesystem und Geschwindigkeit eindeutig. *Jede solche Verabredung verwandelt sich aber bei Inversion der Figur bekanntlich in ihr Gegenteil*, und dies ist, was durch Formel (17) ausgedrückt wird.

Der Inbegriff der $(XYZLMN)$ steht also zwar dem Inbegriff der $(pqruvw)$, d. h. der Schraubengröße erster Art sehr nahe, ist aber nicht selbst eine Schraubengröße erster Art. Wir werden ihn als *Schraubengröße zweiter Art* bezeichnen. Die Zusammenordnung der beiderlei Größenarten aber werden wir so in Worte fassen, daß wir sagen:

Nachdem Zeiteinheit und Krafteinheit festgelegt sind, gehören zu einer Schraubengröße zweiter Art immer noch zwei (entgegengesetzt gleiche) Schraubengrößen erster Art, und umgekehrt; die Zusammengehörigkeit wird erst eine eindeutige, wenn man im angegebenen Sinne eine Verabredung über rechts und links hinzufügt.

Neben die so besprochenen Schraubengrößen erster und zweiter Art treten dann *drittens* als engverwandte geometrische Gebilde die *Ballschen Schrauben* selbst. Die Ballsche Schraube ist der Inbegriff der um eine Achse herumgelegten Schraubenlinien von gegebenem Windungssinn, die eine bestimmte Ganghöhe haben, oder, wie Ball sagt, der Inbegriff von Zentralachse und Parameter (pitch). Die so definierte Ballsche Schraube ist mit dem Nullsystem, das jedem Punkte die Normalebene der durch ihn gehenden Schraubenlinien zuordnet, oder auch mit dem linearen Linienkomplex, der von den Normalen der sämtlichen Schraubenlinien gebildet wird, eineindeutig zusammengeordnet; ob ich von der Ballschen Schraube, dem Nullsystem oder dem linearen Komplex spreche, ist für den hier vertretenen Standpunkt dasselbe. Jedes dieser Gebilde wird durch die *Verhältnisse* $X : Y : Z : L : M : N$ der Koordinaten einer Schraubengröße zweiter Art, oder auch durch die *Verhältnisse* $p : q : r : u : v : w$ der Koordinaten der Schraubengröße erster Art festgelegt. In der Tat verschwindet, wenn man sich auf die Betrachtung dieser „Verhältnisse" beschränkt, der Unterschied der beiden Arten von Schraubengrößen. *Entsprechend gibt es nur eine Art Ballscher Schrauben.* Zu jeder Ballschen Schraube gehören unendlich viele Schraubengrößen erster wie zweiter Art, die sich untereinander durch Intensität und Sinn unterscheiden.

Hiermit dürfte der Zusammenhang der verschiedenen in Betracht kommenden Gebilde so vollständig dargelegt sein, als man wünschen mag. Die einzelne „Schraube" ist Trägerin von unendlich vielen „Schraubengrößen erster und zweiter Art". Indem wir die letzteren sprachlich unterscheiden, dürfte zugleich dem immer wiederkehrenden Mißverständnisse, als handele es sich bei der Zusammenordnung der zweierlei Schraubengrößen um einen *kausalen* Zusammenhang, nach Möglichkeit vorgebeugt sein[7]).

[7]) Vgl. die Erörterungen in meiner oben genannten Notiz, Math. Annalen, Bd. 4. [Siehe Abhandlung XIV dieser Ausgabe.] Die Hartnäckigkeit des Mißverständnisses hat offenbar eine psychologische Wurzel. Wir sind durch unsere tägliche Beschäftigung gewöhnt, wenn wir eine Einzelkraft auf einen Körper wirken lassen, diese auf den Schwerpunkt des Körpers zu richten, worauf sie natürlich Translation des Körpers erzeugt. Von hier aus hat sich zwischen den beiden Dingen (Einzelkraft und Translation) eine Assoziation gebildet, die sich in unseren Überlegungen unwillkürlich immer wieder geltend macht, wenn man sie nicht durch eine immer wiederholte Erklärung und eine möglichst unzweideutige Sprechweise ausdrücklich abschneidet.

§ 4.

Über die Invarianten der Schraubengrößen und die Begründung der Artunterscheidung aus dem Arbeitsbegriff.

Die gegenseitige Beziehung der beiden Arten von Schraubengrößen findet einen sehr prägnanten Ausdruck, wenn man ihre *Invarianten* betrachtet, d. h. diejenigen aus ihren Koordinaten gebildeten rationalen ganzen Funktionen, welche gegenüber den Operationen der Hauptgruppe entweder überhaupt ungeändert bleiben oder sich nur um einen Faktor ändern. Ich werde mich hier der Kürze wegen auf diejenigen Operationen der Hauptgruppe beschränken, die entweder *Bewegungen* vorstellen oder aus Bewegungen durch Hinzutreten einer Inversion entstehen, und die ich mit Herrn Study als *Umlegungen* bezeichnen will.

Als Invarianten der einzelnen Schraubengröße ergeben sich bekanntlich erstens die Ausdrücke:

$$p^2 + q^2 + r^2 \quad \text{bez.} \quad X^2 + Y^2 + Z^2, \tag{20}$$

die bei Bewegungen und Umlegungen gleichmäßig ungeändert bleiben, zweitens aber die folgenden:

$$pu + qv + rw \quad \text{bez.} \quad XL + YM + ZN; \tag{21}$$

dieselben bleiben bei beliebigen Bewegungen ungeändert, kehren aber bei Umlegungen (wie aus ihrem Verhalten bei Inversion hervorgeht) ihr Zeichen um. Wir werden dementsprechend die (20) als *gerade* Invarianten bezeichnen, die (21) als *schiefe*, oder auch die (20) als *Skalare der ersten Art*, die (21) als *Skalare der zweiten Art*[8]).

Die hiermit eingeführte Unterscheidung überträgt sich selbstverständlich auf diejenigen „simultanen" Invarianten zweier Schraubengrößen derselben Art, die sich aus den (20), bez. (21) durch „Polarisieren" ergeben. Ich will hier nur die Polaren der Ausdrücke (21) betrachten:

$$\left\{\begin{array}{l} pu' + qv' \;\, + rw' \;\, + p'u \;\, + q'v \;\, + r'w \\ XL' + YM' + ZN' + X'L + Y'M + Z'N. \end{array}\right. \tag{22}$$

Indem dieselben auch ihrerseits Skalare zweiter Art sind, folgt:

Satz I. *Die*

$$p, \quad q, \quad r, \quad u, \quad v, \quad w$$

sind zu den

$$u, \quad v, \quad w, \quad p, \quad q, \quad r$$

und ebenso natürlich die

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad L, \quad M, \quad N$$

[8]) Vgl. den schon genannten Artikel von Abraham in Bd. IV der Math. Enzyklopädie, Art. 14 (Nr. 11 daselbst).

zu den

$$L, \quad M, \quad N, \quad X, \quad Y, \quad Z$$

bei Bewegungen direkt kontragredient, bei Umlegungen kontragredient mit Zeichenwechsel.

Dem entgegen betrachte man nun den Ausdruck, der sich nach Analogie von (22) bilinear aus den Koordinaten zweier Schraubengrößen verschiedener Art zusammensetzt:

$$Xu + Yv + Zw + Lp + Mq + Nr. \tag{23}$$

Es folgt sofort, daß derselbe nicht nur bei Bewegungen, sondern (wegen seines Verhaltens bei Inversion) auch bei Umlegungen durchaus ungeändert bleibt; *er ist ein Skalar erster Art.* Daher kommt:

Satz II. *Die*

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad L, \quad M, \quad N$$

sind zu den

$$u, \quad v, \quad w, \quad p, \quad q, \quad r$$

sowohl bei Bewegungen wie bei Umlegungen schlechtweg kontragredient.

Durch diesen Satz dürfte die Zusammengehörigkeit der beiden Arte von Schraubengrößen in einfachster Weise bezeichnet sein. Verbinden wir ihn mit Satz I, so fallen wir auf die Analogie der zweierlei Schraubengrößen zurück, die der Gegenstand des vorigen Paragraphen war. Dieselbe mag hier folgendermaßen ausgesprochen werden:

Satz III. *Die*

$$X, \quad Y, \quad Z, \quad L, \quad M, \quad N$$

sind den

$$p, \quad q, \quad r, \quad u, \quad v, \quad w$$

bei Bewegungen direkt kogredient, bei Umlegungen kogredient mit Zeichenwechsel.

Die in Rede stehende Analogie folgt hier also aus dem Umstande, daß vermöge des besonderen, durch Satz I festgelegten Verhaltens der Schraubenkoordinaten p, q, r, u, v, w die zu ihnen *kontragredienten* Größen X, Y, Z, L, M, N zugleich in dem durch Satz III festgelegten Sinne *kogredient* sind. Hiermit dürfte der algebraische Grundgedanke dieser Beziehung so klar herausgearbeitet sein, als überhaupt möglich ist. Wir können diesen Gedanken an die Spitze der Schraubentheorie rücken, wenn wir uns das invariante Verhalten des Ausdrucks (23), bez. der Ausdrücke (22), direkt aus ihrer geometrisch-mechanischen Bedeutung klar machen. Dies ist, was ich in meiner wiederholt genannten Notiz in Bd. 4 der Math. Annalen [s. Abhandlung XIV dieser Ausgabe] im Auge hatte. Im gegenwärtigen Zusammenhange läßt sich die Sache folgendermaßen präzis darstellen:

1. Man interpretiere die $X, Y, Z, \ldots$ als die Koordinaten eines Systems kontinuierlich wirkender Kräfte. Dann bedeutet der Ausdruck (23) multipliziert mit dt, also das Produkt:

$$(24) \qquad (Xu + Yv + Zw + Lp + Mq + Nr)\,dt$$

die *Arbeit*, welche das Kräftesystem bei Eintritt der unendlich kleinen Bewegung $udt, vdt, wdt, \ldots$ leistet, und ist eben darum ein *Skalar erster Art*.

2. Dagegen haben die Ausdrücke (22) vermöge ihrer geometrischen Bedeutung von vornherein den Charakter von *Skalaren zweiter Art*. Es genügt, dies hier an dem Beispiele zweier Kräftesysteme nachzuweisen, die sich auf Einzelkräfte reduzieren lassen. Wir setzen dementsprechend

$$X_1 = \frac{P_1}{l_1}(x_1 - x_1'), \quad Y_1 = \frac{P_1}{l_1}(y_1 - y_1'), \ldots$$

und analog

$$X_2 = \frac{P_2}{l_2}(x_2 - x_2'), \quad Y_2 = \frac{P_2}{l_2}(y_2 - y_2'), \ldots$$

Hierdurch verwandelt sich $X_1 L_2 + Y_1 M_2 + Z_1 N_2 + X_2 L_1 + Y_2 M_1 + Z_2 N_1$ in das Produkt von $\frac{P_1 P_2}{l_2 l_1}$ in die Determinante:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_1' & y_1'' & z_1' & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_2' & y_2' & z_2' & 1 \end{vmatrix},$$

die einen sechsfachen Tetraederinhalt vorstellt und gewiß ein Skalar zweiter Art ist.

3. Aus der Nebeneinanderstellung von 1. und 2. ergibt sich nun sofort der Satz III, der das zu beweisende Resultat in präziser Form ausspricht.

§ 5.

Gruppentheoretische Charakterisierung der verschiedenen Arten von Schraubentheorien.

Bisher haben wir die Substitutionen, welche die Schraubenkoordinaten p, q, r, u, v, w (um nur von diesen zu reden) bei den Bewegungen und Umlegungen erfuhren, nur erst durch das Verhalten der $p, q, \ldots$ bei den erzeugenden Operationen (1), (2), (4) definiert. Es ist von Interesse, den Inbegriff dieser Substitutionen von den Invarianten

$$p^2 + q^2 + r^2 \quad \text{und} \quad pu + qv + rw$$

aus zu charakterisieren. In dieser Hinsicht stelle ich folgenden Satz auf:

Die p, q, r erleiden alle ternären linearen Substitutionen von der Determinante $+1$, welche $p^2 + q^2 + r^2$ ungeändert lassen, die $p, q, r,$ u, v, w zusammen aber alle senären linearen Substitutionen von der Determinante ± 1, [bei denen p, q, r nur unter sich transformiert werden, und die $p^2 + q^2 + r^2$ ungeändert lassen und außerdem] $pu + qv + rw$ beziehungsweise in $\pm(pu + qv + rw)$ überführen.

Der erste Teil dieses Satzes (der sich auf die ternären Substitutionen der p, q, r bezieht) braucht nach den Angaben, die wir über das Verhalten der p, q, r bei den erzeugenden Operationen machten, nicht weiter erläutert zu werden; er bringt nur die bekannte Beziehung der Drehungen um den Koordinatenanfangspunkt O zu den ternären orthogonalen Substitutionen zum Ausdruck. Sei nun irgendeine ternäre orthogonale Substitution der p, q, r von der Determinante $+1$ als Teil einer senären Substitution der p, q, r, u, v, w von der Determinante ± 1 vorgelegt, welche $(pu + qv + rw)$ bez. in $\pm(pu + qv + rw)$ verwandelt. Wir kombinieren sie mit einer Drehung um O, welche die p, q, r zu ihren Anfangswerten zurückführt (und übrigens für die u, v, w nach den Angaben von § 2 genau dieselbe ternäre Substitution von der Determinante $+1$ ergibt, wie für die p, q, r selbst, so daß der Wert von $pu + pv + rw$ und der Wert der senären Substitutionsdeterminante dabei ungeändert bleibt). Wir ziehen ferner nötigenfalls eine Inversion heran, um zu erreichen, daß $pu + qv + rw$ seinem ursprünglichen Werte direkt gleich wird; dabei erhält die senäre Substitutionsdeterminante von selbst den Wert $+1$. Die so vereinfachte Substitution hat jetzt (weil $pu + qv + rw$ in sich selbst übergehen soll) notwendig die Form

$$\begin{cases} p_1 = p, & u_1 = u - Cq + Br, \\ q_1 = q, & v_1 = v - Ar + Cp, \\ r_1 = r, & w_1 = w - Bp + Aq, \end{cases}$$

wo einzig die A, B, C noch willkürlich sind. Eine solche Substitution stellt aber nach (11), § 2, eine Translation dar. Also unsere anfängliche Substitution ergibt eine Translation, wenn wir sie mit einer geeigneten Rotation und eventuell einer Inversion verbinden, — *sie stellt daher von Hause aus entweder eine Bewegung oder eine Umlegung dar*, was zu beweisen war.

So viel über die Substitutionen der p, q, r, u, v, w. Die Substitutionen der X, Y, Z, L, M, N ergeben sich von da aus sofort, wenn wir nur festhalten, daß sie zu den u, v, w, p, q, r kontragredient sind.

Mit dieser Festlegung der beiderlei Substitutionsgruppen ist nach den Grundsätzen meines Erlanger Programms die zugehörige *Schraubentheorie* vollkommen charakterisiert.

Wir schreiten nach dem oben Gesagten zur Ballschen Schraubentheorie im engeren Sinne, indem wir nur die *Verhältnisse* $p:q:r:u:v:w$

beziehungsweise $X:Y:Z:L:M:N$ in Betracht ziehen (wobei der Unterschied zwischen den Schraubengrößen der beiden Arten wegfällt). Die $p:q:r:u:v:w$ (um nur von diesen zu sprechen) erleiden solche (und alle solchen) linearen Substitutionen, bei denen die *Gleichungen*

$$p^2 + q^2 + r^2 = 0 \quad \text{und} \quad pu + qv + rw = 0$$

in sich übergehen, der Parameter $\frac{pu+qv+rw}{p^2+q^2+r^2}$ aber entweder überhaupt ungeändert bleibt oder doch nur sein Zeichen wechselt. Wollen wir neben Bewegungen und Umlegungen auch noch Ähnlichkeitstransformationen in Betracht ziehen, so wird sich $\frac{pu+qv+rw}{p^2+q^2+r^2}$ um einen beliebigen Faktor ändern können; die auf den Parameter bezügliche Einschränkung der Substitution kommt dann in Wegfall.

Die so umgrenzte Ballsche Schraubentheorie ist mit derjenigen Liniengeometrie, welche das Nullsystem (oder, was dasselbe ist, den linearen Linienkomplex) *als Raumelement benutzt, nach dem Klassifikationsprinzip des § 1 im Wesen identisch.* Aber natürlich ist, wenn wir uns so ausdrücken, diejenige Liniengeometrie gemeint, welche die Hauptgruppe räumlicher Änderungen zu grunde legt; ich möchte sie die *konkrete Liniengeometrie* nennen. Statt dessen ist in meinen eigenen alten Arbeiten (wie auch in der Mehrzahl der seitdem erschienenen deutschen und italienischen Arbeiten) die Liniengeometrie in mehr abstrakter Form behandelt worden, nämlich unter Zugrundelegung der 15-gliedrigen Gruppe, welche einerseits alle projektiven Umformungen unseres Raumes, andererseits aber die dualistischen Umformungen enthält. Für diese *abstrakte* Liniengeometrie (wie ich sie hier des Gegensatzes halber nennen möchte) gilt dann der Satz, den ich in Bd. 4 der Math. Annalen, S. 356 [Über eine geometrische Repräsentation der Resolventen algebraischer Gleichungen, siehe Bd. II dieser Ausgabe], aufstellte, daß bei ihr die Gruppe aller derjenigen linearen Substitutionen der $p:q:r:u:v:w$ zugrunde liegt, welche die Gleichung $pv + qu + rw = 0$ in sich überführen. *Die Bezugnahme auf die quadratische Form $p^2 + q^2 + r^2$ ist einfach weggefallen.*

Mit der so gegebenen Entgegenstellung der zugehörigen Gruppe dürfte die Beziehung meiner eigenen alten Arbeiten und beispielsweise des Werkes von Sturm über Liniengeometrie[9]) zu denjenigen von Ball mit aller Schärfe gegeben sein. Auf Einzelheiten einzugehen ist hier nicht der Ort.

[9]) Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung, 3 Teile, Leipzig 1892—1896.

§ 6.
Lineare Schraubensysteme.

Nachdem solcherweise die Grundlagen der Schraubentheorie festgelegt sind, mögen wir mit Ball dazu übergehen, die *linearen Systeme* von Schrauben zu studieren, d. h. die Mannigfaltigkeiten solcher Schrauben, deren Koordinaten sich aus den Koordinaten von 2, 3, 4, 5 Schrauben mit Hilfe einer entsprechenden Zahl veränderlicher Parameter homogen linear zusammensetzen lassen. Bei der bezüglichen Diskussion beschränkt sich Ball im wesentlichen auf die Besprechung der allgemeinen Fälle oder zieht doch nur Beispiele von Spezialfällen heran. Es scheint aber erwünscht, die Diskussion systematisch durchzuführen[10]).

Ich will dies hier für die zweigliedrige Schar skizzieren, beschränke mich aber dabei der Kürze halber darauf, nur die *Verhältnisse* der sechs Koordinaten in Betracht zu ziehen. Sei dementsprechend:

$$(25) \quad \varrho p = \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2, \quad \varrho q = \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2, \ldots, \quad \varrho w = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2,$$

unter ϱ einen Proportionalitätsfaktor verstanden. Es erleichtert die Ausdrucksweise, wenn wir die so definierten $p:q:\ldots:w$ als homogene Punktkoordinaten in einem Raume von fünf Dimensionen bezeichnen. Die Formeln (25) repräsentieren dann in diesem Raume eine *gerade Linie*, und es wird sich darum handeln, die sämtlichen Geraden, die es in unserem fünfdimensionalen Raume gibt, nach ihrer Beziehung zu den beiden quadratischen Mannigfaltigkeiten $p^2 + q^2 + r^2 = 0$ und $pu + qv + rw = 0$ zu studieren, resp. zu klassifizieren. Dabei wird sich unsere Aufmerksamkeit in erster Linie auf die *Schnittpunkte* richten, welche unsere Gerade mit diesen Mannigfaltigkeiten gemein hat. Die Schnittpunkte mit jeder der beiden Mannigfaltigkeiten können getrennt sein, zusammenfallen oder unbestimmt werden. Außerdem können die Schnittpunkte, welche die gerade Linie mit der einen Mannigfaltigkeit gemein hat, mit denen, die sie mit der anderen Mannigfaltigkeit gemein hat, teilweise oder ganz koinzidieren. Des weiteren möge man Realitätsunterschiede heranziehen. *Hiernach ergibt sich eine von vornherein übersehbare Reihe von Fallunterscheidungen, die nicht nur mit leichter Mühe aufgezählt, sondern ebensowohl nach ihrer schraubentheoretischen Bedeutung diskutiert werden können.* Jeder Geometer, der mit algebraischen Betrachtungen in mehrdimensionalen Räumen einigermaßen vertraut ist, wird dies ohne weiteres ausführen; es scheint unnötig, hierbei noch länger zu verweilen.

[10]) In ähnlichem Sinne äußert sich Hr. Study auf S. 226—228 der (bis jetzt allein erschienenen) ersten Lieferung seiner *Geometrie der Dynamen* (Leipzig, 1901) und stellt für die demnächst erscheinende zweite Lieferung weitergehende Entwicklungen in Aussicht.

Immerhin wird es gut sein, einen Unterschied hervorzuheben, den der geschilderte Ansatz den Ballschen Entwicklungen gegenüber zeigt. Ball berücksichtigt prinzipiell nur die *reellen* Vorkommnisse, hier dagegen wird reell und imaginär zunächst als gleichwertig betrachtet und die Frage nach den Realitätsverhältnissen erst zum Schlusse eingeführt. Um an einem Beispiel den Vorteil zu zeigen, den das letztere Verfahren haben kann, betrachten wir die Regelfläche, welche von den Achsen der Schrauben (25) gebildet wird, das sogenannte *Zylindroid*. Nach Ball ist dasselbe im allgemeinen von der dritten Ordnung; wenn aber die komponierenden Schrauben $p_1, q_1, r_1, \ldots$ und $p_2, q_2, r_2, \ldots$ sich auf zwei Rotationen reduzieren, deren Achsen sich schneiden, so artet es in dasjenige ebene Strahlbüschel aus, dem die Achsen angehören. Statt der Fläche von der dritten Ordnung haben wir dann also eine von der ersten. Wie kommt diese Ausartung zustande? Wenn wir das Imaginäre mitnehmen, finden wir zunächst, daß es Rotationen mit unbestimmter Achse gibt (es sind diejenigen Schraubenbewegungen, bei denen der durch Formel (19′) gegebene Parameter den Wert $\frac{0}{0}$ erhält). Dieselben lassen nämlich alle Minimallinien fest, welche durch einen festen Punkt des Kugelkreises in einer festen Tangentenebene desselben verlaufen, also ihrerseits ein Strahlbüschel bilden. Solcher Rotationen treten nun im vorliegenden Spezialfalle unter der Schar (25) *zwei* auf, entsprechend den beiden Minimallinien, die unter den Strahlen des Ballschen Strahlbüschels enthalten sind. Die Folge ist, daß sich von dem Zylindroid zwei imaginäre Ebenen abtrennen, nämlich die beiden Ebenen, welche sich durch die Normale zum Ballschen Strahlbüschel und die beiden Minimallinien desselben legen lassen. Der Rest, eben das Ballsche Strahlbüschel, ist dann natürlich von der ersten Ordnung. Der Leser muß entscheiden, ob der Gewinn an Einsicht, der hier und in ähnlichen Fällen resultiert, ein Äquivalent für die weitläufigere Vorbereitung ist, die erforderlich scheint, wenn man in der Geometrie mit imaginären Elementen bequem und sicher operieren will.

Übrigens möchte ich nicht minder eine Ausgestaltung der Theorie der linearen Schraubensysteme nach der *eigentlich mechanischen* Seite hin in Anregung bringen. Die Diskussion der linearen Schraubensysteme, von der ich gerade sprach, versieht uns mit einer endlichen Zahl unterschiedener Fälle der Beweglichkeit eines starren Körpers im Unendlich-Kleinen; es kann sich dabei der Reihe nach um 2, 3, 4, 5 Grade der Freiheit handeln. Nun findet man in der *Natural Philosophy* von Thomson und Tait (2. Ausg., Bd. I, S. 155 (Nr. 201)) einen einfachen Mechanismus beschrieben, vermöge dessen man einem starren Körper fünf Grade der Beweglichkeit im Unendlich-Kleinen in allgemeinster Weise erteilen kann:

der Körper ist um eine Schraubenspindel drehbar, die mit Hilfe zweier aneinander geketteter Hookescher Schlüssel an ein Postament befestigt ist. Ich stelle die Aufgabe, *die sämtlichen gemäß unserer Diskussion zu unterscheidenden reellen Fälle infinitesimaler Beweglichkeit eines starren Körpers durch möglichst einfache Mechanismen zu realisieren.*

Eine letzte Bemerkung zur Theorie der linearen Schraubensysteme möge wieder nach Seite der Gruppentheorie liegen. Camille Jordan hat bekanntlich zuerst alle kontinuierlichen und diskontinuierlichen Gruppen aufgestellt, die sich aus den reellen Bewegungen des Raumes bilden lassen[11]). Unter diesen interessieren uns hier nur die *kontinuierlichen* Gruppen. Man findet dieselben bei Study im 39. Bande der Math. Annalen, S. 486—487 (1891), übersichtlich zusammengestellt und geometrisch charakterisiert; eine Tabelle der zugehörigen unendlich kleinen Bewegungen gibt Lie in Bd. 3 seiner Theorie der Transformationsgruppen (Leipzig, 1893), S. 385. Ich nenne hier von diesen Gruppen nur die einfachsten, nämlich:

a) die Gesamtheit aller ∞^3 Translationen,
b) die Gesamtheit aller ∞^4 Bewegungen, die einen unendlich fernen Punkt (oder, was auf dasselbe hinauskommt, eine unendlich ferne Gerade) fest lassen,
c) die Gesamtheit aller ∞^3 Bewegungen, welche einen im Endlichen gelegenen Punkt fest lassen,
d) die Gesamtheit aller ∞^3 Bewegungen, welche eine im Endlichen gelegene Ebene fest lassen.

Offenbar empfiehlt es sich, die Mechanik solcher starrer Körper, welche die Beweglichkeit einer dieser Untergruppen haben, gesondert zu bearbeiten (wie dies für den Körper mit im Endlichen gelegenem festem Punkt von jeher geschehen ist). Die unendlich kleinen Bewegungen jeder solchen Untergruppe bilden aber ein lineares Schraubensystem, und die so entstehenden linearen Schraubensysteme heben sich also vor anderen durch ihre Wichtigkeit für die Mechanik hervor; ich werde sie lineare Schraubensysteme von *selbständiger gruppentheoretischer Bedeutung* nennen. Indem ich das Koordinatensystem in geeigneter Weise wähle, bekomme ich in den Fällen a) bis d) für die Koordinaten

$$p,\ q,\ r,\ u,\ v,\ w$$

der betreffenden Schrauben folgende Werte:

$$\begin{array}{ll}
\text{a)} & 0,\ 0,\ 0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3; \\
\text{b)} & 0,\ 0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \lambda_4; \\
\text{c)} & \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ 0,\ 0,\ 0; \\
\text{d)} & 0,\ 0,\ \lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ 0.
\end{array}$$

[11]) Annali di Matematica, Ser. 2, Bd. 2 (1869).

Hier sind die $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, wie in (25), beliebig veränderliche Parameter. Man sollte jedes einzelne der so gewonnenen linearen Schraubensysteme genau so für die Mechanik der ihm zugehörigen endlichen Bewegungen benutzen, wie dies sofort mit dem System c) für die Drehung eines Körpers um einen festen Punkt und hernach mit der Gesamtheit aller Schrauben für den in allgemeinster Weise beweglichen starren Körper geschehen wird.

§ 7.

Übergang zur Kinetik. Unterscheidung holonomer und nicht holonomer Differentialausdrücke bez. Differentialbedingungen.

Daß für $n \geqq 2$ nicht jeder Differentialausdruck

$$\sum \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)\, d x_i \tag{26}$$

ein exaktes Differential dF einer Funktion von $x_1, \ldots, x_n$ ist, und daß für $n \geqq 3$ nicht jede Differentialbedingung

$$\sum \varphi_i d x_i = 0 \tag{26'}$$

mit einer Gleichung $dF = 0$ gleichbedeutend ist, ist bekannt genug; die Klassifikation der verschiedenen in dieser Hinsicht vorliegenden Möglichkeiten wird in der Theorie des „Pfaffschen Problems" entwickelt. Wir sprechen nach der Ausdrucksweise von Hertz in allen den Fällen, wo der Differentialausdruck oder die Differentialbedingung nicht durch ein einfaches dF ersetzt werden kann, von einem *nicht holonomen* Differentialausdruck, bez. einer *nicht holonomen* Differentialbedingung.

In der Mechanik liegt die Sache, allgemein zu reden, nun merkwürdigerweise so, daß man zwar von je Anlaß hatte, nicht holonome Differentialausdrücke und -bedingungen in Betracht zu ziehen, daß man aber erst in den letzten Jahren angefangen hat, diesem Umstande besondere Aufmerksamkeit zuzuwenden[12]).

Was zunächst *nicht holonome Differentialausdrücke* angeht, so treten dieselben in unsere jetzige Betrachtung dadurch ein, daß bereits die Koordinaten $p\,dt$, $q\,dt$, $r\,dt$ einer unendlich kleinen *Drehung* um O, und um so mehr die *Schraubenkoordinaten* $p\,dt, q\,dt, \ldots, w\,dt$ einer beliebigen unendlich kleinen Verrückung eines starren Körpers nicht holonome Verbindungen der Differentiale der drei oder sechs endlichen Parameter sind, durch welche man die Lage des Körpers in den beiden Fällen festlegen mag; wir werden hierfür sogleich noch explizite Formeln geben.

Was aber *nicht holonome Bedingungsgleichungen* betrifft, so bilden

[12]) Vgl. verschiedene Stellen in Voß, *Die Prinzipien der rationellen Mechanik* (Enzyklopädie der Math. Wiss. IV, 1 (1901)), insbesondere Nr. 38 daselbst.

dieselben nicht etwa einen Ausnahmefall, sondern treten bei den mechanischen Vorgängen, die wir täglich beobachten, außerordentlich häufig auf. So macht Hertz in seinem Werke über die Prinzipien der Mechanik[13]) darauf aufmerksam, daß eine Kugel, die auf einer Ebene rollt, das Beispiel eines mechanischen Systems von fünf Freiheitsgraden abgibt, das an eine nicht holonome Bedingungsgleichung gebunden ist. Noch einfacher ist vielleicht das Beispiel eines auf horizontaler Ebene beweglichen Wagens oder Schlittens, der (wegen der Reibung an der Unterlage) immer nur in Richtung seiner Achse fortschreiten kann; wir haben hier die nicht holonome Bedingungsgleichung $dy - \operatorname{tang} \vartheta \cdot dx = 0$, unter ϑ das Azimut der Achse verstanden. Wir schließen, *daß die Betrachtung nicht holonomer Bedingungsgleichungen in der Mechanik nichts Künstliches ist, sondern von vornherein mit in Betracht gezogen werden muß, wenn anders wir die Bewegungsvorgänge der uns umgebenden Wirklichkeit verstehen wollen.*

Wir werden daher die nicht holonomen Bedingungsgleichungen im folgenden immer mit erwähnen. Bei Ball geschieht dies nicht und braucht nicht zu geschehen, da Ball seine Betrachtungen von vornherein in der Weise auf unendlich kleine Ortsänderungen einschränkt, daß er nur die ersten Potenzen der Differentiale beibehält. Infolgedessen kann Ball auch den starren Körper, der irgend k Differentialbeziehungen vom Typus (26) unterworfen ist, kurzweg als ein mechanisches System von $(6-k)$ Freiheitsgraden bezeichnen. Dies würde im Falle endlicher Bewegungen nicht richtig sein: die rollende Kugel vermag trotz der nicht holonomen Bedingung, der ihre infinitesimalen Bewegungen unterworfen sind, ∞^5 Lagen anzunehmen, ebenso der auf der (x, y)-Ebene bewegliche Wagen sämtliche ∞^3 Lagen (x, y, ϑ).

§ 8.

Über die Verwendung der Geschwindigkeitskoordinaten p, q, r in der Kinetik des starren Körpers mit festem Punkt.

Ehe wir zur Verwendung der Schraubenkoordinaten p, q, r, u, v, w in der Kinetik beliebiger starrer Körper schreiten, mögen wir die Verwendung der p, q, r in der Kinetik des starren Körpers mit festem Punkt betrachten. Es handelt sich dabei zwar im Prinzip um lauter bekannte Dinge, aber man findet dieselben nicht überall in der einfachen und präzisen Form beisammen, die wir ihnen hier geben wollen, und die sich hernach unmittelbar auf die Schraubenkoordinaten p, q, r, u, v, w überträgt. Den einzelnen Angaben Beweise hinzuzufügen, wird kaum nötig sein; ich verweise wegen der etwaigen Ableitung der Resultate, sofern

[13]) Einleitung, S. 23.

deutsche Literatur in Betracht gezogen werden soll, am liebsten auf die von Sommerfeld und mir herausgegebenen Vorlesungen über die *Theorie des Kreisels* (Teil I, Leipzig 1897); insbesondere geschieht dort (S. 138 ff.) die Herleitung der Eulerschen Bewegungsgleichungen (im Anschluß an die ursprüngliche Entwicklung von Hayward[14]) genau so, wie es im folgenden skizziert wird.

1. *Zusammenhang der p, q, r mit den Geschwindigkeitskoordinaten φ', ψ', ϑ'.*

Wir nehmen ein im Körper festes Koordinatensystem XYZ und ein im Raume festes xyz (mit gemeinsamem Anfangspunkt), deren gegenseitige Beziehung wir durch irgend drei Parameter, für welche wir hier wegen ihres elementaren Charakters die Eulerschen Winkel φ, ψ, ϑ nehmen wollen, festlegen (Kreisel, S. 19). Der Übergang von der Lage φ, ψ, ϑ zur Lage $\varphi + \varphi' dt$, $\psi + \psi' dt$, $\vartheta + \vartheta' dt$ sei äquivalent mit einer Drehung durch pdt, qdt, rdt um die Achsen des XYZ-Systems in seiner den Parameterwerten φ, ψ, ϑ entsprechenden Lage. Die Nebeneinanderstellung der bezüglichen Formeln ergibt dann folgenden Zusammenhang zwischen den p, q, r und den φ, ψ, ϑ, bzw. φ', ψ', ϑ' (Kreisel, S. 45):

$$(27) \qquad \begin{cases} p = \vartheta' \cos\varphi + \psi' \sin\vartheta \sin\varphi, \\ q = -\vartheta' \sin\varphi + \psi' \sin\vartheta \cos\varphi, \\ r = \varphi' + \psi' \cos\vartheta. \end{cases}$$

Man erkennt, daß die p, q, r nicht holonome Verbindungen der $\varphi', \psi', \vartheta'$ sind. Die Folge ist, daß ich in den Bewegungsgleichungen des starren Körpers zwar die $\varphi', \psi'\ \vartheta'$ gern durch die p, q, r ersetzen kann, daß ich aber daneben zur Lagenbestimmung des Körpers die φ, ψ, ϑ festhalten muß, die dann mit den p, q, r durch die Gleichungen (27), welche ich die ***kinematischen Gleichungen*** nenne, verbunden sind.

2. *Kraftkoordinaten.*

Hat man bei irgendeinem mechanischen System bestimmte Geschwindigkeitskoordinaten (hier also die p, q, r) ausgewählt, so hat man als Koordinaten der kontinuierlich wirkenden Kräfte allgemein diejenigen Größen zu nehmen, mit denen multipliziert die Koordinaten der unendlich kleinen Bewegung in den Ausdruck für die Arbeit eingehen. Im vorliegenden Falle haben wir für die Arbeit nach (24) oben (indem die u, v, w verschwinden):

$$dA = (Lp + Mq + Nr)\,dt;$$

wir werden also das Kräftesystem, das am starren Körper angreift, durch *seine Drehmomente L, M, N um die Achsen des im Körper festen*

[14]) [Diese Herleitung war schon vorher von P. Saint-Güilhem gegeben worden, Journ. de math. (1) 19 (1854).]

Koordinatensystems festzulegen haben. Genau so werden wir als Koordinaten einer Stoßkraft ihre bezüglichen Drehmomente wählen, wie wir nicht weiter ausführen.

3. *Aufstellung der kinetischen Gleichungen für die p, q, r.*

Die Aufstellung der eigentlichen Bewegungsgleichungen für die p, q, r (der Eulerschen Bewegungsgleichungen) erfolgt nun am kürzesten folgendermaßen:

a) Man drücke die lebendige Kraft des rotierenden Körpers durch die p, q, r aus. Als Einheit der Masse ist dabei natürlich, auf Grund unserer früheren Verabredungen, diejenige zu wählen, die bei Einwirkung einer kontinuierlichen Kraft von der Größe 1 in der Zeiteinheit die Geschwindigkeit 1 erhält. Da sich die p, q, r auf ein im Körper festes Koordinatensystem beziehen, erhält man eine quadratische Form derselben mit konstanten Koeffizienten

$$(28) \qquad T = \tfrac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 + 2Dqr + 2Erp + 2Fpq).$$

b) Hierauf bilde man die Koordinaten L, M, N des sogenannten „Impulses“, d. h. desjenigen Systems von Stoßkräften, welches imstande wäre, den in seiner augenblicklichen Lage ruhend gedachten Körper instantan in den Geschwindigkeitszustand p, q, r zu versetzen. Nach den Grundgesetzen der Kinetik, die in der sogenannten „ersten Zeile der Lagrangeschen Gleichungen“ ihren Ausdruck finden, erhält man dieselben aus T durch Differentiation nach den entsprechenden Geschwindigkeitskoordinaten. *Die Formeln sind:*

$$(29) \qquad L = \frac{\partial T}{\partial p}, \quad M = \frac{\partial T}{\partial q}, \quad N = \frac{\partial T}{\partial r}.$$

c) Von hier aus erhält man nun die gesuchten kinetischen Gleichungen, indem man überlegt, daß sich die Koordinaten L, M, N des Impulses während des Zeitelementes dt aus zwei Gründen um unendlich kleine Beträge abändern.

Erstlich dadurch, daß an unserem Körper von außen gegebenenfalls ein System kontinuierlich wirkender Kräfte angreift. Wir nennen die Koordinaten dieses Systems (d. h. seine Drehmomente um die X-, Y-, Z-Achse) $\mathsf{\Lambda}$, M, N. Die von hier aus resultierenden Änderungen der L, M, N sind:

$$(30) \qquad d'L = \mathsf{\Lambda}\,dt, \quad d'M = \mathsf{M}\,dt, \quad d'N = \mathsf{N}\,dt.$$

Zweitens aber ändern sich die L, M, N dadurch, daß sich das Koordinatensystem XYZ, auf welches sie bezogen sind, während des Zeitelementes dt gegen seine ursprüngliche Lage um pdt, qdt, rdt gedreht hat. Wir können ebensowohl sagen, daß wir den Raum (und also den im Raume feststehenden Impulsvektor) gegen das Koordinatensystem der

X, Y, Z um $-p\,dt$, $-q\,dt$, $-r\,dt$ gedreht haben. Dies gibt als Änderungen der L, M, N:

$$(31)\quad d''L = (rM - qN)\,dt,\quad d''M = (pN - rL)\,dt,\quad d''N = (qL - pM)\,dt.$$

Die Gesamtänderung der L, M, N ist die Summe der Änderungen (30), (31); daher kommt, wenn wir noch durch dt dividieren:

$$(32)\quad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = (rM - qN) + \mathsf{\Lambda}, \\[2mm] \dfrac{dM}{dt} = (pN - rL) + \mathsf{M}, \\[2mm] \dfrac{dN}{dt} = (qL - pM) + \mathsf{N}, \end{cases}$$

und dieses sind die gesuchten kinetischen Gleichungen. Die $\mathsf{\Lambda}$, M, N werden dabei zunächst als Funktionen der φ, ψ, ϑ anzusetzen sein.

4. *Bemerkungen zu den gewonnenen Gleichungen.*

Schließlich haben wir zur Darstellung der Bewegung die Gleichungen (27), (28), (29), (32), wo wir noch die aus (29) folgenden Werte der L, M, N in die (32) eintragen können. Wir haben dann sechs Differentialgleichungen erster Ordnung für die $\varphi, \psi, \vartheta, p, q, r$. Ist insbesondere irgendeine (holonome oder nicht holonome) Bedingungsgleichung für die $\varphi', \psi', \vartheta'$ gegeben, so wird sich diese in eine lineare Gleichung für die p, q, r umsetzen lassen (deren Koeffizienten, allgemein zu reden, Funktionen der φ, ψ, ϑ sind):

$$(33)\quad Pp + Qq + Rr = 0.$$

Es werden dann in den $\mathsf{\Lambda}$, M, N neben Gliedern, welche sich auf die anderweitigen äußeren Kräfte beziehen, Terme folgender Form auftreten:

$$(34)\quad -\lambda P,\quad -\lambda Q,\quad -\lambda R,$$

unter λ einen Lagrangeschen Multiplikator verstanden, der so zu bestimmen ist, daß die Gleichung (33) fortgesetzt erfüllt ist.

§ 9.

Fortsetzung. Fälle, wo die p, q, r wie Lagrangesche Geschwindigkeitskoordinaten gebraucht werden können.

Die Betrachtungen, welche wir im vorigen Paragraphen unter 3. gaben, sind wesentlich durch den Umstand veranlaßt, daß die p, q, r keine Lagrangesche Geschwindigkeitskoordinaten, d. h. keine holonomen Verbindungen der $\varphi', \psi', \vartheta'$ sind; wir hätten andernfalls nur die „zweite Zeile“ der allgemeinen Lagrangeschen Bewegungsgleichungen heranzuziehen brauchen. Es hat daher Interesse, zuzusehen, bei welchen Ansätzen

und Problemen der Unterschied der p, q, r und der Lagrangeschen Geschwindigkeitskoordinaten noch nicht hervortritt; wir lösen dadurch aus der allgemeinen Theorie der Rotation eines starren Körpers einen relativ elementaren Teil heraus. In dieser Hinsicht ergibt sich zunächst folgende Zusammenstellung:

1. Die Bedingungsgleichungen, welche gegebenenfalls die Beweglichkeit des Körpers *im Unendlich-Kleinen* einschränken, sind in den p, q, r ebenso *linear*, wie in den $\varphi', \psi', \vartheta'$ (vgl. Gl. (33)).

2. Der Unterschied verschwindet ferner bei den Fragen der *Statik*, insofern bei ihnen die p, q, r (und also auch die L, M, N) durchweg gleich Null zu setzen sind.

3. Er verschwindet endlich in der *Stoßtheorie*; in der Tat sind die Gleichungen (29), die den Zusammenhang des Impulses mit den erzeugten Geschwindigkeitskoordinaten p, q, r ergeben, ihrer Form nach von dem Umstande, daß die p, q, r nicht holonome Geschwindigkeitskoordinaten sind, durchaus unabhängig.

Es sind dies einfach diejenigen Teile der Mechanik, welche der Aufstellung der auf kontinuierliche Kräfte bezüglichen Bewegungsgleichungen vorangehen. Hierzu tritt aber, wenn man approximative Rechnung zulassen will, noch ein *vierter* Punkt. Derselbe liegt vor, *wenn man die Theorie der kleinen Schwingungen unseres starren Körpers um eine Gleichgewichtslage behandelt, und dabei die üblichen Vernachlässigungen eintreten läßt.* Man nimmt dann nämlich an, daß man die in (32) rechter Hand auftretenden „Glieder zweiter Ordnung“, also die $(rM - qN)$ usw., gegen die übrigen Glieder, also die $\frac{dL}{dt}$ und $\mathsf{\Lambda}$, usw., vernachlässigen kann. Man erhält solcherweise die vereinfachten Formeln:

$$(35)\quad \begin{cases} \dfrac{dL}{dt} = \mathsf{\Lambda}, \\[2mm] \dfrac{dM}{dt} = \mathsf{M}, \\[2mm] \dfrac{dN}{dt} = \mathsf{N}, \end{cases}$$

und diese hängen mit dem Ausdruck (28) der lebendigen Kraft in der Tat so zusammen, als wenn die p, q, r Lagrangesche Geschwindigkeitskoordinaten wären.

Es steht überhaupt nichts im Wege, *sofern man Glieder höherer Ordnung vernachlässigen will*, die p, q, r nach der Zeit genommenen exakten Differentialquotienten von Funktionen der φ, ψ, ϑ gleichzusetzen. Wir werden eine unendlich kleine Drehung vor uns haben, wenn wir ϑ und $\varphi + \psi = \chi$ unendlich klein nehmen. Ersetzen wir dementsprechend in (27) $\sin\vartheta$ durch ϑ, $\cos\vartheta$ durch 1, $\psi'\cdot\vartheta$ durch $-\varphi'\cdot\vartheta$ und $\varphi'+\psi'$ durch χ', so kommt:

$$(36)\quad \begin{cases} p=\vartheta'\cos\varphi-\varphi'\cdot\vartheta\sin\varphi & =\dfrac{d\,(\vartheta\cos\varphi)}{dt}, \\ q=-\vartheta'\sin\varphi-\varphi'\cdot\vartheta\cos\varphi & =\dfrac{d\,(-\vartheta\sin\varphi)}{dt}, \\ r=\chi' & =\dfrac{d\chi}{dt}. \end{cases}$$

Hier sind $\vartheta\cos\varphi$, $-\vartheta\sin\varphi$, χ die unendlich kleinen Winkel, durch welche der Körper von seiner Anfangslage aus um die Achsen OX, OY, OZ gedreht ist.

Die Aufzählung der vorgenannten vier Punkte ist für das Verständnis der Ballschen Schraubenuntersuchungen von unmittelbarster Wichtigkeit. Wir dürfen vorgreifend erwähnen, daß die Schraubenkoordinaten p, q, r, u, v, w (wie überhaupt irgendwelche nicht-holonome Geschwindigkeitskoordinaten) genau in den entsprechenden vier Fällen ebenfalls wie Lagrangesche Geschwindigkeitskoordinaten behandelt werden können. Und nun trifft es sich so, daß Ball in seinen ursprünglichen Untersuchungen über die Anwendung der Schraubentheorie auf die Mechanik der starren Körper gerade die vier hiermit bezeichneten Kapitel herausgegriffen hat. Und auch die weitere Frage, die er später in Angriff nahm und von der noch genauer weiter unten die Rede sein soll, die Frage nach den jeweils vorhandenen *permanenten* Schrauben, läßt sich unter denselben Gesichtspunkt bringen. Dies ist gewiß nicht zufällig, sondern wohlbedacht, entsprechend der Auffassung, daß es in der Mechanik vor allen Dingen darauf ankommt, sich die jeweils *einfachsten* Beziehungen und Vorgänge klarzumachen.

§ 10.

Verwendung der Schraubenkoordinaten für allgemeine Kinetik der starren Körper.

Das in § 7 Entwickelte läßt sich nun Schritt für Schritt auf die Frage nach der Verwendung der Schraubenkoordinaten für die allgemeine Kinetik der starren Körper übertragen.

1. Wir fixieren die jeweilige Ortsänderung des starren Körpers durch irgend sechs Parameter, etwa so, daß wir wieder ein im Körper festes Koordinatensystem XYZ einführen und dessen Lage gegen ein im Raume festes System xyz durch die Verschiebungskomponenten ξ, η, ζ des Anfangspunktes und die drei Eulerschen Winkel φ, ψ, ϑ festlegen (was freilich sehr unsymmetrische Formeln ergibt). *Die auf das Koordinatensystem XYZ bezüglichen Schraubenkoordinaten p, q, r, u, v, w der instantanen Geschwindigkeit werden sich dann in folgender Weise als lineare, nicht holonome Verbindungen der $\xi', \eta', \zeta', \varphi', \psi', \vartheta'$ darstellen:*

$$(37)\quad \begin{cases} p=\vartheta'\cos\varphi+\psi'\sin\vartheta\sin\varphi,\quad q=-\vartheta'\sin\varphi+\psi'\sin\vartheta\cos\varphi, \\ \qquad\qquad r=\varphi'+\psi'\cos\vartheta, \\ u=\xi'(\cos\varphi\cos\psi-\cos\vartheta\sin\varphi\sin\psi) \\ \qquad +\eta'(\cos\varphi\sin\psi+\cos\vartheta\sin\varphi\cos\psi)+\zeta'\sin\vartheta\sin\varphi, \\ v=\xi'(-\sin\varphi\cos\psi-\cos\vartheta\cos\varphi\sin\psi) \\ \qquad +\eta'(-\sin\varphi\sin\psi+\cos\vartheta\cos\varphi\cos\psi)+\zeta'\sin\vartheta\cos\varphi, \\ w=\xi'\sin\vartheta\sin\psi-\eta'\sin\vartheta\cos\psi+\zeta'\cos\vartheta. \end{cases}$$

Wir bezeichnen diese Gleichungen wieder als die *kinematischen* Gleichungen.

2. Um nunmehr zu den *kinetischen* Gleichungen zu kommen, drücken wir erstlich die lebendige Kraft des Körpers durch die p, q, r, u, v, w aus; wir erhalten eine *quadratische Form mit konstanten Koeffizienten:*

$$(38)\quad T=F(p, q, r, u, v, w).$$

Wir berechnen ferner, gemäß der ersten Zeile der Lagrangeschen Gleichungen und dem Ausdruck (24) für die virtuelle Arbeit eines Kräftesystems, die Schraubenkoordinaten X, Y, Z, L, M, N des zum Geschwindigkeitszustande p, q, r, u, v, w gehörigen Impulses durch die Formeln:

$$(39)\quad X=\frac{\partial T}{\partial u},\ Y=\frac{\partial T}{\partial v},\ Z=\frac{\partial T}{\partial w},\ L=\frac{\partial T}{\partial p},\ M=\frac{\partial T}{\partial q},\ N=\frac{\partial T}{\partial r}.$$

Wir überlegen endlich, daß diese Impulskoordinaten während des Zeitelementes dt aus zwei Gründen Änderungen erfahren, die sich superponieren, nämlich durch die von außen auf den Körper wirkenden Kräfte, die zusammengenommen die Koordinaten

$$\Xi,\ \mathsf{H},\ \mathsf{Z},\ \Lambda,\ \mathsf{M},\ \mathsf{N}$$

ergeben mögen, und durch die Bewegung des im Körper festen Koordinatensystems mit dem Körper. Von hier aus erhalten wir:

$$(40)\quad \begin{cases} \dfrac{dX}{dt}=(rY-qZ)+\Xi, & \dfrac{dL}{dt}=(wY-vZ)+(rM-qN)+\Lambda, \\ \dfrac{dY}{dt}=(pZ-rX)+\mathsf{H}, & \dfrac{dM}{dt}=(uZ-wX)+(pN-rL)+\mathsf{M}, \\ \dfrac{dZ}{dt}=(qX-pY)+\mathsf{Z}, & \dfrac{dN}{dt}=(vX-uY)+(qL-pM)+\mathsf{N}, \end{cases}$$

und dies sind die gesuchten *kinetischen Gleichungen.*

3. An diese Entwicklung schließen sich dann genau dieselben Bemerkungen wie in § 7, insbesondere auch, was die Berücksichtigung irgendwelcher Bedingungsgleichungen angeht.

§ 11.

Spezielle Ausführungen zu den Entwicklungen des vorigen Paragraphen.

Um die Entwicklungen des vorigen Paragraphen durch spezielle Ausführungen zu belegen, ziehen wir zuvörderst den Fall eines isolierten, frei beweglichen Körpers heran. *Die Sache wird dann eminent einfach, verliert aber zugleich einen guten Teil ihrer spezifischen Bedeutung.* Wir legen den Anfangspunkt des Koordinatensystems in den Schwerpunkt des Körpers. Die lebendige Kraft (38) nimmt dann bekanntlich folgende einfache Form an:

$$(41) \qquad T = \frac{m}{2}(u^2 + v^2 + w^2) + f(p, q, r),$$

unter f eine quadratische Form der beigesetzten Argumente mit konstanten Koeffizienten verstanden. Die Impulskoordinaten (39) werden daraufhin

$$(42) \qquad X = mu, \quad Y = mv, \quad Z = mw, \quad L = \frac{\partial f}{\partial p}, \quad M = \frac{\partial f}{\partial q}, \quad N = \frac{\partial f}{\partial r}.$$

Es nehmen daher die letzten drei Gleichungen (40) folgende einfache Form an:

$$(43) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= (rM - qN) + \mathsf{\Lambda}, \\ \frac{dM}{dt} &= (pN - rL) + \mathsf{M}, \\ \frac{dN}{dt} &= (pL - pM) + \mathsf{N}. \end{aligned} \right.$$

Wollen wir nun noch voraussetzen, daß die $\mathsf{\Lambda}$, M, N nur von den φ, ψ, ϑ (nicht von den ξ, η, ζ) abhängen, so haben wir ersichtlich zur Bestimmung der p, q, r, d. h. *der Drehung um den Schwerpunkt*, genau denselben Ansatz, den man von jeher benutzt hat. *Das Eigenartige der Schraubentheorie entschwindet;* man wird das Problem am einfachsten so weiter behandeln, daß man nach Bestimmung der Drehung *um* den Schwerpunkt die fortschreitende Bewegung des letzteren direkt bestimmt, d. h. die gewöhnlichen Bewegungsgleichungen für die ξ, η, ζ aufstellt. Die Schraubentheorie erleidet hier also so zu sagen einen Mißerfolg. An diesem Mißerfolg mag es liegen, daß sich die Schraubentheorie die große Geltung, welche sie zweifellos für die Mechanik der starren Körper besitzt, immer nur erst partiell hat erringen können. *Gäbe es in der Mechanik der starren Körper keine anderen Aufgaben, als die gerade besprochenen, so wäre es überflüssig, eine besondere Schraubentheorie zu entwickeln.*

Es gibt aber andere Aufgaben die Menge. Ich nenne hier die Bewegung eines starren Körpers in einem widerstehenden Mittel (wo die $\mathsf{\Lambda}$, M, N gewiß nicht von den φ, ψ, ϑ allein abhängen), ferner aber die Bewegung eines starren Körpers, der gezwungen ist, auf anderen starren Körpern zu rollen oder zu gleiten.

Ich möchte hier insbesondere auf dasjenige Problem hinweisen, bei welchem die Schraubentheorie bislang die glänzendste Verwendung gefunden haben dürfte, *das Problem von der Bewegung des starren Körpers in einer reibungslosen inkompressiblen Flüssigkeit*[15]). Die lebendige Kraft des aus Körper und Flüssigkeit gebildeten Systems kann in diesem Falle ohne weiteres in der Form (38) angeschrieben werden, worauf die gesamten Entwicklungen des vorigen Paragraphen Platz greifen. Diese Entwicklungen sind in der Tat nichts anderes als eine Transskription der Ansätze, welche Lord Kelvin und Kirchhoff ursprünglich für den Körper in Flüssigkeit gemacht haben; man vergleiche die Darstellung bei Lamb, *Hydrodynamics* (Cambridge, 1895; Kap. 6) der sich direkt an die Ausdrucksweise der Schraubentheorie anschließt, sowie das Referat von Love in IV, 15 und IV, 16 der Mathematischen Enzyklopädie (1901). Die verschiedenen Formen, welche die lebendige Kraft T je nach der Symmetrie des in die Flüssigkeit getauchten Körpers annimmt, der jeweilige Zusammenhang zwischen der instantanen Geschwindigkeitsschraube und der Impulsschraube, endlich die resultierende Bewegung des Körpers selbst sind ebenso viele Gegenstände, welche sich auch für eine anschaulich-geometrische Diskussion im Sinne der Ballschen Schraubentheorie vorzüglich eignen dürften. Es würde dies eine direkte und doch nicht triviale Weiterbildung von Poinsots berühmten Untersuchungen über die Rotation eines starren Körpers um einen festen Punkt sein. Hierzu wolle man insbesondere die Arbeit von Minkowski in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie von 1888 vergleichen.

§ 12.

Abschließende Bemerkungen über die mechanischen Kapitel des Ballschen Werkes. — Verallgemeinerungen des in § 7 und § 9 gegebenen Ansatzes.

Es wurde bereits in § 8 hervorgehoben, daß die Untersuchungen über die Mechanik der starren Körper, welche Ball in seinem Werke ausführt[16]), einen übereinstimmenden Charakter zeigen: es handelt sich bei Ball durchweg um solche Fragen, *bei denen die Schraubenkoordinaten* p, q, r,

[15]) Leider ist die mathematische Eleganz dieser Untersuchungen kein Maßstab für ihre physikalische Wichtigkeit; vielmehr ist das praktische Geltungsgebiet derselben wegen der in allen Fällen vorhandenen Flüssigkeitsreibung und der bei größeren Geschwindigkeiten auftretenden turbulenten Bewegungen ein sehr geringes.

[16]) Nur von diesen *mechanischen* Entwicklungen des Ballschen Werkes ist im vorliegenden Artikel die Rede, nicht von den anschließenden *geometrischen.* Ich möchte aber nicht unterlassen anzuführen, daß Herr Ball die geometrischen Fragen neuerdings in einer besonderen Abhandlung in den Transactions der R. Irish Academy (vol. 31, part 12, Dublin 1901) weiter verfolgt hat; dieselbe trägt den Titel: *Further developments of the geometrical theory of six screws.*

u, v, w *der instantanen Geschwindigkeit wie Lagrangesche Geschwindigkeitskoordinaten benutzt werden können.* Ich habe dies hier nur noch betreffs der letzten Frage, die in § 8 genannt wurde, der Frage nach den jeweiligen *permanenten Schrauben* auszuführen. Dies gelingt in einfachster Weise im Anschluß an die kinetischen Gleichungen (40). Man findet nämlich, daß es sich bei Ball dabei um die Aufsuchung solcher Werte der p, q, r, u, v, w bez. $\varphi, \psi, \vartheta, \xi, \eta, \zeta$ handelt, *für welche die rechten Seiten der kinetischen Gleichungen* (40) *verschwinden;* es bleiben dann die X, Y, Z, L, M, N des Impulses und also auch die p, q, r, u, v, w wenigstens für ein Zeitelement konstant, und eben deshalb spricht Ball in einem solchen Falle von einer permanenten Schraube. Als einfache Beispiele möchte ich anführen Staudes permanente Drehachsen eines um einen Punkt rotierenden schweren Körpers (Journal für Mathematik, Bd. 113, 1894), sowie Kirchhoffs Theorem, daß bei jedem Körper in einer reibungslosen, inkompressiblen Flüssigkeit bei Abwesenheit äußerer Kräfte drei zueinander senkrechte Richtungen gleichförmiger Translation existieren. Die sämtlichen Fälle stationärer Bewegung, welche in dem genannten Falle bei dem Körper in Flüssigkeit auftreten können, diskutiert Minkowski l. c. In diesen Beispielen sind zugleich die p, q, r, u, v, w nicht nur zeitweise, sondern dauernd konstant, so daß man von *Permanenz* der bez. Schrauben im vollsten Sinne des Wortes reden kann.

Letzterer Umstand hängt ersichtlich mit der Tatsache zusammen, daß die Drehungen um einen Punkt, wie andererseits die Bewegungen eines freien Körpers eine *Gruppe* bilden: gehört eine unendlich kleine Bewegung der Gruppe an, so auch die endliche Bewegung, welche aus ihr durch unendlichmalige Wiederholung entsteht. Daß dies bei der Bewegung starrer Körper keineswegs immer der Fall ist, zeigt das einfache Beispiel eines auf einer Ebene rollenden Zylinders. Hier treten daher die in § 5 genannten *Gruppen von Bewegungen* (bez. die mit ihnen verknüpften linearen Schraubensysteme von „selbständiger gruppentheoretischer Bedeutung") in charakteristischer Weise in den Vordergrund. In der Tat läßt sich die Kinetik aller dieser Gruppen genau so in Ansatz bringen wie in § 7 die Kinetik der Drehungen um einen Punkt und in § 9 diejenige der freien Bewegungen (eines starren Körpers); man wird sagen können, daß in allen diesen Fällen die *Methode der Eulerschen Gleichungen* eine naturgemäße Verallgemeinerung findet[17]). Die Gesamtheit der Bewegungen, welche ein

[17]) Diese Bemerkungen stehen in naher Beziehung zu gewissen allgemeineren Betrachtungen über dynamische Probleme, die Herr Volterra in den Jahren 1899 bis 1900 in den Atti di Torino veröffentlichte; siehe insbesondere den Aufsatz: *Sopra una classe di equazioni dinamiche* in Bd. 33 und den anderen: *Sopra una classe di moti permanenti stabili* in Bd. 34.

starrer Körper nach der Natur der ihm auferlegten Bedingungen gegebenenfalls ausführen kann, ist immer in einer *kleinsten* Gruppe von Bewegungen enthalten. Es dürfte sich empfehlen, die kinetischen Gleichungen für den Körper jeweils so aufzustellen, daß man diese Gruppe als Ausgangspunkt nimmt, also für sie „kinematische Gleichungen" und das Analogon der Eulerschen Gleichungen aufstellt.

Göttingen, den 3. September 1901.

Nachträgliche Bemerkungen[18]).

Den vorstehenden Artikel, der die Bedeutung der Ballschen Schraubentheorie für das Gesamtgebiet der Mechanik zusammenhängend darlegen und zugleich begrenzen soll, habe ich s. Z. verfaßt, weil es mir bei der Redaktion des Bandes IV der Mathematischen Enzyklopädie (der die Mechanik behandelt) erwünscht war, eine derartige Darstellung zur Hand zu haben; ich verweise in dieser Hinsicht auf den Artikel IV, 2 (Timerding, geometrische Grundlegung der Mechanik eines starren Körpers (1902)) und IV, 6 (Stäckel, elementare Dynamik; erscheint demnächst). Wenn ich jetzt diesen Artikel in den Math. Annalen wieder abdrucke, so geschieht es, weil das Klassifikationsprinzip des § 1, dem ich allgemeine Bedeutung beilege, mit den sich daran anschließenden Einzelausführungen seither nicht so beachtet scheint, wie ich es für richtig halte.

Vielleicht darf ich über die historische Entstehung dieses Prinzips hier folgendes bemerken. Der Gedanke, alle vorkommenden Größen nach ihrem Verhalten bei beliebigen linearen Transformationen zu klassifizieren, durchzieht bekanntlich die ganze Invariantentheorie und liegt bereits den ersten invariantentheoretischen Arbeiten von Cayley und Sylvester zugrunde. In meinem Erlanger Programm (1872) wurde sodann der Gesichtspunkt aufgestellt, daß die Gesamtheit der linearen Transformationen nur ein Beispiel irgendeiner anderen Gruppe von Transformationen ist, denen man die jeweiligen Urvariabelen unterworfen denken mag. In Physik und Mechanik hat man allen Anlaß, als solche Gruppe eben die *Hauptgruppe* der räumlichen Änderungen, d. h. den Inbegriff der Bewegungen des Raumes und seiner Ähnlichkeitstransformationen zu wählen, und es ergibt sich dann durch sinngemäße Übertragung der Auffassungsweise der Invariantentheoretiker das Klassifikationsprinzip des § 1 mit Notwendigkeit. Ich habe dasselbe dementsprechend seit Jahren in meinen Vorlesungen zur Geltung gebracht, worauf auch Hr. Abraham in dem Enzyklopädieartikel IV, 14 (Geometrische Grundbegriffe für die Mechanik der deformierbaren Körper (1901)), wo er das in Rede stehende Klassifikationsprinzip durchweg anwendet, ausdrücklich Bezug nimmt.

Im übrigen ergibt sich, wie ich ausdrücklich hervorheben möchte, eben nach den Grundsätzen meines Erlanger Programms, für die Darlegung und die Durchführung des Prinzips eine gewisse Latitüde. Um dies nur nach einer Seite auszuführen: die „Hauptgruppe" der räumlichen Änderungen ist eine Untergruppe in der Gesamtheit der *affinen* Transformationen. Man kann unsere Klassifikationen also in der Weise durchführen, daß man zunächst ein Schema der affinen Klassifikation aufstellt und in dieses dann die feineren Einzelheiten der metrischen Klassifikation erst hinterher einordnet. *Eine wissenschaftliche Notwendigkeit, so vorzugehen, besteht aber keineswegs.* Ich hebe dies hervor, um zu der Meinungsverschiedenheit Stellung zu

[18]) [Beim Abdruck in den Math. Ann., Bd. 62 (1906) hinzugefügt. Das außerordentlich reichhaltige Stäckelsche Referat ist 1908 erschienen.]

nehmen, welche bei den neueren Diskussionen über die Grundlagen der Vektorenrechnung zwischen den Herren Mehmke und Prandtl hervorgetreten ist (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 13, 1903).

Ich zitiere zum Schluß gern noch einige neuerdings erschienene Literatur, die zu den vorstehend wiederabgedruckten Entwicklungen in näherer Beziehung steht.

Zunächst ein *Lehrbuch der analytischen Geometrie*, in welchem die Unterscheidung der projektiven, affinen und metrischen (oder, wie die Autoren sagen, äquiformen) Geometrie in dem hier in Betracht kommenden Sinne von vornherein mit Konsequenz durchgeführt wird. Es ist dies das Lehrbuch von Heffter und Köhler (Leipzig, erster Teil, 1905).

Sodann, was Untersuchungen über Schraubentheorie angeht, vor allen Dingen die nun vollendete *Geometrie der Dynamen* von Study (Leipzig, 1903) die neben vielem anderen Neuen, was über den Bereich des vorstehend abgedruckten Aufsatzes hinausliegt, insbesondere eine völlig durchgeführte Diskussion der verschiedenen Arten der linearen Schraubensysteme enthält. Ferner die Untersuchungen von Grünwald in den Bänden 48, 49 und 52 der Zeitschrift für Mathematik und Physik (1901, 1902, 1905), deren Titel ich hier wenigstens anführen will:

1. Sir Robert Balls lineare Schraubengebiete,
2. Zur Veranschaulichung des Schraubenbündels,
3. Darstellung aller Elementarbewegungen eines starren Körpers von beliebigem Freiheitsgrad.

Endlich, was die am Schlusse meines Aufsatzes benutzte Untersuchung holonomer und nichtholonomer Geschwindigkeitskoordinaten angeht, die neuesten Publikationen:

Hamel, Die Lagrange-Eulerschen Gleichungen der Mechanik (in Bd. 50 der Zeitschrift für Mathematik und Physik, 1903), und Appell, Traité de Mécanique rationnelle, 2. Band, 2. Auflage (Paris 1904).

Göttingen, im Mai 1906.

XXX. Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe.

Vortrag, gehalten in der Göttinger Mathematischen Gesellschaft am 10. Mai 1910.
[Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 19 (1910).]

Sie haben alle in mehr oder minder bestimmter Form davon gehört, daß sich die Theorie der Lorentzgruppe oder, was dasselbe ist, das moderne Relativitätsprinzip der Physiker in die *allgemeine Lehre von der projektiven Maßbestimmung* einordnet, wie sich diese im Anschluß an Cayleys grundlegende Arbeit von 1859 entwickelt hat. Es entsprach noch einer Verabredung mit unserem verstorbenen Freunde Minkowski, daß ich diese Sachlage im verflossenen Wintersemester in meiner Vorlesung über projektive Geometrie des näheren ausführte, bzw. als das abschließende Ergebnis meiner Vorlesung hervortreten ließ. Die Lehre von der projektiven Maßbestimmung, die schon nach so manchen Seiten hin grundlegend geworden ist, gewinnt hier eine neue und überraschende Anwendung, während sich andererseits die modernen Entwicklungen der Physiker, die dem Neuling so leicht den Eindruck des Paradoxen machen, sozusagen als Korollare eines allgemeinen seit lange wohlgeordneten Gedankenganges erweisen. Es kann nicht fehlen, daß dieses Zusammentreffen zweier nach ihrer historischen Entstehung gänzlich getrennter Gedankenkreise nach beiden Seiten hin in hohem Maße anregend wirken muß; ich hoffe um so mehr auf einiges Interesse hierfür gerade auch seitens der Physiker, als die Geometer schon mancherlei Einzelresultate herausgearbeitet haben, die sich in der Werkstätte der theoretischen Physik nunmehr als willkommene Hilfsmittel bewähren möchten.

Wenn ich nun heute unternehme, Ihnen das Gesagte nach seinen wesentlichen Grundlinien näher auszuführen, so stehe ich allerdings vor einer großen Schwierigkeit: ich werde nicht umhin können, den *Gruppenbegriff* sowie gewisse fundamentale Begriffsbildungen der projektiven Geometrie, wie *homogene Punkt- und Ebenenkoordinaten*, die den linearen Substitutionen dieser Koordinaten entsprechenden *Kollineationen*, endlich für jede aus Kollineationen gebildete Gruppe das Vorhandensein einer zugehörigen *Invariantentheorie*, — dies alles wohlverstanden für Gebiete von beliebig viel Dimensionen — als geläufig vorauszusetzen, während ich doch recht gut weiß, daß nicht nur die zahlreich anwesenden Physiker, die ich hier als Gäste besonders willkommen heiße, sondern auch die Mehrzahl der jüngeren Fachmathematiker, die unserer Gesellschaft angehören, sich mit diesen Dingen sozusagen nur per distans beschäftigt haben. Viele von Ihnen sind bisher zweifellos der Meinung gewesen, daß die projektive Geometrie, nachdem sie so lange im Vordergrunde der mathematischen Produktion stand, heute doch nur die Bedeutung einer mathematischen Spezialdisziplin beanspruchen könne. Da ist es ja an sich sehr nützlich, daß mein heutiger Vortrag der entgegengesetzten Auffassung Ausdruck geben muß, daß nämlich die projektive Geometrie im Rahmen der von uns allen anzustrebenden mathematischen Gesamtbildung als gleichwertig anzusehen sei mit anderen grundlegenden Fächern, wie etwa Algebra oder Funktionentheorie. Aber dieses ideale Moment kann doch die Schwierigkeit, die sich aus dem tatsächlichen Fehlen ausreichender Vorkenntnisse ergibt, nicht aus der Welt schaffen. Ich greife also zu der Methode, die unter derartigen Umständen noch am ehesten Erfolg verspricht: *daß ich Ihnen die Dinge nach ihrem historischen Werdegang vorführe*, und muß Sie übrigens bitten, daß Sie dabei die Lebhaftigkeit, mit der ich von der Wichtigkeit des projektiven Denkens spreche, als ein Äquivalent für die fehlende Ausführlichkeit in den Einzelangaben hinnehmen.

Ich beginne, dem Gesagten entsprechend, damit, daß ich Ihnen *Cayleys Originalarbeit von 1859* vorlege, die *sechste* einer Reihe von Abhandlungen, in denen Cayley damals seine Auffassungen und Kenntnisse auf dem Gebiete der Invariantentheorie linearer Substitutionen zusammengefaßt hat (a sixth memoir upon Quantics, Bd. 149 der Philosoph. Transactions der R. Society, — Bd. 2 der Werke, S. 561 ff.). Beim Durchblättern werden Sie zunächst keinen besonderen Eindruck haben, weil vor allen Dingen Einzelheiten über quadratische Formen entwickelt werden; es ist aber doch einfach, die Fragestellung und ihre glänzende Beantwortung herauszuheben. Die Entwicklung der Geometrie in der ersten Hälfte des vorigen Jahrhunderts hatte dahin geführt, den Gesamtinhalt der Raumlehre in zwei verschiedene Gebiete zu sondern: die Geometrie der Lage (deskriptive Geometrie), die von solchen Eigenschaften der Figuren handelt, welche bei beliebigem Projizieren ungeändert erhalten bleiben, und die Geometrie des Maßes, deren Grundbegriffe (Abstand, Winkel usw.) diese Invarianz keineswegs besitzen. Diese Trennung hatte sich im Bewußtsein der damaligen Mathematiker festgesetzt, trotzdem bereits Poncelet die entscheidende Bemerkung gemacht hatte, daß, für eine allgemeine Auf-

fassung, die Kreise der Ebene und die Kugeln des Raumes — also die Hauptobjekte der metrischen Betrachtung — als Kegelschnitte, bzw. Flächen zweiten Grades angesehen werden können, die mit dem Unendlichweiten der Ebene, bzw. des Raumes ein bestimmtes durch eine Gleichung zweiten Grades gegebenes, imaginäres Gebilde gemein haben, — die sogenannten *Kreispunkte* der Ebene, bzw. den *Kugelkreis* des Raumes. Nun ist Cayleys Leistung, erkannt zu haben, daß in diesen Poncelet schen Aussagen das Mittel gegeben ist, die genannte Trennung der Geometrie in zweierlei einander fremde Disziplinen wieder rückgängig zu machen, oder vielmehr sie durch eine prinzipiell andere Auffassung zu ersetzen. Sein Resultat ist, — wie alle grundlegenden Gedanken der mathematischen Wissenschaft —, äußerst einfach: alle Maßbeziehungen geometrischer Figuren können ohne weiteres als projektive Beziehungen aufgefaßt werden, *sofern man den Figuren* — je nachdem sie eben oder räumlich sind — *die Kreispunkte, bzw. den Kugelkreis hinzufügt;* die Maßgeometrie erscheint so als dasjenige Stück der projektiven Geometrie, das von Figuren handelt, bei denen das Paar der Kreispunkte, bzw. der Kugelkreis beteiligt ist.

Diese Aussage wird sehr viel deutlicher werden, wenn ich einige einfachste Formeln schreibe.

Zunächst nur in der Ebene. Seien x, y gewöhnliche rechtwinklige Punktkoordinaten. Wir setzen, homogen machend, $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$; wir nennen ferner u_1, u_2, u_3 die homogenen Koordinaten der durch die Gleichung $u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = 0$ dargestellten geraden Linie. Das Kreispunktepaar ist dann in Punktkoordinaten durch die Nebeneinanderstellung der beiden Gleichungen

$$(1) \qquad x_3 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 = 0$$

gegeben, in Linienkoordinaten aber als Umhüllungsgebilde aller Geraden, welche die *eine* Gleichung

$$(2) \qquad u_1^2 + u_2^2 = 0$$

erfüllen. — Man beachte nun, um bei dem Einfachsten zu bleiben, die Formel für die Entfernung zweier Punkte

$$r = \sqrt{(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2}\,.$$

Wir schreiben, homogen machend:

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3}; \quad \bar{x} = \frac{y_1}{y_3}, \quad \bar{y} = \frac{y_2}{y_3}$$

und erhalten:

$$(3) \qquad r = \frac{\sqrt{(x_1 y_3 - y_1 x_3)^2 + (x_2 y_3 - y_2 x_3)^2}}{x_3 y_3}.$$

Hier verschwindet der Zähler, wenn die beiden gegebenen Punkte mit einem der Kreispunkte auf gerader Linie liegen, der Nenner, wenn einer der gegebenen Punkte auf der Verbindungslinie der beiden Kreispunkte liegt. Beides sind projektive Eigenschaften der von den gegebenen zwei Punkten und den Kreispunkten gebildeten Gesamtfigur! Algebraisch aber folgt hieraus (wie ich unmöglich näher ausführen kann), daß der Ausdruck r sich nur um einen konstanten Faktor ändert, wenn man unsere vier Punkte gleichzeitig einer beliebigen Kollineation unterwirft. Deshalb nennt man r eine *Invariante* unserer vier Punkte gegenüber der Gesamtheit aller Kollineationen, oder auch eine „simultane Invariante" der zwei zunächst gegebenen Punkte und der in (1) bzw. (2) linker Hand stehenden algebraischen Formen. Der Inhalt der projektiven Geometrie der Ebene ist aber, algebraisch zu reden, nichts anderes, als die Lehre von den Invarianten, welche irgendwelche ebene Figuren gegenüber der Gesamtheit der ebenen Kollineationen besitzen, insbesondere auch von den Relationen, welche solche Invarianten untereinander aufweisen mögen; es ordnen sich also alle Sätze, die zwischen den Entfernungen irgendwelcher Punkte der Ebene bestehen mögen, in die projektive Geometrie ein. —

Im Raume ist die Sache nur durch die vermehrte Zahl der Koordinaten komplizierter. Seien x, y, z gewöhnliche rechtwinklige Koordinaten, so setzen wir, homogen machend, $x = \frac{x_1}{x_4}$, $y = \frac{x_2}{x_4}$, $z = \frac{x_3}{x_4}$. Der „Kugelkreis" ist dann in Punktkoordinaten durch das Gleichungspaar

$$x_4 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0 \tag{4}$$

gegeben, in zugehörigen Ebenenkoordinaten (u_1, u_2, u_3, u_4) aber durch die *eine* Gleichung:

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0. \tag{5}$$

Man betrachte wieder den Ausdruck für die Entfernung zweier Punkte. Indem wir letzteren die homogenen Koordinaten $x_1 : x_2 : x_3 : x_4$ und $y_1 : y_2 : y_3 : y_4$ erteilen, erhalten wir

$$r = \frac{\sqrt{(x_1 y_4 - y_1 x_4)^2 + (x_2 y_4 - y_2 x_4)^2 + (x_3 y_4 - y_3 x_4)^2}}{x_4 y_4} \tag{6}$$

und knüpfen an diese Formel Erörterungen, die den soeben an (3) angeschlossenen ganz ähnlich sind. —

Die vorstehenden Andeutungen werden genügen, um den Sinn von Cayleys grundlegender Arbeit einigermaßen verständlich zu machen. Ich darf nun einen Augenblick von den Überlegungen reden, die ich in meinem Erlanger Antrittsprogramm 1872 entwickelt habe[1]). Bei Cayley ist

[1]) „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen", abgedruckt in Bd. 43 der Math. Annalen und anderswo. [S. Abh. XXVII dieser Ausgabe.]

immer nur von Invarianten gegenüber der *Gesamtheit* der Kollineationen des gerade in Betracht kommenden Gebietes die Rede. Demgegenüber betonte ich damals, daß man ebensowohl von Invarianten gegenüber einer *Untergruppe* von Kollineationen reden könne. Von hier aus ergab sich eine neue Beleuchtung des Wesens der metrischen Geometrie und der hierauf bezüglichen Cayleyschen Auffassung. Es ist eine triviale Bemerkung, daß alle Aussagen der metrischen Geometrie unabhängig von der Lage und von der absoluten Größe der Figuren bestehen und eben hierdurch gegenüber den Aussagen individuellen Inhaltes, wie man sie in der Topographie aufstellt, charakterisiert werden können. Man wird dies modern-mathematisch in der Weise ausdrücken, daß man zunächst zwei nahe miteinander verwandte *Gruppen* kollinearer Umformungen einführt: die Gruppe der *Bewegungen und Umlegungen* und die umfassendere Gruppe der *Ähnlichkeitstransformationen* (die Gruppe der „kongruenten" und die Gruppe der „äquiformen" Transformationen nach der von Heffter und Koehler in ihrem Lehrbuch eingeführten Ausdrucksweise)[2]), und nun sagt: die metrischen Eigenschaften sind dadurch charakterisiert, daß sie *relativ zu diesen Gruppen* invariant sind. Wir haben danach: *Metrische Geometrie und projektive Geometrie kommen beide auf das Studium einer Invariantentheorie heraus, und ihre gegenseitige Beziehung liegt darin, daß die Gruppe der metrischen Geometrie eine Untergruppe der zur projektiven Geometrie gehörigen Gruppe ist.*

Ein paar einfache Formeln werden diesen Sachverhalt verdeutlichen und noch weiter gliedern. Wir mögen in der Ebene bleiben und der Einfachheit halber gewöhnliche (nicht homogene) rechtwinklige Koordinaten x, y gebrauchen. Schreiben wir dann

$$\begin{cases} x' = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}, \\ y' = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}, \end{cases} \tag{7}$$

und betrachten hier die $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{23}$ als beliebig veränderliche Größen, so haben wir die sechsparametrige Gruppe der sogenannten *affinen* Transformationen vor uns. Aus ihr entsteht die vierparametrige Gruppe der *äquiformen* Transformationen, wenn man verlangt, daß $dx'^2 + dy'^2$ bis auf einen Faktor mit $dx^2 + dy^2$ übereinstimme. Es ist dies dann und nur dann der Fall, wenn die Bedingungen erfüllt sind:

$$\alpha_{11}^2 + \alpha_{21}^2 = \alpha_{12}^2 + \alpha_{22}^2, \quad \alpha_{11}\alpha_{12} + \alpha_{21}\alpha_{22} = 0,$$

wenn also die Matrix

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix},$$

[2]) Lehrbuch der analytischen Geometrie, Bd. 1, Leipzig 1905.

wie man sagt, *orthogonal*[3]) ist. Die dreiparametrige Gruppe der kongruenten Transformationen aber entsteht, wenn man die Determinante $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$ gleich ± 1 setzt. Es wird dann $dx'^2 + dy'^2 = dx^2 + dy^2$. — Wir schreiben endlich die allgemeinsten Kollineationen der Ebene an:

$$\left\{\begin{aligned} x' &= \frac{\alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}}{\alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}}, \\ y' &= \frac{\alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}}{\alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}}. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Man erkennt nun ohne Mühe:

Die Gruppe der affinen Transformationen (7) *besteht aus denjenigen Kollineationen, welche eine bestimmte gerade Linie, nämlich die unendlich ferne Gerade, in sich transformieren.*

Die Gruppe der äquiformen Transformationen aber besteht aus den Kollineationen, welche ein bestimmtes auf dieser geraden Linie liegendes Punktepaar, eben das Kreispunktepaar, ungeändert lassen.

Geometrisch nicht ganz so einfach ist die Definition der Gruppe der kongruenten Transformationen. Wir begnügen uns hier mit der algebraischen Charakterisierung: es sind die äquiformen Transformationen, deren vorbezeichnete Determinante gleich ± 1 ist. Die äquiformen Transformationen sind natürlich eo ipso affin.

Soll ich einfügen, daß man nun — als Mittelglied zwischen projektiver Geometrie und metrischer Geometrie — eine *affine* Geometrie definieren kann, welche alle diejenigen Eigenschaften ebener Figuren behandelt, die bei der Gruppe (7) invariant sind? Wir hätten dann dreierlei Geometrien zu vergleichen, von denen projektive und metrische Geometrie die beiden extremen Fälle sind. Die Systematik würde dadurch gewinnen, die Darstellung aber unnötig schleppend werden, weil mehreremal im Grunde dasselbe zu sagen wäre. So soll also weiterhin in der Hauptsache doch nur von projektiver und metrischer Geometrie die Rede sein und der affinen Geometrie, die allerdings zum Schluß besonders hervortreten wird, nur beiläufig gedacht werden. —

In diesem Sinne unterscheide ich also nur zwischen der *elementaren* (direkten) Behandlung der metrischen Beziehungen und der durch Cayley angebahnten *projektiven*. Und dieser Unterschied formuliert sich (im Sinne des Erlanger Programms) dahin: „Die projektive (höhere) Behandlung sucht die invarianten Beziehungen, welche die vorzugebenden Figuren *nach Hinzufügung der Kreispunkte* gegenüber der *Gesamtheit* der Kollineationen besitzen; die elementare Behandlung die invarianten Beziehungen, welche die Figuren als solche gegenüber der engeren Gruppe derjenigen (äquiformen und kongruenten) Kollineationen besitzen, welche die Kreispunkte in sich überführen.“

[3]) Der Term ist hier so gebraucht, daß die Ähnlichkeitstransformationen als mit eingeschlossen gelten (also auf den Zahlenwert der Determinante der α_{ik} kein Gewicht gelegt ist).

Nun bin ich mit diesen allgemeinen Vorbetrachtungen zu Ende und ich bitte Sie nur, insbesondere folgenden Gedanken festzuhalten: Invariantentheorie ist ein relativer Begriff; man kann gegenüber jeder Gruppe von Transformationen von einer zugehörigen Invariantentheorie sprechen. Dieser Gedanke ist so selbstverständlich, daß er in den verschiedensten Anwendungsgebieten und so auch in der theoretischen Physik überall spontan hervortritt. Die Terminologie, durch die er zum Ausdruck gebracht wird, ist natürlich je nach den Gebieten eine sehr verschiedene. Denn die Forscher verschiedener Art, und so auch die Physiker, haben bei ihren Arbeiten nicht die Zeit und vielfach auch nicht die Gelegenheit, nachzusehen, ob irgendwelche begriffliche Ansätze, deren sie bedürfen, sich in den Vorratskammern der reinen Mathematik bereits fertig ausgebildet vorfinden, sie verfahren daher so — und es bringt dies eine gewisse Frische ihrer Gedankengänge mit sich —, daß sie sich die mathematischen Instrumente, deren sie bedürfen, von Fall zu Fall selbst anfertigen. Die spätere Verständigung mit den zünftigen Mathematikern, die mir allerdings eine wichtige Sache zu sein scheint, weil sie die Gedanken präzisiert und allerlei Zusammenhänge aufdeckt, verlangt dann vor allen Dingen eine Übersetzung der hier und dort gebrauchten Ausdrucksweisen in die Sprache des anderen. So will ich hier vorgreifend den Satz aussprechen:

„Was die modernen Physiker *Relativitätstheorie* nennen, ist die Invariantentheorie des vierdimensionalen Raum-Zeit-Gebietes, x, y, z, t (der Minkowskischen „Welt“) gegenüber einer bestimmten Gruppe von Kollineationen, eben der „Lorentzgruppe“; — oder allgemeiner, und nach der anderen Seite gewandt:

„Man könnte, wenn man Wert darauf legen will, den Namen ‚Invariantentheorie relativ zu einer Gruppe von Transformationen‘ sehr wohl durch das Wort ‚Relativitätstheorie bezüglich einer Gruppe‘ ersetzen.“

Ich behandele nunmehr einiges betreffend die rein mathematischen Untersuchungen, die sich s. Z. an Cayleys Abhandlung anschlossen. Das ist in der Tat die historische Stellung dieser hervorragenden Arbeit, daß sie nicht nur das alte Problem von der Beziehung zwischen metrischer Geometrie und projektiver Geometrie entscheidend beantwortete, sondern damit zugleich eine neue Fragestellung, die nach den verschiedensten Richtungen folgenreich werden sollte, in den Vordergrund brachte. Die metrische Geometrie erwächst aus der projektiven, wenn man die Kreispunkte, gegeben durch die Gleichung $u_1^2 + u_2^2 = 0$ (oder, im Raume, den Kugelkreis, gegeben durch die Gleichung $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$) hinzunimmt. Was wird geschehen, wenn man statt dessen *irgendeine Gleichung zweiten Grades* $\sum\sum a_{ik} u_i u_k = 0$ in sinngemäßer Weise zugrunde legt?

Bleiben wir bei der Ebene, wo unsere neue Gleichung irgendeine Kurve zweiter Klasse vorstellt. Für den projektiven Geometer zerfallen diese Kurven in fünf verschiedene Arten, die ich hier aufzähle, indem ich mir statt des seither benutzten rechtwinkligen Parallelkoordinatensystems jeweils ein geeignetes Dreieckkoordinatensystem (dessen „Linienkoordinaten" ebenfalls $u_1 : u_2 : u_3$ genannt werden) zugrunde gelegt denke. Die Liste ist folgende:

A. Eigentliche Kegelschnitte

1. $u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0$, imaginärer Kegelschnitt
2. $u_1^2 + u_2^2 - u_3^2 = 0$, reeller Kegelschnitt

B. Punktepaare

3. $u_1^2 + u_2^2 = 0$, imaginäres Punktepaar (übereinstimmend mit der Gleichung (2) der Kreispunkte)
4. $u_1^2 - u_2^2 = 0$, reelles Punktepaar

C. Einzelner Punkt, doppeltzählend

5. $u_1^2 = 0$.

— Das Prinzip dieser Aufzählung ist so einfach, daß jederman die entsprechende Tabelle nach Analogie gleich für n Veränderliche $u_1, \ldots, u_n$ hinschreiben wird: zuerst Gleichungen mit n Quadraten, die wechselnd mit + oder — aneinandergefügt werden, dann solche mit $(n-1)$ Quadraten usw. Die Fälle der ersten Kategorie sollen die *allgemeinen* heißen, die nachfolgenden *einfach spezialisiert*, die der dritten Kategorie *doppelt spezialisiert* usw.

Für jeden dieser Fälle konstruieren wir nun ein Analogon zur Formel (3) für die Entfernung zweier Punkte und erhalten, was Cayley die zugehörige *Quasientfernung* nannte. Für den Fall des imaginären Punktepaares werden wir einfach die Formel (3) beibehalten (nur daß jetzt $x_1 : x_2 : x_3$ und $y_1 : y_2 : y_3$ nicht notwendig rechtwinklige Parallelkoordinaten, sondern allgemein zu reden zugehörige Dreieckskoordinaten sein werden). In den folgenden beiden Fällen (des reellen Punktepaares und des Doppelpunktes) werden kleine Änderungen anzubringen sein, auf die wir sogleich noch zurückkommen. Schwieriger ergibt sich der geeignete Ansatz für die Quasientfernung in den vorangehenden beiden Fällen (der eigentlichen Kegelschnitte); wir wollen hier darauf nicht näher eingehen, weil es zu viel Raum beanspruchen würde und nach seinen Einzelheiten für den heutigen Vortrag doch nicht in Betracht kommt. Das Resultat

ist jedenfalls dieses, *daß wir fünf Arten (und nur fünf Arten) Maßgeometrie in der Ebene erhalten, von denen uns nur die eine, die dem imaginären Punktepaar entspricht, von dem Beispiel der elementaren Metrik her bekannt ist.* Den Inbegriff aber der so entstehenden Theorien nennen wir die *allgemeine Lehre von der projektiven Maßbestimmung* (zunächst für die Ebene, dann für den Raum, überhaupt für beliebig ausgedehnte Mannigfaltigkeiten).

Nun kann ja heute keineswegs meine Absicht sein, in die Einzelheiten dieser Theorien einzugehen; nur ihre allgemeine Bedeutung soll hervorgehoben werden. Ich habe da zunächst ein Vorurteil, das mancher hegen mag, zurückzuweisen: der Laie wird von vornherein sehr wenig geneigt sein, der Beschäftigung mit Fragestellungen, die zunächst nur aus dem subjektiven, sozusagen ästhetischen Erkenntnistrieb des Mathematikers hervorgehen, irgendwelchen Wert beizulegen. Die Geschichte der Wissenschaft aber zeigt, daß die Sache ganz anders liegt; es ist ein großes Geheimnis und schwer in bestimmte Worte zu fassen; ich werde sagen, daß alles, was mathematisch gesund ist, früher oder später über sein engeres Gebiet hinaus eine weiterreichende Bedeutung gewinnt. So ging es mit der Theorie der Kegelschnitte, die von den Geometern des Altertums um ihrer selbst willen entwickelt war und mit der Entdeckung der Keplerschen Gesetze plötzlich die größte Wichtigkeit für unser Naturverständnis gewann. Und genau so ging es mit der an die Theorie der Kegelschnitte sich unmittelbar anlehnenden Lehre von der projektiven Maßbestimmung. Das erste war, daß sie hohe erkenntnistheoretische Bedeutung erhielt, indem sie sich als die einfachste Grundlage für die *Nicht-Euklidischen Geometrien* erwies, die aus den Untersuchungen über die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms von den anderen Axiomen entstanden waren und zunächst als etwas besonders schwer Zugängliches galten[4]); ich werde sogleich noch einige hierauf bezügliche Einzelheiten anführen. Das zweite war, daß sie sich in anderen Gebieten der reinen Mathematik als eine brauchbare *Methode* zur Klarstellung komplizierter Verhältnisse bewährte, so in der Theorie der automorphen Funktionen oder auch in der Zahlentheorie[5]). Und nun, in den letzten Jahren, kommt hervor, daß sie ebensowohl eine rationelle Grundlage für die modernsten Spekulationen der Physik abgibt, insbesondere den Gegensatz zwischen *klassischer* und *neuer Mechanik* einfach begreifen läßt.

[4]) Vgl. meine Arbeiten „Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie" in den Bänden 4 und 6 der Math. Annalen (1871 und 1873). [Siehe Abh. XVI und XVIII dieser Ausgabe.]

[5]) Vgl. die allgemeine Darstellung bei Fricke-Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen (Teil I, Leipzig 1897), ferner meine autographierten Vorlesungen über ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie (Leipzig 1897).

Die Beziehung zwischen projektiver Maßbestimmung und Parallelentheorie, auf die ich Bezug nahm, läßt sich, wenn wir uns wieder auf die Ebene beschränken, ihrem äußeren Ergebnisse nach dahin fassen, daß wir im Falle 1) der auf S. 540 aufgestellten Tabelle (also bei Zugrundelegung eines imaginären Kegelschnitts) die Nicht-Euklidische Geometrie von Riemann erhalten, im Falle 2) aber (d. h. bei Zugrundelegung eines reellen Kegelschnitts) die Nicht-Euklidische Geometrie von Bolyai-Lobatschewsky-Gauß. Ich möchte einen besonderen Punkt erwähnen, der infolge der projektiven Auffassung ohne weiteres klar ist, während er sonst leicht von dem Schimmer des Mystischen umgeben scheint: Die Zahl der Kollineationen, durch welche ein nicht zerfallender Kegelschnitt in sich transformiert wird, ist ∞^3, sie steigt auf ∞^4, sobald der Kegelschnitt in ein Punktepaar ausartet. Hierin liegt, daß die aus den Elementen uns so geläufigen äquiformen Transformationen (Ähnlichkeitstransformationen) der Euklidischen Metrik in den Nicht-Euklidischen Geometrien als besondere Kategorie in Wegfall kommen; es bleiben nur die ∞^3 kongruenten Transformationen (Bewegungen und Umlegungen). Die Folge ist, daß es in den Nicht-Euklidischen Geometrien ein absolutes Längenmaß gibt, nicht nur, wie bei Euklid, ein absolutes Winkelmaß. Übrigens haben die beiden Gruppen, die G_3 der einen oder anderen Nicht-Euklidischen Geometrie und die G_4 der Euklidischen Geometrie, ihrer inneren Struktur nach wenig miteinander zu tun. Eben darum ist es so schwer, vom Standpunkte der Euklidischen Geometrie aus die Nicht-Euklidische zu verstehen: eine Figur, die sich Nicht-Euklidisch bewegt, erleidet, Euklidisch betrachtet, seltsame Verzerrungen. Alle Schwierigkeit verschwindet aber, sobald ich mich an das allgemeine projektive Denken gewöhnt habe. In der Tat schließt die G_8 der projektiven Geometrie (d. h. die Gesamtheit aller Kollineationen der Ebene) ebensowohl die G_3 der einen oder anderen Nicht-Euklidischen Geometrie wie die G_4 der Euklidischen Geometrie ein. Verfüge ich über die projektive Auffassung, so habe ich denselben Vorteil, wie ein Wanderer, der auf einem Berge stehend in verschiedene Täler gleichzeitig hinabblickt, während er vorher, im einzelnen Tale stehend, sich von dem Verlauf der anderen Täler nur schwer eine Vorstellung machen konnte. Noch ein letzter, nicht unwichtiger Punkt! Bei aller prinzipiellen Verschiedenheit der Fälle 1), 2) und 3) ist es für den Projektiviker doch so gut wie selbstverständlich, daß man zwischen den drei Fällen einen kontinuierlichen Übergang herstellen kann. Man wähle einfach als fundamentale Gleichung der projektiven Maßbestimmung:

$$u_1^2 + u_2^2 + \varepsilon u_3^2 = 0 \tag{9}$$

und lasse hier den Parameter ε von positiven Werten beginnend durch Null hindurch zu negativen Werten übergehen! Es wird sich dann die

Riemannsche Geometrie durch die Euklidische Geometrie hindurch in die Geometrie von Bolyai, Lobatschewsky, Gauß verwandeln. Des näheren stellt sich die Sache so, daß ich um den Punkt $u_3 = 0$ herum ein Gebiet beliebiger Ausdehnung abgrenzen kann (so groß, wenn es Vergnügen macht, daß es unser ganzes Sonnensystem oder auch die gesamte Fixsternwelt umschließt) und dann das ε, positiv oder negativ, so klein annehmen kann, daß innerhalb dieses Gebietes irgendwelche Abstände, Nicht-Euklidisch gemessen, von ihren Euklidischen Beträgen um weniger abweichen, als eine noch so kleine vorgegebene Größe beträgt. —

Man möge gestatten, daß ich mit diesen Einzelbetrachtungen über die projektive Maßbestimmung in der Ebene noch ein weniges weiter fortfahre; es geschieht dies natürlich, um gewisse Überlegungen, die ich beim Vergleich der neuen und der klassischen Mechanik späterhin gebrauche, zweckmäßig vorzubereiten. Ich wende das obengenannte Kontinuitätsprinzip nunmehr auf die Fälle 3), 4) und 5) unserer Tabelle von S. 540 an. Das fundamentale Gebilde sei, bezogen auf ein gewöhnliches rechtwinkliges Koordinatensystem:

$$u_1^2 + \varepsilon u_2^2 = 0 \tag{10}$$

und hier gebe ich ε das eine Mal einen sehr kleinen positiven, das andere Mal einen sehr kleinen negativen Wert, das dritte Mal den Wert Null. Mit x, y seien die zugehörigen (gewöhnlichen, nicht homogenen) Koordinaten eines Punktes bezeichnet. Als Entfernung dieses Punkes vom Koordinatenanfangspunkte erhält man dann durch sinngemäße Abänderung der Formel (3):

$$r = \sqrt{\varepsilon x^2 + y^2}, \tag{11}$$

und hier wolle man nun überlegen, wie das System der um O als Zentrum herumgelegten Kreise (d. h. der Kurven $r =$ Konst.) gestaltet ist. Offenbar bekommen wir bei positivem ε langgestreckte Ellipsen (deren große Achse in die Richtung der X-Achse fällt), bei negativem ε Hyperbeln, deren Asymptoten $\frac{y}{x} = \pm\sqrt{-\varepsilon}$ einen sehr kleinen Winkel mit der X-Achse machen, bei verschwindendem Paare gerader Linien $y = \pm\sqrt{\text{konst.}}$, die parallel zur X-Achse verlaufen. Es ist amüsant, sich zu überlegen, wieso diese Parallellinienpaare Übergangsformen zwischen den Ellipsen und Hyperbeln der Fälle mit positivem bzw. negativem ε sind!

Wir mögen ferner die zu unserer Maßbestimmung gehörigen äquiformen und kongruenten Transformationen zunächst in den Fällen mit nicht verschwindendem ε betrachten. Da die beiden durch (10) dargestellten Punkte für $\varepsilon \lesseqgtr 0$ voneinander verschieden sind, bestimmen sie ihre Verbindungslinie, die unendlich ferne Gerade, eindeutig. Unsere Transformationen werden also *affine* Transformationen sein und können in der Form angesetzt werden:

$$(12)\qquad \begin{cases} x' = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13} \\ y' = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}. \end{cases}$$

Hier sind die Koeffizienten rechter Hand im äquiformen Falle so zu bemessen, daß $\varepsilon\,(\alpha_{11}x + \alpha_{12}y)^2 + (\alpha_{21}x + \alpha_{12}y)^2$ bis auf einen willkürlich bleibenden Faktor mit $\varepsilon x^2 + y^2$ übereinstimmt. Dies gibt für die Koeffizienten α_{ik} zwei Bedingungen, deren Zahl auf drei steigt, wenn wir, zu den kongruenten Transformationen gehend, die Determinante $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix}$ gleich ± 1 setzen. Wir haben hiernach ∞^4 äquiforme und ∞^3 kongruente Transformationen, in genauer Übereinstimmung selbstverständlich mit dem, was wir im Falle $\varepsilon = 1$ von der Euklidischen Metrik her wissen.

Wir wenden uns nun zum doppelt spezialisierten Falle $\varepsilon = 0$, indem wir als Bedingung festhalten wollen, *daß auch hier nur affine Transformationen* (12) *in Betracht gezogen werden sollen* (— dies ist hier eine freie Verabredung, weil die unendlich ferne Gerade nur eine von den geraden Linien ist, die den Punkt $u_1^2 = 0$, d. h. den unendlich fernen Punkt der X-Achse, enthalten, von Hause aus also keine Notwendigkeit vorliegt, daß sie bei den von uns zu betrachtenden Transformationen in sich übergeht —). Wir erhalten dann für die äquiformen Transformationen einfach $\alpha_{21} = 0$; jede Transformation

$$(13)\qquad \begin{cases} x' = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13} \\ y' = \qquad\quad \alpha_{22}y + \alpha_{23} \end{cases}$$

wird als äquiform anzusprechen sein. *Die äquiforme Gruppe enthält trotz unserer einschränkenden Verabredung hier noch fünf Parameter.* Als „Bewegungen", d. h. kongruente Transformationen ohne Umlegung möge man dann unter den (13) diejenigen bezeichnen, welche erstlich unimodular sind, zweitens die Entfernung zweier Punkte x, y und $\bar{x}$, $\bar{y}$, d. h. im vorliegenden Falle $(y - \bar{y})$, unverändert lassen. Dies gibt $\alpha_{11} = 1$, $\alpha_{22} = 1$ und *die dreigliedrige Bewegungsgruppe ist durch die Formeln gegeben:*

$$(14)\qquad \begin{cases} x' = x + \alpha_{12}y + \alpha_{13} \\ y' = \qquad\; y + \alpha_{23}. \end{cases}$$

Die äquiformen Transformationen enthalten sonach zwei Parameter mehr als die kongruenten. Wir werden sagen, daß wir jetzt die Einheiten für den Maßstab auf der X-Achse und der Y-Achse unabhängig wählen können. Insbesondere werden wir in $y - \bar{y}$ bei beliebig gegebenen zwei Punkten eine Bewegungsinvariante haben; *ist aber insbesondere* $y - \bar{y} = 0$, *so ist auch* $x - \bar{x}$ *eine Bewegungsinvariante.*

Es gilt jetzt, alle diese gewiß sehr einfachen Ansätze auf größere Variabelenzahlen zu übertragen. Oder vielmehr, wir wollen gleich zu vier Variabelen x, y, z, t übergehen (wobei wir den Inbegriff aller Wertsysteme dieser Variabelen mit Minkowski als *Welt*, x, y, z als *Raumkoordinaten*, t als *Zeit* bezeichnen). Wir verzichten darauf, die zugehörigen möglichen Arten der projektiven Maßbestimmung systematisch aufzuzählen, so einfach dies schließlich sein würde. Vielmehr beschränken wir uns darauf zu zeigen, daß hier, in der vierdimensionalen Welt, das *System der Mechanik* sich unter den Begriff der projektiven Maßbestimmung einordnet, und zwar sowohl das System der *klassischen* Mechanik, wie das der *neuen* Mechanik von Lorentz, Poincaré, Einstein und Minkowski, womit das Wesen dieser beiden Systeme, wie insbesondere ihre gegenseitige Stellung zur vollsten Klarheit gebracht sein dürfte.

Wolle man vorab vorübergehend $x = \frac{x_1}{x_5}$, $y = \frac{x_2}{x_5}$, $z = \frac{x_3}{x_5}$, $t = \frac{x_4}{x_5}$ setzen. Die allgemeine lineare Gleichung zwischen x, y, z, t werde dementsprechend so geschrieben: $u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3 + u_4x_4 + u_5x_5 = 0$; speziell ist $x_5 = 0$ dasjenige, was wir das „unendlich Ferne" der Welt nennen wollen. Unser alter Bekannter, der Kugelkreis, erhält wie früher die Gleichung:

$$(15)\qquad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 0;$$

er ist jetzt aber, da wir fünf homogene Koordinaten haben, als *zweifach spezialisiertes* Gebilde zu bezeichnen. Neben ihn stellen wir als *einfach spezialisiertes* Gebilde:

$$(16)\qquad u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 - \frac{u_4^2}{c^2} = 0,$$

wo c die „Lichtgeschwindigkeit" bezeichnen soll, $\frac{1}{c^2}$ also (bei Zugrundelegung der Einheiten, deren man sich in der Mechanik allgemein zu bedienen pflegt) eine sehr kleine Größe ist. In Punktkoordinaten ist dieses Gebilde durch das Gleichungspaar gegeben:

$$(17)\qquad x_5 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2x_4^2 = 0,$$

bestimmt also eindeutig das „unendlich Ferne" der Welt. Läßt man hier, um zum Kugelkreise zu gelangen, c unendlich werden, so wird man für diesen *drei* Gleichungen in Punktkoordinaten erhalten:

$$(18)\qquad x_5 = 0, \qquad x_4 = 0, \qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Wir haben hier $\frac{x_4}{x_5} = t = \frac{0}{0}$; der Kugelkreis ist, könnte man sagen, *zeitlos* zu denken. Das unendlich Ferne der Welt ist nur eine der linearen Mannigfaltigkeiten, welche den Kugelkreis enthalten, es erscheint erst dann vor anderen linearen Mannigfaltigkeiten derselben Art bevorzugt, wenn wir den Kugelkreis aus (16), bzw. (17) durch Grenzübergang entstehen lassen. — *Auf diese Gebilde* (16, 17), *bzw.* (15, 18) *wollen wir nun alle Betrachtungen, die wir vorhin an die Gleichung* (10), *d. h.* $u_1^2 + \varepsilon u_2^2 = 0$ *knüpften, sinngemäß übertragen.*

Ich will gleich mit dem Kugelkreis beginnen, indem ich das Prinzip herübernehme, daß wir entsprechend der begrifflichen Auszeichnung der linearen Mannigfaltigkeit $x_5 = 0$ die zugehörigen äquiformen und kongruenten Transformationen der Welt nur unter den affinen Welttransformationen suchen sollen. Es hat dementsprechend jetzt keinen Zweck mehr, die homogene Schreibweise festzuhalten; vielmehr werden wir das allgemeine Schema der in Betracht kommenden Transformationen entsprechend den Gleichungen (13) gleich in folgender Gestalt anschreiben:

$$(19)\qquad \begin{cases} x' = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + \alpha_{14}t + \alpha_{15} \\ y' = \alpha_{21}x + \alpha_{22}y + \alpha_{23}z + \alpha_{24}t + \alpha_{25} \\ z' = \alpha_{31}x + \alpha_{32}y + \alpha_{33}z + \alpha_{34}t + \alpha_{35} \\ t' = \qquad\qquad\qquad\qquad\quad \alpha_{44}t + \alpha_{55}. \end{cases}$$

Äquiform werden wir diese Transformationen nennen, wenn sie das Gleichungssystem (18) in sich überführen. Hierfür ergibt sich als einzige Bedingung, daß die Matrix

$$(20)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix}$$

orthogonal sei. Dies liefert für die neun Koeffizienten $\alpha_{11}, \ldots, \alpha_{33}$ in bekannter Weise fünf Gleichungen; im ganzen bleiben von den 17 in (19) auftretenden Koeffizienten also 12 willkürlich. — Unter den so bestimmten äquiformen Transformationen werden wir dann gemäß (14) diejenigen als *kongruente Transformationen* bezeichnen, für die die Determinante der Matrix (20) gleich ± 1 und überdies $\alpha_{44} = 1$ ist. *Die Gruppe der so bestimmten kongruenten Transformationen enthält noch zehn Parameter.* Sind x, y, z, t und $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$ die Koordinaten zweier Weltpunkte, so bleibt bei der Gruppe der kongruenten Transformationen allgemein zu reden nur die Differenz $t - \bar{t}$ unverändert; nur wenn $t - \bar{t}$ insbesondere gleich Null ist, so ist auch $(x - \bar{x})^2 + (y - \bar{y})^2 + (z - \bar{z})^2$ eine Invariante. *Zwei Weltpunkte haben also nur dann eine „rein geometrische“ Invariante, wenn ihre Zeitdifferenz verschwindet.*

Das wir mit diesen Angaben über die zum Kugelkreis gehörigen äquiformen und kongruenten Welttransformationen in der Tat die Grundlagen der klassischen Mechanik treffen, bedarf nach dem, was neuerdings von anderen Autoren vielfach hervorgehoben ist, kaum der Ausführung.

Die Grundgleichungen der klassischen Mechanik bleiben in der Tat ungeändert, wenn wir

1. das beliebig gewählte rechtwinklige Raumkoordinatensystem x, y, z durch irgendein anderes gleichorientiertes ersetzen,
2. dem rechtwinkligen System irgendeine gleichförmige Translation erteilt denken,
3. den Anfangspunkt, von dem aus wir die Zeit t zählen, beliebig ändern.

Genau dieses findet in der Gruppe unserer kongruenten Transformationen seinen Ausdruck. Speziell den gleichförmigen Translationen 2 entsprechen in unseren Formeln die Glieder mit $\alpha_{14}t, \alpha_{24}t, \alpha_{34}t$. Dem Umstande aber, daß unsere äquiformen Transformationen zwei Parameter mehr enthalten, als die kongruenten, korrespondiert die Tatsache, daß in der klassischen Mechanik die Zeiteinheit und die Längeneinheit unabhängig voneinander willkürlich gewählt werden können (worauf sich die Lehre von der „Ähnlichkeit“ in der klassischen Mechanik stützt). —

Wir betrachten zweitens den Fall des nur einfach spezialisierten Grundgebildes (17) (das noch keinen besonderen Namen trägt, aber gewiß einen solchen verdiente):

$$x_5 = 0, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - c^2 x_4^2 = 0.$$

Die äquiformen Transformationen sind hier notwendig affin, um so mehr gehen wir wieder zur nicht-homogenen Schreibweise zurück. Das allgemeine Schema einer affinen Transformation ist dann:

$$(21)\qquad \begin{cases} x' = \alpha_{11}x + \alpha_{12}y + \alpha_{13}z + \alpha_{14}t + \alpha_{15} \\ y' = \alpha_{21}x + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + \alpha_{25} \\ z' = \alpha_{31}x + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + \alpha_{35} \\ t' = \alpha_{41}x + \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; + \alpha_{45}. \end{cases}$$

Wir haben eine äquiforme Transformation, sobald die durch die Matrix

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{14} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{41} & \cdots & \alpha_{44} \end{vmatrix}$$

gegebene homogene Substitution der x, y, z, t die quadratische Form $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ in ein Multiplum ihrer selbst überführt. Dies legt den 20 Koeffizienten α_{ik} neun Bedingungen auf; *die Gruppe der äquiformen Transformationen enthält also jetzt elf Parameter.* Aus ihr entsteht die Gruppe der kongruenten Transformationen (wie wir sie seither definierten), indem wir verlangen, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{14} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ \alpha_{41} & \cdots & \alpha_{44} \end{vmatrix}$$

einen der Werte ± 1 haben soll. *Wir haben so eine Gruppe von zehn Parametern.* Sind x, y, z, t und $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}$ die Koordinaten irgend zweier Weltpunkte, so erweist sich ihr gegenüber das Quadrat der Quasientfernung:

$$(x-\bar{x})^2+(y-\bar{y})^2+(z-\bar{z})^2-c^2(t-\bar{t})^2$$

als unveränderlich.

Wir haben nun noch einen feineren Punkt herauszuarbeiten, der schon oben, bei den Erörterungen über das Punktepaar $u_1^2+\varepsilon u_2^2=0$ als Fundamentalgebilde einer ebenen Maßbestimmung, hätte herangebracht werden können. Um aus der Gesamtheit der äquiformen Transformationen die kongruenten ohne Umlegung herauszuheben, kann man sich darauf beschränken, in den Substitutionen (12) die Determinante $\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{vmatrix} = 1$ zu setzen. So macht man es ja in der Tat bei Euklidischer Maßbestimmung, wo als Fundamentalgebilde ein *imaginäres* Punktepaar zugrunde liegt. Aber dies führt doch nur für den Fall des imaginären Punktepaars (für den Fall eines positiven ε) zu den Bewegungen. Ist das Punktepaar reell (ε negativ), so ergibt die nähere geometrische Überlegung, daß die unimodularen äquiformen Transformationen für sich kein Kontinuum mehr bilden, wie man dies doch billigerweise von dem Inbegriff der Bewegungen verlangen sollte. Ihre Gesamtheit zerfällt vielmehr in vier Kontinua. *Nur diejenigen Transformationen, welche das Vorzeichen des Differentialausdrucks εdx^2+dy^2 ungeändert lassen und überdies positives α_{22} aufweisen, werden im engeren Sinne als Bewegungen zu bezeichnen sein, weil sie allein sich an die „identische" Transformation $x'=x$, $y'=y$ kontinuierlich anschließen.* Der früher gegebenen Definition der kongruenten Transformationen sind also, um Bewegungen auszusondern, bei negativem ε die beiden genannten Forderungen noch ausdrücklich zuzusetzen. Auf die damals gegebene Abzählung der Parameter hat dies keinen Einfluß. Auch haben wir im Grenzfalle $\varepsilon=0$, indem wir $\alpha_{22}=1$ setzten, bereits der neuen Verabredung entsprechend gehandelt. — Etwas Ähnliches ist es nun auch mit dem jetzt zu behandelnden Falle des Gebildes (17) (das wegen des negativen Vorzeichens, mit dem der Term $c^2x_4^2$ in seine Gleichung eingeht, bis zu einem gewissen Grade dem Falle des reellen Punktepaares der Ebene zu vergleichen ist). Jetzt zeigt die genauere geometrische Überlegung, — die nicht etwa schwer ist, die aber mehr Platz beanspruchen würde, als wir ihr hier geben können —, daß die Gruppe der kongruenten Transformationen, wie wir sie zunächst definierten, noch zwei Kontinua umfaßt, und *daß wir als Gruppe der Bewegungen von diesen beiden Kontinuen nur dasjenige brauchen können, welches durch positives α_{44} charakterisiert ist.*

Mögen wir die Forderung eines *positiven* α_{44} also der Definition

unserer zehngliedrigen Gruppe noch ausdrücklich hinzufügen. Wir haben dann genau die *Lorentzgruppe* der „neuen" Mechanik vor uns. Allerdings sagt man von der Lorentzgruppe zumeist, sie habe sechs (nicht zehn) Parameter. Das ist aber nur eine Folge davon, daß man in der mathematischen Physik gewöhnlich nicht die Transformationen (21) der Koordinaten x, y, z, t, sondern nur die entsprechenden Transformationen der Differentiale dx, dy, dz, dt betrachtet, bei denen die additiven Konstanten $\alpha_{15}, \alpha_{25}, \alpha_{35}, \alpha_{45}$ der Formeln (21) selbstverständlich fortfallen. Der Umstand aber, daß die Gruppe der äquiformen Transformationen jetzt nur einen Parameter mehr enthält als die der kongruenten, findet sein Gegenstück in dem Umstande, daß durch Vorgabe der Konstanten c (der Lichtgeschwindigkeit) in der neuen Mechanik Raumeinheit und Zeiteinheit aneinander geknüpft sind (so daß nur eine der beiden willkürlich angenommen werden kann).

So sind denn alte Mechanik und neue Mechanik gleichmäßig in das Schema der projektiven Maßbestimmung bei vier Variabeln x, y, z, t eingeordnet, — der Zielpunkt, den ich zu Anfang dieses Vortrags in Aussicht nahm, ist erreicht. Alles, was ich zu Eingang über das Verhältnis der metrischen Geometrie zur projektiven gesagt habe, würde sich sinngemäß übertragen lassen. Ich beschränke mich aber darauf, noch zwei kurze Bemerkungen zuzufügen.

Zunächst: Gemäß der Terminologie, die ich oben bei Gelegenheit berührte, dürfen wir sagen, daß die klassische Mechanik ebenso wie die neue Mechanik eine „Relativitätstheorie" bezüglich einer Gruppe von zehn Parametern ist. Man möchte fragen, warum denn in der physikalischen Literatur das Wort „Relativitätstheorie" ausschließlich als ein Attribut der neuen Mechanik gebraucht wird? Hierauf scheint zu antworten: weil die neue Mechanik historisch auf dem Umwege über die Elektrodynamik entstanden ist. Es genügt, um die Sachlage klarzumachen, die Maxwellschen Gleichungen für den reinen Äther etwa in der Hertzschen Bezeichnung herzusetzen:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial L}{\partial t}=\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}, &&\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial X}{\partial t}=\frac{\partial M}{\partial z}-\frac{\partial N}{\partial y},\\
&\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial M}{\partial t}=\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}, &&\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial Y}{\partial t}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial z},\\
&\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial N}{\partial t}=\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}, &&\frac{1}{c}\cdot\frac{\partial Z}{\partial t}=\frac{\partial L}{\partial y}-\frac{\partial M}{\partial x}.\\
&\frac{\partial L}{\partial x}+\frac{\partial M}{\partial y}+\frac{\partial N}{\partial z}=0, &&\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}=0.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen bleiben selbstverständlich ungeändert, wenn man das x, y, z-System durch irgendein anderes (gleichorientiertes) rechtwinkliges

Koordinatensystem ersetzt, oder wenn man den Anfangspunkt der Zeit beliebig verschiebt; — das macht zusammen eine Gruppe von sieben Parametern. Sie bleiben aber keineswegs mehr ungeändert, wenn man das Koordinatensystem einer gleichförmigen Translation unterwirft, also setzt:

$$x' = x + \alpha_{14} t, \quad y' = y + \alpha_{24} t, \quad z' = z + \alpha_{34} t.$$

Hierin lag der Anlaß, daß man unter der Herrschaft der Maxwellschen Gleichungen den elektrodynamischen Äther zunächst als im Raume ruhend ansah, daß die Auffassung des *absoluten* Raumes wieder zu Ehren kam. Es blieb die siebengliedrige Gruppe der Änderungen, welche dem rein-äußerlichen Übergang von einem Koordinatensystem x, y, z, t zu einem gleichberechtigten anderen entspricht. — Da kam die Entdeckung, daß diese siebengliedrige Gruppe in einer anderen zehngliedrigen enthalten sei, welche die Maxwellschen Gleichungen ihrerseits unverändert läßt, eben der Lorentzgruppe. Wieder entschwand der absolute Raum (oder vielleicht besser: die absolute Welt), — die Welt ward wieder, was sie früher war, ein relativer Begriff —, und man bildete sich, ohne daran zu denken, daß man nur das frühere Sachverhältnis mutatis mutandis wiederherstellte, das Wort „Relativitätstheorie" als einen neuen, auf die Lorentzgruppe ausschließlich bezüglichen Term.

Als Schlußbemerkung aber möchte ich diese wählen: es wurde oben darauf hingewiesen, daß die Schwierigkeiten, die jedermann empfindet, der, von der Gewöhnung der Euklidischen Geometrie beginnend, versucht, in die Nicht-Euklidischen Doktrinen einzudringen, ohne weiteres wegfallen, wenn man den übergeordneten Standpunkt des projektiven Denkens als Ausgangspunkt nimmt. Analoges möchte für das Studium der neuen Verhältnisse gelten, die innerhalb der Mechanik bei Zugrundelegung der Lorentzgruppe hervortreten. Es scheint unzweckmäßig, bei diesem Studium immer von den in der klassischen Mechanik geltenden Auffassungen auszugehen und dann zu überlegen, wie diese künstlich deformiert werden müssen, um auf die neue Mechanik zu passen. Vielmehr scheint es richtiger, sich vom Standpunkte der alten Mechanik zunächst zu einem umfassenderen zu erheben, der dann die alte und die neue Mechanik nebeneinander als spezielle Fälle umschließt. Nach dem, was oben angeführt wurde, ist hierfür nicht einmal nötig, sich in die *projektive* Auffassung der Welt hineinzudenken, denn es genügt die *affine* Auffassung. Es wird darauf ankommen, eine systematische Invariantentheorie der affinen „Welt" zu schreiben, wozu übrigens alle Elemente in den mehrdimensionalen Untersuchungen der Mathematiker bereits vorliegen, und von ihr aus die beiden Arten der Mechanik, die alte und neue, nebeneinander zu behandeln. Wieso die alte Mechanik ein Grenzfall der neuen ist, inwieweit sie also als eine Annäherung an letztere angesehen werden darf, kommt dann von selbst hervor. Wer bringt dieses Programm zur Ausführung?

Minkowski hatte die hier geforderten Dinge für sich zweifellos sehr genau überlegt. Aber da er für den weiten Kreis der physikalisch interessierten Leser schrieb, hielt er es im Interesse der Verständlichkeit seiner Entwicklungen für zweckmäßiger, nicht seine bezüglichen inneren Überlegungen vorzutragen, sondern nur die auskristallisierte Form des Algorithmus, zu dem sie im Falle der Lorentzgruppe hinführen. Das ist Minkowskis vierdimensionale Vektorrechnung, die er ohne nähere Begründung als ein bestimmtes System fest verabredeter algebraischer Prozesse an die Spitze seiner elektrodynamischen Entwicklungen stellt.[6])

P. S. von August 1910. Ich hatte in meinem Vortrage vom 10. Mai insbesondere auch von der eleganten Darstellung der Koeffizienten der Lorentzgruppe durch zehn unabhängige Parameter gesprochen, die sich auf Grund einer wieder zuerst von Cayley aufgestellten berühmten Quaternionenformel ergibt.

Die Schlußformel ist die folgende. Ich verstehe unter i die gewöhnliche imaginäre Einheit, unter i_1, i_2, i_3 die spezifischen Einheiten des Quaternionenkalkuls. $A, A', \ldots, D, D'$ seien acht Parameter, welche an die bilineare Gleichung

$$AA' + BB' + CC' + DD' = 0$$

und übrigens die Ungleichung

$$A^2 + B^2 + C^2 + D^2 > A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2$$

gebunden sein sollen. Ebenso seien x_0, y_0, z_0, t_0 vier Parameter. Die Substitutionen der Lorentzgruppe sind dann durch folgende Formel gegeben:

$$\begin{aligned}(i_1 x' + i_2 y' + i_3 z' + ict') &- (i_1 x_0 + i_2 y_0 + i_3 z_0 + ict_0) \\ &= \frac{\left[\begin{array}{c}(i_1(A + iA') + i_2(B + iB') + i_3(C + iC') + (D + iD')) \\ \cdot (i_1 x + i_2 y + i_3 z + ict) \\ \cdot (i_1(A - iA') + i_2(B - iB') + i_3(C - iC') - (D - iD'))\end{array}\right]}{(A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2) - (A^2 + B^2 + C^2 + D^2)}.\end{aligned}$$

[6]) [Diese Bemerkungen über die von Minkowski gewählte Darstellungsweise beziehen sich auf die Veröffentlichungen, die 1910 vorlagen und auch für Minkowskis gesammelte Werke (Leipzig, 1911) maßgebend gewesen sind. Inzwischen hat sich 1915 in seinem Nachlaß das Manuskript einer von ihm noch vor jenen Veröffentlichungen, nämlich am 5. Nov. 1907, in der Göttinger Mathematischen Gesellschaft gehaltenen Vortrags gefunden, in welchem er seine mathematischen Gedanken unverhüllt dargelegt hat. Dieser Vortrag ist gleich 1915 unter dem Titel „Das Relativitätsprinzip" von Sommerfeld in Bd. 47 der 4. Folge der Annalen der Physik abgedruckt worden und findet sich übrigens auch im 24. Bande der Jahresberichte der Deutschen Mathematischen Vereinigung (1916). Hierauf möchte ich an gegenwärtiger Stelle ganz besonders aufmerksam machen. K.]

Da die Multiplikation der $A, A', \ldots, D, D'$ mit einem beliebigen gemeinsamen Faktor die Formel nicht ändert, die $A, A', \ldots$ aber andererseits der obigen Bilinearrelation unterworfen sind, haben wir in der Tat zehnfach unendlich viele Substitutionen vor uns.

Wegen der näheren Einzelheiten und der literarischen Nachweise vergleiche man etwa die „Zusätze und Ergänzungen", welche Herr Fritz Nöther dem eben erscheinenden Schlußhefte von Sommerfelds und meiner „Theorie des Kreisels" (Leipzig, Teubner 1910) hinzugefügt hat.

[Cunningham und Bateman haben bereits 1909 bemerkt, daß die Maxwellschen Gleichungen nicht nur bei den linearen Transformationen der Lorentzgruppe invariant bleiben, sondern auch bei der erweiterten G_{15}, die sich aus der Lorentzgruppe ergibt, wenn man eine gerade Anzahl von Transformationen folgender Art, (die einer Umformung der Welt durch „reziproke Radien" entsprechen):

$$x' = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2}, \quad y' = \frac{y}{-}, \quad z' = \frac{z}{-}, \quad t' = \frac{t}{-}$$

hinzunimmt[7]). Hiervon macht Bateman 1910 in den Proceedings der Londoner Mathematical Society (2) 8 interessante Anwendungen auf die Theorie der Maxwellschen Gleichungen.

Bateman geht l. c. ferner dazu über, das Wertsystem x, y, z, t durch eine Kugel des dreidimensionalen Raumes mit den Mittelpunktskoordinaten x, y, z und dem Radius ct zu interpretieren (es ist dies derselbe Gedanke, den Timerding unabhängig im 21. Bd. des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1912, entwickelt hat). Die Transformationen der vierdimensionalen „Welt", welche wir gerade erwähnten, verwandeln sich dann, wie Bateman sagt, in „spherical wave transformations". *Es sind dies genau die Transformationen der Lieschen Kugelgeometrie.* Unter ihnen ist die G_{10} der Lorentztransformationen dadurch ausgezeichnet, daß sie Ebenen in Ebenen verwandelt.

Offenbar schließen sich diese Entwicklungen auf das innigste mit denjenigen zusammen, die Lie und ich 1871 gegeben haben und wegen deren ich hier insbesondere auf Nr. VIII der vorliegenden Gesamtausgabe (Über Liniengeometrie und metrische Geometrie) verweisen darf.

Für die Physik hat diese G_{15} allerdings nicht dieselbe Bedeutung wie ihre Untergruppe, die G_{10} der Lorentzgruppe. Es liegt dies daran, daß nur letztere eine Verallgemeinerung der G_{10} der klassischen Mechanik ist (in die sie übergeht, wenn man die Lichtgeschwindigkeit unendlich setzt), eine allgemeine Physik aber ebensowohl die Mechanik wie die Elektrodynamik umfassen muß. Einstein drückte dieses Sachverhältnis mir gegenüber gelegentlich so aus: Die Transformation durch reziproke Radien wahrt zwar die Form der Maxwellschen Gleichungen, nicht aber den Zusammenhang zwischen Koordinaten und Maßergebnissen von Maßstäben und Uhren. K.]

[7]) Die einzelne Transformation dieser Art würde die Maxwellschen Gleichungen so umändern, wie ein Vorzeichenwechsel von t, oder, was auf dasselbe hinauskommt, der Übergang von einem Linkskoordinatensystem x, y, z, wie es Hertz benutzt, zu einem Rechtskoordinatensystem.

XXXI. Zu Hilberts erster Note über die Grundlagen der Physik[1]).

[Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. (1917.) Vorgelegt in der Sitzung vom 25. Januar 1918.]

I. Aus einem Briefe von F. Klein an D. Hilbert.

... Indem ich Ihre Note sorgfältig studierte, bemerkte ich, daß man die Zwischenrechnungen, die Sie anstellen, durch Benutzung des gewöhnlichen Lagrangeschen Variationsansatzes wesentlich abkürzen kann und im Zusammenhang damit genauere Einsicht in die Bedeutung des Erhaltungssatzes gewinnt, den Sie für Ihren Energievektor aufstellen. Bei der folgenden Darstellung meiner Überlegungen schließe ich mich möglichst an Ihre Bezeichnungsweise an, nur daß ich der Konsequenz halber die Weltparameter w durch *obere* Indizes unterscheide:

$$w^{I}, w^{II}, \ldots, w^{IV}$$

und unbestimmte Indizes durchweg durch griechische Buchstaben bezeichne. Dadurch erleichtere ich den Vergleich mit den parallellaufenden Einsteinschen Entwicklungen, über die ich gleichfalls einige Bemerkungen zu machen habe.

1. Ich beginne gleich damit, nach S. 404 Ihrer Note die beiden Integrale einzuführen, die ich I_1 und I_2 nenne:

$$I_1 = \int K\,d\omega, \quad I_2 = \int L\,d\omega, \tag{1}$$

unter $d\omega$ das invariante Raumelement

$$d\omega = \sqrt{g} \cdot dw^{I} \ldots dw^{IV}$$

verstanden. Hier ist K die fundamentale Ortsinvariante des zugrunde gelegten ds^2, die sich unter Benutzung Riemannscher Vierindizessymbole so schreibt:

$$K = \sum_{\mu,\nu,\varrho,\sigma} (\mu\nu, \varrho\sigma)(g^{\mu\varrho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\varrho}), \tag{2}$$

für L aber will ich, da es mir nicht auf Allgemeinheit der physikalischen

[1]) Göttinger Nachrichten, Math.-phys. Klasse, (1915), S. 395—407 (Mitteilung vom 20. November 1915).

Voraussetzungen ankommt, den einfachsten nach S. 407 Ihrer Note zulässigen Wert schreiben:

$$(3)\qquad L = \alpha Q = -\alpha \sum_{\mu,\nu,\varrho,\sigma} (q_{\mu\nu} - q_{\nu\mu})(q_{\varrho\sigma} - q_{\sigma\varrho})(g^{\mu\varrho} g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma} g^{\nu\varrho}).$$

Dabei ist α, gemäß den **Einsteinschen** Auffassungen, gleich der mit $\frac{8\pi}{c^2}$ multiplizierten Gravitationskonstanten zu nehmen, also in den bei den Physikern gebräuchlichen Einheiten eine sehr kleine Zahl:

$$-\alpha = 1{,}87 \cdot 10^{-27};$$

ich führe diesen Zahlenwert ausdrücklich an, damit man sieht, daß die alte **Maxwellsche** Theorie des von Elektronen freien Raumes, welche $\alpha = 0$ setzt und von K überhaupt nicht spricht, als eine für die gewöhnlichen Messungen zureichende Annäherung an die hier zu besprechenden neuen Ansätze aufgefaßt werden kann. Vgl. weiter unten Nr. 5.

2. Ich bilde nun zunächst rein formal die Variationen der Integrale I_1, I_2, welche einer beliebigen Abänderung der $g^{\mu\nu}$, q_ϱ um $\delta g^{\mu\nu}$, δq_ϱ entsprechen[2]), und schreibe sie abkürzend so:

$$(4\text{a})\qquad \delta I_1 = \int \sum_{\mu,\nu} K_{\mu\nu}\, \delta g^{\mu\nu}\, d\omega$$

$$(4\text{b})\qquad \delta I_2 = \alpha \int \Big(\sum_{\mu,\nu} Q_{\mu\nu}\, \delta g^{\mu\nu} + \sum_{\varrho} Q^{\varrho}\, \delta q_\varrho \Big)\, d\omega.$$

Hier bezeichnen die $K_{\mu\nu}$, $Q_{\mu\nu}$ die wohlbekannten zu den Produkten $dw^\mu\, dw^\nu$ kontragredienten Tensoren:

$$(5\text{a})\qquad K_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial \sqrt{g}\, K}{\partial g^{\mu\nu}} - \sum_{\varrho} \frac{\partial \left(\frac{\partial \sqrt{g}\, K}{\partial g_{\varrho}^{\mu\nu}} \right)}{\partial w^{\varrho}} + \sum_{\varrho,\sigma} \frac{\partial^2 \left(\frac{\partial \sqrt{g}\, K}{\partial g_{\varrho\sigma}^{\mu\nu}} \right)}{\partial w^{\varrho}\, \partial w^{\sigma}} \right) : \sqrt{g},$$

$$(5\text{b})\qquad Q_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial \sqrt{g}\, Q}{\partial g^{\mu\nu}} \right) : \sqrt{g},$$

die Q^ϱ aber den zu den dw^ϱ kogredienten Vektor:

$$(6)\qquad Q^{\varrho} = -\left(\sum_{\sigma} \frac{\partial \left(\frac{\partial \sqrt{g}\, Q}{\partial q_{\varrho\sigma}} \right)}{\partial w^{\sigma}} \right) : \sqrt{g}.$$

Die Gleichungen

$$(7)\qquad Q^{\varrho} = 0$$

*sind, in den Koordinaten w geschrieben, die unseren physikalischen Voraussetzungen entsprechenden **Maxwellschen** Gleichungen; andererseits*

[2]) [Wir machen hier die Voraussetzung, daß $\delta g^{\mu\nu}$, $\delta g_{\varrho}^{\mu\nu}$ und δq_ϱ am Rande des Integrationsgebietes verschwinden.]

sind die $Q_{\mu\nu}$, wie Sie auf S. 407 Ihrer Note bemerken, die Energiekomponenten des elektromagnetischen Feldes.

3. Noch will ich, der Deutlichkeit halber, gleich vorab zwischen der *skalaren Divergenz* eines „Vektors p^ϱ“ und der *vektoriellen Divergenz* eines „Tensors $t_{\mu\nu}$“ unterscheiden. In unseren allgemeinen Koordinaten w^ν drückt sich erstere bekanntlich durch die Summe aus:

$$(8)\qquad \sum_{\nu} \frac{\partial (\sqrt{g}\, p^{\nu})}{\partial w^{\nu}} : \sqrt{g},$$

die letztere aber wird etwas komplizierter; ihre vier Komponenten lauten:

$$(9)\qquad \Big(\sum_{\mu,\nu} \frac{\partial (\sqrt{g}\, t_{\mu\sigma}\, g^{\mu\nu})}{\partial w^{\nu}} + \frac{1}{2} \sqrt{g} \sum_{\mu,\nu} t_{\mu\nu}\, g_{\sigma}^{\mu\nu} \Big) : \sqrt{g}$$

für $\sigma = 1, 2, 3, 4$.

4. Ich entwickle nun gleich *die vier einfachen partiellen Differentialgleichungen*, denen I_1 bzw. I_2 (weil beide Invarianten bei beliebigen Transformationen der w sind) genügen. Zu diesem Zwecke bestimmt man natürlich, wie dies insbesondere **Lie** in seinen zahlreichen einschlägigen Veröffentlichungen getan hat, die formellen Änderungen, welche sich bei einer beliebigen infinitesimalen Transformation

$$(10)\qquad \delta w^{I} = p^{I},\ \ldots,\ \delta w^{IV} = p^{IV}$$

ergeben (unter p^σ einen infinitesimalen Vektor verstanden, dessen höhere Potenzen vernachlässigt werden dürfen). — Sie haben dies für das Integral I_1 auf S. 398—400 Ihrer Note in der Weise ausgeführt, daß Sie zunächst die verhältnismäßig komplizierten Änderungen von K in Betracht zogen, um von da durch Integration zur Änderung des I_1 aufzusteigen. Meine ganze Vereinfachung der Überlegung besteht darin, daß ich an die Formel (4a) anknüpfe, d. h. die Änderung des I_1 direkt aus der **Lagrangeschen** Ableitung berechne. *Die Änderung von I_1 muß Null sein, wenn ich (in 4a) für die $\delta g^{\mu\nu}$ diejenigen Werte einsetze, welche der infinitesimalen Transformation (10) entsprechen.* Da die $g^{\mu\nu}$ den $dw^\mu\, dw^\nu$ kogredient sind, findet man als solche einfach

$$(11)\qquad \delta g^{\mu\nu} = \sum_{\sigma} (g_{\sigma}^{\mu\nu}\, p^{\sigma} - g^{\mu\sigma}\, p_{\sigma}^{\nu} - g^{\nu\sigma}\, p_{\sigma}^{\mu})\text{[3]}).$$

Wir haben also [indem wir die p^σ am Rande gleich Null setzen]:

$$\int \sum_{\mu,\nu} K_{\mu\nu} \Big(\sum_{\sigma} g_{\sigma}^{\mu\nu}\, p^{\sigma} - \sum_{\sigma} g^{\mu\sigma}\, p_{\sigma}^{\nu} - \sum_{\sigma} g^{\nu\sigma}\, p_{\sigma}^{\mu} \Big)\, d\omega \doteq 0.$$

Hier gestalten wir die Glieder mit p_{σ}^{ν}, p_{σ}^{μ} in bekannter Weise durch partielle Integration um, wobei wir die sonst willkürlichen p^σ noch der

[3]) [Dies wird in § 1 der folgenden Abh. XXXII noch genauer erläutert.]

Bedingung unterwerfen, an den Grenzen der Integration verschwindende erste und zweite Differentialquotienten zu haben. Wir bekommen dann

$$\int \sum_{\sigma} p^{\sigma}\left(\sqrt{g}\sum_{\mu,\nu} K_{\mu\nu}\, g_{\sigma}^{\mu\nu} + 2\sum_{\mu,\nu}\frac{\partial\left(\sqrt{g}\, K_{\mu\sigma}\, g^{\mu\nu}\right)}{\partial w^{\nu}}\right) d\,w^{I}\ldots d\,w^{IV} = 0$$

und hieraus, wegen der Willkür der p^{σ}, *die vier für den Tensor* $K_{\mu\nu}$ *geltenden, auch von Ihnen (bzw. Einstein) aufgestellten Differentialgleichungen:*

$$\sqrt{g}\sum_{\mu,\nu} K_{\mu\nu}\, g_{\sigma}^{\mu\nu} + 2\sum_{\mu,\nu}\frac{\partial\left(\sqrt{g}\, K_{\mu\sigma}\, g^{\mu\nu}\right)}{\partial w^{\nu}} = 0 \qquad (\sigma = 1, 2, 3, 4). \tag{12}$$

die wir offenbar dahin interpretieren können, daß wir sagen: *die vektorielle Divergenz des Tensors* $K_{\mu\nu}$ *verschwindet.*

Genau so wird man das Integral I_2 behandeln können. Neben die Inkremente (11) der $g^{\mu\nu}$ treten dann nur noch folgende Inkremente der q_{ϱ}[4]):

$$\delta\, q_{\varrho} = \sum_{\sigma}\left(q_{\varrho\sigma}\, p^{\sigma} + q_{\sigma}\, p_{\varrho}^{\sigma}\right). \tag{13}$$

Wir bekommen so folgende vier Differentialgleichungen für die $Q_{\mu\nu}$, Q^{ϱ}:

$$\sum_{\mu,\nu}\left(\sqrt{g}\, Q_{\mu\nu}\, g_{\sigma}^{\mu\nu} + 2\frac{\partial\left(\sqrt{g}\, Q_{\mu\sigma}\, g^{\mu\nu}\right)}{\partial w^{\nu}}\right) + \sum_{\varrho}\left(\sqrt{g}\, Q^{\varrho}\, q_{\varrho\sigma} - \frac{\partial\left(\sqrt{g}\, Q^{\varrho} q_{\sigma}\right)}{\partial w^{\varrho}}\right) = 0, \tag{14}$$

für $\sigma = 1, 2, 3, 4$.

Es ist wohl unnötig, sie noch besonders in Worte zu fassen. Wohl aber verlohnt es sich, einer Umgestaltung zu gedenken, die sie wegen der besonderen Form unseres Q gestatten (und die mutatis mutandis an verschiedenen Stellen Ihrer Note ebenfalls auftritt). Q hängt nur von den Differenzen $q_{\varrho\sigma} - q_{\sigma\varrho}$ ab und hat daher, wie ein Blick auf (6) zeigt, eine verschwindende skalare Divergenz:

$$\sum_{\varrho}\frac{\partial\left(\sqrt{g}\, Q^{\varrho}\right)}{\partial w^{\varrho}} = 0\,.$$

Infolge dessen können wir die Differentialgleichungen (14) *in die andere Gestalt setzen:*

$$\sum_{\mu,\nu}\left(\sqrt{g}\, Q_{\mu\nu}\, g_{\sigma}^{\mu\nu} + 2\frac{\partial\left(\sqrt{g}\, Q_{\mu\sigma}\, g^{\mu\nu}\right)}{\partial w^{\nu}}\right) + \sum_{\varrho}\left(\sqrt{g}\, Q^{\varrho}\left(q_{\varrho\sigma} - q_{\sigma\varrho}\right)\right) = 0, \tag{14'}$$

für $\sigma = 1, 2, 3, 4$.

5. Jetzt erst führe ich die Grundannahme der Einsteinschen Theorie

[4]) Meine $\delta\, g^{\mu\nu}$ (11) und $\delta\, q_{\varrho}$ (13) sind nichts anderes, als die von Ihnen auf S. 398 Ihrer Note mit $p^{\mu\nu}$ bzw. p_{ϱ} bezeichneten Größen.

ein, am liebsten natürlich in der von Ihnen in Ihrer Note gewählten Form, die sich hier dahin ausspricht, *daß die Variation*

$$\delta\, I_1 + \delta\, I_2 = 0 \tag{15}$$

sein soll, für beliebige $\delta\, g^{\mu\nu}$, δq_{ϱ}.

Dies gibt gemäß (4a), (4b) die bekannten 14 „*Feldgleichungen*“, nämlich die zehn Gleichungen:

$$K_{\mu\nu} + \alpha\, Q_{\mu\nu} = 0 \tag{16a}$$

und die vier Gleichungen

$$Q^{\varrho} = 0\,. \tag{16b}$$

Sie bemerken in Ihrer Note, daß zwischen diesen 14 Gleichungen vier Abhängigkeiten bestehen müssen, und zeigen auf S. 406 durch besondere Rechnung, welcher Zusammenhang zwischen den vier Gleichungen (16b) — den Maxwellschen Gleichungen — und den zehn Gleichungen (16a) besteht. Dies ist bei mir natürlich in den Formeln der vorigen Nummer bereits mit enthalten. In der Tat braucht man nur die Gleichungen (14′) mit α multipliziert zu den Gleichungen (12) zu addieren, um unmittelbar abzulesen, daß aus den Gleichungen (16a) das Verschwinden der Q^{ϱ} folgt.

Zugleich ergibt sich völlig klar, was über den Charakter der alten Maxwellschen Theorie als einen Grenzfall der neuen Theorie gesagt wurde. Wenn wir die alte Maxwellsche Theorie in beliebigen krummlinigen Koordinaten $w^{I}\cdots w^{IV}$ behandeln, haben wir es doch immer mit einem ds^2 zu tun, dessen Riemannsches Krümmungsmaß identisch verschwindet, für welches also auch die $K_{\mu\nu}$ schlechtweg Null sind. Andererseits werde $\alpha = 0$ genommen. *Damit sind die zehn Gleichungen* (16a) *von selbst erfüllt; die Energiekomponenten* $Q_{\mu\nu}$ *des elektromagnetischen Feldes unterliegen von da aus keiner Bindung mehr.* Es bleiben nur mehr die vier Gleichungen (16b); d. h. eben die Maxwellschen Gleichungen, bestehen. Als eine Folge derselben haben die $Q_{\mu\nu}$ gemäß (14) eine verschwindende vektorielle Divergenz.

Natürlich haben vor Einstein wir andern die krummlinigen Koordinaten w in der Physik nur so eingeführt, daß wir die drei Raumkoordinaten beliebig transformierten, das t aber wesentlich ungeändert ließen. Das t gleichberechtigt mit in die Koordinatentransformation einzubeziehen, erscheint als die eine große Leistung von Einstein. Die andere ist dann selbstverständlich die, daß der Gravitation Rechnung getragen werden kann, indem an die Stelle des ds^2 von verschwindendem Riemannschen Krümmungsmaße ein allgemeineres ds^2 gesetzt wird. — Andererseits war, um auch dies zu betonen, das mathematische Rüstzeug zur Bearbeitung dieser neuen physikalischen Gedanken längst bereit gestellt, da uns Räume von beliebig vielen Dimensionen mit beliebigem Bogenelement doch seit Riemann geläufig sind. Es ist hier nicht der Ort, einen historischen Exkurs einzuschalten, der mit den Methoden von Lagranges Mécanique analytique beginnen müßte; es wären sonst außer den immer genannten Arbeiten Christoffels namentlich diejenigen von Beltrami und Lipschitz zu besprechen.

6. Ich will jetzt, ohne die Feldgleichungen (16) zu benutzen, die Gleichungen (12), (14) zusammen addieren, nachdem ich letztere mit α multipliziert habe. Dies gibt für $\sigma = 1, 2, 3, 4$ die Identitäten:

$$\sum_{\mu,\nu} \sqrt{g}\,(K_{\mu\nu} + \alpha Q_{\mu\nu})\, g^{\mu\nu}_{\sigma} + \sum_{\varrho} \alpha \sqrt{g}\, Q^{\varrho} q_{\varrho\sigma} = -2 \sum_{\mu,\nu} \frac{\partial \left[\sqrt{g}\,(K_{\mu\sigma} + \alpha Q_{\mu\sigma})\, g^{\mu\nu} - \frac{\alpha}{2} \sqrt{g}\, Q^{\nu} q_{\sigma}\right]}{\partial w^{\nu}}. \tag{17}$$

Diese Gleichungen multipliziere ich mit p^{σ} (unter p^{σ} einen beliebigen zu den dw^{σ} kogredienten Vektor verstanden) und summiere nach σ. Hier kann ich rechter Hand die p^{σ} mit unter die Differentiationszeichen hineinnehmen, indem ich linker Hand entsprechende Ergänzungsterme hinzusetze. Dabei will ich linker Hand die Buchstabenbezeichnungen σ und ν vertauschen, auch statt $2\,g^{\mu\nu} p^{\nu}_{\sigma}$ das, im Zusammenhange dieser Überlegungen gleichbedeutende, symmetrische $g^{\mu\sigma} p^{\nu}_{\sigma} + g^{\nu\sigma} p^{\mu}_{\sigma}$ setzen. Solcherweise entsteht:

$$\begin{aligned} \sum_{\mu,\nu,\sigma} \sqrt{g}\,(K_{\mu\nu} + \alpha Q_{\mu\nu})\,(g^{\mu\nu}_{\sigma} p^{\sigma} - g^{\mu\sigma} p^{\nu}_{\sigma} - g^{\nu\sigma} p^{\mu}_{\sigma}) \\ + \sum_{\varrho,\sigma} \alpha \sqrt{g}\, Q^{\varrho} (q_{\varrho\sigma} p^{\sigma} + q_{\sigma} p^{\sigma}_{\varrho}) \\ = -2 \sum_{\mu,\nu,\sigma} \frac{\partial \left\{ \left[\sqrt{g}\,(K_{\mu\sigma} + \alpha Q_{\mu\sigma})\, g^{\mu\nu} - \frac{\alpha}{2} \sqrt{g}\, Q^{\nu} q_{\sigma}\right] p^{\sigma} \right\}}{\partial w^{\nu}}, \end{aligned} \tag{18}$$

was natürlich nur eine andere Schreibweise der (17) ist. In Anbetracht des besonderen Wertes, den ich für Ihr H von vornherein angenommen habe ($H = K + \alpha Q$), steht hier nun linker Hand genau, was Sie als Wert der mit $\sqrt{g}$ multiplizierten skalaren Divergenz Ihres *Energievektors* e^{ν} angeben (S. 402 Ihrer Note), also

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \sqrt{g}\, e^{\nu}}{\partial w^{\nu}}.$$

Es folgt, *daß Ihr Energievektor* e^{ν} *von*

$$-2 \sum_{\mu,\sigma} \left((K_{\mu\sigma} + \alpha Q_{\mu\sigma})\, g^{\mu\nu} + \frac{\alpha}{2} Q^{\nu} q_{\sigma} \right) p^{\sigma}$$

nur um einen Term verschieden ist, dessen skalare Divergenz identisch verschwindet.

Nehmen wir jetzt die 14 Feldgleichungen (16a), (16b) hinzu, so reduziert sich e^{ν} auf diesen Zusatzterm und die Angabe S. 402 Ihrer Note, daß

$$\sum_{\nu} \frac{\partial \sqrt{g}\, e^{\nu}}{\partial w^{\nu}} = 0 \tag{19}$$

statthat, erscheint als eine identische Aussage. Besagte Angabe kann also wohl nicht als Analogie zum Erhaltungssatze der Energie, wie er in der gewöhnlichen Mechanik herrscht, angesehen werden. Denn wenn wir in letzterer schreiben:

$$\frac{d(T+U)}{dt} = 0,$$

so besteht diese Differentialbeziehung doch nicht identisch, sondern erst infolge der Differentialgleichungen der Mechanik.

7. Natürlich wäre es erwünscht, den Zusatzterm, um den sich Ihr e^{ν} von den infolge der Feldgleichungen verschwindenden Gliedern unterscheidet, explizite anzugeben. Ich finde aber Ihre Formeln so kompliziert, daß ich die Nachrechnung nicht unternommen habe. Nur das scheint klar, daß er Bestandteile umfaßt, die in den p^{σ} linear sind, andere, welche die p^{σ}_{μ}, und vielleicht noch solche, welche die $p^{\sigma}_{\mu\nu}$ linear enthalten. Es kann eigentlich nicht schwer sein, die allgemeinsten Vektoren dieser Bauart anzugeben, deren skalare Divergenz identisch verschwindet. Man erhält überhaupt Vektoren X^{ν} verschwindender Divergenz, indem man von irgendeinem Sechsertensor (einem schief symmetrischen Tensor) $\lambda^{\mu\nu}$ ausgeht und

$$\sqrt{g}\, X^{\nu} = \sum_{\mu} \frac{\partial \lambda^{\mu\nu}}{\partial w^{\mu}} \tag{20}$$

setzt. Will man Linearität der X^{ν} in den p^{σ} und den p^{σ}_{μ} haben, so kann man beispielsweise wählen

$$\lambda^{\mu\nu} = \left(\left(\sum g^{\mu\varrho} q_{\varrho}\right) p^{\nu} - \left(\sum_{\varrho} g^{\nu\varrho} q_{\varrho}\right) p^{\mu} \right). \tag{21}$$

8. Hier habe ich eine wesentliche Einschaltung zu machen. Sie wissen, daß mich Frl. Nöther bei meinen Arbeiten fortgesetzt berät und daß ich eigentlich nur durch sie in die vorliegende Materie eingedrungen bin. Als ich nun Frl. Nöther letzthin von meinem Ergebnis betr. Ihren Energievektor sprach, konnte sie mir mitteilen, daß sie dasselbe aus den Entwicklungen Ihrer Note (also nicht aus den vereinfachten Rechnungen meiner Nr. 4) schon vor Jahresfrist abgeleitet und damals in einem Manuskript festgelegt habe (in welches ich dann Einsicht nahm); sie hatte es nur nicht mit solcher Entschiedenheit zur Geltung gebracht, wie ich kürzlich in der Mathematischen Gesellschaft (22. Januar).

9. Zum Schluß will ich noch darauf aufmerksam machen, daß für die „Erhaltungssätze", wie sie Einstein 1916 formuliert hat[5]), selbstverständlich das gleiche gilt, wie für Ihren Satz (19). Er spricht es eigentlich selbst völlig klar aus. Ich will hier nicht auf die Einzelheiten seiner Rechnung eingehen, sondern nur an sein Schlußresultat anknüpfen, das er so schreibt:

$$(22) \qquad \sum_{\nu} \frac{\partial}{\partial w^{\nu}} (\mathfrak{T}_{\sigma}^{\nu} + \mathfrak{t}_{\sigma}^{\nu}) = 0, \qquad (\sigma = 1, 2, 3, 4),$$

wo er die $\mathfrak{T}_{\sigma}^{\nu}$ und die $\mathfrak{t}_{\sigma}^{\nu}$ als die „gemischten" Energiekomponenten des elektromagnetischen, bzw. des Gravitationsfeldes bezeichnet. Dabei gibt er an, daß sich diese $\mathfrak{T}_{\sigma}^{\nu} + \mathfrak{t}_{\sigma}^{\nu}$ unter Zuziehung der Feldgleichungen vermöge einer von ihm näher definierten, vom Koordinatensystem abhängigen Funktion $\mathfrak{G}^*$ so ausdrücken lassen:

$$(23) \qquad \mathfrak{T}_{\sigma}^{\nu} + \mathfrak{t}_{\sigma}^{\nu} = - \sum_{\mu, \varrho} \left(\frac{\partial}{\partial w^{\varrho}} \left(\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g_{\varrho}^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu} \right) \right),$$

und daß für dieses $\mathfrak{G}^*$ unabhängig von dem Werte des σ die *identische* Gleichung besteht:

$$(24) \qquad \sum_{\mu, \nu, \varrho} \frac{\partial^2}{\partial w^{\nu} \partial w^{\varrho}} \left(\frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g_{\varrho}^{\mu\sigma}} g^{\mu\nu} \right) = 0.$$

Das ist genau, worauf es hier ankommt.

Um den Zusammenhang mit der von mir benutzten Bezeichnung herzustellen, bemerke ich, daß Einsteins $\mathfrak{T}_{\sigma}^{\nu}$ dasselbe sind, wie meine $\sum_{\mu} \sqrt{g}\, Q_{\mu\sigma} g^{\mu\nu}$, Einsteins $\mathfrak{t}_{\sigma}^{\nu}$ aber von den entsprechenden $\frac{1}{\alpha} \sum_{\mu} \sqrt{g}\, K_{\mu\sigma} g^{\mu\nu}$ um einen Summanden abweichen, der sich ergibt, wenn man die Gleichungen (23) mit den Feldgleichungen

$$K_{\mu\nu} + \alpha Q_{\mu\nu} = 0$$

vergleicht.

II. Aus der Antwort von D. Hilbert.

. . . Mit Ihren Ausführungen über den Energiesatz stimme ich sachlich völlig überein: Emmy Nöther, deren Hilfe ich zur Klärung derartiger analytischer meinen Energiesatz betreffenden Fragen vor mehr als Jahresfrist anrief, fand damals, daß die von mir aufgestellten Energiekomponenten — ebenso wie die Einsteinschen — formal mittels der Lagrangeschen Differentialgleichungen (4), (5) in meiner ersten Mitteilung in Ausdrücke verwandelt werden können, deren Divergenz *identisch*, d. h. ohne Benutzung der Lagrangeschen Gleichungen (4), (5) verschwindet. Da andererseits die Energiegleichungen der klassischen Mechanik, der Elastizitätstheorie und Elektrodynamik nur als Folge der Lagrangeschen Differentialgleichungen des Problems erfüllt sind, so ist es gerechtfertigt, wenn Sie deswegen in meinen Energiegleichungen nicht das Analogon zu denen jener Theorien erblicken. Freilich behaupte ich dann, daß für die *allgemeine* Relativität, d. h. im Falle der *allgemeinen* Invarianz der Hamiltonschen Funktion, Energiegleichungen, die in Ihrem Sinne den Energiegleichungen der orthogonalinvarianten Theorien entsprechen, überhaupt nicht existieren; ja ich möchte diesen Umstand sogar als ein charakteristisches Merkmal der allgemeinen Relativitätstheorie bezeichnen. Für meine Behauptung wäre der mathematische Beweis erbringbar.

[5]) Vgl. die selbständig erschienene Schrift: Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie (Leipzig 1916) sowie namentlich die Mitteilung an die Berliner Akademie vom 29. Okt. 1916 „Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie" (Sitzungsberichte, S. 1111—1116).

Gestatten Sie mir bei dieser Gelegenheit kurz auszuführen, wie ich in meiner Vorlesung des letzten Winters die Frage nach den Energiegleichungen der orthogonalinvarianten Theorien der Physik (Elektrodynamik, Hydrodynamik und Elastizitätstheorie) behandelt habe.

Nehmen wir der Kürze wegen die Weltfunktion H als orthogonale Invariante an, die nur von den Komponenten eines elektrodynamischen Viererpotentials q_s und deren ersten Ableitungen q_{sl} nach w_k $(s, l = 1, 2, 3, 4)$ abhängt — die Methoden gelten in gleicher Weise, wenn H etwa die Viererdichte r und deren Ableitungen oder noch andere physikalische Parameter nebst Ableitungen enthält —: alsdann führt das Hamiltonsche Prinzip

$$(1) \qquad \delta \int H\, d\omega = 0$$

zu dem System der vier Lagrangeschen Differentialgleichungen

$$(2) \qquad [H]_s = 0, \qquad (s = 1, 2, 3, 4),$$

wo allgemein

$$[H]_s = \frac{\partial H}{\partial q_s} - \sum_{k} \frac{\partial}{\partial w_k} \frac{\partial H}{\partial q_{sk}}$$

bedeutet.

Um zu den Energiegleichungen dieses Problems zu gelangen, schlagen wir den Weg ein, den die Darlegungen meiner ersten Mitteilung weisen, nämlich den Weg über die Gravitationstheorie. Es sei $\overline{H}$ diejenige allgemeine Invariante mit den Argumenten

$$q_s,\ q_{sl},\ g^{\mu\nu},\ g_l^{\mu\nu},$$

die für

$$(3) \qquad g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}, \qquad g_l^{\mu\nu} = 0$$

in H übergeht; dieselbe verschaffen wir uns, indem wir in H an Stelle von q_{sl} die kovarianten Ableitungen

$$\bar{q}_{sl} = q_{sl} - \sum_{h} \left\{ \begin{matrix} sl \\ h \end{matrix} \right\} q_h$$

einsetzen und zugleich die Faltung mit den $g^{\mu\nu}$ vornehmen. Enthält beispielsweise H als Term den orthogonalinvarianten Ausdruck

$$(4) \qquad -Q = \sum_{m,n} (q_{mn} - q_{nm})^2 = \tfrac{1}{4} \sum_{m,n} M_{mn}^2,$$

so ist dieser durch

$$-\bar{Q} = \tfrac{1}{4} \sum_{m,n,k,l} M_{mn} M_{kl} g^{mk} g^{nl}$$

zu ersetzen. Der Ausdruck

$$T = \sum_{s,h} q_{sh}^2$$

ist in

$$\bar{T} = \sum_{s,h,m,n} \bar{q}_{sh} \bar{q}_{mn} g^{sm} g^{hn}$$

umzuwandeln usf.

Nun gilt für jede allgemeine Invariante eine Identität, die in meiner ersten Mitteilung (Theorem III) zwar nur für den Fall bewiesen worden ist, daß die Invariante von den $g^{\mu\nu}$ und deren Ableitungen abhängt; aber das eingeschlagene Beweisverfahren gilt auch für unsere allgemeine Invariante $\bar{H}$. Unter Verwendung der Bezeichnungen meiner ersten Mitteilung bekommen wir an Stelle der dortigen Gleichung

$$\int P_g (J \sqrt{g})\, d\omega = 0$$

nunmehr in unserem Falle die Gleichung

$$\int \{ P_g (\bar{H} \sqrt{g}) + P_q (\bar{H} \sqrt{g}) \}\, d\omega \equiv \int \{ P (\bar{H} \sqrt{g}) \}\, d\omega = 0,$$

eine Identität, die unmittelbar

$$\int \Big\{ \sum_{\mu,\nu} [\sqrt{g} \bar{H}]_{\mu\nu} p^{\mu\nu} + \sum_{\mu} [\sqrt{g} \bar{H}]_{\mu} p_{\mu} \Big\}\, d\omega = 0$$

zur Folge hat. Nach Einführung von $p^{\mu\nu}$, p_μ und Anwendung der partiellen Integration können wir das Integral linker Hand auf eine Gestalt bringen, in der der Integrand mit p^s multipliziert ist; da aber p^s ein willkürlicher Vektor ist, so muß der andere Faktor unter dem Integralzeichen identisch Null sein, und hieraus ergeben sich die Identitäten ($s = 1, 2, 3, 4$):

$$(5) \qquad \sum_{\mu,\nu} [\sqrt{g} \bar{H}]_{\mu\nu} g_s^{\mu\nu} - 2 \sum_{m} \frac{\partial}{\partial w_m} \Big\{ \sum_{\mu} [\sqrt{g} \bar{H}]_{\mu s} g^{\mu m} \Big\}$$
$$+ \sum_{\mu} [\sqrt{g} \bar{H}]_{\mu} q_{\mu s} - \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial w_\mu} ([\sqrt{g} \bar{H}]_{\mu} q_s) = 0 \text{ [6]}.$$

[6]) [Vgl. hierzu meine Formel (14), die mit dieser Term für Term übereinstimmt. K.]

Diese vier Identitäten sind zugleich — genau wie Sie oben bemerkt haben — diejenigen, deren Existenz in dem von mir aufgestellten Theorem I zwischen den 14 Lagrangeschen Gleichungen unseres Problems behauptet wird.

Kehren wir nunmehr zum ursprünglichen Problem (1) zurück, indem wir vermöge (3) die Gravitationspotentiale beseitigen, und berücksichtigen die Lagrangeschen Differentialgleichungen (2), so gehen die Identitäten (5) über in

$$(6) \qquad \sum_{m} \frac{\partial}{\partial w_m} \{ [\sqrt{g} \bar{H}]_{ms} \}_{g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}} = 0.$$

Bezeichnen wir demnach die Klammerausdrücke

$$(7) \qquad \varepsilon_{ms} = 2 \{ [\sqrt{g} \bar{H}]_{ms} \}_{g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}}$$

als die *Komponenten des Energietensors*, so erhalten wir in den Divergenzgleichungen (6) die gewünschten Energiegleichungen des physikalischen Problems (1).

Nehmen wir insbesondere für H die Invariante Q in (4), so werden ε_{ms} die Komponenten des bekannten elektromagnetischen Energietensors, und wegen der Maxwellschen Gleichungen

$$\{ [\sqrt{g} \bar{H}]_{m} \}_{g_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}} = \mathrm{Div}_m M = r_m$$

— unter r die elektrische Viererdichte verstanden — ergeben in diesem Falle unsere Identitäten (5)

$$\mathrm{Div}_s \varepsilon - \sum_{m} r_m q_{ms} + \sum_{m} \frac{\partial}{\partial w_m} (r_m q_s) = 0$$

oder wegen $\mathrm{Div}_s\, r = 0$:

$$\mathrm{Div}_s \varepsilon = - r_s \cdot M,$$

d. h. sie liefern den bekannten Divergenzausdruck für die ponderomotorische Kraft.

Nur für den Fall der allgemeinen Relativität, d. h. wenn schon die ursprüngliche Invariante H eine allgemeine Invariante ist, versagt der angegebene Weg zur Herstellung von Energiegleichungen für das Problem (1). In der allgemeinen Relativitätstheorie haben wir als Ersatz für die fehlenden Energiegleichungen in Ihrem Sinne eben die Tatsache der vierfachen Überzähligkeit der Lagrangeschen Gleichungen (Theorem I meiner ersten Mitteilung), wie sie oben in den vier Identitäten (5) zum Ausdruck kommt. Umgekehrt erscheinen die Energiesätze der orthogonalinvarianten Theorien als das Residuum jener vier Identitäten der Gravitationstheorie.

Es sei noch bemerkt, daß der Energietensor (7) nicht nur, wie man sofort sieht, die Eigenschaften der orthogonalen Invarianz und der Symmetrie besitzt, sondern darüber hinaus jedesmal die Erfordernisse der speziellen physikalischen Theorie erfüllt: so wird derselbe im Falle der Elektrodynamik, wo H die q_{sl} nur in den Verbindungen

$$M_{ks} = q_{sk} - q_{ks}$$

enthält, ebenfalls nur von diesen Komponenten des Sechservektors M, und andererseits im Falle der Elastizitätstheorie auch nur von den eigentlichen Verzerrungsgrößen abhängig, wie sie in den Fragen über Elastizität auftreten. ...

III. Aus einem weiteren Schreiben von F. Klein.

... Es liegt mir daran, den Unterschied zwischen der orthogonal-invarianten Theorie der Elektrodynamik und der die Schwerkraft mit berücksichtigenden auch meinerseits noch durch einige Worte zu kennzeichnen.

In dieser Hinsicht schafft besondere Klarheit, wenn man, wie ich das schon oben (Nr. 5) andeutete, als Zwischenglied die Behandlung der klassischen Elektrodynamik in beliebigen („krummlinigen") Weltkoordinaten einschaltet.

Ihr Hauptsatz, daß sich die Energiekomponenten des elektrodynamischen Feldes einfach durch die $Q_{\mu\nu}$ darstellen, tritt dann bereits in seiner ganzen Bedeutung in den Vordergrund; ich würde also vorziehen, bei diesem Satz sich nicht schon auf die moderne Gravitationstheorie zu berufen.

Auch finde ich es nützlich, die Integrale $\int K d\omega$ und $\int Q d\omega$ bei der Darstellung auseinanderzuhalten und nicht von vornherein zu einem Integral $\int H d\omega$ zu verschmelzen.

Wir haben dann für die $K_{\mu\nu}$ und die $Q_{\mu\nu}$ je *vier* Identitäten [die Gleichungen (12) und (14) — oder (14') — meines ersten Briefes], im ganzen also *acht*, und der Gegensatz der früheren und der heutigen Theorie läßt sich dann folgendermaßen in präzise Sätze formen:

1. Beidemal haben wir für den hier in Betracht kommenden Vergleich neben den acht Identitäten 14 „Feldgleichungen".
2. Diese lauten in der früheren Theorie

$$\text{a)}\quad K_{\mu\nu} = 0^{7)}, \qquad \text{b)}\quad Q^{\varrho} = 0.$$

Vermöge der zehn Gleichungen a) sind die vier Identitäten (12) von selbst erfüllt, die Identitäten (14) — oder (14') — aber reduzieren sich vermöge der vier Gleichungen b) auf die vier Aussagen, welche man die vier Erhaltungssätze (Impuls-Energiesätze) nennt.

3. Dafür hat man in der neuen Theorie die Feldgleichungen

$$\text{a')}\quad K_{\mu\nu} + \alpha Q_{\mu\nu} = 0, \quad \text{mit } \alpha \neq 0, \qquad \text{b')}\quad Q^{\varrho} = 0.$$

Jetzt erscheinen die Gleichungen $Q^{\varrho} = 0$ vermöge der acht Identitäten als eine Folge der zehn Gleichungen a').

Aus den Identitäten (14) folgen, wenn man die Q^{ϱ} wegstreicht, nach wie vor „Erhaltungssätze" für die $Q_{\mu\nu}$. Aber diese haben jetzt keine selbständige (physikalische) Bedeutung mehr, weil sie sich vermöge der zehn Gleichungen a') auf die vier Identitäten (12) reduzieren; sie sind eben schon in den zehn Feldgleichungen mit enthalten.

Alles dieses ist sachlich in voller Übereinstimmung mit den Darlegungen Ihres Briefes. Es würde mich aber sehr interessieren, die Ausführung des mathematischen Beweises zu sehen, den Sie am Ende des ersten Absatzes Ihrer Antwort in Aussicht stellen. . . . .

7) [Als Folge der 20 Gleichungen, welche das identische Verschwinden des Riemannschen Krümmungsmaßes aussagen. K.]

[Besagte Ausführung ist inzwischen von Frl. E. Nöther geliefert worden, siehe deren Note über „Invariante Variationsprobleme" in den Göttinger Nachrichten vom 26. Juli 1918. Ich komme hierauf am Schluß von XXXII zurück.

Im übrigen möchte ich, um die Beziehungen der Aufsätze XXXI bis XXXIII zum Erlanger Programm klar hervortreten zu lassen, hier noch folgende Bemerkungen anschließen:

1. Die Invariantentheorie der in XXX behandelten Lorentzgruppe ist genau das, was die modernen Physiker als „spezielle Relativitätstheorie" bezeichnen.

2. Dabei läßt sich die Lorentzgruppe ersichtlich als größte kontinuierliche Schar der allgemeinsten für endliche Werte der x, y, z, t stetigen Transformationen definieren, welche die quadratische Differentialform

$$ds^2 = dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}$$

in sich überführen.

3. Man denke sich nun statt der $x\,y\,z\,t$ irgendwelche reelle, im Endlichen überall stetige, hinreichend oft differentiierbare, eindeutig umkehrbare Funktionen

$$w^{\varrho} = \varphi^{\varrho}(x, y, z, t) \qquad (\varrho = 1, 2, 3, 4)$$

eingeführt. Hierdurch möge das gerade hingeschriebene ds^2 in eine allgemeinere quadratische Form der dw übergehen, die wir gleich in Einsteinscher Weise als

$$ds^2 = \sum g_{\mu\nu}\, dw^{\mu}\, dw^{\nu}$$

schreiben wollen.

4. Dieses neue ds^2 hat natürlich wie das unter 2. angegebene den Trägheitscharakter $+ - - -$. Seine Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ sind stetige, hinreichend oft differentiierbare reelle Funktionen der w, die nur dadurch partikularisiert sind, daß das für ds^2 gebildete Riemannsche Krümmungsmaß identisch verschwindet.

5. Nach den Grundsätzen des Erlanger Programms können wir nun die spezielle Relativitätstheorie auch in der Weise behandeln, daß wir die Gesamtgruppe aller reellen, stetigen, hinreichend oft differentiierbaren, eindeutig umkehrbaren Transformationen der w^{ϱ} zugrunde legen, dabei aber das ds^2 von 3. *adjungieren*, d. h. die Umänderungen hinzunehmen, welche die $g_{\mu\nu}$ bei den jeweiligen Transformationen der w erleiden. Man erhält dabei eindeutig bestimmte lineare Transformationen der $g_{\mu\nu}$, da die Relationen, an die die $g_{\mu\nu}$ als Koeffizienten einer Form von verschwindendem Krümmungsmaß gebunden sind, zu hohen Charakter haben, um dabei von Einfluß zu sein. Außerdem will beachtet sein, daß nicht nur die Substitutionskoeffizienten, sondern auch die $g_{\mu\nu}$ selbst Funktionen der $x\,y\,z\,t$ bzw. der w^{ϱ} sind. Von hier aus ergeben sich dann die Umänderungen, welche die Differentialquotienten der $g_{\mu\nu}$ bei der jeweiligen Transformation erfahren. Die durch alle diese Formeln „erweiterte" Gruppe ist fernerhin der Betrachtung zugrunde zu legen.

6. Tun wir dies, so haben wir einen entscheidenden Schritt auf die „allgemeine Relativitätstheorie" zu getan. Ein weiterer Schritt wird sein, daß wir als Koeffizienten $g_{\mu\nu}$ des ds^2 die allgemeinsten für reelle w überall reellen, stetigen, hinreichend oft differentiierbaren Funktionen der w einführen. Das Riemannsche Krümmungsmaß und die aus ihm abzuleitende, von Hilbert mit K bezeichnete Invariante sind dann nicht mehr identisch Null.

Im übrigen wird man die „Gruppe" so wählen, wie gerade unter 5. angegeben. —

Nebenbei erhebt sich auch die Frage nach dem Zusammenhang der Welt als Ganzes, analog wie bei den auf den Fall der Geometrie der Ebene bezüglichen Betrachtungen der Abh. XXI. Diese Frage scheint noch wenig bearbeitet zu sein. Bestimmte dabei vorliegende Möglichkeiten treten in Abh. XXXIII hervor. Bei der speziellen Relativitätstheorie, bei der wir, um alle Weltpunkte zu erhalten, $x\,y\,z\,t$ kurzweg von $-\infty$ bis $+\infty$ laufen lassen, fällt die ganze Frage natürlich weg.

7. Die allgemeine Relativitätstheorie des reinen Schwerefeldes ergibt sich hieraus nach Einsteins grundlegendem Ansatz (der von Einstein und Hilbert fast gleichzeitig exakt formuliert wurde[8])), indem man die $g_{\mu\nu}$ den zehn, in ihrer Gesamtheit der in Rede stehenden Gruppe gegenüber invarianten Gleichungen $K_{\mu\nu} = 0$ unterwirft (ich gebrauche hier der Kürze halber die Bezeichnung (5a) meiner eigenen Note).

8. Wir mögen nun neben der Gravitation irgendwelche weitere physikalische Erscheinungen in Betracht ziehen, oder vielmehr, wir mögen, wie es im vorstehenden Texte im Anschluß an Hilberts erste Note geschieht, uns neben der Gravitation auf die elektromagnetischen Vorgänge im leeren Raume beschränken.

9. Man wird diese am einfachsten berücksichtigen, auch im Falle der speziellen Relativitätstheorie (was in Abh. XXX leider nicht zum Ausdruck kommt), wenn man neben unser ds^2 noch die Linearform

$$\sum q_{\varrho}\, dw^{\varrho}$$

[8]) Einstein „Zur allgemeinen Relativitätstheorie" in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie vom 11. und 25. Nov. 1915 (S. 799 bis 801 bez. S. 844 bis 847 des Jahrgangs), Hilbert in seiner (vorstehend kommentierten) ersten Note über die „Grundlagen der Physik" in den Göttinger Nachrichten vom 20. Nov. 1915. Von einer Prioritätsfrage kann dabei keine Rede sein, weil beide Autoren ganz verschiedene Gedankengänge verfolgen (und zwar so, daß die Verträglichkeit der Resultate zunächst nicht einmal sicher schien). Einstein geht *induktiv* vor und denkt gleich an beliebige materielle Systeme. Hilbert *deduziert*, indem er übrigens die im Texte unter 8. genannte Beschränkung auf Elektrodynamik eintreten läßt, aus voraufgestellten obersten Variationsprinzipien. Hilbert hat dabei insbesondere auch an Mie angeknüpft. — Erst in seiner oben (S. 560) genannten Mitteilung an die Berliner Akademie vom 29. Okt. 1916 stellte Einstein die Verbindung der beiderlei Ansätze her.

stellt, wo die reellen, überall stetigen, hinreichend oft differentiierbaren Funktionen q_{ϱ} das sogenannte Viererpotential des elektromagnetischen Feldes vorstellen.

10. Die zugrunde zu legende Gruppe erweitert sich nun gegenüber 5. dadurch, daß neben die Transformationen der $g_{\mu\nu}$ und ihrer Differentialquotienten, die durch die Transformationen der w veranlaßt („induziert") werden, jetzt noch diejenigen der q_{ϱ} und ihrer Differentialquotienten treten.

11. Die $g_{\mu\nu}$, q_{ϱ} aber sind nunmehr den 14, gegenüber der erweiterten Gruppe wieder invarianten, Gleichungen (16a), (16b) des Textes:

$$K_{\mu\nu} + \alpha\, Q_{\mu\nu} = 0, \qquad Q^{\varrho} = 0$$

zu unterwerfen. Dies ist in Verbindung mit 10. der Kern der allgemeinen Relativitätstheorie der Physik, soweit sie hier in Betracht kommt. —

Diese Formulierungen drücken selbstverständlich nur in anderer Sprache aus, was bei Einstein und Hilbert ohnehin gesagt ist. Ich möchte hier insbesondere auf Hilberts zweite Mitteilung über die Grundlagen der Physik (in den Göttinger Nachrichten 1917, S. 53—76) verweisen[9]). Hier wird auf S. 61 ausdrücklich ausgeführt, daß nur solche aus den Differentialgleichungen 11. zu ziehenden Folgerungen einen *physikalischen Sinn* haben, welche, gleich den Differentialgleichungen selbst (NB. gegenüber der unter 10. definierten Gruppe) *invarianten Charakter* besitzen. Das ist mutatis mutandis genau dasselbe, was im Erlanger Programm von den Aussagen irgendwelcher (durch eine Gruppe willkürlich zu charakterisierenden) Geometrie verlangt wird.

Es braucht wohl kaum gesagt zu werden, daß ebenso auch die Weiterbildung der Einsteinschen Theorie, wie sie Weyl gegeben hat, mit dem Schema des Erlanger Programms in Zusammenhang gebracht werden kann.

Es ist sogar besonders nahe Beziehung zu Einzelausführungen dort (Note VI der Abh. XXVII, S. 491—492) vorhanden, insofern dort nicht eine Form ds^2, sondern eine Gleichung $ds^2 = 0$ zugrunde gelegt ist. K.]

[9]) Vorgelegt am 23. Dez. 1916.

XXXII. Über die Differentialgesetze für die Erhaltung von Impuls und Energie in der Einsteinschen Gravitationstheorie.

[Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. (1918.) Vorgelegt in der Sitzung vom 19. Juli 1918[1]).]

Durch Fortsetzung der Untersuchungen, die ich der Gesellschaft der Wissenschaften am 25. Januar dieses Jahres vorlegte[2]), ist es mir gelungen, die verschiedenen Formen der Differentialgesetze für die Erhaltung von Impuls und Energie, wie sie, für die Einsteinsche Gravitationstheorie, von verschiedenen Autoren aufgestellt worden sind[3]), von einem einheitlichen Gesichtspunkte aus abzuleiten und dadurch, wenn ich nicht irre, in deren Bedeutung und wechselseitige Beziehung eine wesentlich verbesserte Einsicht zu gewinnen. Ich habe, wie man sehen wird, bei der im folgenden zu gebenden Darstellung eigentlich überhaupt nicht mehr zu rechnen, sondern nur von den elementarsten Formeln der klassischen Variationsrechnung sinngemäßen Gebrauch zu machen.

Der Kürze wegen knüpfe ich hier gleich, auch in der Bezeichnung, an meine vorige Note an. Als eigentlichen Grund des nunmehrigen Fort-

[1]) Das Manuskript hat erst Mitte September dieses Jahres seine endgültige Form erhalten.

[2]) Siehe das Schlußheft des Jahrgangs 1917 dieser Nachrichten: „Zu Hilberts erster Note über die Grundlagen der Physik". [Abh. XXXI dieser Ausgabe.]

[3]) Von Einstein kommen hier in erster Linie in Betracht die zusammenfassende Schrift von 1916: „Die Grundlagen der allgemeinen Relativitätstheorie" (Leipzig) und die Mitteilung an die Berliner Akademie „Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie" (Sitzungsbericht vom 26. Oktober 1916), von Hilbert die bereits genannte Note (Göttinger Nachrichten vom 20. November 1915), von Lorentz die vier Artikel, die er auf Grund einer von März bis Juni 1916 in Leiden gehaltenen Vorlesung im Verslag der Amsterdamer Akademie veröffentlicht hat — „over Einsteins theorie der zwaartekracht" —, siehe insbesondere Art. III vom April bzw. September 1916 und Art. IV vom Oktober 1916 bzw. Mai 1917. Ich nenne hier ferner gleich das neuerdings erschienene Buch von Weyl „Raum — Zeit — Materie" (Berlin 1918), auf welches ich mich weiterhin ebenfalls zu beziehen habe. [Weyls Buch liegt bereits in dritter Auflage vor; im Texte wird immer die erste Auflage zitiert.]

schritts kann ich dann nennen, daß ich die damals betrachtete infinitesimale Transformation

$$\delta w^\tau = p^\tau \tag{1}$$

nicht mehr der Beschränkung unterwerfe, an der Grenze des Integrationsgebietes in geeigneter Weise (nämlich mit ihren nach den w genommenen ersten und zweiten Differentialquotienten p^τ_ϱ, $p^\tau_{\varrho\sigma}$) zu verschwinden. Dadurch stellen sich bei den in Betracht kommenden Integralen Randbestandteile ein, deren nähere Untersuchung alles Weitere liefert. — Für den bestimmten, hier ins Auge gefaßten Zweck genügt es dabei, nur das erste der beiden früher betrachteten Integrale zu betrachten:

$$I_1 = \iiiint K\, d\omega. \tag{2}$$

Die Betrachtung gliedert sich des weiteren zweckmäßigerweise so, daß ich K zunächst nur als irgendeine Funktion der $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}_\varrho$, $g^{\mu\nu}_{\varrho\sigma}$ ansehe, dann als eine (ebenfalls noch nicht näher bestimmte) Invariante gegenüber beliebigen Transformationen der Weltparameter w, und erst zum Schluß als eine Invariante bestimmter Bauart.

Indem ich solcherweise (1) auf (2) anwende, entstehen eine Reihe von Differentialbeziehungen, denen K identisch genügt. Nun erst wende ich mich zur Physik, wobei ich mich nicht mehr, wie das vorige Mal, auf den Fall des freien elektromagnetischen Feldes beschränke, sondern gleich ein beliebiges „materielles" Feld voraussetze. Wenn man den Hilbertschen Ansatz mit dem von Einstein kombiniert, kann man die zugehörigen zehn Feldgleichungen der Gravitation bekanntlich in der einfachen Form schreiben[4]):

$$K_{\mu\nu} - \varkappa T_{\mu\nu} = 0^{5)}, \tag{3}$$

unter $K_{\mu\nu}$ die durch $\sqrt{g}$ dividierte, zu I_1 gehörige Lagrangesche Ableitung nach den $g^{\mu\nu}$, unter $T_{\mu\nu}$ die Energiekomponenten der Materie verstanden. *Der Übergang zu den verschiedenen Formen der Erhaltungssätze ergibt sich dann einfach nach dem Prinzip, daß man in die für das K abgeleiteten Identitäten je nach Belieben $\varkappa T_{\mu\nu}$ für $K_{\mu\nu}$ einsetzt.*

[4]) Siehe z. B. Herglotz in den Sächsischen Berichten 1916, S. 202, Formel (16). — Der Genauigkeit halber vermerke ich noch, daß die Konstante $\varkappa$ (die ich in meiner vorigen Note an Hilbert anknüpfend $-\alpha$ nannte), nur dann den dort von mir benutzten Wert

$$\varkappa = 1{,}87 \cdot 10^{-27} \cdot \mathrm{cm}^{+1}\,\mathrm{gr}^{-1}$$

hat, wenn das zugrunde gelegte ds^2 der Dimension und dem Vorzeichen nach mit dem $d\tau^2$ der speziellen Relativitätstheorie:

$$d\tau^2 = dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2} \sim \mathrm{sek}^2$$

übereinstimmt.

[5]) [Beim Wiederabdruck wurde hier und im folgenden das Vorzeichen von $T_{\mu\nu}$, $\mathfrak{T}_{\mu\nu}$, T^σ_τ, $\mathfrak{T}^\sigma_\tau$, t^σ_τ, $\mathfrak{t}^\sigma_\tau$ umgedreht, um mit den in der Physik üblichen Bezeichnungen in Übereinstimmung zu kommen. Zum Beispiel ist T_{44} alsdann positiv. K.]

§ 1.

Infinitesimale Transformation der $g^{\mu\nu}$.

Um dem Leser alle Hilfsmittel der Kontrolle an die Hand zu geben, schicke ich hier die kleine Zwischenrechnung voraus, welche die $\delta g^{\mu\nu}$ bestimmt, die der infinitesimalen Transformation (1) der w entsprechen.

Ich schreibe statt (1) zunächst

$$\overline{w}^{\mu} = w^{\mu} + p^{\mu}$$

(wo mit dem „Hilfsvektor“ p und seinen Differentialquotienten p_{ϱ}, $p_{\varrho\sigma}$ weiterhin so zu rechnen sein wird, daß man alle Glieder höherer Ordnung gegen die linearen vernachlässigt). Wir haben dann:

$$d\overline{w}^{\mu} = d w^{\mu} + \sum p^{\mu}_{\tau}\, d w^{\tau}.$$

Nun sind die $g^{\mu\nu}$ nach ihrer Definition den Produkten $dw^{\mu}\,dw^{\nu}$ kogredient. Daher kommt:

$$\overline{g}^{\mu\nu}(\overline{w}) = g^{\mu\nu}(w) + \sum g^{\mu\tau}(w)\, p^{\nu}_{\tau} + \sum g^{\nu\tau}(w)\, p^{\mu}_{\tau}.$$

Aber

$$g^{\mu\nu}(\overline{w}) = \overline{g}^{\mu\nu}(w) + \sum g^{\mu\nu}_{\tau}(w)\cdot p^{\tau}.$$

Es ist nun die Differenz $g^{\mu\nu}(w) - \overline{g}^{\mu\nu}(w)$, die ich in meiner vorigen Note $\delta g^{\mu\nu}$ genannt habe und die ich jetzt in Anlehnung an die Hilbertsche Note mit $p^{\mu\nu}$ bezeichnen werde. Danach ist:

$$\delta g^{\mu\nu} = p^{\mu\nu} = \sum_{\tau} (g^{\mu\nu}_{\tau} p^{\tau} - g^{\mu\tau} p^{\nu}_{\tau} - g^{\nu\tau} p^{\mu}_{\tau}). \tag{4}$$

Die Differentialquotienten der $p^{\mu\nu}$ nach den w werden weiterhin, wie bei Hilbert, mit $p^{\mu\nu}_{\varrho}$, $p^{\mu\nu}_{\varrho\sigma}$ bezeichnet.

Ich notiere noch den Wert, den $p^{\mu\nu}$ in dem später besonders in Betracht kommenden Falle konstanter p^{τ} erhält (wo ich dann $\underset{0}{p}^{\mu\nu}$, bzw. $\underset{0}{p}^{\tau}$ schreibe):

$$\underset{0}{p}^{\mu\nu} = \sum_{\tau} g^{\mu\nu}_{\tau}\, \underset{0}{p}^{\tau}. \tag{5}$$

Es ist in diesem Falle also so, als ob die $g^{\mu\nu}$ fest vorgegebene Funktionen der w [Skalare] wären (nicht eine durch die jeweilige Transformation der w induzierte Substitution erlitten).

§ 2.

Berechnung von δI_1 unter der alleinigen Voraussetzung, daß K eine Funktion der $g^{\mu\nu}$, $g^{\mu\nu}_{\varrho}$, $g^{\mu\nu}_{\varrho\sigma}$ ist. — Ein Hauptsatz.

Gemeint ist, daß K nicht noch explizite von den w abhängt. — Wir haben dann für unsere infinitesimale Transformation [welche sich sowohl auf die abhängigen, wie unabhängigen Variabeln des Integrals I_1 erstreckt] zunächst:

$$\delta I_1 = -\iiiint \sum_{\mu\nu} \left(\frac{\partial \sqrt{g}\,K}{\partial g^{\mu\nu}} p^{\mu\nu} + \sum_{\varrho} \frac{\partial \sqrt{g}\,K}{\partial g^{\mu\nu}_{\varrho}} p^{\mu\nu}_{\varrho} + \sum_{\varrho,\sigma} \frac{\partial \sqrt{g}\,K}{\partial g^{\mu\nu}_{\varrho\sigma}} p^{\mu\nu}_{\varrho\sigma} \right) dS$$
$$+ \iiint \sqrt{g}\, K\, (p^{I}\, dw^{II}\, dw^{III}\, dw^{IV} + \ldots + p^{IV}\, dw^{I}\, dw^{II}\, dw^{III}); \tag{6}$$

dS ist für $dw^{I}\,dw^{II}\,dw^{III}\,dw^{IV}$ geschrieben, das dreifache Integral in bekannter vektorieller Weise über den Rand des Integrationsgebietes von I_1 zu erstrecken[6]).

Hier werden wir nun die unter dem vierfachen Integral auftretenden Differentialquotienten $p^{\mu\nu}_{\varrho}$, $p^{\mu\nu}_{\varrho\sigma}$ nach dem alten Verfahren von Lagrange durch einmalige, bez. zweimalige partielle Integration fortschaffen, dann $p^{\mu\nu}$ durch seinen Wert (4) ersetzen und die dadurch hereinkommenden Differentialquotienten p^{ν}_{τ} und p^{μ}_{τ} durch eine vierte partielle Integration beseitigen. *Wir finden so:*

$$\delta I_1 = -\iiiint \sum_{\tau} \left(\sqrt{g} \sum_{\mu\nu} K_{\mu\nu}\, g^{\mu\nu}_{\tau} + 2 \sum_{\sigma} \frac{\partial \sqrt{g}\, K^{\sigma}_{\tau}}{\partial w^{\sigma}} \right) p^{\tau} \cdot dS$$
$$+ \iiint \sqrt{g}\, (\varepsilon^{I}\, dw^{II}\, dw^{III}\, dw^{IV} + \ldots + \varepsilon^{IV}\, dw^{I}\, dw^{II}\, dw^{III}), \tag{7}$$

wo folgende Abkürzungen eingeführt sind:

1. $K_{\mu\nu}$ ist die schon in (3) benutzte, durch $\sqrt{g}$ dividierte, Lagrangesche Ableitung:

$$K_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial \sqrt{g}\, K}{\partial g^{\mu\nu}} - \sum_{\varrho} \frac{\partial \left(\dfrac{\partial \sqrt{g}\, K}{\partial g^{\mu\nu}_{\varrho}} \right)}{\partial w^{\varrho}} + \sum_{\varrho\sigma} \frac{\partial^2 \left(\dfrac{\partial \sqrt{g}\, K}{\partial g^{\mu\nu}_{\varrho\sigma}} \right)}{\partial w^{\varrho}\, \partial w^{\sigma}} \right) : \sqrt{g}\,; \tag{8}$$

2. K^{σ}_{τ} die folgende lineare Kombination der $K_{\mu\nu}$:

$$K^{\sigma}_{\tau} = \sum_{\mu} K_{\mu\tau}\, g^{\mu\sigma}; \tag{9}$$

3. ε^{σ}, für $\sigma = 1, 2, 3, 4$, je ein fünfgliedriger Ausdruck, den ich vorab so schreibe (indem ich den Term, der von der vierten partiellen Integration herrührt, besonders hervorkehre):

$$\varepsilon^{\sigma} = \eta^{\sigma} + 2 \sum_{\tau} K^{\sigma}_{\tau}\, p^{\tau}. \tag{10}$$

Hier ist dann

4. η^{σ} noch ein viergliedriger Ausdruck:

$$\eta^{\sigma} = K p^{\sigma} - \sum_{\mu\nu} \frac{\partial K}{\partial g^{\mu\nu}_{\sigma}} p^{\mu\nu} - \sum_{\mu\nu\varrho} \frac{\partial K}{\partial g^{\mu\nu}_{\varrho\sigma}} p^{\mu\nu}_{\varrho} + \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\mu\nu\varrho} \frac{\partial \left(\dfrac{\partial \sqrt{g}\, K}{\partial g^{\mu\nu}_{\varrho\sigma}} \right)}{\partial w^{\varrho}} p^{\mu\nu}. \tag{11}$$

---

[6]) [Es ist ein wesentlicher Unterschied und zugleich Fortschritt gegen meine vorige Note, daß ich hier nichts über das Verhalten der p^{τ}, $p^{\mu\nu}$, $p^{\mu\nu}_{\varrho}$, $p^{\mu\nu}_{\varrho\sigma}$ am Rande des Integrationsgebietes voraussetze. K.]

Das in dem neuen Ausdruck (7) von δI_1 voranstehende vierfache Integral soll fortan, nach Weglassung des Minuszeichens, *das Integral A* genannt werden.

Ferner werden wir das in (7) auftretende dreifache Integral durch elementare Divergenzbildung in ein *zweites* vierfaches Integral verwandeln

$$\iiiint \left(\frac{\partial \sqrt{g}\, \varepsilon^{I}}{\partial w^{I}} + \ldots + \frac{\partial \sqrt{g}\, \varepsilon^{IV}}{\partial w^{IV}} \right) dS, \tag{12}$$

welches *das Integral B* genannt werden soll. Also

$$\delta I_1 = -A + B. \tag{13}$$

Hier bietet sich nun die wichtige Bemerkung, daß $A \equiv B$ wird, wenn wir die p^τ konstant, also $= \underset{0}{p}{}^\tau$, wählen.

In der Tat verschwindet dann der ursprüngliche Wert (6) von δI_1, *weil K die w nicht explizite enthält*, unter Benutzung der in (5) angegebenen Werte der $\underset{0}{p}{}^{\mu\nu}$ identisch.

Aus $A \equiv B$ aber schließen wir bei der vollen Willkür, die hinsichtlich der Wahl des Integrationsgebietes besteht, daß auch die Integranden von A und B übereinstimmen müssen. Wir haben

$$\sum_{\tau} \left(\sqrt{g} \sum_{\mu\nu} K_{\mu\nu}\, g_\tau^{\mu\nu} + 2 \sum_{\sigma} \frac{\partial \sqrt{g}\, K_\tau^\sigma}{\partial w^\sigma} \right) \underset{0}{p}{}^\tau \equiv \sum_{\sigma} \frac{\partial \sqrt{g}\, \underset{0}{\varepsilon}{}^\sigma}{\partial w^\sigma} \tag{14}$$

$$\equiv \sum_{\sigma} \frac{\partial \sqrt{g}\, \underset{0}{\eta}{}^\sigma}{\partial w^\sigma} + 2 \sum_{\sigma\tau} \frac{\partial \sqrt{g}\, K_\tau^\sigma}{\partial w^\sigma} \underset{0}{p}{}^\tau .$$

Diese Identität soll weiterhin der Hauptsatz heißen.

Wir können natürlich die Glieder mit K_τ^σ beiderseits wegheben. Wir wollen dann noch $\underset{0}{\eta}{}^\sigma$ folgendermaßen als Funktion der $\underset{0}{p}{}^\tau$ anschreiben:

$$\underset{0}{\eta}{}^\sigma = 2 \sum U_\tau^\sigma \underset{0}{p}{}^\tau \tag{15}$$

(wo wir rechter Hand die 2 zusetzen, weil es später angezeigt ist, durch eine 2 zu dividieren). Dabei ist (unter Benutzung der üblichen Bezeichnung δ_τ^σ für 1 oder 0, je nachdem $\sigma = \tau$ oder $\sigma \neq \tau$):

$$2 U_\tau^\sigma = K \delta_\tau^\sigma - \sum_{\mu\nu} \frac{\partial K}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}} g_\tau^{\mu\nu} - \sum_{\mu\nu\varrho} \frac{\partial K}{\partial g_{\varrho\sigma}^{\mu\nu}} g_{\varrho\tau}^{\mu\nu} + \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{\mu\nu\varrho} \frac{\partial \left(\frac{\partial \sqrt{g}\, K}{\partial g_{\varrho\sigma}^{\mu\nu}} \right)}{\partial w^\varrho} g_\tau^{\mu\nu}. \tag{16}$$

Der Hauptsatz aber nimmt folgende Form an:

$$\sum_{\mu\nu} \sqrt{g}\, K_{\mu\nu}\, g_\tau^{\mu\nu} \equiv 2 \sum_{\sigma} \frac{\partial \sqrt{g}\, U_\tau^\sigma}{\partial w^\sigma}, \quad \text{für } \tau = 1,\ 2,\ 3,\ 4. \tag{17}$$

Die auf der linken Seite stehenden Ausdrücke sind also in elementare Divergenzen umgeformt.

§ 3.

Vereinfachte Schreibweise der Formeln. — Eine Erweiterung des Hauptsatzes.

Ich habe im vorigen Paragraph die Schreibweise so gewählt, wie sie für ihre spätere invariantentheoretische Auswertung geeignet scheint und übrigens alter Gewöhnung entspricht. — Inzwischen läßt sich nach Einsteinschen Vorschlägen Vieles dabei abkürzen:

1. Es wird schon manches eingespart, wenn man das Produkt von $\sqrt{g}$ mit einer durch einen großen lateinischen Buchstaben bezeichneten Größe durch den entsprechenden deutschen Buchstaben ersetzt. Also: $\sqrt{g}\, K$ durch $\mathfrak{K}$, $\sqrt{g}\, K_{\mu\nu}$ durch $\mathfrak{K}_{\mu\nu}$, $\sqrt{g}\, K_\tau^\sigma$ durch $\mathfrak{K}_\tau^\sigma$, $\sqrt{g}\, U_\tau^\sigma$ durch $\mathfrak{U}_\tau^\sigma$. (Im Sinne dieser Verabredung wird es liegen, eine *elementare Divergenz* so zu schreiben:

$$\frac{\partial \mathfrak{W}^{I}}{\partial w^{I}} + \frac{\partial \mathfrak{W}^{II}}{\partial w^{II}} + \frac{\partial \mathfrak{W}^{III}}{\partial w^{III}} + \frac{\partial \mathfrak{W}^{IV}}{\partial w^{IV}} = \mathfrak{Div}. \tag{18}$$

Hier sollen fernerhin die $\mathfrak{W}^{I}, \ldots, \mathfrak{W}^{IV}$ nur von den $g^{\mu\nu}$, $g_\varrho^{\mu\nu}$ abhängen, so daß unsere $\mathfrak{Div}$ ein spezieller Fall der bisher betrachteten Funktionen $\mathfrak{K}$ ist.)

2. Ferner können bei den Summenzeichen die Summationsbuchstaben weggelassen werden, indem man bemerkt, daß immer nach denjenigen Indizes summiert wird, welche zweimal (einmal oben und einmal unten) vorkommen.

3. Endlich können aus demselben Grunde auch noch die Summenzeichen selbst weggelassen werden.

Wir werden von der so verabredeten Kurzschrift mehr oder minder Gebrauch machen, sobald es uns paßt. Die Formeln (17) z. B. schreiben sich dann so:

$$\mathfrak{K}_{\mu\nu}\, g_\tau^{\mu\nu} \equiv 2 \frac{\partial \mathfrak{U}_\tau^\sigma}{\partial w^\sigma}. \tag{19}$$

Im Zusammenhang damit gedenke ich gleich einer bemerkenswerten Verallgemeinerung der Formeln (17), bez. (19).

Für die soeben eingeführten Divergenzen ($\mathfrak{Div}$) werden in bekannter Weise die Lagrangeschen Ableitungen identisch verschwinden:

$$\mathfrak{Div}_{\mu\nu} \equiv 0. \tag{20}$$

Setzen wir also in (19) statt $\mathfrak{K}_{\mu\nu}$ die Lagrangeschen Ableitungen einer Funktion $\mathfrak{K}^*$, die mit $\mathfrak{K}$ durch eine Gleichung zusammenhängt:

$$\mathfrak{K}^* = \mathfrak{K} + \mathfrak{Div}, \tag{21}$$

so bleibt die linke Seite von (19) ungeändert, während auf der rechten Seite statt $\mathfrak{U}_\tau^\sigma$ eine neue Funktion $\mathfrak{U}^{*\sigma}_\tau$ auftritt. Wir haben dann

$$(22)\qquad \mathfrak{K}_{\mu\nu} g_\tau^{\mu\nu} \equiv 2\,\frac{\partial \mathfrak{U}^{*\sigma}_\tau}{\partial w^\sigma}.$$

Die Formel (19) *ist damit in bemerkenswerter Weise verallgemeinert.* (Natürlich unterscheiden sich die $\mathfrak{U}^{*\sigma}_\tau$ von den $\mathfrak{U}^\sigma_\tau$ bei festgehaltenem τ nur um Terme, deren elementare Divergenzen $\sum \frac{\partial}{\partial w^\sigma}$ identisch verschwinden.)

§ 4.

Invariantentheoretische Gesichtspunkte.

Wir werden jetzt — im Sinne der allgemeinen Relativitätstheorie — annehmen, daß K gegenüber der Gruppe aller Transformationen der w (die wir uns natürlich durch Hinzunahme der entsprechenden Umsetzungen der $g^{\mu\nu}$ „erweitert“ denken müssen) invariant sei.

Indem $d\omega$ von Hause aus eine Invariante ist, gilt dasselbe von dem Integrale I_1.

$K_{\mu\nu}$ erscheint als kontragredienter Tensor; der Komplex der 16 Größen K_τ^σ als gemischter Tensor.

Ferner werden wir (indem wir den Hilfsvektor p immer so transformiert denken, wie die dw) die ε^σ, η^σ als kogrediente Vektoren[7]) bezeichnen dürfen.

Wenn wir A nunmehr so schreiben:

$$(23)\qquad A = \iiiint \sum \left(\frac{\sqrt{g} \sum K_{\mu\nu} g_\tau^{\mu\nu} + 2 \sum \frac{\partial \sqrt{g}\, K_\tau^\sigma}{\partial w^\sigma}}{\sqrt{g}} \cdot p^\tau \right) d\omega,$$

erscheint das mit den verschiedenen p^τ multiplizierte Größensystem als kontragredienter Vektor (es ist, im Sinne meiner vorigen Note, die „vektorielle Divergenz“ des Tensors $K_{\mu\nu}$).

Entsprechend gewinnen wir aus B eine Invariante:

$$(24)\qquad \frac{1}{\sqrt{g}} \sum \frac{\partial \sqrt{g}\, \varepsilon^\sigma}{\partial w^\sigma};$$

wir werden sie (wieder im Sinne meiner vorigen Note) als „skalare Divergenz“ des (mit Hilfe des Vektors p gebildeten) Vektors ε bezeichnen.

Nicht minder werden die beiden Bestandteile von (24):

$$(25)\qquad \frac{1}{\sqrt{g}} \sum \frac{\partial \sqrt{g}\, \eta^\sigma}{\partial w^\sigma} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \sum \frac{\partial (\sqrt{g}\, K_\tau^\sigma p^\tau)}{\partial w^\sigma}$$

für sich genommen Invarianten sein.

7) [Daß ε^σ und η^σ kogrediente Vektoren sind, sieht man am einfachsten, wenn man ihre Ausdrücke (Formel (10) und (11)) mit den Formeln (8), (9) und (14) der ersten Mitteilung von Hilbert über die Grundlagen der Physik (l. c.) vergleicht. K.]

Wie aber ist es mit den U_τ^σ, die unter der Voraussetzung konstanter p^τ $(= \underset{0}{p}^\tau)$ abgeleitet waren?

Konstante p^τ bleiben nicht mehr bei beliebigen Transformationen der w, sondern nur noch bei den „affinen“ Transformationen:

$$\bar{w}^\varrho = a_1^\varrho \cdot w^I + \ldots + a_4^\varrho \cdot w^{IV} + c^\varrho$$

konstant. Man denke sich die $g^{\mu\nu}$ natürlich entsprechend (also linear mit konstanten Koeffizienten) transformiert. Wozu immer tritt, daß die einzelnen $g^{\mu\nu}$ Funktionen der w^ϱ sind.

Wir werden dann sagen dürfen:

U_τ^σ ist ein gemischter Tensor der so erweiterten affinen Gruppe.

Dies hindert nicht, daß nach unseren Gleichungen (14), (17) und der Schreibweise (23) der von den p^τ unabhängige Ausdruck

$$(26)\qquad \frac{2}{\sqrt{g}} \sum \frac{\partial (\sqrt{g}\, (U_\tau^\sigma + K_\tau^\sigma))}{\partial w^\sigma}$$

ein kontragredienter Vektor der *allgemeinen* Gruppe ist.

Es ist dies ein sehr merkwürdiges Sachverhältnis, welches für die später folgenden Ausführungen grundlegend ist.

Nimmt man noch nach (21) statt $\mathfrak{K}$ irgendein $\mathfrak{K}^*$ und fügt die Voraussetzung hinzu, daß die in (18) auftretenden $\mathfrak{W}^I \ldots \mathfrak{W}^{IV}$ gleich den mit $\sqrt{g}$ multiplizierten Komponenten eines Vektors $W^I \ldots W^{IV}$ der affinen Gruppe sein sollen:

$$(27)\qquad \mathfrak{W}^\sigma = \sqrt{g}\, W^\sigma,$$

so wird genau dasselbe Sachverhältnis wie bei (26) bei den allgemeineren Ausdrücken

$$(28)\qquad \frac{2}{\sqrt{g}} \sum \frac{\partial (\sqrt{g}\, (U_\tau^{*\sigma} + K_\tau^\sigma))}{\partial w^\sigma}$$

statthaben.

§ 5.

Identitäten, denen unser K als Invariante der allgemeinen Gruppe genügt.

Wir verfolgen jetzt den Gedanken: *Weil K eine Invariante unserer allgemeinen Gruppe ist, folgt, bei beliebigen Werten der p^τ:*

$$(29)\qquad \delta I_1 = \delta \iiiint K\, d\omega = 0.$$

(Umgekehrt, wenn bei beliebigen p^τ die Relation (29) statthat, wird I_1 und damit K eine Invariante der allgemeinen Gruppe sein. Denn alle endlichen Transformationen der w^τ setzen sich doch aus den infinitesimalen $\delta w^\tau = p^\tau$ zusammen.)

Wir erhalten damit aus den Formeln der §§ 2, 3 eine große Anzahl von Differentialbeziehungen, denen die Invariante K (die noch gar nicht individualisiert ist) identisch zu genügen hat.

1. Wir nehmen, wie in meiner vorigen Note, die p^τ so — ohne sonst ihre Willkür zu beschränken —, daß der Vektor ε^σ und damit das zugehörige Randintegral schlechthin wegfällt. Hierzu gehört offenbar, daß p^τ, $p^{\mu\nu}$ und $p_\varrho^{\mu\nu}$ entlang dem Rande verschwinden, d. h. das Nullsein von p^τ, p_ϱ^τ, $p_{\varrho\sigma}^\tau$. Dann kommt also gemäß (13) $A = 0$, d. h. bei beliebigem Integrationsgebiet und beliebiger Annahme der p^τ im Innern des Gebietes. Wir schließen gemäß (23), *daß die vektorielle Divergenz des Tensors* $K_{\mu\nu}$ *identisch Null sein muß.* In Formeln:

$$\text{(30)} \qquad \frac{\sqrt{g}\sum K_{\mu\nu}\, g_\tau^{\mu\nu} + 2\sum \frac{\partial \sqrt{g}\, K_\tau^\sigma}{\partial w^\sigma}}{\sqrt{g}} \equiv 0 \qquad (\text{für } \tau = 1, 2, 3, 4).$$

Es sind dies die Identitäten (12) meiner vorigen Note, die ich jetzt *die Identitäten A* nennen werde. — Man mache sich klar: da es sich um einen Vektor handelt, werden die linken Seiten von (30), aufgestellt für ein beliebiges Koordinatensystem, gleich wohlbekannten linearen Kombinationen ihrer ursprünglichen Werte sein. Das Verschwinden der transformierten Ausdrücke besagt also gar nichts anderes als das Verschwinden der ursprünglichen Ausdrücke.

2. Infolge der Identitäten (30) fällt jetzt das Integral A bei *beliebigen* p^τ weg. Also verschwindet gemäß (13), (29) immer auch das Integral B. Wieder überlegen wir, daß das Integrationsgebiet und der Vektor p^τ ganz beliebig angenommen werden können. Es folgt, daß der Integrand von B, d. h. die skalare Divergenz des Vektors ε; identisch Null sein muß:

$$\text{(31)} \qquad \frac{1}{\sqrt{g}} \sum \frac{\partial \sqrt{g}\, \varepsilon^\sigma}{\partial w^\sigma} \equiv 0,$$

oder, was dasselbe ist:

$$\text{(31')} \qquad \frac{1}{\sqrt{g}} \sum \frac{\partial \sqrt{g}\left(\eta^\sigma + 2\sum K_\tau^\sigma p^\tau\right)}{\partial w^\sigma} \equiv 0.$$

In dieser einen Formel (31) und (31′) sind bei der Willkür der p^τ noch sehr viele Einzelgleichungen enthalten. Man betrachte die Terme, welche aus $\sum K_\tau^\sigma p^\tau$ bei der Differentiation entstehen, und überlege, daß η^σ aus Gliedern aufgebaut ist, welche beziehungsweise die $p^{\mu\nu}$, $p_\varrho^{\mu\nu}$ linear enthalten, während die $p^{\mu\nu}$ selbst wieder linear in den p und ihren nach den w genommenen Differentialquotienten sind. Aber die η^σ werden in (31) bez. (31′) noch einmal nach den w^σ differentiiert. Wir schließen, daß die linken Seiten von (31) und (31′) homogen linear in den p^τ und ihren nach den w genommenen ersten, zweiten und dritten Differentialquotienten sind.

Da diese alle unabhängig voneinander angenommen werden können, haben wir im ganzen

$$4\left(1 + 4 + \frac{4\cdot 5}{1\cdot 2} + \frac{4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3}\right) = 140$$

Gleichungen. Ich werde diese die *Identitäten B* nennen.

Es verlohnt sich, diese 140 Gleichungen wenigstens schematisch anzusetzen. Ich werde mit der oben, in (15), eingeführten Bezeichnung nicht in Widerspruch sein, wenn ich schreibe:

$$\text{(32)} \qquad \eta^\sigma = 2\left(\sum U_\tau^\sigma p^\tau + \sum U_\tau^{\sigma,\sigma'} p_{\sigma'}^\tau + \sum U_\tau^{\sigma,\sigma'\sigma''} p_{\sigma'\sigma''}^\tau\right)$$

(je zu summieren über alle zweimal vorkommenden Indizes. Indizes, welche durch kein Komma getrennt sind, sind vertauschbar, nicht so die durch die Komma getrennten. Danach gibt es $16(1 + 4 + 10) = 240$ Größen U). — Die Gleichung (31′) wird sich nun, indem ich den voranstehenden Faktor $\frac{2}{\sqrt{g}}$ weglasse und für $\sqrt{g}\, U$ wieder $\mathfrak{U}$ schreibe, folgendermaßen zerlegen:

1. 4 Gleichungen, welche den Termen mit p^τ entsprechen:

$$\text{(33)} \qquad \sum\left(\mathfrak{U}_{\tau,\sigma}^\sigma + \mathfrak{K}_{\tau,\sigma}^\sigma\right) \equiv 0,$$

2. 16 Gleichungen, welche den Termen mit p_σ^τ entsprechen:

$$\text{(34)} \qquad \mathfrak{U}_\tau^\sigma + \mathfrak{K}_\tau^\sigma + \sum_{\sigma'} \mathfrak{U}_{\tau,\sigma'}^{\sigma',\sigma} \equiv 0,$$

3. 40 Gleichungen, welche den Termen mit $p_{\sigma'\sigma''}^\tau$ entsprechen:

$$\text{(35)} \qquad \mathfrak{U}_\tau^{\sigma',\sigma''} + \mathfrak{U}_\tau^{\sigma'',\sigma'} + \sum_\sigma \mathfrak{U}_{\tau,\sigma}^{\sigma,\sigma'\sigma''} \equiv 0,$$

4. 80 Gleichungen, welche den Termen mit $p_{\sigma\sigma'\sigma''}^\tau$ zugehören:

$$\text{(36)} \qquad \mathfrak{U}_\tau^{\sigma,\sigma'\sigma''} + \mathfrak{U}_\tau^{\sigma',\sigma''\sigma} + \mathfrak{U}_\tau^{\sigma'',\sigma\sigma'} \equiv 0.$$

Die Abhängigkeiten, die zwischen diesen 140 Gleichungen B bestehen mögen, habe ich nicht untersucht.

Im übrigen ergeben sich nun unmittelbar folgende Schlußfolgerungen:

a) Die Identitäten A (= (30)) und die B (= (33), (34), (35), (36)) ergeben zusammen die *hinreichenden* Bedingungen, daß eine Funktion K der $g^{\mu\nu}$, $g_\varrho^{\mu\nu}$, $g_{\varrho\sigma}^{\mu\nu}$ eine Invariante unserer allgemeinen Gruppe ist.

b) Aber die linken Seiten von (33), multipliziert mit $\frac{2}{\sqrt{g}}$, sind wegen des Hauptsatzes von § 2 mit den linken Seiten von (30) direkt identisch.

c) Also sind die B allein die hinreichenden Bedingungen für die Invarianz von K.

d) Die A allein aber sind es nicht. Denn die Gleichungen A werden auch bestehen, wenn man K durch $K^* = K + \text{Div}$ ersetzt, — allgemeiner, wenn K eine solche Funktion ist, die sich bei beliebiger Transformation der w immer um eine Divergenz vermehrt.

e) Daher sind die Identitäten B nicht etwa allgemein aus den A ableitbar.

Für uns gehören aber doch, mit Rücksicht auf die zu entwickelnden physikalischen Schlußfolgerungen, die A in die erste Reihe. So möge noch einmal der drei Formen gedacht werden, die sie nach dem Früheren annehmen können:

$$(37)\quad \begin{cases} \textit{Identitäten } A_\alpha\colon \dfrac{2}{\sqrt{g}} \sum \dfrac{\partial \mathfrak{K}_\tau^\sigma}{\partial w^\sigma} + \sum K_{\mu\nu}\, g_\tau^{\mu\nu} \equiv 0, \\ \textit{Identitäten } A_\beta\colon \dfrac{2}{\sqrt{g}} \sum \dfrac{\partial (\mathfrak{K}_\tau^\sigma + \mathfrak{U}_\tau^\sigma)}{\partial w^\sigma} \equiv 0, \qquad \text{für } \tau = 1, 2, 3, 4. \\ \textit{Identitäten } A_\gamma\colon \dfrac{2}{\sqrt{g}} \sum \dfrac{\partial (\mathfrak{K}_\tau^\sigma + \mathfrak{U}_\tau^{*\sigma})}{\partial w^\sigma} \equiv 0. \end{cases}$$

Ich habe dabei nur, was weiterhin zweckmäßig scheint, immer die Terme mit den $\mathfrak{K}_\tau^\sigma$ vorausgenommen und übrigens wieder solche Zahlenfaktoren zugefügt, daß linkerseits alleweil dieselben vier Vektorkomponenten stehen.

§ 6.
Übergang zu den Erhaltungssätzen.

Was ich im Verfolg des systematischen Gedankenganges jetzt noch über die besondere Bauart der Invariante K, wie sie der modernen Gravitationstheorie zugrunde liegt, zu sagen hätte, schließt sich so eng an Einsteins einschlägige Untersuchungen an, daß ich es lieber bis zum folgenden Paragraphen verschiebe und hier gleich den prinzipiellen Übergang zu den Differentialgesetzen der Erhaltung von Impuls und Energie und eine Übersicht über die verschiedenen Gestalten, in der diese Gesetze in der Literatur hervorgetreten sind, folgen lasse. Für das materielle Feld, mit dem wir uns jeweils beschäftigen, lauten bei unserer Bezeichnung die zehn Gravitationsgleichungen, wie ich schon in der Einleitung unter (3) bemerkte, besonders einfach. Ich werde hier gleich statt der lateinischen Buchstaben deutsche setzen und habe dann

$$(38)\qquad \mathfrak{K}_{\mu\nu} - \varkappa\, \mathfrak{T}_{\mu\nu} = 0.$$

Statt dessen kann ich natürlich auch die 16 Gleichungen schreiben:

$$(39)\qquad \mathfrak{K}_\tau^\sigma - \varkappa\, \mathfrak{T}_\tau^\sigma = 0.$$

Alles, was wir nun zu tun haben, ist, daß wir die hieraus folgenden Werte der $\mathfrak{K}_{\mu\nu}$ bez. der $\mathfrak{K}_\tau^\sigma$ in die für die Invariante K aufgestellten Identitäten einsetzen. Die Sache ist so einfach, daß ich die Ergebnisse gleich tabellarisch zusammenstellen und erläutern kann.

Ich beginne mit den Identitäten A_α bis A_γ (37):

1. Aus den A_α folgt durch Division mit $\frac{2\varkappa}{\sqrt{g}}$:

$$(40)\qquad \sum \frac{\partial \mathfrak{T}_\tau^\sigma}{\partial w^\sigma} + \frac{1}{2} \sum \mathfrak{T}_{\mu\nu}\, g_\tau^{\mu\nu} = 0.$$

Es sind dies die Erhaltungssätze für die Energiekomponenten des materiellen Feldes als solche, wie sie sich überall in der Literatur vorfinden.

2. Ich kann natürlich auch schreiben, was gewissermaßen neu ist:

$$(41)\qquad \sum \frac{\partial \mathfrak{T}_\tau^\sigma}{\partial w^\sigma} + \frac{1}{2\varkappa} \sum \mathfrak{K}_{\mu\nu}\, g_\tau^{\mu\nu} = 0.$$

3. Hiermit völlig gleichbedeutend ist es, wenn ich den A_β entnehme:

$$(42)\qquad \sum \frac{\partial \left(\mathfrak{T}_\tau^\sigma + \frac{1}{\varkappa}\mathfrak{U}_\tau^\sigma\right)}{\partial w^\sigma} = 0.$$

Dies sind dem Wesen nach die Erhaltungssätze, wie sie Lorentz in Teil III seiner eingangs genannten Artikelreihe aufgestellt hat, vgl. daselbst S. 482, Formel (79). (Die direkte Identifizierung ist nur insofern etwas weitläufig, als Lorentz das δI_1 zunächst nicht nach den $\delta g^{\mu\nu}$, sondern den $\delta g_{\mu\nu}$ geordnet hat; es kann aber an der Übereinstimmung nicht gezweifelt werden, weil er zu ihrer Gewinnung von derselben infinitesimalen Transformation $\delta w^\tau = p^\tau$ (mit konstantem p^τ) ausgeht, die uns zu den Identitäten A_β geführt hat[*])).

4. Endlich schreiben sich dieselben Relationen gemäß dem A_γ auch:

$$(43)\qquad \sum \frac{\partial \left(\mathfrak{T}_\tau^\sigma + \frac{1}{\varkappa}\mathfrak{U}_\tau^{*\sigma}\right)}{\partial w^\sigma} = 0.$$

Man hat das K^* (Formel (21)) und damit zusammenhängend die $\mathfrak{U}_\tau^{*\sigma}$ nur noch zweckmäßig zu partikularisieren, um die bekannten Einsteinschen Formeln zu erhalten:

$$(44)\qquad \sum \frac{\partial (\mathfrak{T}_\tau^\sigma + \mathfrak{t}_\tau^\sigma)}{\partial w^\sigma} = 0.$$

Das Nähere wird im folgenden Paragraphen noch darzulegen sein. Jedenfalls versteht man schon hier, daß die linken Seiten der Einsteinschen Relationen, multipliziert mit $\sqrt{g}$, ebenso Vektorkomponenten darstellen, wie die mit ihnen genau übereinstimmenden linken Seiten von (41), (42). Ich hebe das nur deshalb hervor, weil die Sachlage nicht überall klar erkannt zu sein scheint.

[*]) [In der Tat hat Herr Vermeil die Identität der beiderseitigen Resultate nachträglich durch direkte Rechnung bestätigt. K.]

Wir gehen nun zu der ursprünglichen Zusammenfassung (31), (31′) der Identitäten B zurück:

$$\left[\frac{1}{\sqrt{g}}\sum\frac{\partial\sqrt{g}\,\varepsilon^\sigma}{\partial w^\sigma}=\frac{1}{\sqrt{g}}\sum\frac{\partial\sqrt{g}\,(\eta^\sigma+2\sum K_\tau^\sigma p^\tau)}{\partial w^\sigma}\right]\equiv 0\,.$$

Indem wir hier für K_τ^σ den aus den Gravitationsgleichungen des Feldes folgenden Wert $\varkappa T_\tau^\sigma$ eintragen, tritt an Stelle des Vektors ε^σ ein neuer Vektor, der e^σ heißen mag:

$$e^\sigma=\eta^\sigma+2\varkappa\sum T_\tau^\sigma p^\tau\,. \tag{45}$$

Dieser neue Vektor ist nun, wie ich behaupte, *genau derjenige, den Hilbert in seiner Note — unter Beschränkung auf den elektromagnetischen Fall — als Energievektor bezeichnet hat* (so daß die Erhaltungssätze für Hilbert in die eine Gleichung

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\sum\frac{\partial\sqrt{g}\,e^\sigma}{\partial w^\sigma}=0 \tag{46}$$

zusammengefaßt sind).

Zum Beweise bemerke ich:

a) Was den von der „Materie" herrührenden Teil in (45), also den Term $2\varkappa\sum T_\tau^\sigma p^\tau$ angeht, so stimmt dieser, wenn ich nur $\varkappa$ in Anlehnung an Hilbert gleich 1 setze, nach gehöriger Umänderung der Bezeichnung mit den Angaben, welche Hilbert in Formel (19) seiner Note und in den sich anschließenden Sätzen macht, ohne weiteres.

b) Sodann, was den „Gravitationsteil", das η^σ, betrifft, so hat mir schon vor längerer Zeit Herr Freedericks die zunächst unübersichtlich erscheinenden Terme, wie sie Hilbert l. c. in den Formeln (8), (9) und (14) angibt, rechnerisch zusammengezogen und ist dabei genau auf den Ausdruck gekommen, den ich in (11) als η^σ eingeführt habe[9]).

Nun sieht die Formel (46), auch wenn ich den Faktor $\frac{2\varkappa}{\sqrt{g}}$ abtrenne, zunächst ganz anders aus als die Formeln (42), (43). Die Sachbeziehung aber ergibt sich ganz klar, wenn ich (46) nach dem Schema (33) bis (36) in 4 + 16 + 40 + 80 Gleichungen auseinanderziehe:

Die ersten vier Gleichungen werden lauten:

$$\sum(\mathfrak{U}_{\tau,\sigma}^\sigma+\varkappa\mathfrak{T}_{\tau,\sigma}^\sigma)=0\,, \tag{47}$$

stimmen also genau mit den Gleichungen (42) überein.

Die folgenden 16 Gleichungen werden lauten:

$$\mathfrak{U}_\tau^\sigma+\varkappa\mathfrak{T}_\tau^\sigma+\sum_{\sigma'}\mathfrak{U}_{\tau,\sigma'}^{\sigma';\sigma}=0\,. \tag{48}$$

[9]) [Offenbar hat Hilbert seine zunächst sehr kompliziert scheinende Darstellung von e^σ gewählt, um den Vektorcharakter dieser Größe von vornherein hervortreten zu lassen. K.]

Dies ist nur eine besondere Schreibweise der Feldgleichungen (39), denn $\mathfrak{U}_\tau^\sigma+\sum\mathfrak{U}_{\tau,\sigma'}^{\sigma';\sigma}$ ist nach (34) mit $-\mathfrak{K}_\tau^\sigma$ identisch.

Die dann noch verbleibenden 40 + 80 Gleichungen aber stimmen ohne weiteres mit den Identitäten (35), (36) überein; sie haben mit dem materiellen Felde, welches wir gerade betrachten, gar nichts zu tun.

Im Grunde reduziert sich also die Hilbertsche Aussage (46) auf die Erhaltungssätze (42); was dazutritt, sind ohnehin bekannte Gleichungen. Dafür hat die Aussage den Vorzug, daß sie nicht nur selbst etwas invariantentheoretisch Einfaches behauptet, sondern daß auch die in ihr auftretende Größe e^σ invariantentheoretisch kurz charakterisiert werden kann: *sie ist ein den Hilfsvektor p^τ enthaltender, im übrigen aber von den $T_{\mu\nu}$, den $K_{\mu\nu}$ und deren Differentialquotienten abhängender kogredienter Vektor.*

Mit den im vorliegenden Paragraphen gemachten expliziten Angaben über die verschiedenen Formen der Erhaltungssätze wird, wie man sieht, ergänzt, was in den Nummern (6) bis (8) meiner vorigen Note nur erst mehr unbestimmt ausgedrückt war.

§ 7.

Näheres über die Einsteinsche Formulierung der Erhaltungssätze.

Ich habe nun noch nachzutragen, wie man die von mir mit K^* bezeichnete Größe partikularisieren muß, um zu Einsteins Schlußformeln:

$$\sum\frac{\partial(\mathfrak{T}_\tau^\sigma+\mathfrak{t}_\tau^\sigma)}{\partial w^\sigma}=0 \tag{44}$$

zu kommen, auch noch einiges darüber zu sagen, welche Vereinfachung damit erzielt ist.

Ich beziehe mich dabei am liebsten auf Einsteins oben genannte Darstellung in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie vom Oktober 1916. Einstein geht dort davon aus, daß die Invariante K (die er G nennt) die zweiten Differentialquotienten der $g^{\mu\nu}$ nur linear enthält, multipliziert mit Funktionen der $g^{\mu\nu}$ selbst. Man kann daher besagte Differentialquotienten aus dem Integral $I_1=\iiiint K\,d\omega$ durch partielle Integration wegschaffen, also

$$K=G^*+\mathrm{Div} \tag{49}$$

setzen, wo G^* eine Funktion nur der ersten Differentialquotienten ist. Insbesondere gibt Einstein für G^* den Wert:

$$G^*=\sum_{\mu\nu\varrho\sigma}g^{\mu\nu}\{\Gamma_{\mu\varrho}^\sigma\Gamma_{\nu\sigma}^\varrho-\Gamma_{\mu\nu}^\varrho\Gamma_{\varrho\sigma}^\sigma\}\,^{10}), \tag{50}$$

[10]) [Beim Wiederabdruck wurde das Vorzeichen von $\dot{G}^*$ und $\mathfrak{G}^*$ hier und im folgenden umgeändert, entsprechend dem bei der ersten Veröffentlichung nicht genügend berücksichtigten Umstande, daß man in Übereinstimmung mit Einstein das Vorzeichen von ds^2 so nimmt, wie es in der Fußnote [4]) Seite 569 dieser Abhandlung verabredet wurde; alsdann wird das Einsteinsche G mit dem Hilbertschen K identisch. K.]

unter $-\Gamma^{\varrho}_{\mu\nu}$ die sogenannten Symbole zweiter Art verstanden:

$$(51)\qquad -\Gamma^{\varrho}_{\mu\nu} = \sum_{\tau} \frac{g^{\varrho\tau}}{2}\left(\frac{\partial g_{\mu\tau}}{\partial w^{\nu}} + \frac{\partial g_{\nu\tau}}{\partial w^{\mu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial w^{\tau}}\right)^{11)}.$$

Augenscheinlich ist dieses G^* bei affinen Transformationen der w invariant.

Die ferneren Einsteinschen Schlußformeln folgen nun ohne weiteres aus unseren früheren Ansätzen, wenn wir

$$(52)\qquad K^* = G^*, \text{ also } \mathfrak{K}^* = \mathfrak{G}^*$$

setzen; wir müssen nur hinterher noch, um volle Übereinstimmung zu haben,

$$\varkappa = 1$$

nehmen.

Es handelt sich eigentlich nur mehr um zwei Punkte:

a) Nach (21) haben wir

$$(53)\qquad \mathfrak{K}_{\mu\nu} \equiv \mathfrak{G}^*_{\mu\nu}.$$

Aber $\mathfrak{G}^*_{\mu\nu}$ stellt sich, weil $\mathfrak{G}^*$ nur die Differentialquotienten erster Ordnung der $g^{\mu\nu}$ enthält, formal einfacher dar als die $\mathfrak{K}_{\mu\nu}$:

$$(54)\qquad \mathfrak{G}^*_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\nu}} - \sum \frac{\partial\left(\dfrac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\nu}_{\varrho}}\right)}{\partial w^{\varrho}}.$$

Als solche treten die $\mathfrak{G}^*_{\mu\nu}$ bei Einstein in der Tat statt der $\mathfrak{K}_{\mu\nu}$ in den Feldgleichungen auf (Formel (7) seines Artikels). — Man wird sagen dürfen, daß durch Einführung der $\mathfrak{G}^*_{\mu\nu}$ eine besondere Eigenschaft der $\mathfrak{K}_{\mu\nu}$, nämlich keine Differentialquotienten der $g^{\mu\nu}$ von höherer als der zweiten Ordnung zu enthalten, sichtbar hervorgekehrt ist.

b) Ferner haben wir nun für die $\mathfrak{U}^{*\sigma}_{\tau}$ nach (16), (22) die einfachen Formeln

$$(55)\qquad \mathfrak{U}^{*\sigma}_{\tau} = \frac{1}{2}\left(\mathfrak{G}^*\delta^{\sigma}_{\tau} - \sum \frac{\partial \mathfrak{G}^*}{\partial g^{\mu\nu}_{\sigma}} g^{\mu\nu}_{\tau}\right).$$

Diese $\mathfrak{U}^{*\sigma}_{\tau}$ sind gegenüber den allgemeinen $\mathfrak{U}^{\sigma}_{\tau}$ tatsächlich gekürzt, aber das Resultat der Divergenzbildung

$$\sum \frac{\partial \mathfrak{U}^{*\sigma}_{\tau}}{\partial w^{\sigma}}$$

ist doch wieder dasselbe. Also auch hier bringt die Reduktion der Formeln nur die Vereinfachung zur klaren Anschauung, welche das für uns in Betracht kommende Schlußergebnis infolge der Bauart von K ohnehin besitzt.

[11]) Vgl. die Durchführung der Zwischenrechnung auf S. 110, 191 des Weylschen Buches.

Die durch (55) definierten $\mathfrak{U}^{*\sigma}_{\tau}$, dividiert durch $\varkappa$, sind nun ohne weiteres die Einsteinschen $\mathfrak{t}^{\sigma}_{\tau}$:

$$(56)\qquad \frac{1}{\varkappa}\mathfrak{U}^{*\sigma}_{\tau} = \mathfrak{t}^{\sigma}_{\tau}.$$

In der Tat gibt Einstein in Formel (20) seiner Abhandlung — auf Grund einer ganz anders angelegten Rechnung —, indem er $\varkappa = 1$ nimmt, für seine $\mathfrak{t}^{\sigma}_{\tau}$ genau die in (55) rechter Hand stehenden Werte.

Tragen wir dementsprechend in (43) für die $\frac{1}{\varkappa}\mathfrak{U}^{*\sigma}_{\tau}$ die $\mathfrak{t}^{\sigma}_{\tau}$ ein, so erhalten wir die Gleichungen (44), w. z. b. w.

Ich wünsche diesen Entwicklungen noch einen kleinen Zusatz zu geben. In seinen „Kosmologischen Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie“[12]) hat Einstein bekanntlich den Vorschlag gemacht, die fundamentalen Feldgleichungen der Gravitation dahin zu modifizieren, daß — in unserer Bezeichnung — statt (3) geschrieben wird

$$(57)\qquad K_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} - \varkappa T_{\mu\nu} = 0,$$

unter λ eine Konstante verstanden. Da

$$\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial g^{\mu\nu}} : \sqrt{g} = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu},$$

so können wir (57) auch so schreiben

$$(58)\qquad \overline{K}_{\mu\nu} - \varkappa T_{\mu\nu} = 0, \text{ oder auch } \overline{K}^{\sigma}_{\tau} - \varkappa T^{\sigma}_{\tau} = 0,$$

wo

$$(59)\qquad \overline{K} = K + 2\lambda.$$

Nun gelten für dieses $\overline{K}$ alle die Voraussetzungen, auf die wir in den Paragraphen 2 bis 5 die Identitäten für K aufgebaut haben. Wir können also beispielsweise für das $\overline{K}$ gleich die Identitäten (37) anschreiben, in denen wir die U^{σ}_{τ} nur durch die $\overline{U}^{\sigma}_{\tau}$ zu ersetzen haben, wo gemäß (16)

$$(60)\qquad \overline{U}^{\sigma}_{\tau} = U^{\sigma}_{\tau} + \lambda\delta^{\sigma}_{\tau}$$

sein wird. Wir bekommen also auch Erhaltungssätze, wie früher, etwa der Formel (42) entsprechend

$$(61)\qquad \sum \frac{\partial\left(\mathfrak{T}^{\sigma}_{\tau} + \dfrac{1}{\varkappa}\overline{\mathfrak{U}}^{\sigma}_{\tau}\right)}{\partial w^{\sigma}} = 0,$$

wo wir nun noch das $\overline{\mathfrak{U}}^{\sigma}_{\tau}$ abändern mögen, indem wir statt $\overline{K}$

$$(62)\qquad \overline{K}^* = \overline{K} + \mathfrak{Div}$$

[12]) Sitzungsberichte der Berliner Akademie vom 8. Februar 1917.

setzen. Speziell wollen wir für $\overline{K}^*$, gemäß unseren neuesten Entwicklungen

$$\overline{G}^* = G^* + 2\lambda, \text{ d. h. } \overline{\mathfrak{G}}^* = \mathfrak{G}^* + 2\lambda\sqrt{g} \tag{63}$$

nehmen. Schreiben wir dann unter Übertragung von (55), (56):

$$\bar{\mathfrak{t}}_\tau^\sigma = \frac{1}{2\varkappa}\left(\overline{\mathfrak{G}}^*\delta_\tau^\sigma - \sum \frac{\partial \overline{\mathfrak{G}}^*}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}} g_\tau^{\mu\nu}\right), \tag{64}$$

so werden wir nunmehr

$$\sum \frac{\partial(\mathfrak{T}_\tau^\sigma + \bar{\mathfrak{t}}_\tau^\sigma)}{\partial w^\sigma} = 0 \tag{65}$$

haben. Dies entspricht der Angabe, die Einstein in seiner neuesten Publikation macht[13]).

§ 8.

Schlußbemerkung.

Die Beziehungen, welche die so weit gegebenen Entwicklungen zu den von mir zitierten Arbeiten von Einstein, Hilbert und Lorentz und Weyl haben, sind im einzelnen noch enger, als durch den bloßen Vergleich der Schlußresultate hervortritt. Viele Formeln, die bei mir in den Zwischenüberlegungen auftreten, finden sich auch dort, nur nicht in dem von mir eingehaltenen einheitlichen Gedankengange. Es ist sehr interessant, dies im einzelnen zu verfolgen. Am nächsten stehen meinen Entwicklungen wohl diejenigen von Lorentz, der sich dann aber bald auf solche infinitesimale Transformationen $\delta w^\tau = p^\tau$ beschränkt, deren p^τ von den w unabhängig sind. Einstein betrachtet solche p^τ, die affinen Transformationen der w entsprechen, Weyl (wie ich selbst in meiner vorigen Note) solche p^τ, die im übrigen willkürlich sind, aber am Rande des Integrationsgebietes in geeigneter Weise verschwinden[14]).

Ich darf auch nicht unterlassen, für fördernde Teilnahme an meinen neuen Arbeiten wieder Frl. Nöther zu danken, welche die mathematischen Gedanken, die ich in Anpassung an die physikalische Fragestellung für das Integral I_1 benutze, ihrerseits allgemein herausgearbeitet hat und in einer demnächst in diesen Nachrichten zu veröffentlichenden Note darstellen wird[15]).

[13]) Sitzungsberichte der Berliner Akademie vom 16. Mai 1918, S. 456.

[14]) So schon in einem Aufsatze „Zur Gravitationstheorie" (in Bd. 54 der Annalen der Physik), der vor meiner Note abgeschlossen, aber erst nach ihr veröffentlicht wurde.

[15]) [Die Hauptsätze von Frl. Nöther habe ich am 26. Juli der Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegt. Die Note selbst ist weiterhin in den Göttinger Nachrichten 1918, S. 235—257, unter dem Titel „Invariante Variationsprobleme" erschienen.] —

[Der vorstehend in § 2 aufgestellte „Hauptsatz" ist ein besonderer Fall des folgenden von Frl. Nöther am angegebenen Orte bewiesenen weitreichenden Theorems:

„Ist ein Integral I invariant gegenüber einer G_ϱ (d. h. einer kontinuierlichen Gruppe mit ϱ wesentlichen Parametern), so werden ϱ linear unabhängige Verbindungen der Lagrangeschen Ausdrücke zu Divergenzen."

Was aber insbesondere die in XXXI enthaltene Behauptung von Hilbert angeht (siehe S. 561 und 565 der vorliegenden Ausgabe), so ergibt sich als deren exakte Formulierung nach Frl. Nöther die folgende:

„Gestattet ein Integral I die Verschiebungsgruppe, so werden die Energierelationen dann und nur dann uneigentliche, wenn I invariant ist gegenüber einer unendlichen Gruppe, die die Verschiebungsgruppe als Untergruppe enthält."

Übrigens findet auch der Satz von Hilbert bzw. von XXXI, daß zwischen den Feldgleichungen der Relativitätstheorie vier Relationen bestehen, bei Frl. Nöther seine Verallgemeinerung. Ihr Theorem lautet so: „Ist das Integral I invariant gegenüber einer Gruppe mit ϱ willkürlichen Funktionen, in der diese Funktionen bis zur σ-ten Ableitung auftreten, so bestehen ϱ identische Relationen zwischen den Lagrangeschen Ausdrücken und ihren Ableitungen bis zur σ-ten Ordnung." K.]

XXXIII. Über die Integralform der Erhaltungssätze und die Theorie der räumlich-geschlossenen Welt.

[Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. (1918.) Vorgelegt in der Sitzung vom 6. Dezember 1918.][1])

In meiner Note vom 19. Juli 1918 habe ich versucht, über die verschiedenen Formen, welche man in der Einsteinschen Gravitationstheorie den Differentialgesetzen für die Erhaltung von Impuls und Energie geben kann, eine Übersicht zu gewinnen; meine Aufgabe soll heute in erster Linie sein, zu der Integralform der Erhaltungssätze Stellung zu nehmen, welche Einstein für die von ihm bevorzugte Form der Differentialgesetze aufgestellt hat. Im Zusammenhang damit werde ich Einsteins Theorie der räumlich-geschlossenen Welt und die Abänderung, welche diese durch de Sitter gefunden hat, behandeln[2]). Die physikalischen Fragen werden nur gestreift, das Ziel ist, die *mathematischen* Zusammenhänge völlig klarzustellen; ich empfinde eine gewisse Genugtuung, daß dabei meine alten Ideen von 1871—72 zu entscheidender Geltung kommen[3]). Wie weit Fortschritte erzielt sind, möge der Leser selbst durch Vergleich mit den Darstellungen der anderen Autoren entscheiden.

[1]) Zum Druck eingereicht Ende Januar 1919.

[2]) Die in Betracht kommenden Veröffentlichungen sind:
Einstein. 1. Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie. Sitzungsberichte der Berliner Akademie vom 8. Februar 1917.
2. Kritisches zu einer von Herrn de Sitter gegebenen Lösung der Gravitationsgleichungen, ebenda, 7. März 1918.
3. Der Energiesatz in der allgemeinen Relativitätstheorie, ebenda, 16. Mai 1918.
de Sitter. In verschiedenen Mitteilungen im Verslag der Amsterdamer Akademie, 1917, sowie in einer zusammenfassenden Artikelreihe in den Monthly Notices of the R. Astronomical Society: On Einsteins theory of gravitation and its astronomical consequences (siehe insbesondere den Schlußteil III vom November 1917).

[3]) Siehe insbesondere:
1. Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie. Math. Annalen (1871), Bd. 4. [Abh. XVI dieser Ausgabe.]
2. Das Antrittsprogramm: Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen, Erlangen 1872. [Abh. XXVII dieser Ausgabe.]

Ich erinnere zunächst an folgende Ergebnisse: Die Erhaltungssätze in der Form, die ich nach Lorentz benenne, (Formel (42) der vorigen Note), lauten:

$$(1)\qquad \frac{\partial\left(\mathfrak{T}_\tau^\sigma+\frac{1}{\varkappa}\mathfrak{U}_\tau^\sigma\right)}{\partial w^\sigma}=0.$$

Schreiben wir

$$(2)\qquad \frac{1}{\varkappa}\mathfrak{U}_\tau^{*\sigma}=\mathfrak{t}_\tau^\sigma,$$

so erhalten wir die Einsteinsche Form der Erhaltungssätze:

$$(3)\qquad \frac{\partial\left(\mathfrak{T}_\tau^\sigma+\mathfrak{t}_\tau^\sigma\right)}{\partial w^\sigma}=0$$

(Formel (44) der vorigen Note)[4]).

Nun wird es der Einsteinschen Grundauffassung entsprechen, wenn ich weiterhin

$$\text{die } \frac{\mathfrak{U}_\tau^\sigma}{\varkappa}, \quad \text{bez. die } \frac{\mathfrak{U}_\tau^{*\sigma}}{\varkappa}$$

kurzweg als *die (durch die zufällige Koordinatenwahl und den jeweiligen Ansatz bedingten) Gravitationskomponenten der Energie bezeichne.* Im übrigen will ich die hiernach sich ergebenden Komponenten der „Gesamtenergie" abkürzend mit dem Buchstaben V, bez. $\mathfrak{V}$, bezeichnen:

$$(4)\qquad \mathfrak{T}_\tau^\sigma+\frac{1}{\varkappa}\mathfrak{U}_\tau^\sigma=\mathfrak{V}_\tau^\sigma, \qquad \mathfrak{T}_\tau^\sigma+\frac{1}{\varkappa}\mathfrak{U}_\tau^{*\sigma}=\mathfrak{V}_\tau^{*\sigma}.$$

Es ist eine Besonderheit meiner folgenden Darstellung, auf die ich hier vorweg hinweise, daß ich die $\mathfrak{U}$ und $\mathfrak{U}^*$ (oder auch die $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{V}^*$) — welche beide ihre Vorzüge haben — immer nebeneinander betrachte; man sieht dann deutlicher, wie weit in den aufzustellenden Integralformen der Erhaltungssätze ein subjektives Moment zur Geltung kommt.

Zur Bequemlichkeit des Lesers setze ich die zugrunde liegende Definition der entsprechenden lateinischen Buchstaben nach Formel (16), (55) der vorigen Note noch einmal her. Man hat:

$$(5)\qquad 2U_\tau^\sigma=K\delta_\tau^\sigma-\frac{\partial K}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}}g_\tau^{\mu\nu}-\frac{\partial K}{\partial g_{\varrho\sigma}^{\mu\nu}}g_{\varrho\tau}^{\mu\nu}+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\left(\frac{\partial\sqrt{g}\,K}{\partial g_{\varrho\sigma}^{\mu\nu}}\right)}{\partial w^\varrho}g_\tau^{\mu\nu},$$

$$(6)\qquad 2U_\tau^{*}=G^*\delta_\tau^\sigma-\frac{\partial G^*}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}}g_\tau^{\mu\nu}.$$

[4]) [Dieser ganze Absatz konnte wesentlich gekürzt werden, nachdem die bei der ersten Veröffentlichung an dieser Stelle aufgeführten, in der vorigen Note notwendigen Vorzeichenänderungen beim Wiederabdruck in dieser Ausgabe bereits daselbst Berücksichtigung gefunden haben. Auf die Notwendigkeit dieser Vorzeichenänderungen hat mich Herr Vermeil aufmerksam gemacht, der mich auch sonst bei vielen für die folgenden Betrachtungen erwünschten Rechnungen in dankenswerter Weise unterstützt hat. K.]

Ich habe in (5), wie durchweg in meiner vorigen Note, im Anschluß an **Hilberts** ursprüngliche Schreibweise, die Quadratwurzel $\sqrt{g}$ benutzt. Will man vollen Anschluß an die **Einsteinsche** Bezeichnungsweise haben, muß man überall $\sqrt{-g}$ nehmen. Auf die Schlußformeln (1) bis (3) hat diese Änderung keinen Einfluß; sie ist aber doch zweckmäßig, damit die der unmittelbaren Beobachtung unterliegenden Größen durchweg reelle Komponenten bekommen; sie soll also weiterhin ebenfalls als angenommen gelten.

I. Die Integralsätze für abgeschlossene Systeme der gewöhnlichen Theorie.

§ 1.

Von der vektoriellen Schreibweise mehrfacher Integrale. Erste Einführung des I_τ bzw. I_τ^*.

Wo immer man mit der Transformation mehrfacher Integrale zu tun hat, ist die übliche Schreibweise, z. B. $\iint f(xy)\,dx\,dy$, nicht zweckdienlich. Die Stückchen dx, dy sind doch auf verschiedene Richtungen abgetragen zu denken, gehören also zwei verschiedenen Vektoren an, so daß schon etwas gewonnen ist, wenn man $\iint f(xy)\,d'x\,d''y$ schreibt. Noch klarer wird die Bezeichnung, wenn man die Vektoren d', d'' nicht gerade parallel den beiden Koordinatenachsen, sondern beliebig wählt und das Produkt $d'x\,d''y$ dementsprechend durch den Inhalt des zwischen den beiden Vektoren eingeschlossenen Parallelogramms ersetzt. So kommen wir zu der Schreibweise

$$\iint f(xy)\cdot\begin{vmatrix} d'x & d'y \\ d''x & d''y \end{vmatrix}, \tag{7}$$

die ich gern die **Graßmannsche** nenne, weil sie den Ideenbildungen in **Graßmanns** Ausdehnungslehre von 1861 entspricht: die Formel ist der Beweglichkeit, die wir in den Begriff des mehrfachen Integrals legen, besser angepaßt.

Zum Zwecke der speziellen Auswertung wird man von (7) selbstverständlich in jedem Augenblicke zur gewöhnlichen Schreibweise zurückgehen können. Für alle Transformationsbetrachtungen aber ist (7) vorzuziehen. Setzen wir z. B. $x = \varphi(\xi, \eta)$, $y = \psi(\xi, \eta)$, so ist aus (7) unmittelbar klar, warum in die Transformationsformel des Integrals die **Jacobische** Funktionaldeterminante eingeht. Denn man hat identisch:

$$f(xy)\cdot\begin{vmatrix} d'x & d'y \\ d''x & d''y \end{vmatrix} = f(\varphi\psi)\cdot\begin{vmatrix} \varphi_\xi & \varphi_\eta \\ \psi_\xi & \psi_\eta \end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix} d'\xi & d'\eta \\ d''\xi & d''\eta \end{vmatrix}.$$

Dies vorausgeschickt werden wir nun in der Folge gewisse dreifache Integrale betrachten, die sich so anschreiben:

$$I_\tau = \iiint \begin{vmatrix} \mathfrak{V}_\tau^{I} & \dots & \mathfrak{V}_\tau^{IV} \\ d'w^I & \dots & d'w^{IV} \\ d''w^I & \dots & d''w^{IV} \\ d'''w^I & \dots & d'''w^{IV} \end{vmatrix}, \tag{8}$$

oder auch die anderen, die ich

$$I_\tau^* \tag{9}$$

nenne und die sich aus dem Vorstehenden ergeben, indem man die $\mathfrak{V}_\tau^\sigma$ durch die $\mathfrak{V}_\tau^{*\sigma}$ ersetzt. — Zu erstrecken sind diese Integrale über irgendein Stück einer in der vierdimensionalen Welt $w^I \dots w^{IV}$ gelegenen „Hyperfläche"; d', d'', d''' bezeichnen drei voneinander unabhängige Vektoren, die von dem einzelnen Punkt der Hyperfläche je in tangentialer Richtung auslaufen.

Aus den Differentialgesetzen (1), (3), denen die $\mathfrak{V}_\tau^\sigma$ bez. $\mathfrak{V}_\tau^{*\sigma}$ genügen, wird man — bei Voraussetzung der gewöhnlichen Stetigkeits- bez. Eindeutigkeitseigenschaften für die $\mathfrak{V}$ — von vornherein schließen, *daß diese I_τ, bez. I_τ^* Null sind, wenn man ihr Integrationsgebiet in der Weise geschlossen annimmt, daß es ein bestimmtes Weltstück umgrenzt.* In der Tat verwandeln sich dann die I_τ in bekannter Weise in die über das umschlossene Weltstück erstreckten vierfachen Integrale

$$I_\tau = \iiiint \left(\frac{\partial \mathfrak{V}_\tau^\sigma}{\partial w^\sigma}\right)\cdot\begin{vmatrix} dw^I & \dots & dw^{IV} \\ d'w^I & \dots & . \\ d''w^I & \dots & . \\ d'''w^I & \dots & . \end{vmatrix}, \tag{10}$$

und ähnlich die I_τ^*, wo nun die Integranden selbst wegen der Erhaltungssätze (1), (3) ohne weiteres verschwinden. —

Unser besonderes Interesse aber richtet sich darauf, wie sich die I_τ, I_τ^* bei *affinen* Transformationen der w verhalten, wenn man also die w linearen Transformationen mit konstanten Koeffizienten unterwirft:

$$\overline{w}^\varrho = a_1^\varrho w^I + \dots + a_4^\varrho w^{IV} + c^\varrho. \tag{11}$$

Eben hier bewährt sich nun unsere vektorielle Schreibweise. Wir wissen aus den Entwicklungen der vorigen Note, daß sich die V_τ^σ, bez. $V_\tau^{*\sigma}$, bei den Transformationen (11) wie gemischte Tensoren verhalten; aus ihnen erwachsen die $\mathfrak{V}_\tau^\sigma$, bez. $\mathfrak{V}_\tau^{*\sigma}$ durch Multiplikation mit $\sqrt{g}$ (bez. $\sqrt{-g}$). Danach ist ohne weiteres ersichtlich, daß sich die Integranden dI_τ, bez. dI_τ^*, wie „kontragrediente" Vektoren transformieren. Es will dies heißen, daß sie die aus (11) abgeleiteten *homogenen* linearen Substitutionen erleiden:

$$dI_\tau = a_\tau^I\,d\overline{I}_1 + \dots + a_\tau^{IV}\,d\overline{I}_4.$$

Nun sind aber die Koeffizienten a in (11) nach Voraussetzung Konstante.

Wir werden also entsprechende Substitutionsformeln für unsere Integrale I_τ selbst haben:

$$I_\tau = a_\tau^I \overline{I}_1 + \ldots + a_\tau^{IV} \overline{I}_4. \tag{12}$$

(und natürlich ebenso für die I_τ^*), womit das hier abzuleitende Resultat bereits erreicht ist.

Der gedankliche Fortschritt aber, der sich mit diesen Formeln (12) verbindet, läßt sich so aussprechen: die dI_τ, dI_τ^* sind, wie alle Vektoren der allgemeinen Transformationstheorie, von Hause aus je an einen bestimmten Weltpunkt w als Ausgangspunkt angeknüpft, es sind *gebundene* Vektoren (oder, wenn wir uns noch genauer ausdrücken wollen: Vierervektoren). Diese Bindung an einen besonderen Punkt tritt nun bei den Transformationsformeln für die I_τ, I_τ^* ganz zurück. *Man wird die I_τ, I_τ^* zweckmäßigerweise als freie kontragrediente Vierervektoren bezeichnen*, d. h. als Vierervektoren, die nur eine Richtung und eine Intensität $\left(=\sqrt{\sum g^{\mu\nu} I_\mu I_\nu}\right)$ haben, aber keinen bestimmten Ort in der vierdimensionalen Welt.

Dieser Begriff des freien Vierervektors haftet natürlich durchaus daran, daß wir die Gruppe (11) der affinen Transformationen der w zugrunde legten. In der Physik, bez. Mechanik ist es eben genau so, wie ich es in meinem Erlanger Programm für die Geometrie darlegte: daß nämlich von einer Unterscheidung bestimmter Größenarten immer erst dann die Rede sein kann, wenn man sich über die Transformationsgruppe verständigt hat, an der man die Begriffsbildungen messen will. Ich bin schon seit Jahrzehnten dafür eingetreten, daß die Physiker die hierin liegende Auffassung, welche allein Klarheit schafft, bewußt aufnehmen möchten[5]). Insbesondere habe ich 1910 in meinem Vortrag über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe[6]) ausdrücklich bemerkt, daß man nie von Relativitätstheorie schlechtweg reden sollte, sondern immer nur von der Invariantentheorie relativ zu einer Gruppe. — Es gibt so viele Arten Relativitätstheorie als es Gruppen gibt[7]).

Die so formulierte Auffassung steht vielleicht im Gegensatz zu den Auseinandersetzungen, wie sie im Anschluß an Einsteins allgemeine Dar-

[5]) Vergl. u. a. meinen Aufsatz „Zur Schraubentheorie von Sir Robert Ball" im 47. Bande der Zeitschrift für Math. und Physik (1902), (1906 im 62. Bande der Math. Annalen mit einigen Erweiterungen wieder abgedruckt). [S. Abh. XXIX dieser Ausgabe.] (Es werden dort wie im Text nicht etwa neue physikalische Begriffsbildungen eingeführt, sondern es wird nur das, was bei eingehender Beschäftigung mit den Einzelproblemen von Vielen gemacht ist, auf ein klares mathematisches Prinzip bezogen.)

[6]) Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, Bd. 19 (1910), abgedruckt in der Physikalischen Zeitschrift, 12. Jahrgang, 1911. [S. Abh. XXX dieser Ausgabe.]

[7]) Vergleiche auch die Mitteilung über „Invariante Variationsprobleme" von Frl. Nöther im Jahrgang 1918, Göttinger Nachrichten (Schlußbemerkung daselbst).

legungen zurzeit vielfach propagiert werden, nicht aber, worauf ich großen Wert lege, zu Einsteins eigenen weitergehenden Einzelentwicklungen. Vielmehr zeigen die Einsteinschen Arbeiten, die ich in der vorliegenden Note kommentiere, daß sich Einstein im einzelnen Falle — ohne den Gedanken systematisch zu fassen — genau der Freiheit der Ideenbildung bedient, wie ich sie in meinem Erlanger Programm empfohlen habe.

§ 2.

Die Integrale I_τ, I_τ^* für abgeschlossene Systeme.

Unter einem „abgeschlossenen" System versteht Einstein in seiner oben unter 3) genannten Mitteilung ein solches, welches sozusagen in einer Minkowskischen Welt „schwimmt", d. h. ein System, dessen Einzelteilchen eine Weltröhre durchlaufen, *außerhalb deren* ein ds^2 von verschwindendem Riemannschen Krümmungsmaß herrscht. Man kann dieses ds^2 mit konstanten Koeffizienten schreiben (ohne es darum gerade in die typische Form $dt^2 - \frac{dx^2+dy^2+dz^2}{c^2}$ setzen zu müssen): Einstein spricht dann von „Galileischen" Koordinaten. Als solche sollen die w^ϱ außerhalb der Weltröhre fortan gewählt sein, innerhalb mögen sie, stetigen Übergang vorausgesetzt, beliebig verlaufen. Über die Werte der $\mathfrak{B}_\tau^\sigma$, $\mathfrak{B}_\tau^{*\sigma}$ im Inneren der Röhre kann dementsprechend nichts Besonderes ausgesagt werden, außerhalb aber sind sie jedenfalls Null. Denn es verschwinden dort nicht nur alle $\mathfrak{T}_\tau^\sigma$, sondern, wegen der Konstanz der $g_{\mu\nu}$ — wie ein Blick auf die Definitionsformeln (5), (6) zeigt —, auch alle $\mathfrak{U}_\tau^\sigma$, bez. $\mathfrak{U}_\tau^{*\sigma}$.

Das Innere der Weltröhre denken wir uns, den Punkten des Systems entsprechend, natürlich von einer kontinuierlichen Schar von Weltlinien durchfurcht, denen allen ein gemeinsamer positiver Sinn beizulegen ist. Irgendein die Weltlinie tangierender Vektor, der diesen Sinn markiert, möge die Komponenten $dw^I, \ldots, dw^{IV}$ besitzen.

Es liegt auf der Hand, welche dreidimensionalen Mannigfaltigkeiten (Hyperflächen) man als „Querschnitte" Q der Weltröhre bezeichnen wird. Um uns bequemer ausdrücken zu können, werden wir in der Folge ausschließlich solche Querschnitte in Betracht ziehen, welche von jeder Weltlinie nur in *einem* Punkte geschnitten werden. Drei voneinander unabhängige, den Querschnitt tangierende Vektoren d', d'', d''' mögen dann so gewählt werden, daß die Determinante

$$\begin{vmatrix} dw^I & \ldots & dw^{IV} \\ d'w^I & \ldots & . \\ d''w^I & \ldots & . \\ d'''w^I & \ldots & . \end{vmatrix}$$

ein festes Vorzeichen erhält. Indem wir an das Beispiel:

$$\begin{aligned} d\ &= 0,\ 0,\ 0,\ dt \\ d'\ &= dx,\ 0,\ 0,\ 0 \\ d''\ &= 0,\ dy,\ 0,\ 0 \\ d'''\ &= 0,\ 0,\ dz,\ 0 \end{aligned}$$

anknüpfen, wählen wir dieses Vorzeichen zweckmäßigerweise negativ.

Dies vorausgesetzt bilden wir uns für den Querschnitt die vier Integrale

$$I_\tau, \quad \text{bez. } I_\tau^*$$

des vorigen Paragraphen.

Im genauen Anschluß an die Einsteinschen Entwicklungen werden wir dann die Behauptung aufstellen, *daß diese Integrale sowohl von der Auswahl der Querschnitte, als von der Koordinatenwahl, die wir im Innern der Röhre treffen mögen, unabhängig sind.* Vom Standpunkte der die ganze Welt umfassenden affinen Transformationen der w definieren die I_τ, bez. I_τ^* jedenfalls einen freien kontragredienten Vektor. Die von Einstein aufgestellten neuen Sätze besagen, *daß diese Vektoren nur von dem materiellen Systeme als solchem, nicht aber von den Zufälligkeiten der analytischen Darstellung abhängig sind.*

Zum Beweise der neuen Sätze genügt es jedenfalls, solche zwei Querschnitte nebeneinander zu stellen, Q und $\bar{Q}$, die zusammengenommen ein einheitliches Stück der Weltröhre abgrenzen (die also einander nicht schneiden); — der allgemeine Fall, wo Q und $\bar{Q}$ einander durchdringen, erledigt sich hinterher mit Leichtigkeit dadurch, daß man einen dritten Querschnitt (Q) hinzunimmt, der weder Q noch $\bar{Q}$ begegnet, und nun erstlich Q mit (Q), dann (Q) mit $\bar{Q}$ zusammenstellt.

Im übrigen gliedert sich der Beweis (alles im Anschluß an Einstein) in zwei Teile:

a) Wir denken uns zunächst das Koordinatensystem der w innerhalb und außerhalb der Weltröhre irgendwie nach Vorschrift gewählt. Wir denken uns dann das zwischen Q und $\bar{Q}$ befindliche Röhrenstück nach außen stetig abgerundet, so daß es von einer einheitlichen Hyperfläche umgrenzt erscheint, welche das Innere der Röhre in Q und $\bar{Q}$ durchsetzt. Die Integrale I_τ, I_τ^* geben, sinngemäß über diese geschlossene Hyperfläche erstreckt, gemäß dem vorigen Paragraphen sämtlich Null. Aber diejenigen Teile unserer Hyperfläche, welche über die Weltröhre hinausragen, liefern zu diesen Integralen — weil für sie die Integranden $\mathfrak{B}_\tau^\sigma$, $\mathfrak{B}_\tau^{*\sigma}$ selbst verschwinden — überhaupt keinen Beitrag. Es bleiben die Beiträge der beiden Querschnitte Q und $\bar{Q}$, die aber, wenn wir sie nach der früher verabredeten Vorzeichenregel berechnen, in das über die geschlossene Hyperfläche genommene Integral mit entgegengesetztem Vorzeichen eingehen. Da die Summe Null ist, werden die genannten Beiträge einander gleich sein, w. z. b. w.

b) Nun kommt es noch darauf an einzusehen, daß die auf den einzelnen Querschnitt Q treffenden I_τ, I_τ^* bei allen Abänderungen der w^ϱ, die außerhalb der Weltröhre verschwinden, tatsächlich ungeändert bleiben. Wir machen das in der Weise, daß wir uns zunächst innerhalb der Röhre zweierlei Koordinatensysteme, w und $\bar{w}$, gegeben denken, die sich am Rande der Röhre beide in stetiger Weise an dasselbe äußere (Galileische) Koordinatensystem anschließen. Von dem ersteren machen wir Gebrauch, um für den Querschnitt Q die Integrale I_τ, bez. I_τ^* zu berechnen, von dem anderen für $\bar{Q}$, wobei sich die Werte $\bar{I}_\tau$, bez. $\bar{I}_\tau^*$ ergeben mögen. Es ist zu zeigen, daß $I_\tau = \bar{I}_\tau$, bez. $I_\tau^* = \bar{I}_\tau^*$, und dieser Nachweis wird erbracht sein, wenn es uns gelingt, eine dritte Koordinatenbestimmung, $\bar{\bar{w}}$, einzuführen, welche sich entlang Q hinreichend genau an die der w, entlang $\bar{Q}$ desgleichen an die der $\bar{w}$ anschließt, während sie längs des Mantels der Röhre und außerhalb derselben nach wie vor die dort herrschenden Galileischen Koordinaten liefert. „Hinreichend genau" heißt dabei, daß die Berechnung der V_τ^σ, bzw. der $V_\tau^{*\sigma}$ aus den $\bar{\bar{w}}$ für den Querschnitt Q dieselben Resultate liefert, wie die Benutzung der w, und entsprechend für den Querschnitt $\bar{Q}$ dieselben Resultate, wie die Benutzung der $\bar{w}$. Wegen der in den Formeln (5), (6) bei der Definition der V_τ^σ, $V_\tau^{*\sigma}$ vorkommenden Differentialquotienten der $g_{\mu\nu}$ genügt es in dieser Hinsicht, — nach einem Überschlag, den mir Herr Vermeil gemacht hat —, daß die $\bar{\bar{w}}$ mit den w entlang Q auch noch in ihren drei ersten Differentialquotienten übereinstimmen, desgleichen mit dem $\bar{w}$ entlang $\bar{Q}$. Allen den solcherweise der Koordinatenbestimmung $\bar{\bar{w}}$ auferlegten Bedingungen genügt man nun offenbar durch folgendes Beispiel: Man führe die *Gleichungen* ein, welchen die Querschnitte Q, $\bar{Q}$ bzw. in den $\bar{w}$ und den w genügen. Sei $f(\bar{w}) = 0$ die erste dieser Gleichungen, $\bar{f}(w) = 0$ die zweite. Ich schreibe dann einfach:

$$\bar{\bar{w}} = \frac{(\bar{f}(w))^4 \cdot w + (f(\bar{w}))^4 \cdot \bar{w}}{(\bar{f}(w))^4 + (f(\bar{w}))^4} \tag{13}$$

und habe damit in der Tat allen Bedingungen entsprochen. Unser zweiter Nachweis ist also erbracht und damit der Beweis der neuen Sätze überhaupt erledigt.

§ 3.

Endgültige Festlegung freier Impuls-Energievektoren für das abgeschlossene System.

Die I_τ, bez. I_τ^* bilden natürlich die Grundlage für die dem abgeschlossenen System beizulegenden Impuls-Energievektoren. Zur vollen Festlegung der letzteren wird es aber noch notwendig sein, die Dimensionen der miteinander verbundenen Größenarten in Betracht zu ziehen. Auf Seite 569 meiner vorigen Note wurde verabredet, dem ds^2 die Dimension sek^2 beizulegen. Wollen wir dementsprechend nun voraussetzen, daß die benutzten w^ϱ sämtlich die Dimensionen sek^{+1} haben. Die $g^{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$ und das g sind dann dimensionslos, die K, U_τ^σ, $\mathfrak{U}_\tau^\sigma$, $U_\tau^{*\sigma}$, $\mathfrak{U}_\tau^{*\sigma}$, werden übereinstimmend von der Dimension sek^{-2}. Da die Gravitationskonstante $\varkappa$ die Dimension gr^{-1}cm^{+1} besitzt, erhalten die $\frac{\mathfrak{U}_\tau^\sigma}{\varkappa}$, $\frac{\mathfrak{U}_\tau^{\sigma *}}{\varkappa}$ die Dimension gr^{+1}cm^{-1}sek^{-2}, d. h. die Dimension einer „spezifischen" (auf die Raumeinheit bezogenen) Energie. Es stimmt das damit, daß sie in den $\mathfrak{B}_\tau^\sigma$, $\mathfrak{B}_\tau^{*\sigma}$ mit den $\mathfrak{T}_\tau^\sigma$ additiv zusammentreten.

Nun werden diese $\mathfrak{B}_\tau^\sigma$, $\mathfrak{B}_\tau^{*\sigma}$ unter den Integralzeichen I_τ, I_τ^* mit dreigliedrigen Determinanten multipliziert, die, nach unserer Verabredung über die Dimension der w, selbst die Dimension sek^{+3} haben. Offenbar muß ich, um die Dimension einer eigentlichen Energie zu bekommen, den I_τ, I_τ^* noch den Faktor c^3 (c = Lichtgeschwindigkeit) hinzufügen. *In Übereinstimmung hiermit sollen als freie Impuls-Energievektoren des vorgelegten abgeschlossenen Systems endgültig die Größenquadrupel:*

$$J_\tau = c^3 I_\tau, \quad J_\tau^* = c^3 I_\tau^* \tag{14}$$

bezeichnet werden. Zahlenfaktoren, die noch zweifelhaft sein könnten, sollen nicht weiter beigefügt werden; auch soll an unserer Vorzeichenbestimmung festgehalten werden.

Den Beweis für die Richtigkeit dieses Ansatzes erblicke ich darin, daß in der Definition unserer J_τ^* Einsteins eigene Definition des zu dem abgeschlossenen System gehörigen Impuls-Energievektors eingeschlossen ist. Um dies einzusehen, werden wir in unserer Definition der J_τ^* zunächst den Faktor c^3 wieder wegstreichen (weil nämlich Einstein solche Maßeinheiten zugrunde legt, daß $c = 1$ wird, was für den in Betracht kommenden Vergleich eine bloße Äußerlichkeit ist). Dann aber müssen wir, was eine wirkliche Partikularisation ist, den Querschnitt Q so wählen, daß er bei der uns gelassenen Freiheit der Koordinatenwahl durch die Gleichung $w^{IV} = 0$ dargestellt werden kann. Um die Tragweite dieser Einschränkung einzusehen, überlege man, daß die Galileischen Koordinaten außerhalb der Weltröhre bis auf eine affine Transformation festgelegt sind. Die neue Bedingung läuft also darauf hinaus, den Querschnitt Q so zu wählen, daß er den Mantel der Weltröhre unseres Systems in einem Gebilde durchsetzt, welches, von außen her gesehen, bei zunächst willkürlich angenommenen Galileischen Koordinaten durch eine *lineare* Gleichung dargestellt wird.

Wollen wir nun in der Tat annehmen, daß entlang des Querschnittes w^{IV} verschwindet, also $d'w^{IV}$, $d''w^{IV}$, $d'''w^{IV}$ eo ipso Null sind. Unser Integral I_τ^* reduziert sich dann (indem wir $c = 1$ setzen) auf

$$\iiint \mathfrak{B}_\tau^{*4} \begin{vmatrix} d'w^I & \dots & d'w^{III} \\ d''w^I & \dots & d''w^{III} \\ d'''w^I & \dots & d'''w^{III} \end{vmatrix}$$

also, wenn wir auf die gewöhnliche Schreibweise zurückgehen, auf

$$J_\tau^* = \iiint \mathfrak{B}_\tau^{*4}\, dw^I\, dw^{II}\, dw^{III}, \tag{15}$$

was bis auf die Buchstabenwahl genau die Einsteinsche Formel ist.

Diese Formel ist ja, äußerlich genommen, ohne Zweifel einfacher, als die von mir zugrunde gelegte. Dafür ist dann der Vektorcharakter der J_τ^*, wie ihn Einstein behauptet aber nicht ausführlicher begründet hatte, schwieriger einzusehen. In längerer Korrespondenz mit Einstein wollte mir in der Tat ursprünglich nicht gelingen, diesen Vektorcharakter zu begründen, bis ich zu der Graßmannschen Schreibweise der Integrale griff, von der ich oben ausging. Damit war aber auch die von mir gewählte Verallgemeinerung des Querschnittbegriffs gegeben.

Bleibt der wesentliche Unterschied gegen die Einsteinsche Darstellung, daß ich neben den Vektor J_τ^* als gleichberechtigt den Vektor J_τ stelle, — indem ich, unter dem Integralzeichen, statt der Einsteinschen $\mathfrak{t}_\tau^\sigma = \frac{1}{\varkappa}\mathfrak{U}_\tau^{*\sigma}$ die Lorentzschen $\frac{1}{\varkappa}\mathfrak{U}_\tau^\sigma$ setze. *Daß die J_τ und die J_τ^* im allgemeinen verschieden sind, werden wir sogleich an einem Beispiele einsehen.* Ich würde dem abgeschlossenen System danach sogar unendlich viele verschiedene Impuls-Energievektoren zuordnen können, wenn ich z. B. statt $\mathfrak{t}_\tau^\sigma$ das Aggregat $\mathfrak{t}_\tau^\sigma + \lambda\left(\frac{\mathfrak{U}_\tau^\sigma}{\varkappa} - \mathfrak{t}_\tau^\sigma\right)$ setzen wollte, unter λ irgendeine numerische Konstante verstanden. Überhaupt würde ich statt der $\mathfrak{t}_\tau^\sigma$ irgendein $\mathfrak{U}_\tau^\sigma$ setzen dürfen, das sich von den $\mathfrak{t}_\tau^\sigma$ nur um einen Term der erforderlichen Dimension unterscheidet, welcher gegenüber affinen Transformationen einen gemischten Tensor vorstellt, der außerhalb der Weltröhre identisch verschwindet, im Inneren aber eine verschwindende Divergenz hat. Welcher von diesen unendlich vielen Vektoren zu bevorzugen ist, bleibt, solange ich nur das Bestehen der Integralsätze verlange, unentschieden. Eine Entscheidung kann nur getroffen werden, wenn man neue Gründe heranbringt, die einen bestimmen, unter den unendlich vielen Formen des Differentials gerade eine einzelne zu bevorzugen.

II. Einsteins räumlich geschlossene Welt (Zylinderwelt).

§ 4.

Der geschlossene Raum konstanter positiver Krümmung.

In Einsteins Note vom Februar 1917 ist nur erst der Möglichkeit eines *sphärischen* Raumes gedacht, wie er aus einer Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen $(=\xi, \eta, \zeta, \omega)$, deren Bogenelement durch die Gleichung

$$(16) \qquad d\sigma^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 + d\omega^2$$

gegeben ist, unmittelbar durch die „Kugelgleichung"

$$(17) \qquad \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \omega^2 = R^2$$

ausgeschnitten wird[8]). Für den Kenner der geometrischen Literatur ist es wohl selbstverständlich, daß ich Einstein damals gleich auf meine alten Untersuchungen über Nicht-Euklidische Geometrie von 1871 aufmerksam machte, denen zufolge sich neben die sphärische Raumform eine andere geschlossene Raumform konstanter positiver Krümmung stellt, der *elliptische* Raum (wie er von mir in Verbindung mit meinen sonstigen Betrachtungen damals genannt wurde). Man erhält ihn aus dem sphärischen Raum, indem man einfach je zwei diametral gegenüberstehende Punkte der Kugel durch Zentralprojektion auf einen berührenden linearen Raum zusammenfaßt. Wir mögen dementsprechend setzen:

$$(18) \qquad x = R\frac{\xi}{\omega}, \quad y = R\frac{\eta}{\omega}, \quad z = R\frac{\zeta}{\omega}.$$

Rückwärts wird dann:

$$(19) \qquad \xi = \frac{Rx}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+R^2}}, \quad \eta = \ldots, \quad \zeta = \ldots, \quad \omega = \frac{R^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2+R^2}}.$$

Der elliptische Raum ist einfacher als der sphärische, indem sich seine geodätischen Linien schlechtweg als *gerade* Linien darstellen (die sich, wenn sie sich überhaupt treffen, immer nur in *einem* Punkte schneiden[9])); die Länge einer solchen geodätischen Linie ist $R\pi$, der

[8]) Unter „Raum" soll fortan durchaus ein dreidimensionales Gebiet verstanden werden (das in der vierdimensionalen „Welt" enthalten ist).

[9]) Deshalb steht der elliptische Raum voran, wenn man, wie ich das 1871 tat, von den Grundbegriffen der projektiven Geometrie ausgeht. Er ist dann dem hyperbolischen Raume (dem Raume von Bolyai und Lobatschewsky), wie dem parabolischen Raume (dem Euklidischen Raume) direkt nebengeordnet, und es heißt dieses Sachverhältnis gründlich verkennen, wenn man, wie es bei der Mehrzahl der Autoren immer wieder heißt, die Formeln (18) als eine „Abbildung" des sphärischen Raumes auf den „Euklidischen" bezeichnet. „Euklidisch" wird der Inbegriff der Wertsysteme dreier Variabeln x, y, z erst, wenn wir die Differentialform $dx^2 + dy^2 + dz^2$ hinzunehmen, — oder, für die gruppentheoretische Auffassung, wenn wir die Gesamtheit der projektiven Umformungen der x, y, z (deren Invariantentheorie die projektive Geometrie ist) durch die Untergruppe derjenigen

Gesamtinhalt des Raumes $R^3\pi^2$ (statt $2R\pi$, bez. $2R^3\pi^2$ im sphärischen Falle).

Bei der bloßen Angabe des Bogenelementes tritt der Unterschied der beiden Raumformen natürlich noch nicht hervor[10]). Ich kann das durch (16) und (17) gegebene $d\sigma^2$ ebensowohl für den elliptischen Raum gebrauchen wie seinen in x, y, z umgerechneten Wert:

$$(20) \qquad d\sigma^2 = \frac{R^2}{(x^2+y^2+z^2+R^2)^2}\{R^2(dx^2+dy^2+dz^2)+(y\,dz-z\,dy)^2 + (z\,dx - x\,dz)^2 + (x\,dy - y\,dx)^2\}$$

im sphärischen Falle, oder auch beidemal den in Polarkoordinaten ausgedrückten Wert:

$$(21) \qquad d\sigma^2 = R^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \cdot d\varphi^2 + \sin^2\vartheta\sin^2\varphi \cdot d\psi^2).$$

§ 5.

Einsteins „Zylinderwelt" und deren Gruppe.

Weiterhin soll $d\sigma^2$, wie im vorigen Paragraphen, — auch ohne daß wir das Koordinatensystem spezifizieren — kurzweg das Quadrat des Bogenelementes eines geschlossenen Raumes von der konstanten Krümmung $\frac{1}{R^2}$ bedeuten, möge dieser nun sphärisch oder elliptisch angenommen werden. Der Anstieg zu Einsteins räumlich geschlossener Welt wird sich dann einfach so vollziehen, daß wir

$$(22) \qquad ds^2 = dt^2 - \frac{d\sigma^2}{c^2}$$

setzen und übrigens t von $-\infty$ bis $+\infty$ (unter Ausschluß dieser Grenzen) laufen lassen. (Dimension und Vorzeichen dieses ds^2 stimmen mit unseren allgemeinen Verabredungen. Berechnen wir danach formal das Krümmungsmaß für den Raum $t =$ Konst., so erhalten wir $-\frac{c^2}{R^2}$. Dieses negative

ersetzen, welche die genannte Differentialform ungeändert lassen. — Ich bringe alle diese Dinge, die anderweitig bekannt genug sind, in der gegenwärtigen Mitteilung, die doch auch für Physiker bestimmt ist, zur Sprache, weil sie im Physikerkreise unter Nachwirkung der einseitigen, auf 1868 zurückgehenden Helmholtzschen Tradition immer noch wenig verbreitet scheinen.

[10]) Mit der Angabe des $d\sigma^2$ ist in der Tat der „Zusammenhang", den die zugehörige Raumform im Großen zeigt, noch nicht bestimmt. Auch dieses wird in der zeitgenössischen Literatur immer noch vielfach nicht beachtet. Für Räume konstanter Krümmung habe ich die einschlägigen Verhältnisse in einer Abhandlung von 1890 [Math. Annalen, Bd. 37 (siehe Abhandlung XXI dieser Ausgabe)], eingehend behandelt. Von Lehrbüchern geht hierauf insbesondere dasjenige von Killing ein (Einführung in die Grundlagen der Geometrie, Teil I, 1893). Ich verweise auch gern auf neuere Veröffentlichungen von Hadamard und Weyl.

Vorzeichen entspricht natürlich nur dem Umstande, daß das in (22) eingeführte ds für den genannten Raum rein imaginär wird; es liegt also kein Widerspruch gegen den vorigen Paragraphen vor, wo wir den Raum kurzweg als einen solchen konstanter positiver Krümmung bezeichnet haben.)

Wir fragen in erster Linie nach der größten kontinuierlichen Gruppe von Koordinatentransformationen, durch welche das ds^2 (22) in sich übergeht.

Von vornherein ist klar, daß zum mindesten eine G_7 solcher Transformationen existiert. Denn es gibt bereits eine kontinuierliche G_6, welche $d\sigma^2$ in sich überführt: um an (16) anzuknüpfen, der Inbegriff der orthogonalen Transformationen der ξ, η, ζ, ω von der Determinante $+1$. Zu ihr tritt dann noch die G_1, welche einer Vermehrung von t um eine beliebige Konstante entspricht. Die so gewonnene G_7 ist gewiß transitiv. d. h. man kann durch sie jeden Weltpunkt in jeden anderen, beispielsweise in den Punkt $t=0$, $\vartheta=0$ überführen (um von dem in (21) eingeführten Polarkoordinatensystem Gebrauch zu machen). Möge dieser Punkt kurzweg O heißen; um ihn herum ist noch eine kontinuierliche G_3 von Raumdrehungen möglich.

Wir behaupten nun, *daß es auch keine größere kontinuierliche Gruppe von Koordinatentransformationen gibt, die ds^2 in sich überführt, als eben unsere G_7*. Zu dem Zwecke genügt es zu zeigen, daß bei festgehaltenem O eben nur die genannte G_3 von Drehungen besteht. Zum Beweise führe man von O auslaufende „Riemannsche Normalkoordinaten" ein. Man erreicht dies beispielsweise, indem man t als Variable beibehält und statt der Polarkoordinaten ϑ, φ, ψ die Verbindungen einführt:

$$(23)\quad y_1 = \frac{R}{c}\,\vartheta\cdot\cos\varphi, \quad y_2 = \frac{R}{c}\,\vartheta\cdot\sin\varphi\cos\psi, \quad y_3 = \frac{R}{c}\,\vartheta\cdot\sin\varphi\sin\psi.$$

Schreiben wir noch für t der Gleichförmigkeit wegen y_4, so erhalten wir für ds^2

$$(24)\quad ds^2 = (dy_4^2 - dy_1^2 - dy_2^2 - dy_3^2) + \frac{c^2}{3R^2}\sum_{1,2,3}(y_\iota\, dy_\varkappa - y_\varkappa\, dy_\iota)^2$$

$$+ \text{ Glieder höherer Ordnung in den } y_1, y_2, y_3,$$

was zeigt, daß wir es in der Tat mit Normalkoordinaten zu tun haben. Was nun die Transformationen von ds^2 in sich angeht, so haben wir, da O festbleiben soll, gemäß der allgemeinen Theorie der Normalkoordinaten nur mehr nach der größten kontinuierlichen Gruppe *homogener linearer* Substitutionen der y zu fragen, welche dieses ds^2 in sich verwandelt. Die beiden hingeschriebenen Terme der ds^2 müssen dabei, ihrer Dimensionen halber, jeder für sich in sich übergehen. Es ist danach klar, daß y_4 ungeändert bleiben muß, während y_1, y_2, y_3 höchstens der kon-

tinuierlichen Gruppe ternärer orthogonaler Substitutionen von der Determinante 1 unterworfen werden können. Damit aber sind wir bereits am Ziele.

Nach dem so bewiesenen Satze ist es vielleicht gestattet, Einsteins räumlich-geschlossene Welt kurzweg als *Zylinderwelt* zu bezeichnen, weil sie sozusagen die Symmetrie eines Rotationszylinders besitzt: beliebige Verschiebung längs der t-Achse und beliebige Drehung um O bei festgehaltenem t. Natürlich ist die Analogie keine vollkommene, weil ebensowohl um einen beliebigen anderen Punkt (als O) gedreht werden kann. Ich möchte auch keinen bleibenden Term einführen, sondern nur ad hoc einen kurzen Ausdruck haben, der den Gegensatz gegen die im nächsten Abschnitt zu behandelnde de Sittersche Hypothese B markiert.

Im übrigen werden wir sagen dürfen, daß im vorliegenden Falle, nachdem wir uns über die Zeiteinheit und den Anfangspunkt der Zeitrechnung geeinigt haben, *der Zeitbegriff weiter keine Willkür enthält*[11]), oder, wenn man es lieber so ausdrückt, daß innerhalb der vierdimensionalen Welt *die dreifach ausgedehnten Räume $t=$ Konst. Mannigfaltigkeiten sui generis sind*. Also eine bemerkenswerte Annäherung an die Vorstellungsweisen der klassischen Mechanik.

Dies ist, wenn man die physikalische Überlegung erwägt, von der aus Einstein die Zylinderwelt eingeführt hat, von vornherein selbstverständlich. Um nämlich die Gesamtheit der Massenverteilungen und Geschehnisse der Welt vom höheren Standpunkte zu übersehen, fingiert Einstein zunächst einen Durchschnittszustand, bei welchem die Gesamtheit der Massen in dem als geschlossen vorausgesetzten Raume *inkohärent* und *gleichförmig verteilt* ist, und innerhalb dieses Raumes, während t von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft, *ruht*. Die wirklichen Massenverteilungen und Geschehnisse sollen als Abweichungen von diesem Durchschnittszustand aufgefaßt werden. An diesem Durchschnittzustand gemessen ist dann die Zeit (oder genauer die in verabredeter Einheit gemessene Zeitdifferenz zweier Weltpunkte) eo ipso etwas Absolutes, der Raum in sich homogen[12]). Ihren präzisen mathematischen Ausdruck aber findet diese Auffassung in der Invariantentheorie unserer G_7.

Besonders interessant ist es noch, zu sehen, wie sich unsere G_7 zur *Lorentzgruppe* G_{10} erweitert, man also zu den *Vorstellungen der „speziellen" Relativitätstheorie* kommt, wenn man das Krümmungsmaß unseres Raumes verschwindend nimmt, d. h. $R=\infty$ setzt. Unser ds^2 (22) reduziert sich

---

[11]) So auch bei de Sitter l. c. vermerkt.

[12]) Daß der Raum dabei noch nach Belieben sphärisch oder elliptisch vorausgesetzt werden kann, hat Einstein s. Z. ohne weiteres gutgeheißen. Übrigens behandelt auch de Sitter diese beiden Annahmen immer nebeneinander. Ebenso auch das neue Weylsche Buch (Raum, Zeit, Materie).

dann nämlich überhaupt auf seinen ersten Term[13]): $dy_4^2 - dy_1^2 - dy_2^2 - dy_3^2$ und bleibt danach bei allen homogenen linearen Substitutionen der dy_1, dy_2, dy_3, dy_4 ungeändert, welche diese *einzelne* quadratische Form in sich transformieren. *Damit hört $y_4 = t$ auf, eine für sich stehende Variable zu sein, kombiniert sich vielmehr bei den zulässigen Substitutionen mit den y_1, y_2, y_3, wie dies gerade das Wesen der speziellen Relativitätstheorie ausmacht.*

§ 6.

Die Feldgleichungen der Zylinderwelt.

Wir müssen noch bestätigen, daß die Annahme einer den ganzen Raum gleichförmig erfüllenden, ruhenden Materie, sagen wir von der konstanten Dichte ϱ, mit den für unser ds^2 aufgestellten Einsteinschen Feldgleichungen in der Tat verträglich ist. Gedacht ist dabei natürlich an die Feldgleichungen „mit λ-Glied", von denen bereits in meiner vorigen Note (Formel 57) die Rede war:

$$K_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} - \varkappa T_{\mu\nu} = 0. \tag{25}$$

Da die Verteilung der Materie im Raume eine durchaus gleichförmige sein soll, genügt es, die Verifikation für den Punkt O zu machen. Auch werden wir, da es sich um eine Relation zwischen Tensorkomponenten handelt, von vornherein das in Normalkoordinaten geschriebene ds^2 (24) zugrunde legen dürfen.

Von hier aus aber findet man ohne alle besondere Rechnung, vgl. die Note von Vermeil in den Göttinger Nachrichten vom 26. Oktober 1917 („Notiz über das mittlere Krümmungsmaß einer n-fach ausgedehnten Riemannschen Mannigfaltigkeit"):

$$K_{11} = K_{22} = K_{33} = -\frac{c^2}{R^2}, \quad K_{44} = \frac{3c^2}{R^2}, \tag{26}$$

während alle anderen $K_{\mu\nu}$ verschwinden.

Nun hat man für den Punkt O bei Zugrundelegung der Normalkoordinaten:

$$\text{alle } T_{\mu\nu} = 0, \text{ bis auf } T_{44} = c^2\varrho. \tag{27}$$

Daher ergeben die Feldgleichungen (25):

$$-\frac{c^2}{R^2} + \lambda = 0, \quad \frac{3c^2}{R^2} - \lambda - \varkappa c^2 \varrho = 0,$$

d. h.

$$\lambda = \frac{c^2}{R^2}, \quad \varrho = \frac{2}{\varkappa R^2}, \tag{28}$$

[13]) Nicht nur der zweite Term, sondern auch alle höheren Terme fallen fort.

was mit dem von Einstein selbst gegebenen Resultate stimmt (sofern man noch $c^2 = 1$ setzt).

Hierzu die Bemerkung, daß sich für K selbst folgender konstanter Wert berechnet:

$$K = \frac{6c^2}{R^2}. \tag{29}$$

Für die Anwendung auf das Weltall bleibt natürlich der unseren heutigen Kenntnissen der Stellarastronomie mit einiger Wahrscheinlichkeit entsprechende Wert von R abzuschätzen. Dies hat de Sitter in seiner wiederholt genannten Mitteilung ausgeführt. Ich führe gern sein Resultat an, damit man sieht, daß Einsteins kosmologische Betrachtung, deren mathematischen Inhalt allein wir hier behandeln, doch auch physikalisch nicht völlig in der Luft hängt. Man hat nach de Sitter

$$R = 10^{12} \text{ bis } 10^{13} \text{ Halbmessern der Erdbahn}$$

zu nehmen. Die Dichte ϱ wird so gering, daß nur etwa 10^{-26} gr Masse auf den Kubikzentimeter treffen, d. h. in etwa 100 Kubikzentimetern befindet sich die Masse eines Wasserstoffmoleküls. Die Konstante λ aber wird beiläufig $10^{-30}\,\text{sek}^{-2}$.

§ 7.

Die Integralsätze für die Zylinderwelt.

Nimmt man die Feldgleichungen mit λ-Glied, so sind, wie ich in § 7 meiner vorigen Note im Anschluß an Einsteins Entwicklungen ausführte, U_τ^σ und $t_\tau^\sigma = \frac{1}{\varkappa} U^{*\sigma}_{\tau}$, damit die Erhaltungssätze gewahrt bleiben, durch

$$\bar{U}_\tau^\sigma = U_\tau^\sigma + \lambda \delta_\tau^\sigma, \qquad \bar{t}_\tau^\sigma = t_\tau^\sigma + \frac{\lambda}{\varkappa}\delta_\tau^\sigma \tag{30}$$

zu ersetzen. Wir werden dementsprechend statt der Integrale I_τ, bez. I_τ^* des § 1 Integrale $\bar{I}_\tau$ bez. I_τ^* bilden und von vornherein sicher sein, daß diese Integrale, genommen über solche geschlossene Hyperflächen, welche einen Teil der Zylinderwelt abgrenzen, verschwinden.

Nunmehr wird der Begriff des *Querschnitts*, den wir in I für die damals betrachtete „Weltröhre" benutzten, zu übertragen sein. Wir werden als solchen eine sonst beliebige geschlossene Hyperfläche bezeichnen wollen, welche jede Weltlinie der Zylinderwelt, d. h. jede Parallele zur t-Achse, einmal schneidet. Das einfachste Beispiel bilden die „Räume" t = Konstans.

Wir werden dann wie früher den Doppelsatz haben:

1. daß die Integrale I_τ, bez. I_τ^*, genommen für einen beliebigen Querschnitt, einen von dessen Auswahl unabhängigen Wert haben;

2. daß dieser Wert auch nicht davon abhängt, welche Koordinaten man bei der Ausführung der über den Querschnitt hinerstreckten Integration benutzt.

Nur das wird sich ändern, daß es nicht mehr angeht, den Inbegriff der Integrale $\bar{I}_\tau$, bez. $\bar{I}_\tau^*$ als einen (freien) Vierervektor zu bezeichnen. Denn für diese Benennung fehlt, gemäß der Natur unseres G_7, die gruppentheoretische Grundlage. Jedenfalls gilt:

I_4, bez. $\bar{I}_4^*$ wird von Hause aus für sich stehen. Wir mögen seinen Wert, mit c^3 multipliziert, als *Gesamtenergie der Zylinderwelt* bezeichnen.

Um die Klassifikation der Größen $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, $\bar{I}_3$ aber (bez. der $\bar{I}_1^*$, $\bar{I}_2^*$, $\bar{I}_3^*$) brauchen wir uns nicht viel zu kümmern, da man sich auf verschiedenartige Weise überzeugen kann, *daß sie sämtlich Null sind.*

Erstlich folgt dies (wie auch Einstein betr. der $\bar{I}_\tau^*$ ausführt) aus Symmetriegründen. Ich resumiere die Sache von meinem Standpunkte aus. Wenn wir an den Normalkoordinaten y festhalten, so werden von den ∞^6 kontinuierlichen Transformationen, die den Raum $y_4 = 0$ in sich überführen, natürlich nur die ∞^3 sich als homogene lineare Substitutionen der y_1, y_2, y_3 darstellen, welche Drehungen des Raumes um O vorstellen. Aber es genügt für unsere Zwecke auch, die von ihnen gebildete Untergruppe zu betrachten. Ihr gegenüber werden sich die $\bar{U}_1^o$, $\bar{U}_2^o$, $\bar{U}_3^o$ (und ebenso die $\bar{U}_1^{*o}$, $\bar{U}_2^{*o}$, $\bar{U}_3^{*o}$) wie die Komponenten eines dreidimensionalen Tensors, also die $\bar{I}_1, \bar{I}_2, \bar{I}_3$ (bez. die $\bar{I}_1^*, \bar{I}_2^*, \bar{I}_3^*$) wie die Komponenten eines von O auslaufenden Dreiervektors verhalten. Nun ist aber die Zylinderwelt, wie wir wissen, um O herum räumlich isotrop. Besagter Dreiervektor muß also bei einer beliebigen Raumdrehung um O herum ungeändert bleiben, und das kann er nur, wenn seine sämtlichen Komponenten verschwinden.

Zweitens mögen wir den Weg direkter Rechnung beschreiten. Wir wählen als den Querschnitt, über den unsere Integrale zu erstrecken sind, irgendeine der Mannigfaltigkeiten $y_4 =$ Konst. Innerhalb derselben mögen irgendwelche Koordinaten w^I, w^{II}, w^{III} eingeführt gedacht werden. Die Integrale $\bar{I}_\tau$, bzw. $\bar{I}_\tau^*$ werden dann, gemäß den Darlegungen von § 3, in der abgekürzten Form geschrieben werden können:

$$\bar{I}_\tau = \iiint \left(T_\tau^4 + \frac{1}{\varkappa}\bar{U}_\tau^4\right)\sqrt{-g}\cdot dw^I\,dw^{II}\,dw^{III} \tag{31}$$

bez.

$$\bar{I}_\tau^* = \int\int\int (T_\tau^4 + \bar{t}_\tau^4)\sqrt{-g}\cdot dw^I\,dw^{II}\,dw^{III}. \tag{31*}$$

Die direkte Rechnung ergibt nun, daß die T_τ^4, $\bar{U}_\tau^4$, $\bar{t}_\tau^4$ für $\tau = 1, 2, 3$ sämtlich verschwinden.

Für die *Gesamtenergie der Zylinderwelt* haben wir mit diesen Formeln die Ausdrücke gewonnen:

$$\bar{J}_4 = c^3\iiint \left(T_4^4 + \frac{1}{\varkappa}\bar{U}_4^4\right)\sqrt{-g}\,dw^I\,dw^{II}\,dw^{III}, \tag{32}$$

bez.

$$\bar{J}_4^* = c^3\int\int\int (T_4^4 + \bar{t}_4^4)\sqrt{-g}\,dw^I\,dw^{II}\,dw^{III}. \tag{32*}$$

Der Energiebetrag stellt sich danach in dem einen wie dem anderen Falle als Summe zweier Summanden dar. — Wir mögen denjenigen Summanden, der T_4^4 entspricht, als *Massenenergie* bezeichnen, den anderen als die *Gravitationsenergie.*

Die Massenenergie berechnet sich jetzt ohne weiteres. T_4^4 nämlich wird, wie wir auch die w^I, w^{II}, w^{III} wählen mögen, gleich $c^2\varrho$, und $c^3\sqrt{-g}\,dw^I\,dw^{II}\,dw^{III}$ ist nichts anderes, als das Volumelement dV unseres Raumes $y_4 =$ Konst. *Die Massenenergie wird also einfach* $c^2\varrho V$, unter V das Gesamtvolumen des Raumes verstanden, also, je nachdem wir die sphärische oder die elliptische Hypothese annehmen wollen, $2\pi^2 R^3$ oder $\pi^2 R^3$.

Für die Gravitationsenergie aber hat Einstein in seinem Falle, also bei Zugrundelegung der Formel (32*), indem er räumliche Polarkoordinaten benutzte, *Null gefunden.* Das dV wird in diesem Falle $= \sin^2\vartheta \sin\varphi\cdot d\vartheta\,d\varphi\,d\psi$, das $\bar{t}_4^4$ (wenn ich die Einsteinsche Terme zusammenziehe) $\frac{\cos 2\vartheta}{\sin^2\vartheta}$, das Resultat der Integration wird Null, weil das $\int\cos 2\vartheta\cdot d\vartheta$ von 0 bis π zu nehmen ist. — Dieses Ergebnis ist gewiß sehr bemerkenswert. Da es von der Wahl der w^I, w^{II}, w^{III} unabhängig sein muß, fragt es sich, ob man statt der Polarkoordinaten, die eine (von Einstein nur angedeutete) längere mechanische Rechnung mit sich bringen, nicht zweckmäßigerweise andere einführen soll. Ich möchte vorschlagen, durchweg mit den überzähligen Koordinaten ξ, η, ζ, ω des § 4 (zwischen denen dann die Abhängigkeit $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \omega^2 = R^2$ besteht) zu operieren. Man wird dann natürlich die Grundformeln der Tensorrechnung auf den Fall abhängiger Koordinaten verallgemeinern müssen, wozu indes alle Ansätze in der Literatur vorliegen. Ich vermute, daß bei Durchführung dieser Umsetzung nicht nur das Integral über die Gravitationsenergie sämtlicher Volumelemente des Raumes, sondern bereits das dem einzelnen Volumelement entsprechende Differential verschwinden dürfte, wodurch doch eine verbesserte Einsicht in die Einfachheit des Einsteinschen Resultates erreicht wäre.

So viel über das $\bar{t}_4^4$. Das Neue, was ich nun auszuführen habe, ist, *daß wir ein ganz anderes Resultat bekommen* (und dies gleich ohne komplizierte Rechnung), *wenn wir an Stelle des* $\bar{t}_4^4$ *das* $\frac{1}{\varkappa}\,\bar{U}_4^4$, *also an Stelle von* $\bar{J}_4^*$ *das* $\bar{J}_4$ *wählen.* — $\bar{U}_4^4$ ist, wie wir wissen $= U_4^4 + \lambda$. Wenn wir nun auf die oben unter (5) wieder angeführte Formel für U_4^4 zurückgreifen, so zeigt sich, daß im Falle der Zylinderwelt, bei beliebiger Wahl der w^I, w^{II}, w^{III}, alle Terme bis auf den ersten fortfallen. U_4^4 wird einfach $= \frac{1}{2} K$ und also

$$\bar{U}_4^4 = \frac{1}{2} K + \lambda = \frac{4\,c^2}{R^2}. \tag{33}$$

Es hat also einen konstanten, aber nicht verschwindenden Wert. Infolgedessen wird bei Zugrundelegung der $\bar{U}_\tau^\sigma$ *die Gravitationsenergie der Zylinderwelt nicht etwa Null, sondern doppelt so groß wie die Massenenergie.*

Die hiermit festgelegte Sachlage hat ersichtlich eine über den Fall der Zylinderwelt hinausreichende Bedeutung. Sie zeigt am Beispiele, daß die Energiekomponenten $\frac{\bar{U}_\tau^\sigma}{\varkappa}$ auch für die *Integralformen* der Erhaltungssätze allgemein andere Resultate als die t_τ^σ geben. Dies ist, was ich in der Einleitung das Hineinspielen eines subjektiven Momentes in die Aufstellung der Energiebilanz genannt und in seiner Tragweite für abgeschlossene Systeme am Schlusse von § 3 näher erläutert habe. Das Ergebnis ist an sich gewiß in keiner Weise wunderbar, aber widerspricht doch dem Eindruck, den man beim ersten Durchlesen der Einsteinschen Note hat, als sei es ein ausschließlicher Rechtstitel der t_τ^σ, zu einfachen Integralsätzen zu führen.

III. Über de Sitters Hypothese *B*.

In seinen wiederholt genannten Mitteilungen, insbesondere in Note 3 der Monthly Notices, hat de Sitter die Annahme der Zylinderwelt, die er als Hypothese *A* bezeichnet, u. a. dahin modifiziert, daß er statt der Zylinderwelt — unter Aufrechterhaltung der für ds^2 charakteristischen Vorzeichen — eine Welt *konstanter Krümmung* setzte. Es ist dies die von ihm mit *B* bezeichnete Hypothese[14]; ich stelle mir die Aufgabe, die hierbei vorkommenden Verhältnisse durch möglichst einfache Formeln überzeugend darzulegen. Das Wesentliche meiner Überlegungen findet man

[14]) de Sitter bemerkt, daß ihm diese Annahme (die sich dem Mathematiker durch ihre Symmetrie empfiehlt) zunächst durch Ehrenfest vorgeschlagen worden sei. Ich selbst habe in meinen Vorträgen vom Frühjahr 1917 (deren Ausarbeitung in einer kleinen Zahl von Exemplaren verbreitet ist), indem ich über Einsteins damals eben erschienene „Kosmologische Betrachtungen" referieren wollte, aber die Formeln nicht genau verglich, unwillkürlich denselben Ansatz gemacht und mich dann später, als ich zur Ausarbeitung der physikalischen Folgerungen schritt, gewundert, daß die Resultate mit den von Einstein für seine Zylinderwelt angegebenen natürlich nicht stimmen wollten.

übrigens bereits in den Protokollen über die Sitzungen der Göttinger Mathematischen Gesellschaft vom Sommer 1918 angegeben, die in dem im Oktober 1918 ausgegebenen Hefte des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung abgedruckt sind (schräge pagina, S. 42—44). Vgl. auch eine Mitteilung an die Amsterdamer Akademie (Verslag vom 29. Sept. 1918).

§ 8.

Die geometrischen Grundlagen für die Welt konstanter Krümmung.

Wir werden der Annahme, daß die Welt eine Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung sei, in einfacher Weise gerecht werden, indem wir bei fünf Variabeln *mit Änderung eines Vorzeichens* die gewöhnliche Gleichung einer Kugel anschreiben, und auf dieser „Pseudokugel" euklidisch messen[15]. Dabei wollen wir indes, um die frühere Verabredung betr. die Dimension der Variabeln einzuhalten, den Radius nicht R, sondern $\frac{R}{c}$ nennen; wir werden ebenso, der Konsequenz halber, das übliche Vorzeichen von ds^2 umkehren. Ich schreibe also als Gleichung der Pseudokugel

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - v^2 + \omega^2 = \frac{R^2}{c^2} \tag{34}$$

und für das zugehörige ds^2:

$$-ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 - dv^2 + d\omega^2. \tag{35}$$

Die hierdurch gegebene *pseudosphärische Welt* $(\xi, \eta, \zeta, v, \omega)$ hat wegen des dem ds^2 zugesetzten Minuszeichens das konstante (Riemannsche) Krümmungsmaß $-\frac{c^2}{R^2}$. Im übrigen geht sie durch eine kontinuierliche G_{10} „pseudoorthogonaler" Substitutionen, d. h. geeigneter linearer homogener Substitutionen der $\xi, \eta, \zeta, v, \omega$ in sich über, nicht aber, wie man leicht nachweisen kann, durch eine noch umfassendere Gruppe.

An ihre Seite stellen wir dann gleich eine *pseudoelliptische Welt*, indem wir, unter Beibehaltung des in (35) gegebenen ds^2, schreiben:

$$x = \frac{R}{c}\cdot\frac{\xi}{\omega}, \quad y = \frac{R}{c}\cdot\frac{\eta}{\omega}, \quad z = \frac{R}{c}\cdot\frac{\zeta}{\omega}, \quad u = \frac{R}{c}\cdot\frac{v}{\omega}, \tag{36}$$

woraus rückwärts

$$\xi = \frac{Rx}{c\sqrt{x^2+y^2+z^2-u^2+\frac{R^2}{c^2}}}, \quad \eta = \;, \quad \zeta = \;, \quad v = \;, \tag{37}$$

$$\omega = \frac{R^2}{c^2\sqrt{x^2+y^2+z^2-u^2+\frac{R^2}{c^2}}}.$$

[15]) Die Vorschlagssilbe „pseudo" soll immer auf das Auftreten eines abweichenden Vorzeichens hinweisen.

Diese ξ, η, ζ, v, ω werden wir bei Behandlung der pseudoelliptischen Welt zum Homogenisieren der Gleichungen gebrauchen können (wie vielfach geschehen soll). Bemerken wir noch, daß

$$(38)\qquad x^2+y^2+z^2-u^2+\frac{R^2}{c^2}=\frac{R^2}{c^2}\frac{(\xi^2+\eta^2+\zeta^2-v^2+\omega^2)}{\omega^2}=\frac{R^4}{c^4\omega^2},$$

insofern wir uns, wie selbstverständlich, auf reelle Werte der ursprünglichen Koordinaten $\xi,\ldots,\omega$ beschränken, immer positiv ist.

Wir werden nun der Kürze wegen allein von dieser pseudoelliptischen Welt sprechen (also die pseudosphärische beiseite lassen) und ich muß schon den Leser bitten, mich hierbei durchaus *projektiver* Auffassungen bedienen zu dürfen, welche allein den in Betracht kommenden Verhältnissen wirklich gerecht werden. Ich will in dieser Hinsicht eine Reihe von Aussagen, die dem geschulten Geometer selbstverständlich sind, kurz zusammenstellen:

1. Es handelt sich in der pseudoelliptischen Welt um eine *projektive Maßbestimmung*, deren Fundamentalgebilde durch

$$(39)\qquad x^2+y^2+z^2-u^2+\frac{R^2}{c^2}=0$$

gegeben ist und, der Analogie nach, fortan kurz als (zweischaliges) Hyperboloid bezeichnet sein mag. Nach der Vorzeichenbestimmung (38) befinden wir uns *zwischen* den Schalen dieses Hyperboloids (d. h. in dem Weltstück, von dem aus reelle Tangentialkegel an das Hyperboloid laufen), in Übereinstimmung mit dem indefiniten Charakter unseres ds^2. In homogenen Koordinaten $\xi,\ldots$ geschrieben lautet die Gleichung des Hyperboloids:

$$(40)\qquad \xi^2+\eta^2+\zeta^2-v^2+\omega^2=0,$$

das Hyperboloid ist also der Schnitt des *Asymptotenkegels* unserer Pseudokugel mit unserem x, y, z, u-Gebiet.

2. Die kontinuierliche Schar der pseudoorthogonalen Substitutionen der $\xi, \eta, \ldots$ liefert für die x, y, z, u die größte kontinuierliche Gruppe von Kollineationen, durch welche unser Hyperboloid in sich übergeht.

3. Mögen neue Gebilde, welche durch eine einzelne lineare Gleichung zwischen den x, y, z, u (bez. durch eine entsprechende homogene Gleichung zwischen den $\xi, \eta, \ldots$) dargestellt werden, schlechtweg *Räume* heißen.

4. Räume, welche das fundamentale Hyperboloid nur in imaginären Punkten schneiden (wie z. B. $u=0$), werden elliptische Maßbestimmung schlechtweg aufweisen, also endlich ausgedehnt sein. Insofern wird man also unsere Welt als „räumlich geschlossen" bezeichnen dürfen und direkt neben die Einsteinsche Zylinderwelt stellen.

5. Als Grenzfälle treten neben diese Räume solche, welche das Hyperboloid in einem Punkte berühren, z. B. die Räume

$$(41)\qquad u=\pm\frac{R}{c},\ \text{oder, was dasselbe ist,}\ v\mp\omega=0.$$

Solche Räume mögen kurzweg Tangentialräume genannt werden.

6. Irgend zwei Tangentialräume umgrenzen, bei projektiver Auffassung, ein zusammenhängendes Weltstück, in dessen Inneres das Hyperboloid nicht eindringt und das man nach seiner Gestalt gemäß projektiver Auffassung zweckmäßigerweise als *Doppelkeil* bezeichnen wird. Dieser Doppelkeil ragt von zwei Seiten an das noch immer zweidimensionale Gebiet heran, das den beiden Tangentialräumen gemeinsam ist und das man daher zweckmäßigerweise die *Doppelschneide* (des Keils) nennen dürfte.

7. Man überblickt diese Sachlage am einfachsten, indem man die beiden Tangentialräume der Nr. 5 betrachtet (in welche man vermöge der G_{10} unserer Kollineationen noch jedes andere Paar zweier Tangentialräume auf ∞^4 Weisen überführen kann). Der Doppelkeil umfaßt dann die Punkte, für welche

$$(42)\qquad -\frac{R}{c}<u<+\frac{R}{c},\quad \text{d. h.}\ -1<\frac{v}{\omega}<+1.$$

Die Schneide wird durch diejenigen Punkte gebildet, für welche u unbestimmt wird, für die also v und ω gleichzeitig verschwinden (womit x, y, z unendlich werden).

8. Gemäß der Lehre von der projektiven Maßbestimmung gibt jeder solche Doppelkeil nun Anlaß, für irgend zwei seine Schneide enthaltenden elliptischen Räume einen reellen *Pseudowinkel* einzuführen.

9. Ich will der Deutlichkeit halber gleich an das Beispiel (41), (42) anknüpfen. Zwei zugehörige (ihrem ganzen Verlaufe nach dem Doppelkeil angehörige) elliptische Räume werden dann durch Gleichungen:

$$(43)\qquad u=u_1,\quad u=u_2\qquad \text{bez.}\ \frac{v}{\omega}=\frac{v_1}{\omega_1},\quad \frac{v}{\omega}=\frac{v_2}{\omega_2}$$

gegeben sein (wobei u_1 und u_2 zwischen $\pm\frac{R}{c}$ und $\frac{v_1}{\omega_1}$, $\frac{v_2}{\omega_2}$ zwischen ± 1 liegen). Sie bilden mit den *Flanken* des Doppelkeils, d. h. den beiden Tangentialräumen (42), zwei zueinander inverse Doppelverhältnisse, von denen wir etwa dieses herausgreifen wollen:

$$(44)\qquad Dv=\frac{u_1+R/c}{u_1-R/c}\cdot\frac{u_2-R/c}{u_2+R/c}=\frac{v_1+\omega_1}{v_1-\omega_1}\cdot\frac{v_2-\omega_2}{v_2+\omega_2}.$$

Als Pseudowinkel der beiden elliptischen Räume (43) *wird man dann den mit irgendeiner reellen Konstanten A multiplizierten Logarithmus dieses Doppelverhältnisses definieren.*

10. Mit Rücksicht auf die de Sitterschen Entwicklungen wollen wir $A = \frac{R}{2c}$ nehmen und wollen übrigens $u_2 = 0$ setzen, d. h. den Pseudowinkel von $u = 0$ beginnend nehmen. *Wir haben dann,* indem wir bei u_1, v_1, ω_1 noch den Index weglassen, *als Definitionsformel des Pseudowinkels*:

$$\varphi = \frac{R}{2c} \log \frac{R/c+u}{R/c-u} = \frac{R}{2c} \log \frac{\omega+v}{\omega-v} \tag{45}$$

und sehen deutlich, wie er von $-\infty$ bis $+\infty$ wächst, wenn u von $-\frac{R}{c}$ bis $\frac{R}{c}$ geht, d. h. den ganzen Doppelkeil durchwandert.

11. Für die Punkte der Schneide selbst, wo ω und v gleichzeitig verschwinden, wird φ naturgemäß völlig unbestimmt. Man hat damit, für die allgemeine analytische Auffassung, keine andere Singularität vor sich als beim Polarwinkel φ im Nullpunkte eines gewöhnlichen ebenen (Polar-)Koordinatensystems. Nur daß die beiden absoluten Richtungen, welche der Winkelbestimmung (im Sinne der projektiven Theorie) zugrunde liegen, im gewöhnlichen Falle imaginär, bei (45) aber reell sind[16]).

§ 9.

Einführung von Materie und Zeit.

Wir denken uns jetzt unser ds^2 (35) durch vier unabhängige, vorläufig noch beliebige Parameter w (für welche wir gern unsere x, y, z, u nehmen können) ausgedrückt:

$$ds^2 = \sum g_{\mu\nu}\, dw^{\mu}\, dw^{\nu}. \tag{46}$$

Da wir wissen, daß dieses ds^2 konstantes Riemannsches Krümmungsmaß hat, können wir die zugehörigen $K_{\mu\nu}$ nach den Entwicklungen von Herglotz[17]) gleich hinschreiben:

$$K_{\mu\nu} = \frac{3c^2}{R^2} \cdot g_{\mu\nu}. \tag{47}$$

Wir werden also den Einsteinschen Feldgleichungen mit dem λ-Glied

$$K_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} - \varkappa T_{\mu\nu} = 0 \tag{48}$$

genügen, indem wir

$$\lambda = \frac{3c^2}{R^2} \text{ und alle } T_{\mu\nu} = 0 \tag{49}$$

setzen, d. h. *überhaupt keine Materie annehmen.* Wir werden auch weiter unten sehen, daß man notwendig zu dieser Annahme geführt wird, wenn

---

[16]) Für die Nr. 8—11 möge der diesen Dingen ferner stehende Leser meine alten Entwicklungen in Bd. 4 der Math. Annalen [siehe Abh. XVI dieser Ausgabe] vergleichen (wo die in Betracht kommenden Beziehungen und Überlegungen mit aller Ausführlichkeit geschildert sind).

[17]) Sächsische Berichte von 1916, S. 202.

man von der Voraussetzung einer die Welt gleichförmig erfüllenden, inkohärenten, bei geeigneter Einführung einer „Zeit" t „ruhenden" Materie ausgeht. In der Tat kommt auch de Sitter zu diesem Resultat, nur daß er es etwas anders ausdrückt, wie man an Ort und Stelle nachsehen mag.

Natürlich entfernen wir uns mit dieser Formel (49) durchaus von Einsteins ursprünglicher physikalischer Absicht, welche darauf ausging, sich durch gleichförmige Verteilung der Materie über den Raum hin ein mittleres Weltbild zu verschaffen. Wir setzen uns aber auch überhaupt in mindestens formalen Widerspruch mit einem anderen Grundsatz von Einstein, demzufolge es keine von Null verschiedene Lösung der Gleichungen (48) ohne Annahme von Materie geben soll (vgl. die oben zitierte Note Einsteins vom März 1918). Dieser Grundsatz ist bei Einstein ursprünglich ohne Zweifel aus physikalischen Überlegungen erwachsen, er ist aber an sich rein mathematischer Natur, er wird also (worauf mich Einstein gelegentlich einer Korrespondenz selbst aufmerksam machte) durch die bloße Existenz unseres ds^2 (46) widerlegt. Allerdings kann man bemerken, daß die $g_{\mu\nu}$ dieses ds^2 (man führe die Rechnung etwa für die x, y, z, u aus) entlang dem fundamentalen Hyperboloid unendlich werden, was als ein Äquivalent für das Nichtvorhandensein von Materie an den nichtsingulären Stellen der Welt angesehen werden kann.

Handeln wir jetzt von der geeigneten Einführung einer „Zeit" t (die wir dann als w^{IV} wählen). Den Ausgangspunkt muß gemäß Einsteinscher Auffassung die Bemerkung bilden, daß die Welt, die wir suchen, als *statisches* System soll aufgefaßt werden können, d. h. daß ds^2 unverändert bleiben soll, wenn man, unter Festhaltung von w^{I}, w^{II}, w^{III}, das $w^{IV} = t$ um eine beliebige Konstante vermehrt. Es soll also die eingliedrige Gruppe:

$$\bar{w}^{I} = w^{II}, \quad \bar{w}^{I} = w^{II}, \quad \bar{w}^{III} = w^{III}, \quad \bar{w}^{IV} = w^{IV} + C \tag{50}$$

in der zehngliedrigen Gruppe, durch welche unser ds^2 in sich übergeht, enthalten sein. Es genügen einige geometrische Schlüsse, um einzusehen, daß eine solche eingliedrige Gruppe gleichbedeutend mit einer fortgesetzten Drehung unserer pseudoelliptischen Welt um eine festliegende, zweidimensionale Achse sein muß, daß t *darum* (nach geeigneter Wahl der Zeiteinheit) *bis auf eine additive Konstante mit dem Pseudowinkel eines Doppelkeils, wie er durch* (45) *definiert ist, übereinstimmen muß.* Wir haben also, wenn wir unter $v = 0$, $\omega = 0$ in früherer Weise irgendzwei Tangentialräume des fundamentalen Hyperboloids verstehen und auf die additive Konstante keinen Wert legen:

$$t = \frac{R}{2c} \log \frac{\omega+v}{\omega-v} \tag{51}$$

zu nehmen. Nun gibt es solcher Paare von Tangentialräumen ∞^6. *Wir haben danach ∞^6 Weisen, gemäß* (51) *ein t einzuführen,* — im Gegensatz zur Zylinderwelt, wo das t bis auf eine additive Konstante völlig festgelegt war, im Gegensatz auch zur speziellen Relativitätstheorie (der Lorentzgruppe), wo das t (immer nach Festlegung der Zeiteinheit und des Anfangspunktes) noch drei willkürliche Parameter enthält.

Konstatieren wir zunächst, daß wir mit (51) genau zu dem ds^2 kommen, welches de Sitter seiner Hypothese B zugrunde legt. Unter Benutzung räumlicher Polarkoordinaten schreibt nämlich de Sitter (sofern ich gleich die von mir sonst gebrauchten Buchstaben verwenden, auch das ds^2 mit dem früher verabredeten Vorzeichen nehmen darf):

$$(52)\qquad -ds^2 = \frac{R^2}{c^2}(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta\cdot d\varphi^2 + \sin^2\vartheta\sin^2\varphi\cdot d\psi^2) - \cos^2\vartheta\cdot dt^2$$

und dieses ds^2 entsteht aus dem in (35) an die Spitze gestellten:

$$-ds^2 = d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 - dv^2 + d\omega^2,$$

wenn ich, unter Einhaltung der Bedingung (34):

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - v^2 + \omega^2 = \frac{R^2}{c^2}$$

einfach ansetze:

$$(53)\qquad \begin{cases} \xi = \frac{R}{c}\sin\vartheta\cos\varphi, & \eta = \frac{R}{c}\sin\vartheta\sin\varphi\cos\psi, \\ \zeta = \frac{R}{c}\sin\vartheta\sin\varphi\sin\psi, & v = \frac{R}{c}\cos\vartheta\,\mathfrak{Sin}\,\frac{ct}{R}, \\ \omega = \frac{R}{c}\cos\vartheta\,\mathfrak{Cof}\,\frac{ct}{R}. \end{cases}$$

Hier sollen $\mathfrak{Sin}$ und $\mathfrak{Cof}$ in gewöhnlicher Weise hyperbolische Funktionen bedeuten. Es wird dann:

$$(54)\qquad \mathfrak{Tang}\,\frac{ct}{R} = \frac{v}{\omega},$$

was in der Tat mit Formel (51) übereinstimmt.

Ich werde das Stück unserer pseudoelliptischen Welt, welches gemäß (53) durchlaufen wird, wenn man ϑ, φ, ψ innerhalb der üblichen Grenzen, t aber von $-\infty$ bis $+\infty$ laufen läßt, eine *de Sittersche Welt* nennen. Gemäß (54) durchläuft $\frac{v}{\omega}$ dabei nur die Werte von -1 bis $+1$. Offenbar ist diese de Sittersche Welt nichts anderes, als der *Doppelkeil* der vorigen Paragraphen. Seine beiden „Flanken", $v - \omega = 0$ und $v + \omega = 0$, erscheinen als unendlich ferne Zukunft, bez. unendlich ferne Vergangenheit. Seine Kante aber (die für die allgemeine Auffassung der pseudoelliptischen Welt aus lauter gewöhnlichen Punkten besteht) erscheint als etwas Singuläres, nämlich als Ort solcher Weltpunkte, für welche t den Wert $^0/_0$ annimmt. —

Ich habe diese Verhältnisse schon an der oben genannten Stelle des Jahresberichts der Deutschen Mathematiker-Vereinigung berührt (Vortrag vor der Göttinger Mathematischen Gesellschaft vom 11. Juni 1918). Um die paradoxen Beziehungen, welche für die physikalische Auffassung vorliegen, klar als solche hervortreten zu lassen, habe ich mich damals folgendermaßen geäußert: „Zwei Astronomen, die, beide in einer de Sitterschen Welt lebend, mit verschiedenen de Sitterschen Uhren ausgestattet wären, würden sich hinsichtlich der Realität oder Imaginärität irgendwelcher Weltereignisse in sehr interessanter Weise unterhalten können". Gemeint ist, daß die Doppelkeile, welche aus der pseudoelliptischen Welt durch verschiedene Paare von Tangentialräumen der fundamentalen Hyperboloide ausgeschnitten werden, immer nur Stücke gemein haben, mit anderen Stücken übereinander hinausgreifen. —

Im übrigen kann, wer will, sich über die Einzelheiten der de Sitterschen Welt leicht genauer orientieren. Die Welt reicht nur in den beiden Punkten: $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, $v \mp \omega = 0$ an das fundamentale Hyperboloid heran. Alle Weltlinien sind solche Kegelschnitte, welche das Hyperboloid in diesen beiden Punkten berühren (deren Ebene also die eindimensionale Achse $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ enthalten). Es gibt nur noch eine kontinuierliche G_4, welche die de Sittersche Welt in sich transformiert, entsprechend der Substitution $\bar{t} = t + C$ verbunden mit der kontinuierlichen G_3 der unimodularen orthogonalen Substitutionen von ξ, η, ζ. Hierbei ist $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ invariant, die Gruppe der de Sitterschen Welt ist also nicht mehr transitiv. Die „Achse" $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ und die „Schneide" $v = 0$, $\omega = 0$ sind invariante Gebilde.

Zum Schluß überzeugen wir uns noch, daß die Dichte ϱ der ruhenden, inkohärenten Materie, welche die de Sittersche Welt gleichförmig erfüllen soll, in der Tat notwendigerweise $= 0$ gesetzt werden muß. Bleiben wir nämlich bei unseren „statischen" Koordinaten. Wir haben dann für alle anderen Indexkombinationen μ, ν:

$$\lambda g_{\mu\nu} = \frac{3c^2}{R^2} g_{\mu\nu}$$

und nur für $\mu = 4$, $\nu = 4$:

$$\lambda g_{44} = \frac{3c^2}{R^2} g_{44} + \varkappa c^2 \varrho,$$

woraus eindeutig

$$\lambda = \frac{3c^2}{R^2}, \qquad \varrho = 0$$

folgt, wie wir in Formel (49) bereits angenommen hatten. —

Alle diese Resultate sind in voller Übereinstimmung mit de Sitters eigenen Angaben. Sie widersprechen aber dem Einwande, den Einstein in seiner Mitteilung vom März 1918 gegen de Sitter erhob und den dann Weyl in seinem Buche[18]), sowie neuerdings in einem besonderen Aufsatz in der Physikalischen Zeitschrift[19]) durch ausführliche Rechnungen gestützt hat. Beide Autoren finden, daß entlang der Schneide des Doppelkeils (ich bleibe der Kürze halber in meiner Ausdrucksweise) Materie vorhanden sein müsse. Ich habe die Richtigkeit der Weylschen Rechnungen nicht nachgeprüft, schließe mich aber gern der Auffassung an, die mir Einstein brieflich aussprach, daß die Verschiedenheit der beiderseitigen Resultate in der Verschiedenheit der benutzten Koordinaten begründet sein muß. Was ich, unter Verwendung der ξ, η, ζ, v, ω, als einzelnen Punkt der Schneide bezeichne, ist bei Benutzung der ϑ, φ, ψ, t (wegen des unbestimmt bleibenden Wertes von t) ein einfach ausgedehntes Gebiet. Es sollte nicht schwierig sein, hierüber volle Aufklärung zu schaffen.

Mein abschließendes Votum über die de Sitterschen Angaben aber ist, daß mathematisch — jedenfalls bis auf diesen einen noch nicht völlig geklärten Punkt [den ich gern in allgemeiner Weise erläutert sehen möchte] — alles in Ordnung ist, man aber zu physikalischen Folgerungen geführt wird, welche unserer gewöhnlichen Denkweise und jedenfalls den Absichten, welche Einstein bei Einführung der räumlich geschlossenen Welt verfolgte, widersprechen.

[18]) Raum, Zeit, Materie. S. 225.

[19]) 1919, Nr. II (vom 15. Januar 1919).

Druck von Oscar Brandstetter in Leipzig.