XIII. Zur geometrischen Deutung des Abelschen Theorems der hyperelliptischen Integrale.

[Math. Annalen, Bd. 28 (1886).]

In der im vorigen Annalenbande abgedruckten Arbeit *über Konfigurationen, welche der Kummerschen Fläche zugleich eingeschrieben und umgeschrieben sind* [vgl. die vorstehende Abhandlung XII], entwickele ich im Anschlusse an die Untersuchungen von Herrn Rohn u. a. einen Satz, demzufolge eine gerade Linie mit den elliptischen Koordinaten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sich entweder um einen festen Punkt der zugrunde liegenden Kummerschen Fläche dreht oder in einer festen Tangentialebene derselben fortschreitet, sofern bei irgendwie fixierten Vorzeichen die Differentialgleichungen des Abelschen Theorems erfüllt sind:

$$(1) \qquad \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi(\lambda_\alpha)}} = 0,$$

wo $\nu = 0, 1$ zu nehmen ist und $\varphi(\lambda)$ das Produkt bezeichnet:

$$\varphi(\lambda) = \prod_{i=1}^{6} (\lambda - k_i).$$

Ich berühre ferner (S. 138 daselbst, Fußnote) eine andere Deutung desselben Theorems, die sich für Differentiale von analogem Aufbau in der Dissertation des Herrn Domsch findet[1]) und auf deren Inhalt ich weiter unten noch genauer eingehen werde. Die folgenden Entwicklungen, die ich bei Gelegenheit zusammenstellte, haben den Zweck, die allgemeinen auf konfokale Mannigfaltigkeiten zweiten Grades eines beliebig ausgedehnten Raumes bezüglichen Sätze aufzuweisen, unter welche sich die gesamten Theoreme subsumieren. Hierdurch wird, wie ich hoffe, nicht nur über die zunächst in Betracht kommenden liniengeometrischen Theoreme und eine große Zahl ähnlicher Beziehungen neue Klarheit verbreitet, sondern insbesondere auch unsere allgemeine Kenntnis der konfokalen Mannigfaltigkeiten zweiten Grades durch Aufweisung einer merkwürdigen Gruppierung gewisser in ihnen enthaltener linearer Räume wesentlich vervollständigt. Letzteres

[1]) 1885, vgl. Grunerts Archiv, Neue Serie. Teil II.

aber erscheint um so wertvoller, als die Gruppierung der auf quadratischen Mannigfaltigkeiten enthaltenen linearen Räume immer noch wenig untersucht ist, während sie doch in verschiedenem Betracht von durchschlagender Wichtigkeit sein muß; man vergleiche die Schlußbemerkungen der [im 28. Bande der Math. Annalen] vorangehenden Arbeit: *Über die Auflösung der allgemeinen Gleichungen sechsten und siebenten Grades.*[2]) — Um die Darstellung nicht zu abstrakt zu gestalten, erörtere ich die zur Verwendung kommenden Schlußweisen zunächst ausführlich für den dreidimensionalen Punktraum, übertrage dieselben dann in großen Zügen auf den Raum von beliebig vielen Dimensionen und steige schließlich zum Falle der Liniengeometrie wieder herab. Mein Grundsatz ist dabei, im Gegensatze zu sonstigen diese Fragen betreffenden Arbeiten möglichst wenig zu rechnen, weshalb ich denn auch in § 1 und anderwärts auf den Beweis sonst bekannter Theoreme aufs neue eingehe.

§ 1.

Die konfokalen $F^{(2)}$ des R_3 und der auf sie bezügliche Fundamentalsatz.

Indem ich von der Berücksichtigung irgendwelcher metrischer Beziehungen oder Realitätsdiskussionen im folgenden durchweg absehe, definiere ich hier, was fortan eine Schar konfokaler Flächen zweiten Grades des dreifach ausgedehnten Punktraums genannt werden soll, durch folgende Gleichung:

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{4} \frac{x_i^2}{\lambda - k_i} = 0,$$

in der die k_i irgendwie gegebene voneinander verschiedene Größen, die x_i aber beliebige Tetraederkoordinaten bedeuten sollen. Als elliptische Koordinaten des Punktes x bezeichne ich die Wurzeln $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (allgemein λ_a), welche (2) bei festgehaltenen x_i für λ als Unbekannte ergibt. Schreiben wir dann:

$$(3) \qquad \varphi(\lambda) = \prod_{i=1}^{4} (\lambda - k_i) \cdot (\lambda - a)(\lambda - b)$$

und verlangen das Bestehen der Abelschen Differentialgleichungen:

$$(4) \qquad \sum_{a=1}^{3} \frac{\pm \lambda_a^\nu \cdot d\lambda_a}{\sqrt{\varphi(\lambda_a)}} = 0, \qquad (\nu = 0, 1),$$

so bewegt sich der Raumpunkt λ, einem Satze zufolge, der wohl zuerst von Liouville aufgestellt wurde[3]) und der hier als *Fundamentalsatz* be-

[2]) [Vgl. Bd. II dieser Ausgabe.]

[3]) Journal des Mathématiques, sér. I, Bd. 12 (1847). Wegen weiterer hier anknüpfender Entwicklungen und insbesondere der einschlägigen Literatur vgl. Staude in Bd. 22 der Math. Ann. (*Geometrische Deutung des Additionstheorems der hyperelliptischen Integrale usw.*, 1883).

zeichnet werden soll, *auf einer geraden Linie, welche die Flächen $\lambda = a$ und $\lambda = b$ berührt.* Aus dem in der Einleitung bemerkten Grunde und mit Rücksicht auf die Verallgemeinerungen, die ich für höhere Fälle beabsichtige, gebe ich hier zunächst einen neuen, möglichst einfachen Beweis dieses Satzes.

Mein Beweis ruht darauf, *das algebraische Gebilde, welches von der Gesamtheit der Schnittpunkte einer beliebigen Raumgeraden mit den Flächen* (2) *gebildet wird, in doppelter Weise aufzufassen.* Erstlich nehme ich, wie es am nächsten liegt, je diejenigen drei (durch die Werte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ des zugehörigen λ unterschiedenen) Schnittpunkte zusammen, welche in den nämlichen Punkt der Raumgeraden fallen. Das algebraische Gebilde stellt sich dann als dreifache Überdeckung unserer Raumgeraden dar, wobei die drei Überdeckungen an denjenigen Stellen Verzweigungspunkte haben, an denen die Raumgerade der developpablen Fläche begegnet, welche den Flächen (2) gemeinsam umgeschrieben ist. Als Zahl dieser Stellen ergibt sich auf Grund bekannter Abzählungen acht, woraus sich das Geschlecht des algebraischen Gebildes als zwei berechnet. Wir schließen sofort, daß es zwei zugehörige überall endliche Differentiale gibt, die wir $du^{(1)}$, $du^{(2)}$ nennen wollen. Indem wir noch durch einen unteren Index 1, 2 oder 3 unterscheiden, ob wir uns in der ersten oder der zweiten oder dritten Überdeckung der Raumgeraden befinden (ob wir uns also die in den Differentialen vorkommende algebraische Funktion des Ortes, λ, gleich λ_1 oder gleich λ_2 oder λ_3 gesetzt denken wollen) haben wir in bekannter Weise bei beliebigem Fortschreiten auf der Raumgeraden:

$$(5)\qquad du_1^{(1)} + du_2^{(1)} + du_3^{(1)} = 0, \qquad du_1^{(2)} + du_2^{(2)} + du_3^{(2)} = 0.$$

Wir wenden uns jetzt zur zweiten Auffassung unseres algebraischen Gebildes. Dieselbe ruht darauf, daß wir immer diejenigen zwei Stellen desselben zusammengenommen denken, welche derselben Fläche λ der Schar (2) angehören. Wir erhalten so eine zweifache Überdeckung des Gebietes der Variablen λ, wobei, damit das Geschlecht 2 herauskomme, sechs Verzweigungsstellen auftreten müssen, solchen Flächen zweiten Grades der Schar (2) entsprechend, die unsere Raumgerade in zusammenfallenden Punkten treffen. Vier dieser letzteren Flächen sind a priori bekannt: es sind die doppeltzählenden Ebenen des Koordinatentetraeders der x_i, welche unter der Schar (2) für $\lambda = k_1, k_2, k_3, k_4$ enthalten sind; die anderen beiden (die beliebig liegen können) nennen wir, um den Anschluß an die Formeln (3) und (4) zu erzielen, $\lambda = a$ und $\lambda = b$. Ich will auch die Bezeichnung $\varphi(\lambda)$ der Formel (3) wieder aufnehmen. Dann ist vermöge unserer neuen Auffassungsweise ersichtlich, daß die beiden soeben eingeführten Differentiale $du^{(1)}$, $du^{(2)}$ in folgende Form gesetzt werden können:

$$(6)\qquad du^{(1)} = \frac{\pm d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}, \qquad du^{(2)} = \frac{\pm \lambda d\lambda}{\sqrt{\varphi(\lambda)}}.$$

Dies aber in (5) *eingetragen ergibt die Formeln* (4), *womit der gewünschte Beweis der letzteren erbracht ist.* In der Tat ist ja die „beliebige" Raumgerade, mit der wir unseren Beweis begannen, im Verlaufe des Beweises von selbst in eine solche übergegangen, welche die Flächen $\lambda = a$ und $\lambda = b$ berührt.

Übrigens ist leicht zu sehen, daß wir unseren Fundamentalsatz noch ein wenig strenger formulieren können. Man beachte, daß von einem beliebigen Raumpunkte aus an zwei gegebene Flächen zweiten Grades vier gemeinsame Tangenten möglich sind, während die Differentialgleichungen (4) vermöge der in ihnen unbestimmt bleibenden Vorzeichen gerade auch vier Fortschreitungsrichtungen vom Punkte λ aus bestimmen. Wir wußten bisher nur, daß unsere Differentialgleichungen tatsächlich erfüllt sind, wenn wir auf einer der genannten gemeinsamen Tangenten fortschreiten; wir sehen jetzt, daß sie auch *auf keine andere Weise* erfüllt werden können. *Die gemeinsamen Tangenten der Flächen $\lambda = a$ und $\lambda = b$ sind also als Integralkurven der Differentialgleichungen* (4) *charakterisiert.* In diesem verschärften Sinne soll fortan unser Fundamentalsatz aufgefaßt sein.

§ 2.

Die erste Ausdehnung des Fundamentalsatzes.

Statt der Gleichungen (3), (4) betrachte ich jetzt einen Augenblick die folgenden:

$$(7)\qquad \varphi_1(\lambda) = \prod_{i=1}^{4} (\lambda - k_i), \qquad \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\pm d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi_1(\lambda_\alpha)}} = 0,$$

wo in $\varphi_1(\lambda)$ die beiden in dem früheren $\varphi(\lambda)$ enthaltenen Faktoren $(\lambda - a)$ und $(\lambda - b)$, die ich fortan als *willkürliche* Faktoren bezeichne, weggeblieben sind und dafür nur *eine* Differentialgleichung geschrieben ist, bei der sich das Summenzeichen auf die beiden Indizes 1 und 2 beschränkt, so daß λ_3 als konstant zu gelten hat. Welches ist die geometrische Deutung dieses Gleichungssystems? Da wir $\lambda_3 = \text{Const.}$ gesetzt haben, so liefert die Integration von (7) jedenfalls solche Kurven, die ganz auf einer, übrigens beliebigen $F^{(2)}$ unserer Schar verlaufen. Man erkennt jetzt leicht, *daß es sich einfach nur um die geradlinigen Erzeugenden der $F^{(2)}$ handelt*[4]). Der Beweis läßt sich genau so gliedern, wie beim Satze des vorigen Paragraphen. Wir haben unsere Aufmerksamkeit wieder einem einfach ausgedehnten algebraischen Gebilde zuzuwenden, nämlich demjenigen, das von

[4]) Dieser Satz ist keineswegs neu; man findet ihn bespielsweise in Herrn Darboux' Buche: *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques* (Paris 1873), auf welches ich hier um so lieber verweisen will, als es mannigfache Beziehungspunkte auch zu den folgenden Paragraphen des Textes darbietet.

den Schnittpunkten einer geradlinigen Erzeugenden unserer festen $F^{(2)}$ mit den übrigen $F^{(2)}$ der konfokalen Schar gebildet wird. Dieses Gebilde kann einmal so aufgefaßt werden, daß es die gewählte Erzeugende mehrfach (und zwar doppelt) überdeckt, andererseits wieder so, daß jeder Fläche λ zwei seiner Elemente zugeordnet werden, wobei sich Verzweigungsstellen bei $\lambda = k_1, k_2, k_3, k_4$ einstellen. Der Vergleich beider Auffassungsweisen ergibt sofort, daß die Differentialgleichung (7) beim Fortschreiten auf einer geradlinigen Erzeugenden der festen $F^{(2)}$ tatsächlich erfüllt ist. Nun bietet (7) aber ebenso viele Vorzeichenkombinationen dar, als die Zahl der Erzeugenden beträgt, die auf $\lambda_3 = \text{Const.}$ durch einen beliebigen Punkt laufen. Die in Rede stehenden Erzeugenden sind also wieder auch die einzigen Kurven, die der vorgeschriebenen Differentialbeziehung genügen.

Diese Betrachtung und Interpretation der Gleichungen (7) sollen hier nur vorläufige Bedeutung haben. Was wir eigentlich anstreben, ist die geometrische Interpretation der folgenden Gleichung:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\pm d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi_1(\lambda_\alpha)}} = 0, \tag{8}$$

in der $\varphi_1(\lambda)$ dieselbe Bedeutung hat, wie in (7), die Summation über α aber von 1 bis 3 erstreckt ist, also sämtliche λ als beweglich gelten. Offenbar handelt es sich jetzt darum, daß der Punkt $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ auf gewissen *Flächen* fortschreitet, die den Raum so erfüllen, daß durch jeden Punkt vier derselben laufen. Aus dem Umstande, daß wir es in (8) mit der Differentialgleichung des Additionstheorems des elliptischen Integrals erster Gattung zu tun haben, werden wir sofort schließen, daß es sich um *algebraische* Flächen handelt. Aber welches ist die nähere Definition dieser Flächen? Ich sage, daß wir *Ebenen* finden, und zwar keine anderen Ebenen, als *die gemeinsamen Tangentialebenen der $F^{(2)}$ unserer konfokalen Schar.*

Der nächstliegende Beweis dieses Satzes beruht auf einer direkten Verallgemeinerung der Betrachtungen des vorigen Paragraphen. Da es bekannt ist, daß es gemeinsame Tangentialebenen unserer $F^{(2)}$ gibt und daß diese Ebenen eine Devoloppable vierter Klasse umhüllen, so genügt es, zu verifizieren, daß die Differentialgleichung (8) erfüllt ist, wenn wir in einer solchen Ebene, die wir als gegeben betrachten, fortschreiten. Dies aber gelingt sofort, wenn wir beachten, daß die Paare geradliniger Erzeugender, in denen eine solche Ebene von unseren konfokalen $F^{(2)}$ geschnitten wird, innerhalb der Ebene eine Kurve dritter Klasse vom Geschlechte Eins umhüllen, zu der ein bestimmtes überall endliches Integral gehört, das wir u nennen, — daß für je drei in einem Punkte der Ebene zusammenlaufende Tangenten der Kurve dem Abelschen Theoreme zufolge

$$u_1 + u_2 + u_3 = \text{Const.}$$

ist, — daß endlich du vermöge der Beziehung der Kurve auf das Gebiet der Variablen λ in die Form gesetzt werden kann:

$$du = \frac{d\lambda}{\sqrt{\varphi_1(\lambda)}}.$$

Der Unterschied dieser Betrachtung von der früheren ist ersichtlich nur der, daß jetzt eine ebene Kurve zugrunde gelegt wird, wo wir damals eine mehrfach überdeckte Gerade vor uns hatten.

Der hiermit angedeutete Beweis ist an sich so einfach wie möglich. Er setzt aber voraus, daß wir über die Existenz und Haupteigenschaften der gemeinsamen Tangentialebenen unserer $F^{(2)}$ bereits unterrichtet sind, und eignet sich daher nicht für die weiterhin beabsichtigten Verallgemeinerungen, bei denen uns solche Vorkenntnisse nicht zu Gebote stehen. Ich entwickle daher hier eine andere Beweismethode, bei welcher die Existenz der gemeinsamen Tangentialebenen unserer $F^{(2)}$ selbst erst aus (8) erschlossen wird.

Die neue Methode, welche ich darzulegen habe, geht davon aus, Gleichung (8) mit Gleichung (7) zu vergleichen und die für (7) gefundene Interpretation als bekannt vorauszusetzen. Gleichung (7) geht aus Gleichung (8) hervor, indem wir λ_3 konstant nehmen. Wir schließen, daß die durch (8) definierten Flächen die Eigenschaft haben, jede Fläche $\lambda_3 = \text{Const.}$, d. h. schlechthin jede $F^{(2)}$ unserer konfokalen Schar, nach Kurven schneiden, welche (7) befriedigen, d. h. nach geradlinigen Erzeugenden zu schneiden. Unsere Fläche ist also jedenfalls vollständig durch gerade Linien überdeckt. Nun gehen aber durch jeden Raumpunkt drei $F^{(2)}$ der konfokalen Schar. *Unsere Fläche ist also sogar dreifach durch gerade Linien überdeckt.* Dann aber muß sie aus evidenten Gründen eine Ebene sein. Denn eine krumme Fläche kann nie mehr als zwei Scharen geradliniger Erzeugender aufweisen (Hyperboloid). Wir finden also *Ebenen*, und zwar *Ebenen, welche sämtliche $F^{(2)}$ unserer Schar nach geraden Linien schneiden*, d. h. gemeinsame Tangentialebenen der $F^{(2)}$ unserer Schar, w. z. b. w.

Wir müssen noch ausführen, daß mit den so definierten Ebenen sämtliche gemeinsame Tangentialebenen unserer $F^{(2)}$ erschöpft sind. Dies gelingt folgendermaßen. Wir betrachten irgendzwei durch einen Punkt laufende $F^{(2)}$ unserer Schar und die zweimal zwei Erzeugenden, welchen auf diesen $F^{(2)}$ durch den Punkt hindurchgehen. Soll eine gemeinsame Tangentialebene sämtlicher konfokaler $F^{(2)}$ durch den Punkt hindurch möglich sein, so muß dieselbe jede der beiden vorgenannten $F^{(2)}$ nach einer durch den Punkt hindurchlaufenden Erzeugenden schneiden, sie muß also eine der beiden durch den Punkt hindurchgehenden Erzeugenden der einen Fläche mit einer der beiden entsprechenden Erzeugenden der anderen Fläche verbinden. Die Zahl der durch den Punkt hindurchlaufenden gemeinsamen

Tangentialebenen unserer $F^{(2)}$ kann also nicht größer als vier sein, und da vier gerade auch die Zahl der bei (8) möglichen Vorzeichenkombinationen ist, so ist die geforderte Ergänzung unseres Gedankenganges erbracht:

Durch jeden Raumpunkt hindurch gehen der Differentialgleichung (8) *entsprechend vier Ebenen, welche geometrisch als gemeinsame Tangentialebenen der $F^{(2)}$ der konfokalen Schar charakterisiert sind.*

Es ist sehr merkwürdig, daß die Ergänzung, welche wir unserem zweiten Beweisgange hinzufügten, zu derjenigen, welche beim ersten Beweisgange nötig war, gewissermaßen komplementär ist. In der Tat handelte es sich jetzt darum, daß geometrisch nicht mehr Ebenen einer gewissen Definition geliefert werden, als es Ebenen gibt, die der Differentialgleichung (8) genügen, während wir früher zu zeigen hatten, daß unsere Differentialgleichungen nicht etwa noch andere Integralmannigfaltigkeiten zulassen als diejenigen, deren geometrische Natur wir bereits erkannten.

§ 3.

Die zweite Ausdehnung des Fundamentalsatzes.

Die zweite Ausdehnung, die ich dem Fundamentalsatze zu geben beabsichtige, bezieht sich auf folgendes: es soll sich darum handeln, anzugeben, wie sich die Bedeutung der Gleichungen (4) oder (8) modifiziert, wenn wir in $\varphi(\lambda)$ oder $\varphi_1(\lambda)$ statt eines oder mehrerer Faktoren $(\lambda - k_i)$ *willkürliche* Faktoren $(\lambda - c)$, $(\lambda - d)$ usw. einführen.

Um die so gestellte Frage in einfachster Weise zu beantworten, bediene ich mich einer geometrischen Transformation. Ich setze:

$$x_i^2 = \xi_i. \tag{9}$$

Dann geht Gleichung (2) der konfokalen Flächen zweiten Grades in folgende über:

$$\sum_{i=1}^{4} \frac{\xi_i}{\lambda - k_i} = 0, \tag{10}$$

d. h. die Schar der Flächen in die Schar der einfach unendlich vielen Oskulationsebenen einer Raumkurve dritter Ordnung. Für Gleichung (4) aber, die wir in unveränderter Form hersetzen:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi(\lambda_\alpha)}} = 0, \quad \left(\nu = 0, 1;\ \varphi(\lambda) = \prod_{i=1}^{4} (\lambda - k_i)(\lambda - a)(\lambda - b)\right). \tag{11}$$

ergibt sich nach leichter Überlegung[5]), daß sie diejenigen *Kegelschnitte* des Raumes der ξ definiert, welche die Ebenen (10), die folgenden Parameterwerten entsprechen:

$$\lambda = k_1, k_2, k_3, k_4, a, b,$$

berühren. Gleichung (8) hingegen, die ich ebenfalls noch einmal herschreibe:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\pm d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi_1(\lambda_\alpha)}} = 0, \quad \left(\varphi_1(\lambda) = \prod_{i=1}^{4} (\lambda - k_i)\right), \tag{12}$$

bedeutet jetzt diejenigen *Steinerschen Flächen*, welche zur Raumkurve dritter Ordnung (10) in der Beziehung stehen, daß sie eine beliebige Oskulationsebene derselben in zwei Kegelschnitten schneiden, die vier Oskulationsebenen aber, deren Parameter λ bez. gleich k_1, k_2, k_3, k_4 sind, nach Erstreckung ganzer Kegelschnitte berühren.

Der Gewinn, den wir hiernach durch die Substitution (9) erzielt haben, liegt darin, daß die Unterscheidung der Faktoren $(\lambda - k_i)$ und der willkürlichen Faktoren $(\lambda - a)$ usw. für die geometrische Deutung gegenstandslos geworden ist. Führen wir statt etwelcher Faktoren $(\lambda - k_i)$ neue willkürliche Faktoren $(\lambda - c)$ usw. ein, so ist der Erfolg augenscheinlich der, daß in den gerade ausgesprochenen Sätzen an Stelle der Ebenen $\lambda = k_i$ usw. die Ebenen $\lambda = c$ usw. zu nennen sind, während die Form der Sätze selbst völlig ungeändert bleibt. Dies legen wir jetzt zugrunde und kehren vermöge der Transformation (9) von den ξ_i zu den x_i zurück. Die ursprüngliche Frage nach der Bedeutung der modifizierten Differentialgleichungen im Raume der x_i ist dann in folgende rein algebraische verwandelt: *Im Raume der ξ_i ist ein Kegelschnitt gegeben* (der selbstverständlich mit der Raumkurve dritter Ordnung (10) sechs Oskulationsebenen gemein hat) *oder auch eine Steinersche Fläche, welche zur Raumkurve dritter Ordnung in der oben bezeichneten Beziehung steht* (die der Raumkurve eingeschrieben ist, wie man kurz sagen könnte): *es soll entschieden werden, welche Bilder Kegelschnitt und Steinersche Fläche im Raume der x_i haben.*

Ich will das Resultat, welches sich unmittelbar darbietet, hier nur für den Fall aussprechen, daß sämtliche Faktoren $(\lambda - k_i)$ durch willkürliche Faktoren ersetzt worden sind. Dabei benenne ich eine Fläche oder eine Kurve oder auch Punktsystem als *symmetrisch*, wenn die zugehörige algebraische Definition bei irgendwelchen Vorzeichenänderungen der x_i ungeändert bleibt. Wir haben dann folgende Sätze:

I. *Sei*

$$\varphi(\lambda) = (\lambda - a)(\lambda - b)(\lambda - c)(\lambda - d)(\lambda - e)(\lambda - f),$$

dann werden die Differentialgleichungen:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi(\lambda_\alpha)}} = 0, \qquad (\nu = 0, 1) \tag{13}$$

[5]) Nämlich entweder vermöge unserer Transformation aus dem Fundamentalsatze des § 1, oder auch durch Wiederholung des damaligen Beweisverfahrens an dem von den Schnittpunkten des Kegelschnitts und der Oskulationsebenen (10) erzeugten algebraischen Gebildes.

durch symmetrische Kurven achter Ordnung integriert, welche die Flächen $\lambda = a, b, c, d, e, f$ je achtmal in beziehungsweise symmetrisch gelegenen Punkten berühren.

II. *Sei*

$$\varphi_1(\lambda) = (\lambda - c)(\lambda - d)(\lambda - e)(\lambda - f).$$

Die Integralflächen der Differentialgleichung:

$$(14) \qquad \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\pm d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi_1(\lambda_\alpha)}} = 0,$$

sind dann symmetrische Flächen achter Ordnung, welche jede $F^{(2)}$ der konfokalen Schar in einem Paare symmetrischer Kurven achter Ordnung durchsetzen, die Flächen $\lambda = c, d, e, f$ aber nach Erstreckung je einer solchen Kurve berühren.

Wie nun entstehen aus diesen Kurven und Flächen die speziellen, die wir in § 1 und 2 fanden? Die Sache ist selbstverständlich elementar, und so mag es genügen, hier nur das Resultat der betr. Überlegung mitzuteilen. Solange in $\varphi(\lambda)$ oder $\varphi_1(\lambda)$ der Faktor $\lambda - k_i$ noch nicht vorhanden ist, wird die Koordinatenebene $x_i = 0$ von der symmetrischen Kurve oder Fläche achter Ordnung gewissermaßen *senkrecht* geschnitten, d. h. so geschnitten, daß die Tangente der Kurve bez. die Tangentialebene der Fläche durch den gegenüberliegenden Eckpunkt des Koordinatentetraeders hindurchläuft. Dies kann nicht völlig aufhören zu gelten, wenn auch einer der Faktoren von $\varphi(\lambda)$ oder $\varphi_1(\lambda)$ in $(\lambda - k_i)$ übergeht, während dann doch gleichzeitig die Kurve oder Fläche achter Ordnung die Ebene $x_i = 0$ berühren soll. Die Folge ist, daß die acht Schnittpunkte der Kurve mit der Ebene in *vier Doppelpunkte* zusammenrücken und die Schnittkurve achter Ordnung der Fläche mit der Ebene in eine *Doppelkurve vierter Ordnung* übergeht (während Kurve wie Fläche nach wie vor symmetrisch bleiben). Man denke sich dies jetzt bei sämtlichen vier Koordinatenebenen gleichzeitig eintretend. Dann ist die Folge, wie man sofort sieht, daß die Kurve oder Fläche in ein symmetrisches Aggregat von acht linearen Bestandteilen *zerfällt*, also die Kurve in acht Gerade, die Fläche in acht Ebenen, die aus einer Geraden bez. Ebene durch die Vorzeichenwechsel der x_i hervorgehen. Und nun ist die Beziehung zu den Sätzen der § 1 und 2 ohne weiteres ersichtlich: wir haben damals je nur von *einer* dieser acht geraden Linien oder Ebenen gesprochen, insofern wir keinen Anlaß hatten, auch noch die anderen Linien usw. zu betrachten, die aus der ersten Geraden durch die Vorzeichenwechsel der x_i entstehen. Dem entspricht auch, daß wir statt der achtmaligen Berührung der Kurve achter Ordnung mit gewissen Flächen zweiten Grades in § 1 nur eine je einmalige Berührung der in Betracht kommenden geraden Linie und der Flächen $\lambda = a$ und $\lambda = b$ fanden, usw. —

Ich habe hier gleich die beiden äußersten Fälle einander gegenübergestellt, daß nämlich an den Produkten $\varphi(\lambda)$, $\varphi_1(\lambda)$ entweder keiner der Faktoren $\lambda - k_i$ oder alle dieser Faktoren beteiligt sind. Es hat keinen Zweck, die verschiedenen möglichen Zwischenfälle hier einzeln aufzuzählen. Ich will hier nur den Fall hervorheben, daß in $\varphi(\lambda)$ drei der Faktoren $(\lambda - k_i)$ und also noch drei willkürliche Faktoren enthalten sind. Die Integralkurven des allgemeinen Falles zerfallen dann in Kegelschnitte, welche nur auf der einen der vier Koordinatenebenen senkrecht stehen (in dem eben erwähnten Sinne) während sie gleichzeitig drei $F^{(2)}$ der konfokalen Schar je zweimal berühren[6]).

§ 4.

Übergang zu Räumen von $(n-1)$ Dimensionen.

Indem wir jetzt statt des gewöhnlichen Punktraums einen Raum von $(n-1)$ Dimensionen, R_{n-1}, einführen, versuchen wir die Entwickelungen der § 1 und 2 auf diesen allgemeineren Fall zu übertragen. Eine gleiche Übertragung ist natürlich ebensowohl bei den Betrachtungen des § 3 statthaft; wir unterlassen sie aber, da sie keinerlei besondere Schwierigkeit darbietet und eine bloße Häufung in ihrer Allgemeinheit doch unanschaulicher Theoreme nicht unser Zweck sein kann. Auf den Inhalt des § 3 kommen wir vielmehr erst zurück, wenn wir später die für beliebiges n erhaltenen Resultate am Falle der Liniengeometrie, der $n = 6$ entspricht, wieder spezialisieren.

Als Ausgangsgleichung für unsere neue Betrachtung werden wir, der Gleichung (2) entsprechend, die folgende hinstellen:

$$(15) \qquad \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{\lambda - k_i} = 0,$$

vermöge deren jedem Raumpunkte x im Ganzen $(n-1)$ elliptische Koordinaten

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1} \text{ (allgemein } \lambda_\alpha)$$

zugeordnet werden. Wir wollen dabei sagen, daß jede einzelne Gleichung (15) eine *quadratische Mannigfaltigkeit von $(n-2)$ Dimensionen*, $M^{(2)}_{(n-2)}$, bestimmt. Den Buchstaben M mit ähnlicher Stellung zweier Indizes verwenden wir später allgemein zur Bezeichnung irgendwelcher algebraischer Mannigfaltigkeiten nach Ordnung und Dimension. Insbesondere *lineare* in R_{n-1} einbegriffene Mannigfaltigkeiten bezeichnen wir kurzweg mit dem

[6]) Man sehe diesen Satz bei Darboux, l. c.

Buchstaben R, wobei wir die Dimensionen wieder durch einen rechts unten beigefügten Index markieren (z. B. R_ϱ)[7].

Wenn wir jetzt zunächst das Analogon zum Fundamentalsatze des § 1 aufstellen wollen[8], so werden wir vor allem dem Produkte der n jetzt a priori gegebenen Faktoren

$$\prod_{i=1}^{n}(\lambda - k_i)$$

noch $(n-2)$ willkürlichen Faktoren zufügen, die

$$(\lambda - a_\varkappa)$$

heißen sollen $(\varkappa = 1, 2, \ldots, (n-2))$, so daß ein Ausdruck $\varphi(\lambda)$ entsteht, der folgendermaßen lautet:

$$\varphi(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - k_i)\cdot\prod_{\varkappa=1}^{n-2}(\lambda - a_\varkappa). \tag{16}$$

Wir konstruieren dann die Differentialgleichungen:

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1}\frac{\pm\lambda_\alpha^\nu\cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi(\lambda_\alpha)}} = 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, (n-3), \tag{17}$$

und finden durch genau dasselbe Schlußverfahren, das wir in § 1 anwandten, den folgenden ersten Satz:

I. *Die Gleichungen* (17) *werden durch diejenigen* ∞^{n-2} R_1 *integriert, welche die* $(n-2)$ *beliebig vorgegebenen* $M^{(2)}_{(n-2)}$:

$$\lambda = a_1, \lambda = a_2, \ldots, \lambda = a_{n-2}$$

berühren, und von denen durch jeden Raumpunkt 2^{n-2} *hindurchgehen.*

Diese Zahl 2^{n-2} ist zunächst durch die Zahl der in (17) möglichen Vorzeichenkombinationen gegeben; wir bestimmen sie algebraisch, indem wir die $(n-2)$ Kegel zweiter Ordnung, die sich vom beliebig gewählten Raumpunkte aus an die $(n-2)$ $M^{(2)}_{(n-2)}$ legen lassen, zum gemeinsamen Schnitt bringen. Daß beidemal dieselbe Zahl resultiert, ist in der Form, die wir dem Satz I erteilt haben, bereits ausgesprochen.

Wir fahren nun fort, wie in § 2 zu Anfang, indem wir von den in $\varphi(\lambda)$ auftretenden willkürlichen Faktoren zwei weglassen, also etwa schreiben:

$$\varphi_1(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - k_i)\cdot\prod_{\varkappa=1}^{n-1}(\lambda - a_\varkappa) \tag{18}$$

[7]) Dies ist dieselbe Bezeichnungsweise, deren ich mich in der auf S. 201 zitierten Abhandlung bediene.

[8]) Die Ausdehnung des Fundamentalsatzes auf beliebig viele Dimensionen findet sich schon in einer Arbeit von Schläfli, die von 1849 datiert ist und 1852 in Crelles Journal, Bd. 43 veröffentlicht wurde.

und nun nur $(n-3)$ Differentialgleichungen bilden, bei denen wir eines der λ, also etwa λ_{n-1}, als konstant voraussetzen:

$$\sum_{\alpha=1}^{n-2}\frac{\pm\lambda_\alpha^\nu\cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi_1(\lambda_\alpha)}} = 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, (n-4). \tag{19}$$

Wir finden:

II. *Durch jeden Punkt der einzelnen* $M^{(2)}_{(n-2)}$:

$$\lambda_{n-1} = \text{Const.}$$

laufen den Gleichungen (19) *entsprechend* 2^{n-3} *in der* $M^{(2)}_{(n-2)}$ *enthaltene* R_1, *welche geometrisch dadurch charakterisiert sind, daß sie die* $(n-4)$ *beliebig vorgegebenen* $M^{(2)}_{(n-2)}$:

$$\lambda = a_1, \lambda = a_2, \ldots, \lambda = a_{n-4}$$

berühren.

Die Gesamtzahl der so auf der einzelnen $M^{(2)}_{(n-2)}$ (bei festgehaltenen $a_1, a_2, \ldots, a_{n-4}$) bestimmten R_1 beträgt ∞^{n-3}. Was die Zahl 2^{n-3} angeht, so erhalten wir dieselbe algebraisch, indem wir die ausgezeichnete $M^{(2)}_{(n-2)}$ (deren Gleichung $\lambda_{n-1} = \text{Const.}$ ist) mit ihrer Tangentialebene in dem gerade ausgewählten Punkte und übrigens den $(n-4)$ Kegeln zweiter Ordnung schneiden, die sich vom genannten Punkte aus an die Mannigfaltigkeiten $\lambda = a_1, a_2, \ldots, a_{n-4}$ legen lassen.

Jetzt ist deutlich, daß wir den Schritt, der von (16) und (17) zu (18) und (19) führt, und der darin besteht, daß wir zwei der willkürlichen in $\varphi(\lambda)$ enthaltenen Faktoren wegwerfen und dafür die Zahlenreihen, welche die Indizes α und ν in den Differentialgleichungen durchlaufen, je um eine Einheit kürzen, — für größere n mehrere Mal wiederholen können. Ich will annehmen, daß dieser Schritt bereits ϱ-mal ausgeführt sei, wo $\varrho \leqq \left[\frac{n-2}{2}\right]$ sein wird. An Stelle des in (16) eingeführten $\varphi(\lambda)$ erhalten wir dann:

$$\varphi_\varrho(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}(\lambda - k_i)\cdot\prod_{\varkappa=1}^{n-2-2\varrho}(\lambda - a_\varkappa), \tag{20}$$

an Stelle der Differentialgleichungen (17) aber die $(n-2-\varrho)$ Differentialgleichungen:

$$\sum_{\alpha=1}^{n-1-\varrho}\frac{\pm\lambda_\alpha^\nu\cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_\alpha)}} = 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, (n-3-\varrho). \tag{21}$$

Der zugehörige Satz aber, der die Sätze I und II als spezielle Fälle unter sich begreift, wird folgendermaßen lauten:

III. *Auf der* $M^{2^\varrho}_{n-\varrho-1}$, *welche irgend* ϱ *Mannigfaltigkeiten unseres konfokalen Systems:*

$$\lambda_{n-1} = C_1, \lambda_{n-2} = C_2, \ldots, \lambda_{n-\varrho} = C_\varrho \tag{21a}$$

gemeinsam ist, verlaufen den Differentialgleichungen (21) *entsprechend durch jeden Punkt* $2^{n-2-\varrho}$ R_1, *die geometrisch unter den übrigen* R_1 *der genannten Mannigfaltigkeit dadurch definiert sind, daß sie die* $n-2-2\varrho$ $M_{(n-2)}^{(2)}$:

$$\lambda = a_1,\ \lambda = a_2,\ \ldots,\ \lambda = a_{n-2-2\varrho}$$

berühren.

Die Gesamtzahl der hier (bei festen $C_1, C_2, \ldots, C_\varrho, a_1, a_2, \ldots, a_{n-2-2\varrho}$) in Betracht kommenden R_1 ist $\infty^{n-\varrho-2}$.

Die Aufstellung der Sätze I, II, III erfolgt auf Grund der früheren Betrachtungen ohne Schwierigkeit. Es ist nun aber die Frage, ob wir, an sie anknüpfend, so weiterschließen können, wie in § 2 geschah, ob wir also zu mehrfach ausgedehnten linearen Räumen von erkennbarer geometrischer Eigenschaft geführt werden, wenn wir den Index α in den Formeln (17), (19), (21) gleichförmig von 1 bis $n-1$ laufen lassen und die so entstehenden Differentialgleichungen integrieren. Daß dies in der Tat der Fall ist, wollen wir im folgenden Paragraphen zeigen.

§ 5.

Ausdehnung der Sätze des vorigen Paragraphen.

In welcher Richtung die Ausdehnung der Sätze des vorigen Paragraphen zu suchen ist, dürfte nach dem Gesagten bereits erkennbar sein. Wenn wir in den Differentialgleichungen (21) die Summation nach α nicht von 1 bis $(n-1-\varrho)$, sondern von 1 bis $(n-1-\varrho+\sigma)$ ausdehnen, wo σ irgendeine Zahl $\leqq \varrho$ ist, also schreiben:

$$(22)\qquad \sum_{\alpha=1}^{n-1-\varrho+\sigma} \frac{\pm\lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_\alpha)}} = 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, (\nu - 3 - \varrho),$$

während, den Gleichungen (21a) entsprechend,

$$(23)\qquad \lambda_{n-1} = C_1,\ \lambda_{n-2} = C_2,\ \ldots,\ \lambda_{n-\varrho+\sigma} = C_{\varrho-\sigma}$$

gesetzt sein soll, so werden wir bei Integration der neuen Differentialgleichungen von jedem Punkte der durch (23) vorgestellten $M_{n-1-\varrho+\sigma}^{2^{(\varrho-\sigma)}}$ auslaufend $2^{n-1-\varrho+\sigma}$ ganz in dieser Mannigfaltigkeit enthaltene algebraische $M_{\sigma+1}$ (überhaupt also auf der durch (23) vorgestellten Mannigfaltigkeit $\infty^{n-2-\varrho} M_{\sigma+1}$) erhalten. Von diesen $M_{\sigma+1}$ wissen wir zunächst nur, daß sie jedes Aggregat von weiter zutretenden σ Mannigfaltigkeiten $M_{(n-2)}^{(2)}$:

$$(24)\qquad \lambda_{n-\varrho+\sigma-1} = C_{\varrho-\sigma+1},\ \ldots,\ \lambda_{n-\varrho} = C_\varrho$$

dem Satze III des vorigen Paragraphen zufolge (wie aus Vergleichung der Differentialgleichungen hervorgeht) nach lauter solchen R_1 schneiden,

welche die an dem Ausdrucke $\varphi_\varrho(\lambda)$ ausgezeichnet beteiligten Mannigfaltigkeiten

$$(25)\qquad \lambda = a_1,\ \lambda = a_2,\ \ldots,\ \lambda = a_{n-2-2\varrho}$$

berühren (wobei alle in (24) enthaltenen berührenden R_1 dieser Art zur Verwendung gelangen). *Hieraus wollen wir schließen, daß die* $M_{\sigma+1}$ *selber linear (also* $R_{\sigma+1}$*) sind, — daß sie jede einzelne der zutretenden Mannigfaltigkeiten* (24) *nach einem Paare linearer Räume* (R_σ) *schneiden, welche zusammenfallen, wenn man als zutretende Mannigfaltigkeit insbesondere eine der durch* (25) *gegebenen wählt, — daß ferner außer den* $R_{\sigma+1}$, *die* (24) *genügen, keine anderen* $R_{\sigma+1}$ *derselben geometrischen Definition existieren.* Wir mögen in diesem Satze der Zahl σ insbesondere den Maximalwert ϱ erteilen. *Dann soll es also den Differentialgleichungen entsprechend:*

$$(26)\qquad \sum_{\alpha=1}^{n-1} \frac{\pm\lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_\alpha)}} = 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, (n - 3 - \varrho)$$

von jedem Punkte des R_{n-1} *auslaufend* 2^{n-2} $R_{\varrho+1}$ (*i. e. im ganzen* $\infty^{n-2-\varrho} R_{\varrho+1}$) *geben, welche jede unserer konfokalen Mannigfaltigkeiten nach einem Paare von* R_ϱ *schneiden, die dann und nur dann zusammenfallen, wenn man eine der Mannigfaltigkeiten* (25) *herannimmt; zugleich soll es keine anderen* $R_{\varrho+1}$ *dieser Eigenschaft geben als die durch* (26) *gefundenen.*

Man bemerke, daß wir aus dem letztausgesprochenen Satze den vorangehenden, auf beliebiges σ bezüglichen und darum scheinbar allgemeineren sofort wieder ableiten können. Denn wenn der Schnitt eines der in Rede stehenden $\infty^{n-2-\varrho} R_{\varrho+1}$ mit jeder der konfokalen Mannigfaltigkeiten in lineare Bestandteile zerfällt, so geschieht notwendig das gleiche mit dem Schnitte, den $R_{\varrho+1}$ mit beliebig vielen, gleichzeitig in Betracht gezogenen konfokalen Mannigfaltigkeiten gemein hat. Nun repräsentiert jeder durch (22), (23) definierte $R_{\varrho+1}$, wie durch Vergleichung der Differentialgleichungen (22), (26) hervorgeht, nur den einzelnen der $2^{\varrho-\sigma}$ linearen Bestandteile, die in dem hiermit bezeichneten Sinne durch Zusammenstellung eines geeigneten $R_{\varrho+1}$ mit den Mannigfaltigkeiten (23) definiert wird (wie denn auch die Zahl der $R_{\sigma+1}$ und $R_{\varrho+1}$ beidemal dieselbe, nämlich $\infty^{n-2-\varrho}$, ist). Daher ist deutlich, daß der Schnitt des $R_{\sigma+1}$ mit beliebig zutretenden weiteren konfokalen Mannigfaltigkeiten genau ebenso in lineare Bestandteile zerfallen muß, wie der Schnitt des $R_{\varrho+1}$. Der auf beliebiges σ bezügliche Satz ist also in der Tat ein spezieller Fall des zu (26) gehörigen, und wir werden den letzteren als den zusammenfassenden Ausdruck des durch unsere Überlegungen für den Raum von beliebig vielen Dimensionen abzuleitenden Resultates betrachten dürfen.

Was den Beweis der somit formulierten Sätze betrifft, so führe ich ihn genau entsprechend zu den Überlegungen des § 2. Es handelt sich vor allem darum, einzusehen, daß unsere $M_{\sigma+1}$ *linear* sein müssen (also $R_{\sigma+1}$ sind). In dieser Hinsicht gingen wir in § 2 davon aus, daß eine Fläche nicht öfter als zweimal von geraden Linien überdeckt sein kann, ohne eben zu sein. In der Tat werden die geraden Linien, welche durch einen Flächenpunkt laufen, der Tangentialebene im Flächenpunkte und der im Punkte oskulierenden Fläche zweiten Grades gemeinsam sein, und ihre Zahl kann also nur dann > 2 sein, wenn die Tangentialebene ein Bestandteil der genannten Fläche zweiten Grades ist, was bei einer gekrümmten Fläche nur in einzelnen Punkten denkbar ist. Ich formuliere dementsprechend für mehr Dimensionen den folgenden Grundsatz:

Eine $M_{\sigma+1}$ ist linear (also ein $R_{\sigma+1}$), wenn von jedem Punkte der $M_{\sigma+1}$ mehr als zwei der $M_{\sigma+1}$ angehörige Räume R_σ auslaufen[9]).

Wir beachten jetzt, daß der von uns zu beweisende Hauptsatz infolge der Theoreme des § 4 jedenfalls für $\sigma = 0$ richtig ist (die dort durch die Differentialgleichungen definierte M_1 ist ein R_1). Wir werden also annehmen, derselbe sei überhaupt bereits für $\sigma = \sigma'$ bewiesen, und werden dann zeigen, daß er für $\sigma = \sigma' + 1$ ebenfalls gilt. Dieser Beweis aber gelingt unmittelbar infolge des formulierten Grundsatzes (den wir hier als richtig akzeptieren, ohne ihn weiter zu begründen). Die $M_{\sigma+1}$, die wir durch Integration von (22) erhalten, liegt den Formeln (23) entsprechend auf $\varrho - \sigma$ konfokalen Mannigfaltigkeiten, wo $\varrho \leqq \left[\frac{n-2}{2}\right]$; durch jeden Punkt der $M_{\sigma+1}$ gehen also noch weitere $(n - 1 - \varrho + \sigma)$ konfokale Mannigfaltigkeiten, eine Zahl, die für $n \geqq 4$ jedenfalls größer als 2 ist. Nun aber schneidet jede dieser weiteren konfokalen Mannigfaltigkeiten längs einer durch unseren Punkt hindurchlaufenden M_σ, die nach Voraussetzung linear ist. Unsere $M_{\sigma+1}$ hat also die Eigenschaft, daß von jedem ihrer Punkte aus mehr als zwei in ihr enthaltene R_σ auslaufen, und also ist sie nach unserem Grundsatze selbst linear ($= R_{\sigma+1}$), was zu beweisen war.

Was die übrigen Punkte unserer Behauptung angeht, so erledigen wir sie ebenfalls nach dem Vorbilde der in § 2 gegebenen Entwickelungen.

Zunächst ist zu zeigen, daß die $R_{\sigma+1}$, welche jede einzelne konfokale Mannigfaltigkeit, wie wir jetzt wissen, nach zwei R_σ schneiden, die Mannigfaltigkeiten (25) speziell nach solchen zwei R_σ treffen, die zusammenfallen. Wieder nehmen wir an, der Satz sei für kleinere Werte von σ bewiesen (wie er es für $\sigma = 0$ ja in der Tat ist). Dann haben also die sämtlichen R_σ, welche aus $R_{\sigma+1}$ durch die konfokalen Mannigfaltigkeiten ausgeschnitten

[9]) [In einem der nächsten Bände (Bd. 30 der Math. Ann. [1887]) hat Herr C. Segre einen sehr einfachen Beweis für diesen Grundsatz nachgetragen.]

werden (und die $R_{\sigma+1}$, wie wir wissen, mehrfach überdecken), die Eigenschaft, jene beiden R_σ, in denen $R_{\sigma+1}$ einer Mannigfaltigkeit (25) begegnet, in einem Paare zusammenfallender $R_{\sigma+1}$ zu treffen, woraus gewiß folgt, daß die beiden R_σ, welche aus $R_{\sigma+1}$ durch die einzelne Mannigfaltigkeit (25) ausgeschnitten werden, zusammenfallen. (Auf gleiche Weise zeigt man, daß die beiden R_σ, nach denen eine konfokale Mannigfaltigkeit, die nicht zu den (25) gehört, unserer $R_{\sigma+1}$ begegnet, allgemein zu reden *nicht* koinzidieren).

Wir behaupten ferner, daß es keine anderen $R_{\sigma+1}$ derselben, uns nun bekannten geometrischen Definition gibt, als diejenigen, die aus unseren Differentialgleichungen entspringen. Auch diese Behauptung ist für $\sigma = 0$ (und zwar durch algebraische Abzählung) bewiesen, so daß wir abermals nur zu zeigen brauchen, daß sie für $\sigma = \sigma' + 1$ gilt, wenn sie für $\sigma = \sigma'$ zutrifft. Wir denken uns irgendeinen $R_{\sigma+1}$ gegeben, der auf den konfokalen Mannigfaltigkeiten (23) gelegen, die übrigen konfokalen Mannigfaltigkeiten in der hier nicht noch einmal zu nennenden Weise durchsetzt. Derselbe wird ein System linearer Differentialgleichungen befriedigen, das wir für einen Augenblick folgendermaßen schreiben wollen:

$$(27) \qquad \sum_{\alpha=1}^{n-1-\varrho+\sigma} \mathsf{M}_\alpha^{(\nu)} \cdot d\lambda_\alpha = 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, (n - 3 - \varrho).$$

Nun wird unser $R_{\sigma+1}$ nach Voraussetzung von jeder zutretenden konfokalen Mannigfaltigkeit in zwei R_σ von kanonischer Definition durchsetzt, d. h. in zwei R_σ, welche den Differentialgleichungen genügen, die aus (22) hervorgehen, wenn man bei der Summation einen der angegebenen Werte von α überspringt. Dies aber heißt nichts anderes, als daß aus (27) durch Nullsetzen eines beliebigen der $d\lambda_\alpha$ immer dasselbe System linearer Differentialgleichungen entstehen soll, wie aus den mit den richtigen Vorzeichen genommenen Formeln (22), was nicht anders möglich ist, als wenn für die gegebenen $R_{\sigma+1}$ die Gleichungen (27) bei geeigneter Wahl der Vorzeichen mit den Gleichungen (22) gleichbedeutend sind, was zu beweisen war.

§ 6.

Verifikation des gerade gegebenen Beweises.

Der Beweis, den ich im vorigen Paragraphen erbrachte, dürfte bei manchem Leser vielleicht darum auf Schwierigkeiten stoßen, weil ich das von mir benutzte Theorem der mehrdimensionalen Geometrie ohne weitere Erläuterung hingestellt habe. Ich will also nicht unterlassen, meine Schlüsse, soweit sie geometrisch waren (also mit Ausnahme des letzten, wesentlich algebraischen) auch noch durch Rechnung zu verifizieren, wobei ich nur insofern an meinem bisherigen Entwicklungsgange festhalte, als ich mich nach wie vor auf die Theoreme des § 4 stütze.

Die Sache ist einfach folgende. Das allgemeine Integral der Gleichungen (26) (die ich hier allein ins Auge fasse, da ihre Betrachtung genügt, wie wir früher sahen) ist bekanntermaßen durch Nullsetzen einer Matrix von $(n-\varrho+1)$ Vertikalreihen und $(2n-2)$ Horizontalreihen gegeben:

$$(28)\qquad \left|\begin{matrix} \lambda_1^{n-1} & \lambda_1^{n-2}\ldots 1 & \lambda_1^{\varrho}\sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_1)} & \lambda_1^{\varrho-1}\sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_1)}\ldots\sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_1)} \\ \lambda_2^{n-1} & \lambda_2^{n-2}\ldots 1 & \lambda_2^{\varrho}\sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_2)} & \lambda_2^{\varrho-1}\sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_2)}\ldots\sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \lambda_{n-1}^{n-1} & \lambda_{n-1}^{n-2}\ldots & \cdots & \cdots \\ \mu_1^{n-1} & \mu_1^{n-2}\ldots 1 & \mu_1^{\varrho}\sqrt{\varphi_\varrho(\mu_1)} & \mu_1^{\varrho-1}\sqrt{\varphi_\varrho(\mu_1)}\ldots\sqrt{\varphi_\varrho(\mu_1)} \\ \mu_2^{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_{n-1}^{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots \end{matrix}\right|;$$

hier sind $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{n-1}$ Integrationskonstanten. Es handelt sich jetzt darum, aus dieser Matrix die von uns aufgestellten Theoreme abzuleiten.

Erstlich wollen wir zeigen, daß die durch diese Matrix dargestellte algebraische $M_{\varrho+1}$ im Raume der x linear ist. Wir wissen zunächst nur, nach § 4, daß wenn wir

$$(29)\qquad \lambda_{n-1}=C_1,\ \lambda_{n-2}=C_2,\ \ldots,\ \lambda_{n-\varrho}=C_\varrho$$

setzen und selbstverständlich die dann in der Matrix vorkommenden Quadratwurzeln:

$$(30)\qquad \sqrt{\varphi_\varrho(C_1)},\ \sqrt{\varphi_\varrho(C_2)},\ \ldots,\ \sqrt{\varphi_\varrho(C_\varrho)}$$

irgendwie fixieren, daß dann das Verschwinden der Matrix eine auf den Mannigfaltigkeiten gelegene lineare Mannigfaltigkeit von einer Dimension (einen R_1) vorstellt. Aber eben hieraus können wir unseren Schluß machen. Zu den Gleichungen (29) können nämlich die Vorzeichen (30) im ganzen auf 2^ϱ Weisen hinzugewählt werden. Andererseits ist die $M_{n-1-\varrho}$, welche durch die Gleichungen (29) dargestellt wird, als Schnitt von ϱ Mannigfaltigkeiten zweiter Ordnung selber von der Ordnung 2^ϱ. Die durch (28) vorgestellte $M_{\varrho+1}$ hat hiernach die Eigenschaft, eine $M_{n-1-\varrho}$ von der Ordnung 2^ϱ nach 2^ϱ R_1 zu schneiden. Dies aber heißt *nach dem Bezoutschen Theoreme*, daß $M_{\varrho+1}$ selber linear, $=R_{\varrho+1}$ ist.

Ferner zeigen wir, daß der Schnitt des $R_{\varrho+1}$ mit einer beliebigen konfokalen Mannigfaltigkeit

$$\lambda_{n-1}=C_1,$$

aus zwei R_ϱ besteht. Es werden zwei getrennte Mannigfaltigkeiten, weil wir wieder in der Hand haben, für $\sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_{n-1})}$ in unsere Matrix $+\sqrt{\varphi_\varrho(C_1)}$

oder $-\sqrt{\varphi_\varrho(C_1)}$ einzutragen, — und jede dieser Annahmen führt zu einer linearen Mannigfaltigkeit, d. h. zu einem R_ϱ, weil die Hinzunahme fester Werte von $\lambda_{n-2}, \ldots, \lambda_{n-\varrho}$ und der zu ihnen gehörigen Quadratwurzeln, wie soeben, je einen R_1 ergibt.

Endlich, daß die beiden R_ϱ, in denen unsere $R_{\varrho+1}$ eine der Mannigfaltigkeiten

$$\lambda=a_\varkappa$$

durchsetzt, zusammenfallen, folgt einfach daraus, daß $\varphi_\varrho(a_\varkappa)$ verschwindet und also in diesem Falle der Unterschied, der durch die Vorzeichenwahl von $\sqrt{\varphi_\varrho}$ eingeführt wird, verschwindet.

§ 7.

Besondere Betrachtung der Verhältnisse auf der einzelnen $M^{(2)}_{(n-2)}$.

Im Interesse der liniengeometrischen Anwendungen, die ich beabsichtige, erläutere ich hier noch besonders den Fall der im vorigen Paragraphen aufgestellten Sätze, in welchem $\sigma=\varrho-1$ genommen ist und also *eine* elliptische Koordinate konstant gesetzt wird:

$$(31)\qquad \lambda_{n-1}=C_1.$$

Wir haben dann die Differentialgleichungen:

$$(32)\qquad \sum_{\alpha=1}^{n-2}\frac{\pm\lambda_\alpha^\nu\cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi_\varrho(\lambda_\alpha)}}=0,\qquad \nu=0,1,\ldots,(n-3-\varrho)$$

und hierzu den Satz, den ich mit I benennen will:

I. *Auf der Mannigfaltigkeit* (31) *verlaufen durch jeden Punkt* 2^{n-3} *Räume* R_ϱ, *welche geometrisch dadurch definiert sind, daß sie alle anderen konfokalen Mannigfaltigkeiten nach Paaren von Räumen* $R_{\varrho-1}$ *schneiden, welch letztere für die besonderen Mannigfaltigkeiten*

$$\lambda=a_1,\ \lambda=a_2,\ \ldots,\ \lambda=a_{n-2\varrho-2}$$

zusammenfallen. Diese R_ϱ *sind die Integrale der Differentialgleichungen* (32).

Ich wünsche diesen Satz mit der allgemeinen Theorie der auf einer $M^{(2)}_{n-2}$ enthaltenen linearen Räume[10]) in Verbindung zu setzen.

Erstlich machen wir eine gewisse Abzählung. Der genannten Theorie zufolge enthält eine $M^{(2)}_{n-2}$ Räume R_ϱ für $\varrho=1,2,\ldots,\left[\frac{n-2}{2}\right]$ und zwar

[10]) Vgl. in dieser Hinsicht insbesondere Segre: Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni, Atti di Torino, Memorie. 1884, sowie verschiedene Angaben und Bemerkungen in meiner oben (S. 201) zitierten Abhandlung. [*Zur Theorie der allgemeinen Gleichungen sechsten und siebenten Grades*, vgl. Bd. II dieser Ausgabe.]

von der einzelnen Art je $\infty^{\frac{1}{2}(\varrho+1)(2n-3\varrho-4)}$. Räume aller dieser Arten treten auch in Satz I auf. Ihre Anzahl berechnet sich dabei folgendermaßen. Halten wir die $(n-2\varrho-2)$ Größen $a_\varkappa$ fest, so überdecken die zugehörigen R_ϱ die $M^{(2)}_{(n-2)}$ endlichfach, die Zahl der R_ϱ ist also $\infty^{n-2-\varrho}$. Denken wir uns jetzt auch noch die $a_\varkappa$ beweglich, so kommen wir auf $\infty^{2n-3\varrho-4}\,R_\varrho$. Diese Zahl stimmt nur dann mit der vorher angegebenen, wenn $\varrho=1$. Wir können hiernach folgendermaßen sagen:

II. *Durch die in* I *auftretenden* R_ϱ *werden sämtliche* R_1, *die auf* (31) *vorhanden sind, erschöpft, keineswegs aber die sonstigen mehrfach ausgedehnten* R.

Wir beschränken uns jetzt auf den Fall eines geraden n und setzen $\varrho=\frac{n-2}{2}$. Der Ausdruck $\varphi_\varrho(\lambda)$ enthält dann überhaupt keine willkürlichen Faktoren mehr, was diesem Falle sein besonderes Interesse verleiht. Andererseits weiß man, daß die $R_{\frac{n-2}{2}}$, die (für gerades n) auf einer $M^{(2)}_{n-2}$ vorhanden sind, in zwei gleichberechtigte Klassen zerfallen, so zwar, daß die $R_{\frac{n-2}{2}}$ der einzelnen Klasse sich kontinuierlich aneinander anschließen, nirgends aber einen Übergang zu den $R_{\frac{n-2}{2}}$ der anderen Klasse haben (das einfachste Beispiel geben die beiden Erzeugendensysteme eines Hyperboloids). Mit Rücksicht hierauf behaupte ich:

III. *Die* 2^{n-3} *Räume* $R_{\frac{n-2}{2}}$, *welche* $\left(\textit{für gerades } n \textit{ und } \varrho=\frac{n-2}{2}\right)$ *dem Satze I entsprechend von einem beliebigen Punkte der* $M^{(2)}_{(n-2)}$ *auslaufen, verteilen sich gleichförmig auf die beiden in Rede stehenden Klassen, so zwar, daß immer solche zwei* $R_{\frac{n-2}{2}}$ *zu verschiedenen Klassen gehören, deren Differentialgleichungen* (32) *sich durch eine ungerade Zahl von Zeichenwechseln unterscheiden. Diejenigen dem Satze I genügenden* $R_{\frac{n-2}{2}}$, *welche derselben Klasse angehören, bilden je ein irreduzibles Ganzes.*

Was den Beweis angeht, so wollen wir die übrigens bekannte Bemerkung vorausschicken, daß eine gerade Zahl von Zeichenwechseln der Koordinaten x_i jede der beiden auf unserer $M^{(2)}_{(n-2)}$ (31) gelegenen Klassen von $R_{\frac{n-2}{2}}$ ungeändert läßt, eine ungerade Zahl aber sie vertauscht. Wir müssen jetzt ferner die Formeln heranziehen, welche die Koordinaten x_i mit den elliptischen Koordinaten $\lambda_1,\ldots,\lambda_{n-1}$ verknüpfen. Dieselben lauten bekanntlich, unter σ einen Proportionalitätsfaktor verstanden:

$$(34)\qquad \sigma x_i=\sqrt{\frac{(\lambda_1-k_i)(\lambda_2-k_i)\ldots(\lambda_{n-1}-k_i)}{\varphi'_{\frac{n-2}{2}}(k_i)}},$$

wo

$$\varphi_{\frac{n-2}{2}}(\lambda)=(\lambda-k_1)(\lambda-k_2)\ldots(\lambda-k_n),$$

oder besser, da wir die Quadratwurzeln aus den einzelnen Faktoren $(\lambda_\alpha-k_i)$ sogleich unabhängig voneinander betrachten müssen:

$$(34\,\mathrm{a})\qquad \sigma x_i=\frac{\sqrt{\lambda_1-k_i}\cdot\sqrt{\lambda_2-k_i}\ldots\sqrt{\lambda_{n-1}-k_i}}{\sqrt{\varphi'_{\frac{n-2}{2}}(k_i)}}.$$

Hiermit stellen wir nun die Differentialgleichungen (32) für $\varrho=\frac{n-2}{2}$ zusammen; wir wollen dieselben in der entsprechenden Form schreiben:

$$(35)\qquad \sum_{\alpha=1}^{n-2}\frac{\pm\lambda_\alpha^\nu\cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\lambda_\alpha-k_1}\,\sqrt{\lambda_\alpha-k_2}\ldots\sqrt{\lambda_\alpha-k_n}}=0,\qquad\left(\nu=0,1,\ldots,\frac{n-4}{2}\right).$$

Wir denken uns jetzt zunächst, indem wir die sämtlichen λ_α festhalten, eine dieser Differentialgleichungen fixiert, etwa diejenige, die lauter Pluszeichen aufweist, und fragen, durch welche Vorzeichenänderungen der Quadratwurzeln $\sqrt{\lambda_\alpha-k_i}$ wir von ihr zu den übrigen hingelangen. Da in (35) immer n der genannten Quadratwurzeln miteinander multipliziert sind, so kann dies in jedem Falle auf eine große Zahl verschiedener Weisen geschehen. Unabhängig von dieser Willkür finden wir aber offenbar, da n gerade ist, folgenden Satz:

Die Anzahl der Vorzeichenwechsel, die wir an den $\sqrt{\lambda_\alpha-k_i}$ *anbringen müssen, ist gerade oder ungerade, je nachdem wir von der anfänglichen Differentialgleichung zu einer solchen mit einer geraden oder ungeraden Anzahl von Minuszeichen übergehen wollen.*

Wie nun verhalten sich hierbei die Ausdrücke σx_i (34a)? Ein jeder derselben enthält von den in Betracht kommenden Faktoren $\sqrt{\lambda_\alpha-k_i}$ $(\alpha=1,2,\ldots,(n-2))$ wieder eine gerade Zahl. Daher folgt (bei aller Unbestimmtheit im einzelnen):

Die x_i *erfahren eine gerade oder ungerade Zahl von Zeichenwechseln, je nachdem wir bei der anfänglichen Differentialgleichung eine gerade oder ungerade Zahl zon Vorzeichenänderungen anbringen.*

Dies aber heißt in der Tat, nach der vorausgeschickten Bemerkung, daß die $R_{\frac{n-2}{2}}$, welche zu verschiedenen Vorzeichenkombinationen in (35) gehören, dann und nur dann von derselben Klasse sind, wenn die Anzahl der Vorzeichenwechsel, die von dem einen Systeme von Differentialgleichungen zum anderen hinüberführen, gerade ist, w. z. b. w.

Wir prüfen jetzt unsere Angabe über die *Irreduzibilität* der von unseren $R_{\frac{n-2}{2}}$ erzeugten Gebilde. Von einer bestimmten Anfangslage aus lassen wir das Element x auf der Mannigfaltigkeit $\lambda_{n-1} = C_1$ (31) irgendwelchen Weg beschreiben, durch welchen es schließlich zu seiner Anfangslage zurückkehrt, und sehen zu, wie sich dabei die verschiedenen Systeme von Differentialgleichungen (35) permutiert haben mögen. Wir wollen dies in der Weise bewerkstelligen, daß wir $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-2}$ als die eigentlichen Veränderlichen betrachten, die dann ihrerseits sich wegen (34b) so bewegen müssen, daß nicht nur sie selbst, sondern auch die Produkte:

$$\sqrt{\lambda_1 - k_i} \cdot \sqrt{\lambda_2 - k_i} \ldots \sqrt{\lambda_{n-2} - k_i}$$

(bis auf einen etwa bei allen simultan eintretenden und auf den Proportionalitätsfaktor σ zu rechnenden Zeichenwechsel) zu ihren Anfangswerten zurückkehren. Wir fragen, welche Zeichenwechsel dabei in (35) auftreten mögen. Offenbar kann dies nur eine gerade Zahl von Zeichenwechseln sein, wir können aber auch jede vorgegebene Art von Zeichenwechseln, deren Anzahl gerade ist, wirklich erzielen. Hierin liegt, was über die Irreduzibilität gesagt wurde.

§ 8.

Anwendung auf Liniengeometrie.

Die Anwendung der vorhergehenden Überlegungen auf Liniengeometrie betrifft selbstverständlich, wie in der Einleitung in Aussicht genommen, die Theorie der „konfokalen" Linienkomplexe zweiten Grades, welche in bekannter Weise durch das Gleichungssystem

$$(36) \qquad \sum_{i=1}^{6} \frac{x_i^2}{\lambda - k_i} = 0, \qquad \sum_{i=1}^{6} x_i^2 = 0$$

dargestellt werden (wo sich die zweite Gleichung aus der ersten ergibt, indem man $\lambda = \infty$ setzt). Wir haben hier für $n = 6$, $C_1 = \infty$ ganz die Prämissen des vorigen Paragraphen. Die Elemente der ausgezeichneten $M_{(4)}^{(2)}$, die durch $\lambda_5 = \infty$ gegeben ist, nennen wir *gerade Linien*, ihre R_1 *Strahlbüschel*, die beiden Arten der ihr angehörigen R_2 beziehungsweise *Strahlenbündel* und *Geradenfelder*. Der einzelne durch (36) gegebene Komplex zweiten Grades hat mit einem Strahlbüschel, allgemein zu reden, zwei Strahlen gemein, mit einem Strahlenbündel einen Kegel zweiter Ordnung, mit einem Geradenfeld eine Kurve zweiter Klasse.

Wir rekurrieren jetzt auf Satz I des vorigen Paragraphen und haben sofort, indem wir zunächst $\varrho = 1$ setzen:

I'. *Jede Raumgerade gehört acht Strahlbüscheln an, die dadurch definiert sind, daß sie mit jedem von zwei vorgegebenen Komplexen*

$$\lambda = a_1, \qquad \lambda = a_2$$

zwei zusammenfallende Strahlen gemein haben. Diese Strahlbüschel sind die Integrale der Differentialgleichungen

$$(37) \qquad \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi(\lambda_\alpha)}} = 0, \qquad (\nu = 0, 1, 2),$$

wo

$$\varphi(\lambda) = \prod_{i=1}^{6} (\lambda - k_i) \cdot \prod_{\varkappa=1}^{2} (\lambda - a_\varkappa).$$

Hierzu beachte man, daß, Satz II des vorigen Paragraphen zufolge, jedes Strahlbüschel von zwei der konfokalen Komplexe in dem erwähnten Sinne berührt wird, daß also, bei geeigneter Annahme von a_1, a_2, jedes Strahlbüschel des Raumes seine Darstellung durch (37) findet.

Wir setzen ferner in Satz I des vorigen Paragraphen $\varrho = 2$, ziehen gleichzeitig Satz III heran und erhalten das Theorem von der *Gemeinsamkeit der Singularitätenfläche* unserer Komplexe. In der Tat haben wir:

I''. *Jede Raumgerade gehört vier Strahlenbündeln und vier Geradenfeldern an, welche die Eigenschaft haben, mit jedem der konfokalen Komplexe einen in zwei Strahlbüschel zerfallenden Kegel zweiter Ordnung, bez. eine in zwei Strahlbüschel zerfallende Kurve zweiter Klasse gemein zu haben. Diese Bündel bez. Felder sind durch folgende Differentialgleichungen definiert:*

$$(38) \qquad \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi_1(\lambda_\alpha)}} = 0, \qquad (\nu = 0, 1),$$

wo

$$\varphi_1(\lambda) = \prod_{i=1}^{6} (\lambda - k_i)$$

gesetzt ist und sich die verschiedenen Vorzeichenkombinationen auf die Bündel und Felder in der erläuterten Weise verteilen. Die Fläche der Bündelmittelpunkte und die von den Felderebenen umhüllte Fläche sind irreduzibel.

Hier sind nun die Differentialgleichungen (38) keine anderen, als die von Herrn Rohn aufgestellten, auf die in der Einleitung Bezug genommen wurde. Der Unterschied unserer jetzigen Entwicklung gegenüber der von Herrn Rohn gegebenen oder auch gegenüber meiner eigenen [hier als XII. Aufsatz abgedruckten] Abhandlung (Über Konfigurationen usw.) ist dabei der, daß jetzt nicht, wie dort, die Existenz der gemeinsamen Singularitätenfläche unserer Komplexe bereits als bekannt angesehen und nur die Richtigkeit der Differentialgleichungen bewiesen wird, daß vielmehr die Existenz der gemeinsamen Singularitätenfläche selbst aus den Differentialgleichungen erschlossen wird. Freilich bleibt bei unserem jetzigen Gedankengange ein wichtiger Punkt noch unerledigt, *daß nämlich die Fläche* *der singulären Punkte mit der Fläche der singulären Ebenen identisch ist;* ich werde im folgenden Paragraphen hierauf zurückkommen. —

Haben wir so den Anschluß an die ersten Sätze erreicht, die zu Beginn dieser Mitteilung vorangestellt wurden, so gelingt jetzt ohne Schwierigkeit auch der Übergang zu dem eben dort genannten Theoreme des Herrn Domsch. Wir haben zu dem Zwecke an die Entwicklungen des § 3 anzuknüpfen, wobei wir uns aber darauf beschränken wollen, nur einen der Faktoren $\lambda - k_i$, nämlich $\lambda - k_6$, durch einen willkürlichen Faktor $\lambda - a_3$ zu ersetzen und diese Änderung auch nur an den Differentialgleichungen (37) anzubringen. Wir erhalten so die Gleichungen:

$$(39) \qquad \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\prod_{i=1}^{5} (\lambda_\alpha - k_i) \cdot \prod_{\varkappa=1}^{3} (\lambda - a_\varkappa)}} = 0, \qquad (\nu = 0, 1, 2),$$

deren geometrische Interpretation verlangt wird. Nach den Erläuterungen des § 3 wird es sich jedenfalls darum handeln, daß die Raumgerade x eine einfach ausgedehnte quadratische Mannigfaltigkeit, d. h. eine Regelschar durchläuft, welche ungeändert bleibt, wenn man x_6 im Vorzeichen ändert. Letztere Eigenschaft aber läßt sich auf Grund bekannter liniengeometrischer Entwicklungen geometrisch kurz dahin ausdrücken, daß die Erzeugenden unserer Regelschar paarweise in bezug auf den Komplex $x_6 = 0$ als konjugierte Polaren zusammengehören, oder auch, was dasselbe ist, daß die konjugierte Regelschar, d. h. die zweite Erzeugung des von unserer Regelschar überdeckten Hyperboloids, dem Komplexe $x_6 = 0$ angehört. Im übrigen wird, in Übereinstimmung mit § 3, unsere Regelschar die drei Komplexe $\lambda = a_1$, $\lambda = a_2$, $\lambda = a_3$ je zweimal berühren, d. h. mit jedem einzelnen derselben statt vier getrennter Strahlen zweimal zwei zusammenfallende Strahlen gemein haben. Wir finden das Theorem:

II. *Von jeder Raumgeraden aus erstrecken sich acht Regelscharen, welche die drei vorgegebenen Komplexe $\lambda = a_1$, $\lambda = a_2$, $\lambda = a_3$ je zweimal berühren und dabei die Eigenschaft haben, daß die von ihnen überdeckten Hyperboloide vermöge ihrer zweiten Erzeugung dem Komplexe $x_6 = 0$ angehören. Diese Regelscharen sind analytisch durch die Differentialgleichungen* (39) *definiert.*

Der hiermit gewonnene Satz steht dem von Herrn Domsch gegebenen sehr nahe, aber er ist mit ihm noch nicht identisch. Herr Domsch operiert überhaupt nicht, wie wir hier, mit beliebigen Raumgeraden, sondern immer nur mit den Geraden eines bestimmten der sechs linearen Fundamentalkomplexe, sagen wir mit den Geraden von $x_1 = 0$. Dies hat zufolge, daß von den vier elliptischen Koordinaten der Raumgeraden eine (etwa λ_1) den konstanten Wert k_1 bekommt und aus der Reihe der Veränderlichen ausscheidet.

Ich will der besseren Übersicht halber die ganze Reihe der hier entstehenden Sätze anführen. Formel (37) findet ihr Analogon, indem wir schreiben:

$$(40) \qquad \sum_{\alpha=2}^{4} \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\prod_{i=2}^{6} (\lambda_\alpha - k_i) \cdot (\lambda_\alpha - a_1)}} = 0, \qquad (\nu = 0, 1),$$

(wo neben fünf Faktoren $(\lambda - k_i)$ jetzt ein willkürlicher, $(\lambda - a_1)$, vorhanden ist), was uns von jeder geraden Linie des Komplexes $x_1 = 0$ auslaufend *vier diesem Komplexe angehörige Strahlbüschel ergibt, welche den beliebig angenommenen Komplex $\lambda = a_1$ je einfach berühren.* Formel (38) scheidet aus dem Vergleich aus, weil in (40) unter der Quadratwurzel überhaupt nur ein willkürlicher Faktor vorhanden ist und also nicht zwei weggelassen werden können, wie es der Fortschritt von (37) zu (38) verlangt.

Das Gegenbild zu Formel (39) gewinnen wir, indem wir den in (40) auftretenden Faktor $(\lambda - k_6)$ überall durch $(\lambda - a_2)$ ersetzen, unter a_2 eine willkürliche Größe verstanden. Wir haben dann die Differentialgleichungen:

$$(41) \qquad \sum_{\alpha=2}^{4} \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\prod_{i=2}^{5} (\lambda_\alpha - k_i) \cdot \prod_{\varkappa=1}^{2} (\lambda - a_\varkappa)}} = 0, \qquad (\nu = 0, 1),$$

und finden ihnen entsprechend *von jeder Linie des Komplexes $x_1 = 0$ auslaufend vier dem Komplexe $x_1 = 0$ angehörige Regelscharen, welche die beliebig vorgegebenen Komplexe $\lambda = a_1$ und $\lambda = a_2$ je zweimal berühren und deren konjugierte Regelscharen dem Komplexe $x_6 = 0$ angehören.* Dies aber ist der Domschsche Satz.

§ 9.

Verallgemeinerung der Kummerschen Fläche.

Als besten Gewinn der vorangehenden Erörterungen betrachte ich, daß sich eine naturgemäße Verallgemeinerung der Kummerschen Fläche für den Fall hyperelliptischer Funktionen höheren Geschlechtes darbietet. Die Kummersche Fläche erscheint im vorhergehenden als der Inbegriff der ∞^2 Strahlenbündel, bez. ∞^2 Geradenfelder, welche den hyperelliptischen Differentialgleichungen vom Geschlechte 2 genügen:

$$(42) \qquad \sum_{\alpha=1}^{4} \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi(\lambda_\alpha)}} = 0, \qquad (\nu = 0, 1),$$

wo $\varphi(\lambda)$ das Produkt $\prod_{i=1}^{6} (\lambda - k_i)$ bezeichnet. Ist nun $p > 2$ gegeben, so werden wir entsprechend $n = 2p + 2$ wählen $\left(\text{so daß } p = \frac{n-2}{2} \text{ ist}\right)$, zunächst eine der elliptischen Koordinaten konstant setzen:

$$\lambda_{n-1} = C_1 \tag{43}$$

und nun die Differentialgleichungen hinschreiben:

$$\sum_{\alpha=1}^{n-2} \frac{\pm \lambda_\alpha^\nu \cdot d\lambda_\alpha}{\sqrt{\varphi(\lambda_\alpha)}} = 0, \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, (p-1)), \tag{44}$$

wo $\varphi(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - k_i)$ zu nehmen ist. *Die irreduzibelen Mannigfaltigkeiten von zweimal* $\infty^p R_p$, *welche die Mannigfaltigkeit* (43) *nach Satz II und III des § 7 den Differentialgleichungen* (44) *entsprechend enthält, erscheinen uns als die Verallgemeinerungen der das eine Mal von Punkten gebildeten und das andere Mal von Ebenen umhüllten Kummerschen Fläche.* An die Stelle der Zahl 4, welche Ordnung und Klasse der Kummerschen Fläche angibt, tritt dabei die Zahl 2^{n-4}. —

Hier nun wird es unabweisbar, zu diskutieren, warum die von den Punkten gebildete und die von den Ebenen umhüllte Kummersche Fläche identisch sind. Wir werden den Beweis hierfür liefern müssen, indem wir von den elliptischen Linienkoordinaten λ und den Differentialgleichungen (42) ausgehen, und zusehen, was die Übertragung derselben Überlegung auf den Fall größerer Dimensionenzahl liefert.

Der in Aussicht genommene Beweis gestaltet sich jedenfalls am einfachsten, indem wir aus (42) zeigen, daß alle Linien, für welche zwei λ einander gleich werden (also etwa $\lambda_1 = \lambda_2$ ist), gleichzeitig die von den singulären Punkten gebildete Kummersche Fläche und die von den singulären Ebenen umhüllte Kummersche Fläche berühren. Dies aber gelingt folgendermaßen. Ich will, um unnötige Unbestimmtheiten zu vermeiden, mir die Differentialgleichungen (42) hier so geschrieben denken, daß die Terme mit $d\lambda_1$ das Pluszeichen haben. Setzen wir dann, indem $\lambda_2 = \lambda_1$ genommen ist, $\varphi(\lambda_2) = \varphi(\lambda_1)$, so werden vier der acht zu unterscheidenden Systeme von Differentialgleichungen lauten

$$\frac{(d\lambda_1 + d\lambda_2) \cdot \lambda_1^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_1)}} \pm \frac{d\lambda_3 \cdot \lambda_3^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_3)}} \pm \frac{d\lambda_4 \cdot \lambda_4^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_4)}} = 0, \quad (\nu = 0, 1), \tag{45a}$$

vier andere aber folgendermaßen:

$$\frac{(d\lambda_1 - d\lambda_2) \cdot \lambda_1^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_1)}} \pm \frac{d\lambda_3 \cdot \lambda_3^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_3)}} \pm \frac{d\lambda_4 \cdot \lambda_4^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_4)}} = 0, \quad (\nu = 0, 1). \tag{45b}$$

Die vier Systeme der einen und der anderen Art verteilen sich dabei gleichförmig auf die singulären Punkte und die singulären Ebenen, welche die Gerade λ trägt: denn unter den Gleichungssystemen (45a) und (45b) sind gleichförmig zwei mit einer geraden und zwei mit einer ungeraden

Zahl von Minuszeichen. Nun sage ich — und darin liegt unser Beweis — *daß von den Gleichungen* (45b) *immer diejenigen beiden, welche durchaus entgegengesetzte Vorzeichen haben, in ihrer geometrischen Bedeutung zusammenfallen* (so daß also die Gleichungen (45b) nicht zwei auf der Geraden λ befindliche Punkte und zwei durch sie hindurchgehende Ebenen vorstellen, sondern nur einen auf ihr befindlichen (doppeltzählenden) Punkt und eine durch sie hindurchgehende (doppeltzählende) Ebene). — In der Tat, ob ich beispielsweise schreibe:

$$0 = \frac{(d\lambda_1 - d\lambda_2)\lambda_1^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_1)}} + \frac{d\lambda_3 \cdot \lambda_3^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_3)}} + \frac{d\lambda_4 \cdot \lambda_4^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_4)}} \quad (\nu = 0, 1)$$

oder

$$0 = \frac{(d\lambda_1 - d\lambda_2)\lambda_1^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_1)}} - \frac{d\lambda_3 \cdot \lambda_3^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_3)}} - \frac{d\lambda_4 \cdot \lambda_4^\nu}{\sqrt{\varphi(\lambda_4)}} \quad (\nu = 0, 1),$$

kommt geometrisch auf dasselbe hinaus. Denn die eine Gleichung geht aus der anderen hervor, wenn λ_1 mit λ_2 vertausche, und dies ist eine für die geometrische Deutung irrelevante Operation. —

Wir wiederholen jetzt dieselbe Überlegung an den Differentialgleichungen (44). Wieder spalten wir die 2^{n-3} Systeme von Differentialgleichungen, die in (44) eingeschlossen sind (und die sich auf 2^{n-4} Systeme der einen Art und 2^{n-4} der anderen Art nach der Zahl der Minuszeichen verteilen), für $\lambda_1 = \lambda_2$ in 2^{n-4}, welche den Term $\frac{d\lambda_1 + d\lambda_2}{\sqrt{\varphi(\lambda_1)}} \cdot \lambda_1^\nu$, und in ebensoviele, welche den Term $\frac{d\lambda_1 - d\lambda_2}{\sqrt{\varphi(\lambda_1)}} \cdot \lambda_1^\nu$ enthalten. Von letzteren erschließen wir dann, daß sie paarweise zu demselben doppeltzählenden R_p gehören. Wir haben also folgenden Satz, in welchem wir die gewünschte Verallgemeinerung erblicken, wenn er auch der Form nach von dem ursprünglich für die Kummersche Fläche aufgestellten Theoreme zunächst sehr verschieden erscheint:

Während sich von einem beliebigen Punkt unserer Mannigfaltigkeit (43) *aus* 2^{n-4} *getrennte* R_p *der einen und ebenso viele* R_p *der anderen Art erstrecken, die beziehungsweise den Differentialgleichungen* (44) *genügen, fallen für solche Punkte von* (43), *für welche zwei* λ *einander gleich sind,* 2^{n-5} *der genannten* R_p *der einen Art und ebenso viele der anderen Art zu* 2^{n-6} *doppeltzählenden* R_p *der einen, bez. der anderen Art zusammen.*

Ich unterlasse es, diesen Satz noch weiter zu verfolgen, insbesondere auch solche Punkte von (43) in Betracht zu ziehen, für welche mehrere λ einander gleich werden, will aber den Wunsch nicht unterdrücken, daß dies von anderer Seite geschehen möge. Was den Fall $n = 4$ angeht, so findet man die betreffenden Verhältnisse in Bd. 5 der Math. Annalen, S. 295–296 [vgl. Abh. IX dieser Ausgabe, S. 145–147], auseinandergesetzt.

Göttingen, im Oktober 1886.

XIV. Notiz, betreffend den Zusammenhang der Liniengeometrie mit der Mechanik starrer Körper.

[Math. Annalen, Bd. 4 (1871).]

Mit den Betrachtungen der Plückerschen Liniengeometrie stehen gewisse Probleme der Mechanik starrer Körper im engsten Zusammenhange, so namentlich die Aufgabe der Zusammensetzung beliebiger, auf einen starren Körper wirkender Kräfte, und die Untersuchung der von einem starren Körper ausgeführten unendlich kleinen Bewegungen.

Von einem solchen Zusammenhange spricht Plücker bereits in der ersten größeren Mitteilung, die er über seine neuen geometrischen Forschungen machte[1]); bald darauf widmet er dessen Auseinandersetzung einen besonderen Aufsatz[2]). Auf denselben Gegenstand beziehen sich einzelne Stellen seiner „Neuen Geometrie"[3]), besonders die Nummern 25 und 39.

Plücker beabsichtigte, wie aus wiederholten Andeutungen in der „Neuen Geometrie" ersichtlich, die Anwendung seiner geometrischen Prinzipien auf Mechanik in einem größeren zusammenhängenden Werke, das der „Neuen Geometrie" nachfolgen sollte, auseinanderzusetzen. Daß Plücker diese Absicht nicht mehr verwirklicht hat, ist um so mehr zu bedauern, als die vorgenannten wenigen Stellen, wo er sich über seine mechanischen Konzeptionen ausspricht, nur sehr kurz und schwer verständlich, häufig auch unbestimmt sind. Ich werde nun im nachstehenden zunächst in kurzem Referate den Zusammenhang der im Eingange genannten mechanischen Probleme mit der Liniengeometrie darlegen, sodann einige Punkte besprechen, die mir in der Plückerschen Darstellung nicht ganz deutlich erscheinen. Hieran anknüpfend, werde ich dann eine besondere Art physikalischen Zusammenhangs erörtern, welche sich zwischen Kräftesystemen und unendlich kleinen Bewegungen aufstellen läßt.

[1]) On a New Geometry of Space. Phil. Trans. 1865, S. 725, vgl. Additional Note. [Gesammelte Abhandlungen, Bd. 1.]

[2]) Fundamental Views regarding Mechanics. 1866. S. 361. [Gesammelte Abhandlungen, Bd. 1.]

[3]) Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Leipzig, B. G. Teubner. 1868/69.

§ 1.

Einiges über den Zusammenhang der Mechanik starrer Körper mit der Liniengeometrie.

Daß in der Tat zwischen der Liniengeometrie und der Mechanik starrer Körper ein intimer Zusammenhang besteht, um dies zu sehen, braucht man nur die geometrischen Betrachtungen über die Mechanik starrer Körper durchzugehen, wie sie von Poinsot, Möbius, Chasles u. a. angestellt worden sind[4]). Man hat bei diesen Untersuchungen fortwährend mit geometrischen Dingen zu tun, welche in der Liniengeometrie gleich anfangs und fundamental auftreten. Eine kurze Auseinandersetzung mag dies erläutern.

Die fraglichen Betrachtungen beziehen sich wesentlich auf die bereits genannten zwei Aufgaben, deren eine die Zusammensetzung von Kräften behandelt, welche auf einen starren Körper wirken, während die andere die unendlich kleinen Bewegungen untersucht, die ein starrer Körper vollführt. Beide Probleme sind gewissermaßen geometrisch identisch, insofern die Betrachtung unendlich kleiner Bewegungen eines starren Körpers auf die Zusammensetzung unendlich kleiner Rotationen eines solchen zurückkommt *und sich unendlich kleine Rotationen nach ganz derselben Regel wie Kräfte, nämlich nach der Regel vom Parallelogramm, zusammensetzen.* Dabei tritt also der Begriff der *Kraft* dem der *unendlich kleinen Rotation* als koordiniert[5]) gegenüber. Alle Betrachtungen, die man hinsichtlich Kräften anstellt, welche auf einen starren Körper wirken, können in ganz gleicher Form für unendlich kleine Rotationen angestellt werden, die ein solcher Körper ausführt, und umgekehrt.

Irgendwie gegebene Kräfte, welche einen starren Körper angreifen, können nun immer durch *zwei* Kräfte[6]) ersetzt werden, deren eine man nach einer beliebig angenommenen Geraden wirken lassen kann; worauf

[4]) Vgl. bes. Möbius: Lehrbuch der Statik. Leipzig 1837. Teil I. [Werke, Bd. III.] In großer Vollständigkeit finden sich die betreffenden Untersuchungen in Schells Theorie der Bewegung und der Kräfte. Leipzig 1870. [Vgl. hierzu, was die neuere Literatur anbetrifft, den Artikel von Timerding in der Enzyklopädie der Math. Wiss., Bd. 4.]

[5]) Diese Koordination von Kraft und Rotation ist nur eine mathematische, keine physikalische. Vgl. § 4.

[6]) Die *Kräftepaare*, welche in der Poinsotschen Theorie eine so wichtige Rolle spielen, sind dabei anzusehen als (unendlich kleine) Kräfte, welche nach einer unendlich fernen Geraden wirken. In der Tat haben die beiden Kräfte eines Paares, wenn dieser Ausdruck gestattet ist, nach dem Hebelgesetze eine unendlich ferne (und dann unendlich kleine) Resultante. [So schon bei Culmann in der vierten Auflage seiner graphischen Statik (1864—1866).]

Analogerweise sind in den Betrachtungen des Textes Translationen eines Körpers anzusehen als Rotationen um unendlich ferne Achsen.

Kräftepaare und Translationen sind also in demselben Sinne koordiniert, wie Kräfte und Rotationen.

denn die Gerade, nach der die andere Kraft wirkt, und die Intensität beider Kräfte gegeben sind. Ebenso läßt sich jedes System unendlich kleiner Rotationen, oder, kürzer gesagt, jede unendlich kleine Bewegung eines starren Körpers aus *zwei* unendlich kleinen Rotationen zusammensetzen. Eine der Rotationsachsen kann dabei beliebig im Raume angenommen werden; dann ist die andere Achse und die Größe der um beide stattfindenden Rotation bestimmt. Durch ein Kräftesystem oder eine unendlich kleine Bewegung werden sonach die Geraden des Raumes paarweise konjugiert; bereits Möbius hat gezeigt[7]), daß die gegenseitige Beziehung beider durch eine besondere Art dualer Verwandtschaft gegeben ist, derjenigen Art, die man nach v. Staudt als „Nullsystem" bezeichnet und die dadurch gegenüber anderen dualen Verwandtschaften ausgezeichnet ist, daß jeder Punkt mit der ihm entsprechenden Ebene vereinigt liegt. Im Nullsysteme gibt es dreifach unendlich viele „Nullgerade", das sind solche Linien, welche mit ihren konjugierten zusammenfallen. Alle Linien, welche durch einen beliebigen Punkt in dessen entsprechender Ebene verlaufen, sind Nullgerade, und sind die Nullgeraden auch umgekehrt dadurch vollständig definiert, daß sie in der jedem ihrer Punkte entsprechenden Ebene liegen. — Will man eine der beiden Kräfte, in welche ein gegebenes Kräftesystem zerlegt werden soll, nach einer Nullgeraden des betreffenden Nullsystems wirken lassen, so wirkt auch die zweite Kraft nach derselben Nullgeraden. Die Intensität beider Kräfte wird unendlich groß und die Kräfte erscheinen entgegengesetzt gerichtet. Man hat es dann also mit einem Grenzfalle der allgemeinen Zerlegung des Kräftesystems in zwei Kräfte zu tun, der nur, insofern er Grenzfall ist, einen Sinn hat. Bei der Betrachtung unendlich kleiner Rotationen würde man ebenso, wenn man eine der beiden Rotationen, in die man das System zerlegen kann, um eine Nullgerade des zugehörigen Nullsystems geschehen läßt, zu einem für sich nicht verständlichen Grenzfalle gelangen. Die Nullgeraden haben in beiden Fällen auch noch eine weitere leicht angebbare Eigenschaft. Im Falle des Kräftesystems sind die Nullgeraden diejenigen Linien des Raumes, um welche das Moment des Kräftesystems gleich Null ist; im Falle der unendlich kleinen Bewegung sind die Nullgeraden diejenigen Linien, welche senkrecht zu sich selbst versetzt werden, d. h. ohne eine Verschiebung parallel mit ihrer Richtung zu erfahren[8]).

Nun ist die dreifach unendliche Mannigfaltigkeit der Nullgeraden eines Nullsystems genau dasselbe, was Plücker als einen linearen Linien-

[7]) Crelles Journal, Bd. 10. Über eine besondere Art dualer Verhältnisse zwischen Figuren im Raume. [Werke, Bd. I.]

[8]) Möbius, Statik. I. § 84 ff. [Werke, Bd. 3.] Chasles in den Comptes Rendus. 1843. Sur les mouvements infiniment petits des corps.

komplex bezeichnet[9]), d. h. also wie diejenige dreifach unendliche Mannigfaltigkeit von Geraden, deren Koordinaten eine lineare Gleichung befriedigen.

Ein beliebiges Kräftesystem, wie eine beliebige unendlich kleine Bewegung ist sonach jedesmal mit einem bestimmten linearen Komplexe in Verbindung gesetzt. Die Linien des Komplexes sind diejenigen Raumgeraden, in bezug auf welche das Kräftesystem kein Drehmoment hat, resp. welche bei der unendlich kleinen Bewegung senkrecht gegen sich selbst versetzt werden. Die durch den Komplex paarweise zugeordneten Geraden — die *konjugierten Polaren des Komplexes* in der Plückerschen Terminologie[10]) — sind diejenigen Linienpaare, nach denen zwei Kräfte wirken können, welche dem gegebenen Kräftesystem äquivalent sind, bez. um welche zwei unendlich kleine Rotationen geschehen können, die die gegebene unendlich kleine Bewegung ersetzen.

Das beliebige Kräftesystem, resp. die beliebige unendlich kleine Bewegung kann für die geometrische Vorstellung geradezu durch den zugehörigen linearen Komplex ersetzt werden. Man muß dabei im Falle des Kräftesystems nur von der absoluten Größe der wirkenden Kräfte absehen und alle solchen Kräftesysteme als wesentlich identisch betrachten, die sich nur hinsichtlich ihrer Intensität unterscheiden. Bei unendlich kleinen Bewegungen wird dem Begriffe des Unendlich-Kleinen entsprechend von vornherein von der absoluten Größe abstrahiert, und es braucht eine solche Abstraktion also nicht hier noch ausdrücklich eingeführt zu werden.

Ein linearer Komplex kann insbesondere ein spezieller Komplex werden[11]), d. h. in die Gesamtheit aller Geraden übergehen, die eine feste Gerade schneiden. Das mit dem linearen Komplexe gleichbedeutende Kräftesystem reduziert sich dementsprechend auf eine einzelne Kraft, die nach der festen Geraden wirkt; die mit dem linearen Komplexe gleichbedeutende unendlich kleine Bewegung auf eine Rotation, welche um die feste Gerade geschieht.

§ 2.

Analytische Darstellung. Koordinaten von Kräften und (unendlich kleinen) Rotationen. Koordinaten von Kräftesystemen und (unendlich kleinen) Bewegungen.

Man beweist die vorgetragenen Dinge am einfachsten, wenn man, nach dem Vorgange von Plücker[12]), einer Kraft, resp. unendlich kleinen Rotation, geradezu *Koordinaten* erteilt, nämlich dieselben Koordinaten, welche

[9]) Vgl. Plücker. Neue Geometrie, Nr. 29.

[10]) Neue Geometrie, Nr. 28.

[11]) Neue Geometrie, Nr. 45. Dem entspricht, daß die Determinante des betr. Nullsystems verschwindet.

[12]) Vgl. Neue Geometrie, Nr. 25.

die gerade Linie besitzt, nach welcher die Kraft wirkt, bez. um welche die Rotation geschieht.

Seien, unter Zugrundelegung eines rechtwinkligen Koordinatensystems, x, y, z und x', y', z' die Koordinaten zweier Punkte der zu bestimmenden Geraden, so erhält ihre Verbindungslinie bei **Plücker** als Koordinaten die relativen Werte der folgenden sechs Ausdrücke:

$$\varrho X = x - x', \qquad \varrho Y = y - y', \qquad \varrho Z = z - z',$$
$$\varrho L = yz' - y'z, \quad \varrho M = x'z - xz', \quad \varrho N = xy' - x'y.$$

Dabei ist identisch:

$$XL + YM + ZN = 0,$$

wodurch die relativen Werte der sechs Größen X, Y, Z, L, M, N auf die zur Bestimmung einer Geraden notwendigen vier Konstanten zurückkommen.

Auf *dieselben* sechs Koordinaten kommt man bekanntlich, wenn man die Gerade nicht, wie vorstehend, als Verbindungslinie zweier Punkte, als einen *Strahl*, wie **Plücker** sagt, sondern als Durchschnittslinie zweier Ebenen, als eine *Achse*, nach **Plückers** Ausdrucksweise, auffaßt. — Während die mechanische Vorstellung der nach einer Geraden wirkenden Kraft mit der geometrischen der Geraden als Strahl verknüpft ist, ist es die mechanische der um eine Gerade geschehenden Rotation mit der geometrischen der Geraden als Achse.

Einer Kraft, die nach einer Geraden wirkt, bez. einer unendlich kleinen Rotation, die um eine solche geschieht, erteilen wir nun geradezu die sechs Größen

$$X, Y, Z, L, M, N$$

als Koordinaten.

Für Kräfte kommt diese Koordinatenbestimmung, sobald man noch die absoluten Werte der sechs Koordinaten der Intensität der Kraft proportional festlegt, auf die gewöhnliche Art und Weise heraus, wie man Kräfte in der Mechanik bezeichnet. X, Y, Z sind die Komponenten parallel zu den drei Koordinatenachsen, L, M, N die Drehungsmomente um dieselben Achsen.

Eine solche Festlegung der absoluten Werte der Koordinaten hat bei einer unendlich kleinen Rotation so lange keinen Sinn, als man nicht eine (willkürlich gewählte) andere unendlich kleine Rotation als gleichzeitig mit ihr eintretend ansieht, der man dann die Intensität 1 erteilt.

Kräfte und Rotationen, deren Koordinaten in dieser Weise absolute Werte bekommen haben, setzen sich nun zusammen, indem sich ihre Koordinaten addieren[13]).

[13]) **Battaglini** hat die sich hier anknüpfenden Dinge in einer Reihe von Aufsätzen in den Rendiconti und Atti der Akademie zu Neapel unter Zugrundelegung tetraedrischer Koordinaten ausgeführt. (In den Rendiconti vom Februar, Mai, August 1869, Mai 1870 und in den Atti, Bd. 4, 1869.)

Man vgl. auch **Cayley**: On the six Coordinates of a line. Cambridge Transactions. Bd. 9, 1868, bes. das Kapitel: Statical and Kinematical Applications, S. 25. [Coll. Papers, Bd. VII.]

Dieser Satz sagt zunächst aus, daß alle Systeme von Kräften, bez. alle Systeme von Rotationen, welche durch Addition der den einzelnen Kräften bez. Rotationen zugehörigen Koordinaten dieselben sechs Werte ergeben, äquivalent sind.

Diese durch Addition erhaltenen sechs Werte, welche wir als *Koordinaten des Kräftesystems* bez. als *Koordinaten der unendlich kleinen Bewegung* ansprechen können, mögen heißen:

$$\Xi, \mathrm{H}, \mathrm{Z}, \Lambda, \mathrm{M}, \mathrm{N}.$$

Es kann nun insbesondere sein:

$$\Xi\Lambda + \mathrm{HM} + \mathrm{ZN} = 0.$$

Dann kann das Kräftesystem durch eine einzelne Kraft, die unendlich kleine Bewegung durch eine Rotation ersetzt werden, deren Koordinaten geradezu sind:

$$X = \Xi, \quad Y = \mathrm{H}, \quad Z = \mathrm{Z}, \quad L = \Lambda, \quad M = \mathrm{M}, \quad N = \mathrm{N}.$$

Ist aber die Bedingung

$$\Xi\Lambda + \mathrm{HM} + \mathrm{ZN} = 0$$

nicht erfüllt, so kann man das Kräftesystem nur durch zwei Kräfte, die unendlich kleine Bewegung nur durch zwei Rotationen ersetzen. Sind die Koordinaten der beiden Kräfte, bezüglich der beiden Rotationen:

$$X', Y', Z', L', M', N' \quad \text{und} \quad X'', Y'', Z'', L'', M'', N'',$$

so muß sein:

$$X' + X'' = \Xi, \quad Y' + Y'' = \mathrm{H}, \quad Z' + Z'' = \mathrm{Z},$$
$$L' + L'' = \Lambda, \quad M' + M'' = \mathrm{M}, \quad N' + N'' = \mathrm{N}.$$

Gleichzeitig ist dann:

$$X'L' + Y'M' + Z'N' = 0, \qquad X''L'' + Y''M'' + Z''N'' = 0.$$

Diese Gleichungen sagen nun aus, daß die geraden Linien X', Y', Z', L', M', N' und $X'', Y'', Z'', L'', M'', N''$ konjugierte Polaren sein sollen in bezug auf den linearen Komplex, dessen Gleichung ist

$$\Lambda X + \mathrm{M}Y + \mathrm{N}Z + \Xi L + \mathrm{H}M + \mathrm{Z}N = 0.$$

Da sich in der „Neuen Geometrie“ nicht gerade eine Stelle findet, aus der man dieses ohne weiteres ersehen kann, folge hier der kurze Beweis.

Die Bedingung, daß eine gerade Linie die feste Gerade X', Y', Z', L', M', N' schneide, ist:

$$L'X + M'Y + N'Z + X'L + Y'M + Z'N = 0.$$

Ebenso für die Gerade X'', Y'', Z'', L'', M'', N'':

$$L''X + M''Y + N''Z + X''L + Y''M + Z''N = 0.$$

Durch Addition beider Gleichungen folgt:

$$\mathsf{\Lambda} X + \mathsf{M} Y + \mathsf{N} Z + \mathsf{\Xi} L + \mathsf{H} M + \mathsf{Z} N = 0.$$

Das heißt: Alle Geraden, welche die beiden X', Y', Z', L', M', N' und X'', Y'', Z'', L'', M'', N'' schneiden, gehören dem fraglichen linearen Komplexe an. Das aber ist die charakteristische Eigenschaft[14]) der konjugierten Polaren, w. z. b. w.

Die Koeffizienten

$$\mathsf{\Xi},\ \mathsf{H},\ \mathsf{Z},\ \mathsf{\Lambda},\ \mathsf{M},\ \mathsf{N}$$

in der Gleichung des linearen Komplexes kann man geradezu als *Koordinaten des linearen Komplexes*[15]) bezeichnen. Es ist das darum gestattet, weil, wenn die sechs Koeffizienten insbesondere die Gleichung befriedigen:

$$\mathsf{\Xi\Lambda} + \mathsf{HM} + \mathsf{ZN} = 0,$$

sie die Koordinaten desjenigen speziellen Komplexes sind, der dann durch die gegebene lineare Gleichung

$$\mathsf{\Lambda} X + \mathsf{M} Y + \mathsf{N} Z + \mathsf{\Xi} L + \mathsf{H} M + \mathsf{Z} N = 0$$

dargestellt wird, d. h. die Koordinaten derjenigen geraden Linie, welche von allen der Gleichung genügenden Geraden geschnitten wird. Es muß ja in der Tat die vorstehende Gleichung bestehen, damit sich zwei Gerade mit den Koordinaten $\mathsf{\Xi}$, H, Z, $\mathsf{\Lambda}$, M, N und X, Y, Z, L, M, N schneiden.

Gebrauchen wir nun diesen Ausdruck: Koordinaten eines linearen Komplexes, gleichgültig, ob der Komplex ein spezieller (eine gerade Linie) geworden ist oder nicht, so können wir, unabhängig davon, ob ein gegebenes Kräftesystem eine Resultante hat oder nicht, resp. ob eine gegebene unendlich kleine Bewegung sich auf eine Rotation reduziert oder nicht, den Satz aussprechen:

Das geometrische Bild für ein Kräftesystem, bez. eine unendlich kleine Bewegung mit den Koordinaten:

$$\mathsf{\Xi},\ \mathsf{H},\ \mathsf{Z},\ \mathsf{\Lambda},\ \mathsf{M},\ \mathsf{N}$$

ist ein linearer Komplex, der dieselben Koordinaten besitzt.

[14]) Neue Geometrie, Nr. 28.

[15]) Vgl.: „Die allgemeine lineare Transformation der Linienkoordinaten". Math. Annalen, Bd. 2. [Siehe Abh. III dieser Ausgabe.]

§ 3.

Besprechung einiger besonderer Punkte.

Es sind nun einige Dinge, wie bereits im Eingange erwähnt, die in der von Plücker gegebenen Darstellung des Zusammenhanges seiner Liniengeometrie mit der Mechanik starrer Körper, wie sie etwa in der 25. Nummer der „Neuen Geometrie" vorliegt, nicht ganz klar zu sein scheinen.

Kräftesysteme und unendlich kleine Bewegungen können, nach dem Vorstehenden, beide unter demselben geometrischen Bilde, dem linearen Komplexe, vorgestellt werden. Ein und derselbe Komplex ist also einmal Bild eines Kräftesystems, das andere Mal Bild einer unendlich kleinen Bewegung: ganz in demselben Sinne, wie ein und dieselbe gerade Linie (ein spezieller Komplex) einmal eine nach ihr wirkende Kraft, das andere Mal eine um sie stattfindende Rotation versinnlichte. Zwischen dem Kräftesystem und der unendlich kleinen Bewegung, die sich auf denselben linearen Komplex beziehen, besteht ebensowenig ein ursächlicher physikalischer Zusammenhang, als zwischen der Kraft, welche nach einer Geraden wirkt, und der Rotation, die um dieselbe Gerade stattfindet.

Aber in der Plückerschen Darstellung sieht es so aus, als wenn das Kräftesystem die Ursache der zugehörigen (auf denselben linearen Komplex bezüglichen) unendlich kleinen Bewegung sei. Dementsprechend wird denn auch beides, als wesentlich identisch, mit dem einheitlichen Namen „Dyname" bezeichnet.

Daß ein Kräftesystem und eine unendlich kleine Bewegung bei diesen Betrachtungen überhaupt nicht in einen ursächlichen Zusammenhang gesetzt werden können, ist daraus ersichtlich, daß bei einem gegebenen Kräftesystem doch nur dann eine bestimmte Bewegung des starren Körpers erfolgt, wenn derselbe eine Masse, einen Schwerpunkt, ein Trägheitsellipsoid usw. besitzt. Durch einen bestimmten starren Körper, dessen Masse usw. ein für allemal gegeben ist, wird also allerdings jedem Kräftesystem eine bestimmte unendlich kleine Bewegung, die seine Wirkung ist, koordiniert[16]). Solange man aber nur schlechthin von einem starren Körper spricht, dessen Massenverteilung gar nicht in Betracht kommt, kann von einer ursächlichen Zuordnung überhaupt nicht die Rede sein.

Es entsteht dabei die Frage, ob nicht eine andere Art physikalischen

[16]) Da sowohl das Kräftesystem als die unendlich kleine Bewegung durch einen linearen Komplex ersetzt werden können, so begründet jeder starre Körper von gegebener Massenverteilung eine besondere Art räumlicher Verwandtschaft, bei welcher jedem linearen Komplexe ein zweiter zugeordnet ist. Für Körper, deren Trägheitsellipsoid eine Kugel ist, wird die Verwandtschaft geradezu die Polarreziprozität hinsichtlich einer um den Schwerpunkt des Körpers herumgelegten Kugel.

Zusammenhanges zwischen Kräftesystemen und unendlich kleinen Bewegungen obwaltet, auf den die mathematische Koordination der beiden Dinge zurückzuführen wäre. Davon soll in den nächsten Paragraphen gehandelt werden.

Ein weiterer Punkt, der in der Plückerschen Darstellung nicht ganz deutlich scheint, ist der folgende, der übrigens mit dem erwähnten nahe zusammenhängt.

Wenn wir von einer Kraft sprechen, so knüpft das an die geometrische Vorstellung der Geraden als einer Punktreihe, als eines Strahles, an. Dagegen, wenn eine (unendlich kleine) Rotation um eine Gerade stattfindet, so fassen wir die Gerade als ein Ebenenbüschel, als eine Achse. An eine Achse die Vorstellung einer Kraft anzuknüpfen, d. h. also eine Kraft sich zu denken, welche einen frei beweglichen starren Körper um eine *bestimmte* Gerade drehen will, ist ebenso unmöglich, wie mit einem Strahl die Vorstellung einer unendlich kleinen Bewegung zu verbinden, die dann den Körper nach einer einzelnen, *bestimmten* Geraden verschieben müßte. Eine Drehkraft, d. h. ein Kräftepaar, hat nicht eine Achse, sondern unendlich viele, deren Richtung allein gegeben ist; ebenso verschiebt eine Translation nicht einen einzelnen Strahl in sich, sondern gleichzeitig alle parallelen Strahlen. Man kann also auch nicht die geometrische Vorstellung einer Achse mit der mechanischen einer Drehkraft, die geometrische Vorstellung eines Strahles mit der mechanischen einer Translation verknüpfen. Es kann nur die Rede sein von Kräften, die *nach* geraden Linien wirken und von Bewegungen, die *um* solche geschehen. Dies tritt bei Plücker nicht deutlich hervor; Plücker spricht meist von Kräften und Rotationen, dann aber auch wieder von Translationen und Drehkräften, und hat es an einzelnen Stellen den Anschein, als wäre jede Kraft mit einer Translation, jede Drehkraft mit einer Rotation ursächlich verknüpft.

Daß man nur von Kräften sprechen kann, welche *nach* geraden Linien wirken, nur von Bewegungen, die *um* solche geschehen, kommt auf den undualistischen Charakter zurück, den überhaupt unsere Maßbestimmung besitzt. Dieselbe bezieht sich bekanntlich auf eine ebene Kurve zweiten Grades, den unendlich weit entfernten imaginären Kreis. Man kann nun aber nach dem Vorgange von Cayley[17]) eine allgemeinere Maßbestimmung konzipieren, bei welcher eine allgemeine Fläche zweiten Grades dieselbe Rolle spielt, wie sonst die genannte ebene Kurve. Führt man eine solche Maßbestimmung ein und ersetzt gleichzeitig die sechsfach unendlich vielen Bewegungen unseres Raumes durch ebenso viele lineare Transformationen,

[17]) Vgl. Cayley. A sixth Memoir upon Quantics. Phil. Trans. 1859. [Coll. Papers, Bd. II.] Sodann: Salmons Analytische Geometrie der Kegelschnitte. Kap. XXII (der Fiedlerschen Übersetzung).

welche die fundamentale Fläche zweiten Grades unverändert lassen[18]): — so kann man gleichmäßig von Kräften sprechen, die nach Geraden und die um Gerade wirken, und von Bewegungen, die um Gerade und nach Geraden geschehen. Es würden aber beide Arten von Kräften und beide Arten von Bewegungen gleichbedeutend sein. Eine Drehung um eine Gerade ist dann dasselbe, wie eine Verschiebung nach der ihr in bezug auf die fundamentale Fläche zweiten Grades konjugierten Polare. Ebenso eine Kraft, die nach einer Geraden wirkt, dasselbe, wie eine Kraft, die um deren konjugierte Polare zu drehen bestrebt ist.

Ein dritter Punkt, der bei Plücker wenigstens nicht ausdrücklich hervorgehoben ist, ist der, daß man nur unendlich kleine Rotationen, überhaupt unendlich kleine Bewegungen in Betracht ziehen darf Endliche Bewegungen setzen sich ja in anderer Weise zusammen, als unendlich kleine, es ist z. B. die Aufeinanderfolge bei der Zusammensetzung nicht gleichgültig, während es bei unendlich kleinen Bewegungen, ebenso wie bei der Zusammensetzung von Kräften, auf die Reihenfolge nicht ankommt.

§ 4.

Über die Art des physikalischen Zusammenhanges zwischen Kräftesystemen und unendlich kleinen Bewegungen.

Es läßt sich nun in der Tat ein physikalischer Zusammenhang zwischen Kräftesystemen und unendlich kleinen Bewegungen angeben, welcher es erklärt, wieso die beiden Dinge mathematisch koordiniert auftreten. Diese Beziehung ist nicht von der Art, daß sie jedem Kräftesystem eine einzelne unendlich kleine Bewegung zuordnet, sondern sie ist anderer Art, sie ist eine *dualistische*.

Es sei ein Kräftesystem mit den Koordinaten

$$\Xi,\ \mathsf{H},\ \mathsf{Z},\ \Lambda,\ \mathsf{M},\ \mathsf{N}$$

und eine unendlich kleine Bewegung mit den Koordinaten

$$\Xi',\ \mathsf{H}',\ \mathsf{Z}',\ \Lambda',\ \mathsf{M}',\ \mathsf{N}'$$

[18]) Eine Fläche zweiten Grades geht durch sechsfach unendlich viele lineare Transformationen in sich über. Aber dieselben sondern sich in zwei sechsfach unendliche Mannigfaltigkeiten. *Bei den Transformationen der einen Mannigfaltigkeit bleiben die beiden Systeme geradliniger Erzeugender der Fläche ungeändert, bei den Transformationen der zweiten Mannigfaltigkeit vertauschen sich die beiden Systeme gegenseitig.* Die Transformationen der ersten Mannigfaltigkeit sind im Texte gemeint; sie gehen, wenn die F_2 allmählich in den unendlich weiten imaginären Kreis übergeht, allmählich in die sechsfach unendlich vielen Bewegungen des Raumes über. — Bei einer nächsten Gelegenheit denke ich zu zeigen, wie die im Texte erwähnte Cayleysche Maßbestimmung unter Hinzunahme dieser sechsfach unendlich vielen Transformationen genau zu denselben geometrischen Vorstellungen hinleitet, wie sie von einem ganz anderen Ausgangspunkte aus, Lobatchewsky und Bolyai entwickelt haben.

gegeben, wobei man die Koordinaten in der in § 2 besprochenen Weise absolut bestimmt haben mag. *Dann repräsentiert,* wie hier nicht weiter nachgewiesen werden soll, *der Ausdruck*

$$\mathrm{\Lambda}'\Xi + \mathrm{M}'\mathrm{H} + \mathrm{N}'\mathrm{Z} + \Xi'\mathrm{\Lambda} + \mathrm{H}'\mathrm{M} + \mathrm{Z}'\mathrm{N}$$

das Quantum von Arbeit, welche das gegebene Kräftesystem bei Eintritt der gegebenen unendlich kleinen Bewegung leistet.

Ist insbesondere:

$$\mathrm{\Lambda}'\Xi + \mathrm{M}'\mathrm{H} + \mathrm{N}'\mathrm{Z} + \Xi'\mathrm{\Lambda} + \mathrm{H}'\mathrm{M} + \mathrm{Z}'\mathrm{N} = 0,$$

so leistet das gegebene Kräftesystem bei Eintritt der gegebenen unendlich kleinen Bewegung *keine* Arbeit.

Diese Gleichung nun repräsentiert uns, indem wir einmal Ξ, H, Z, $\mathrm{\Lambda}$, M, N, *das andere Mal* Ξ', H', Z', $\mathrm{\Lambda}'$, M', N' *als veränderlich betrachten, den Zusammenhang zwischen Kräftesystemen und unendlich kleinen Bewegungen.*

Betrachten wir Ξ, H, Z, $\mathrm{\Lambda}$, M, N als veränderlich, so sagt die Gleichung aus: Es gibt vierfach unendlich viele Kräftesysteme[20]), welche bei einer gegebenen unendlich kleinen Bewegung keine Arbeit leisten. Ihre Koordinaten haben eine homogene lineare Gleichung zu befriedigen. Das kann man auch so aussprechen:

Durch eine homogene lineare Gleichung zwischen den Koordinaten eines Kräftesystems wird eine unendlich kleine Bewegung dargestellt; ganz in demselben Sinne, wie etwa in der analytischen Geometrie durch eine homogene lineare Gleichung zwischen Punktkoordinaten, welche aussagt, daß die Entfernung eines Punktes von einer gewissen Ebene gleich Null sein soll, diese gewisse Ebene dargestellt wird.

Betrachten wir dagegen Ξ', H', Z', $\mathrm{\Lambda}'$, M', N' als veränderlich, so sagt unsere Gleichung aus: Es gibt vierfach unendlich viele unendlich kleine Bewegungen, bei deren Eintritt ein gegebenes Kraftsystem keine Arbeit leistet. Ihre Koordinaten genügen einer homogenen linearen Gleichung. Anders ausgedrückt:

[19]) [Die Analogie zwischen Konfigurationen und unendlich kleinen Bewegungen wird schon von Rodrigues in seiner großen Abhandlung: Les lois géométriques qui régissent le deplacement d'un système solide etc. (Liouvilles Journal, Bd. 5, 1840) in allgemeiner Gedankenwendung auf das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten zurückgeführt. Bei Cayley finden sich dann (in dem schon genannten Aufsatze über die sechs Koordinaten einer geraden Linie) ähnliche analytische Formeln, wie hier im Texte. Es fehlen nur die Ausführungen über die Geometrie der linearen Komplexe.

Siehe übrigens, was die Weiterführung der Betrachtungen angeht, den unten folgenden Aufsatz XXX.]

[20]) Diejenigen als identisch betrachtet, die sich nur hinsichtlich des absoluten Wertes ihrer Koordinaten unterscheiden.

Durch eine homogene lineare Gleichung zwischen den Koordinaten einer unendlich kleinen Bewegung wird ein Kräftesystem dargestellt, ganz dem entsprechend, wie, wenn wir bei dem eben angezogenen Beispiele aus der analytischen Geometrie bleiben, durch eine lineare Gleichung zwischen Ebenenkoordinaten ein Punkt dargestellt wird.

Das geometrische Substrat für die hiermit auseinandergesetzte *Dualität zwischen Kräftesystemen und unendlich kleinen Bewegungen* bildet die doppelte Art und Weise, wie sich in der Liniengeometrie alle Begriffe fassen lassen, wenn man vom linearen Komplexe als Raumelement ausgeht[21]). Ein linearer Komplex ist dann gleichzeitig Raumelement, andererseits das durch eine lineare Gleichung dargestellte Gebilde. Die Gleichung:

$$\mathrm{\Lambda}'\Xi + \mathrm{M}'\mathrm{H} + \mathrm{N}'\mathrm{Z} + \Xi'\mathrm{\Lambda} + \mathrm{H}'\mathrm{M} + \mathrm{Z}'\mathrm{N} = 0,$$

in der nunmehr Ξ, H, Z, $\mathrm{\Lambda}$, M, N und Ξ', H', Z', $\mathrm{\Lambda}'$, M', N' die Koordinaten zweier linearer Komplexe bedeuten sollen, sagt eine zwischen denselben geltende Beziehung aus, die ich als *involutorische* Lage derselben bezeichne[22]). Was man unter der involutorischen Lage zweier linearer Komplexe geometrisch zu verstehen hat, ist vielleicht am einfachsten so auseinander zu setzen. Jedem Punkte des Raumes entspricht im ersten Komplexe eine Ebene, dieser Ebene im zweiten Komplexe ein Punkt. Auf denselben Punkt kommt man bei involutorischer Lage der beiden Komplexe, wenn man die Ebene betrachtet, die dem anfänglich gewählten Punkte im zweiten Komplexe entspricht und nun den Punkt sucht, der dieser Ebene im ersten Komplexe zugehört. Die mit den beiden Komplexen verknüpften dualen Umformungen des Raumes sind also miteinander vertauschbar. — Ist einer der beiden Komplexe ein spezieller, d. h. eine Gerade, so tritt die involutorische Lage dann ein, wenn die Gerade dem anderen Komplexe angehört. Sind beide Komplexe Gerade, so ist die involutorische Lage mit dem Schneiden der beiden Geraden gleichbedeutend.

Ein linearer Komplex kann nach dem Gesagten entweder als Raumelement oder als die vierfach unendliche Mannigfaltigkeit der mit ihm in Involution liegenden Komplexe aufgefaßt werden.

Geben wir dem linearen Komplexe die mechanische Bedeutung einer unendlich kleinen Bewegung, so repräsentieren die vierfach unendlich vielen

[21]) Ich habe diese geometrischen Betrachtungen in dem bereits zitierten Aufsatze: „Die allgemeine lineare Transformation der Linienkoordinaten". Math. Ann., Bd. 2 [siehe Abh. III dieser Ausgabe] des weiteren ausgeführt.

[22]) Auf die involutorische Lage zweier linearer Komplexe kommt auch Herr Battaglini in den genannten Aufsätzen; er bezeichnet sie als „harmonische Lage" zweier Komplexe. Das Wort „Involution" wird von ihm gebraucht, um Mannigfaltigkeiten zu bezeichnen, die von Parametern linear abhängen.

mit ihm in Involution liegenden Komplexe diejenigen Kraftsysteme, welche bei Eintritt der unendlich kleinen Bewegung keine Arbeit leisten. Umgekehrt: knüpfen wir an den linearen Komplex die mechanische Vorstellung eines Kräftesystems, so stellen die vierfach unendlich vielen mit ihm in Involution liegenden Komplexe diejenigen unendlich kleinen Bewegungen dar, bei denen das Kraftsystem keine Arbeit leistet.

Unter den vierfach unendlich vielen mit einem linearen Komplexe in Involution liegenden Komplexen finden sich auch, wie bereits gesagt, die dreifach unendlich vielen ihm angehörigen geraden Linien. Für sie können wir insbesondere die vorstehenden beiden Sätze aussprechen. Dieselben werden dann gleichbedeutend mit den beiden in § 1 genannten Sätzen, die so lauteten: Wenn ein linearer Komplex das Bild eines Kräftesystems oder einer unendlich kleinen Bewegung ist, so sind die ihm angehörigen Geraden diejenigen Linien des Raumes, in bezug auf welche das Kräftesystem kein Drehmoment hat, resp. welche bei der unendlich kleinen Bewegung senkrecht gegen sich selbst versetzt werden.

Göttingen, im Juni 1871.

[Der Aufsatz XIV ist hier an den Schluß des liniengeometrischen Teils gestellt, weil er, in § 3, meine erste Mitteilung über die Bedeutung der Cayleyschen Maßbestimmung für die Nicht-Euklidische Geometrie enthält und damit einen natürlichen Übergang zu den Untersuchungen über die Grundlagen der Geometrie bildet. Die von mir im § 3 angeregte Fragestellung ist bald darauf von Herrn Lindemann, der Herbst 1872 mit mir nach Erlangen ging, in seiner Dissertation (Über unendlich-kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner projektivischer Maßbestimmung, Math. Ann. Bd. 7, 1873) ausführlich behandelt worden. K.]

Zur Grundlegung der Geometrie.

Vorbemerkungen zu den Arbeiten über die Grundlagen der Geometrie.

Den autobiographischen Notizen von S. 50—52 habe ich hier vorweg noch nachzutragen, daß ich im September 1873 an der damals in Bradford stattfindenden Tagung der British Association for the Advancement of Science teilgenommen habe. Ich habe damals die wertvollsten persönlichen Beziehungen nicht nur zu Cayley und Sylvester, sondern namentlich auch zu R. Ball und W. K. Clifford gewonnen. Gleich am ersten Vormittag trug Ball über seine Theorie der Korreziprokalschrauben, Clifford über seine Fläche „vom Krümmungsmaße Null aber endlicher Ausdehnung“ vor. Ich erkannte natürlich sofort, daß es sich bei Ball um meine Theorie der Fundamentalkomplexe, bei Clifford um eine wesentliche Weiterführung meiner Ideen über elliptische Maßbestimmung handele. Eingehende persönliche Besprechungen stellten bald die Beziehung völlig klar und haben auf meine späteren Arbeiten einen nachhaltigen Einfluß geübt. Clifford hat damals nur den Titel seines Vortrags veröffentlicht und, was er später darüber publizierte, ist auch so kurz gefaßt, daß es kaum verständlich war und jedenfalls wirkungslos blieb. Um so lieber bin ich später, als ich eine zusammenfassende Vorlesung über Nicht-Euklidische Geometrie hielt (1889 bis 90) und in dem daran anknüpfenden Aufsatz in Bd. 37 der Math. Annalen (1890) ausführlich darauf zurückgekommen. (Siehe unten Abh. XXI.) Auf die Ballsche Theorie bin ich erst 1901 genauer eingegangen, als Balls Theory of screws in zweiter Auflage vorlag. (Man vgl. unten Abh. XXIX.)

Im übrigen möge hier noch eine prinzipielle Bemerkung zur projektiven Grundlegung der Nicht-Euklidischen Geometrie Platz finden.

Ich bemerkte bereits auf S. 52, daß ich den v. Staudtschen Aufbau der projektiven Geometrie nur durch die fortgesetzten Unterhaltungen mit Stolz habe kennen lernen. Infolgedessen hat sich in meine bez. Darlegungen eine merkwürdige historische Ungenauigkeit eingeschlichen. In den §§ 19, 20, 21 des zweiten Heftes seiner „Beiträge zur Geometrie der Lage“ (1857) gibt v. Staudt bekanntlich Regeln, um zwei Würfe zu addieren und zu multiplizieren, bez. einen Wurf zu potenzieren. Diese Regeln stimmen formal mit den gleichbenannten, die sich auf Zahlen beziehen, vollkommen überein. Danach war mir nicht zweifelhaft — und es wird das heutzutage jedem modernen Mathematiker selbstverständlich erscheinen —, daß v. Staudt seinen Würfen unmittelbar Zahlenwerte zugeordnet habe. Aber dies ist merkwürdigerweise nicht richtig. Vielmehr vollzieht er die Zuordnung in § 27 l. c. nur durch Zwischenschieben der gewöhnlichen Euklidischen Maßbestimmung (des Euklidischen Maßes auf der geraden Linie)! Die Angabe, welche ich im Text der Abh. XVI (§ 17) mache, daß sich bei v. Staudt „die nötigen Materialien finden, um ein Doppelverhältnis als eine reine Zahl zu definieren“, ist richtig, der Hinweis auf § 27 in der zugehörigen Fußnote falsch[1]). Von hier aus sind hinsichtlich der Berechtigung und der Tragweite meiner anschließenden Betrachtungen gewisse Mißverständnisse entstanden, die ich vorab aufklären will:

1. Bei Cayley und bei Ball habe ich nie den Argwohn überwinden können, daß es sich bei meinen Darlegungen um einen Zirkelschluß handele (erst werden die Doppelverhältnisse metrisch eingeführt und dann auf sie die Metrik der projektiven Geometrie gegründet!). Ich habe die betreffenden Äußerungen in der Abh. XXI, S. 354, abgedruckt und bin eben zur Klarstellung dort (im dritten Abschnitt) auf die rein projektive Einführung der Zahlenskala auf der geraden Linie eingegangen. Die rationalen Zahlen, welche bei der Anfertigung einer solchen Skala den jeweils durch die Konstruktion erreichten Punkten beigelegt werden, sind sozusagen Ordnungszahlen (keine Kardinalzahlen, wie beim gewöhnlichen Messen). Man kann zwar von einem Segment $\overline{ab}$ sprechen, aber nicht sagen, ob ein solches Segment „klein" oder „groß" sei. Ein zweites Segment $\overline{cd}$ kann nur dann $\gtrless \overline{ab}$ genannt werden, wenn es $\overline{ab}$ umfaßt, bez. in $\overline{ab}$ enthalten ist.

2. Von anderer Seite ist die in Betracht kommende Einführung der Zahlen (bez. der Koordinaten) in die projektive Geometrie nicht beanstandet, sondern einfach nicht beachtet worden. Man spricht dann nicht von einer Neubegründung der Euklidischen oder Nicht-Euklidischen Metrik auf projektiver Grundlage, sondern von einer „Interpretation" der Nicht-Euklidischen Geometrie mit Hilfe der Cayleyschen Maßbestimmung (oder geradezu von einer Abbildung des Nicht-Euklidischen Raumes auf den Euklidischen). Ich muß hier gegen alle diese Ausdrucksweisen, die sich — nicht überall, aber doch immer wieder — in den Lehrbüchern finden, lebhafte Verwahrung einlegen. Eine *Abbildung* zunächst der Lobatschewskyschen Ebene auf die Cayleysche mit reellem Fundamentalkegelschnitt (der speziell als gewöhnlicher Kreis angenommen wird) hat schon, ohne freilich damals die Beziehung zu Cayley zu kennen, Beltrami in seinem „Saggio di interpretazione della geometria non euclidea" in Bd. 6 des Giornale di Matematiche (1868), (Werke Bd. I, XXIV, S. 382) gegeben. In seiner bald darauf folgenden „Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante" (Annali di Matematica (2), 2, 1868—69 = Werke Bd. I, XXV) dehnt er diese Abbildung sodann auf beliebige Nicht-Euklidische Räume aus. Wie fern ihm aber dabei die folgerichtige projektive Auffassung lag, geht daraus hervor, daß er eben dort an der Behauptung festgehalten hat, es könnte, im Falle positiven Krümmungsmaßes, die Verbindungsgerade zweier Punkte unter Umständen unbestimmt werden (sphärische Geometrie). Siehe Beltramis Werke Bd. I, S. 428.

Ich erwähne schließlich die Stellung meiner ersten Nicht-Euklidischen Arbeiten zu einer damals unbekannten aber später oft zitierten, sehr knapp gefaßten Jugendarbeit von Laguerre (Sur la théorie des foyers, Nouvelles Annales 1853; Werke II, S. 4—15). Der Abstand zweier Punkte und damit der Winkel zweier Geraden (in der Ebene) wird bei mir als der mit einer Konstanten multiplizierte Logarithmus eines Doppelverhältnisses definiert. Nun kommen auch bei Laguerre für die Winkel solche Logarithmen vor. Ich zitiere genau, was er darüber hat drucken lassen (S. 12, 13 von Bd. II der Werke). Es sind nur die folgenden Zeilen:

4. »*Problème. — Un système d'angles A, B, C, …, situés dans un plan, étant liés par une équation quelconque $F(A, B, C, \dots) = 0$, trouver la rélation qui lie les angles correspondants A', B', C', …, quand on transforme la figure homographiquement.*«

[1]) Die erste genauere Durchführung des richtigen abstrakten Gedankenganges scheint sich in Pasch, „Vorlesungen über Neuere Geometrie" (1882, § 21 daselbst) zu finden. Ich selbst habe in meiner Vorlesung von 1889—90 [siehe unten Abh. XXI] die einfachere Darstellung gewählt, daß ich nach beliebiger Annahme dreier Koordinatengrundpunkte auf der geraden Linie gleich die Werte der zugehörigen „Abszissen" einführte — eine Darstellung, die allerdings mehr auf die Erläuterung dieser abstrakten Begründungsweise hinzielte, als auf eine genau gegliederte Durchführung derselben.

»*Solution.* — Soient P, Q les deux points correspondants, sur la seconde figure, aux deux points qui, dans la première figure, sont situés respectivement sur la droite de l'infini et sur les deux droites $y = xi$, $y = -xi$.«

»Les deux côtés de l'angles A' dans la seconde figure et les droites $A'P$, $A'Q$ formeront un faisceau dont nous désignerons le rapport anharmonique par a; désignons de même par $b, c, d, \dots$ les rapports correspondants aux autres angles, la relation cherchée est

$$(1) \qquad F\left(\frac{\log a}{2\sqrt{-1}}, \frac{\log b}{2\sqrt{-1}}, \frac{\log c}{2\sqrt{-1}}, \dots\right) = 0,$$

la caractéristique log désignant le logarithme népérien.«

Die hiermit reproduzierte Stelle von Laguerre bedeutet zweifellos einen großen Fortschritt in der Einordnung der gewöhnlichen metrischen Geometrie in die projektive. Aber eine neue *Definition* des (Euklidischen) Winkels zu geben, lag ihm augenscheinlich ganz fern. Man beachte nur, daß das zweite Heft der „Beiträge" von Staudt's welches die selbständige Begründung der projektiven Geometrie in die Wege leitete, erst 1857 erschienen ist. —

Ein Wort noch über den Stetigkeitsbegriff in der gewöhnlichen projektiven Geometrie, an den in den folgenden Abhandlungen von verschiedenen Seiten herangetreten wird.

Die Stetigkeitseigenschaften, die man den Grundgebilden 1. Stufe beizulegen hat, sind von denjenigen des Inbegriffs der rationalen und irrationalen reellen Zahlen insofern verschieden, als der Wert ∞ seine Sonderstellung verliert. Der Begriff der „Umgebung" eines Elementes bleibt erhalten. Ist eine unendliche Menge von Elementen gegeben, so heißt O ein Grenzelement der Menge, wenn sich in jeder Umgebung von O immer wieder ein Element der Menge aufweisen läßt. y heißt eine stetige Funktion von x, wenn dem Grenzelement irgendeiner Menge $x_1, x_2, \dots$ das Grenzelement der entsprechenden Elemente $y_1, y_2, \dots$ entspricht. Der Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit fällt daher fort, oder vielmehr er rückt in zweite Linie. Denn zwei Intervalle $\overline{12}$ und $\overline{34}$ können, wie schon oben gesagt, zunächst nur insofern in der Beziehung $\gtrless$ stehen, als das eine ein Stück des andern ist. Die Vergleichbarkeit zweier auseinander liegender Intervalle hinsichtlich ihrer „Größe" tritt erst ein, wenn man, was natürlich in jedem Augenblicke freisteht, auf dem Grundgebilde irgendwelche projektive Maßbestimmung einführt, bei der die Intervalle $\overline{12}$ und $\overline{34}$ beide eine endliche Ausdehnung erhalten.

K.

XV. Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.

Vorgelegt von A. Clebsch.

[Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Nr. 17, (30. August 1871).]

Die nachstehenden Erörterungen beziehen sich auf die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie von Gauß, Lobatschewsky, Bolyai und die verwandten Betrachtungen, welche von Riemann und von Helmholtz über die Grundlage unserer geometrischen Vorstellungen angestellt worden sind. Sie sollen indes nicht etwa die philosophischen Spekulationen weiterverfolgen, welche zu den genannten Arbeiten hingeleitet haben; vielmehr ist ihr Zweck, die mathematischen Resultate dieser Arbeiten, so weit sie sich auf Parallentheorie beziehen, in einer neuen, anschaulichen Weise darzulegen und einem allgemeinen deutlichen Verständnisse zugänglich zu machen. Der Weg hierzu führt durch die *projektivische* Geometrie, deren Unabhängigkeit von der Frage nach der Parallelentheorie dargetan wird. Nun kann man, nach dem Vorgange von Cayley, eine allgemeine projektivische Maßbestimmung konstruieren, welche sich auf eine beliebig anzunehmende Fläche zweiten Grades als sogenannte Fundamentalfläche bezieht. Diese projektivische Maßbestimmung ergibt, je nach der Art der dabei benutzten Fläche zweiten Grades, ein Bild für die verschiedenen in den vorgenannten Arbeiten aufgestellten Parallelentheorien. Aber sie ist nicht nur ein Bild für dieselben, sondern sie deckt geradezu deren inneres Wesen auf. —

I. Die verschiedenen Parallelentheorien.

Das elfte Axiom des Euklid ist, wie bekannt, mit dem Satze gleichbedeutend, daß die Summe der Winkel im Dreiecke gleich zwei Rechten sei. Nun gelang es Legendre zu beweisen[1]), daß die Winkelsumme im Dreiecke nicht größer sein kann, als zwei Rechte; er zeigte ferner, daß,

[1]) Dieser Beweis, so wie der sich auf den nämlichen Gegenstand beziehende Beweis von Lobatschewsky setzt die unendliche Länge der Geraden voraus. Läßt man diese Annahme fallen (vgl. den weiteren Text), so fallen auch die Beweise, wie man daraus deutlich übersehen mag, daß dieselben sonst in gleicher Weise für die Geometrie auf der Kugel gelten müßten.

wenn in einem Dreiecke die Winkelsumme zwei Rechte beträgt, daß dann ein Gleiches bei jedem Dreieck der Fall ist. Aber er vermochte nicht zu zeigen, daß die Winkelsumme nicht möglicherweise kleiner ist, als zwei Rechte.

Eine ähnliche Überlegung scheint den Ausgangspunkt von Gauß' Untersuchungen über diesen Gegenstand gebildet zu haben. Gauß besaß die Auffassung, daß es in der Tat unmöglich sei, den Satz von der Gleichheit der Winkelsumme mit zwei Rechten zu beweisen, daß man vielmehr eine in sich konsequente Geometrie konstruieren könne, in der die Winkelsumme kleiner ausfällt. Gauß bezeichnete diese Geometrie als Nicht-Euklidische[2]); er hat sich mit ihr viel beschäftigt, leider aber, von einigen Andeutungen abgesehen, nichts über dieselbe veröffentlicht. In dieser Nicht-Euklidischen Geometrie kommt eine gewisse, für die räumliche Maßbestimmung charakteristische, Konstante vor. Erteilt man derselben einen unendlichen Wert, so erhält man die gewöhnliche Euklidische Geometrie. Hat aber die Konstante einen endlichen Wert, so hat man eine abweichende Geometrie, für die beispielweise folgende Gesetze gelten: Die Winkelsumme im Dreiecke ist kleiner als zwei Rechte, und zwar um so mehr, je größer die Fläche des Dreiecks ist. Für ein Dreieck, dessen Ecken unendlich weit entfernt sind, ist die Winkelsumme gleich Null. — Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden kann man zwei Parallele zu der Geraden ziehen, d. h. Linien, welche die Gerade auf der einen oder anderen Seite in einem unendlich fernen Punkte schneiden. Die durch den Punkt gehenden Geraden, welche zwischen den beiden Parallelen verlaufen, schneiden die gegebene Gerade gar nicht.

Auf eben diese Nicht-Euklidische Geometrie ist Lobatschewsky[3]), Professor der Mathematik an der Universität zu Kasan, und einige Jahre später, der ungarische Mathematiker J. Bolyai[4]) geführt worden, und haben dieselben den Gegenstand in ausführlichen Veröffentlichungen behandelt. Indes blieben diese Arbeiten ziemlich unbekannt, bis man durch die Herausgabe des Briefwechsels zwischen Gauß und Schumacher, die 1862 erfolgte, auf dieselben aufmerksam gemacht wurde. Seitdem verbreitete sich die Auffassung, daß nunmehr die Parallelentheorie vollkommen erledigt, d. h. in ihrer realen Unbestimmtheit erkannt sei.

[2]) Vgl. Sartorius v. Waltershausen, Gauß zum Gedächtnis S. 81. Sodann einige Briefe in dem Briefwechsel von Gauß und Schumacher.

[3]) Im Kasanschen Boten 1829. — Schriften der Universität Kasan 1836—38. — Crelles Journal, Bd. 17, 1837 (Géométrie imaginaire). — Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin 1840. — Pangéométrie. Kasan 1855 (Die Pangéométrie findet sich in italienischer Übersetzung im Bd. 5 des Giornale di Matematiche 1867); Ges. Werke, Bde. I, II.

[4]) In einem Appendix zu W. Bolyais Werke: Tentamen juventutem ... Maros-Vasarhely, 1832. Eine italienische Übersetzung desselben in Bd. 6 des Giornale di Matematiche, 1868.

Aber diese Auffassung muß wohl einer wesentlichen Modifikation unterliegen, seit im Jahre 1867 nach Riemanns Tode dessen Habilitationsvorlesung von 1854: „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen" erschienen ist, und bald darauf Helmholtz in diesen Nachrichten (1868) seine Untersuchungen: „Über die Tatsachen, welche der Geometrie zugrunde liegen" veröffentlichte.

In Riemanns Schrift ist darauf hingewiesen, wie die Unbegrenztheit des Raumes, die als Erfahrungstatsache gegeben ist, nicht auch notwendig dessen Unendlichkeit mit sich führt. Es wäre vielmehr denkbar und würde unserer Anschauung, die sich immer nur auf einen endlichen Teil des Raumes bezieht, nicht widersprechen, daß der Raum endlich wäre und in sich zurückkehrte: die Geometrie unseres Raumes würde sich dann gestalten wie die Geometrie auf einer in einer Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen gelegenen Kugel von drei Dimensionen. — Diese Vorstellung, die sich auch bei Helmholtz findet, würde mit sich bringen, daß die Winkelsumme im Dreiecke (wie beim gewöhnlichen sphärischen Dreiecke) größer[5]) ist, als zwei Rechte, und zwar in dem Maße größer, als das Dreieck einen größeren Inhalt hat. Die gerade Linie würde alsdann keine unendlich fernen Punkte haben, und man könnte durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden überhaupt keine Parallele ziehen.

Eine auf diese Vorstellungen gegründete Geometrie würde sich in ganz gleicher Weise neben die gewöhnliche Euklidische Geometrie stellen, wie die soeben erwähnte Geometrie von Gauß, Lobatschewsky, Bolyai. Während letztere der Geraden zwei unendlich ferne Punkte erteilt, gibt diese der Geraden überhaupt keine (d. h. zwei imaginäre) unendlich ferne Punkte. Zwischen beiden steht die Euklidische Geometrie als Übergangsfall; sie legt der Geraden zwei zusammenfallende unendlich ferne Punkte bei.

Einem in der neueren Geometrie gewöhnlichen Sprachgebrauche folgend, sollen diese drei Geometrien bezüglich als *hyperbolische* oder *elliptische*[6]) oder *parabolische* Geometrie im nachstehenden bezeichnet werden, je nachdem die beiden unendlich fernen Punkte der Geraden reell oder imaginär sind oder zusammenfallen.

II. Versinnlichung der dreierlei Geometrien durch die allgemeine Cayleysche Maßbestimmung.

Das Bedürfnis, die sehr abstrakten Spekulationen, welche zur Aufstellung der dreierlei Geometrien geführt haben, zu versinnlichen, hat dahingeführt, Beispiele von Maßbestimmungen aufzusuchen, die als Bilder

[5]) Die entgegenstehenden Beweise von Legendre und Lobatschewsky setzen, wie bereits bemerkt, die Unendlichkeit des Raumes voraus.

[6]) Die gewöhnliche Sphärik ist hiernach als eine „elliptische" Geometrie zu bezeichnen.

der genannten Geometrien aufgefaßt werden könnten, und damit zugleich die innere Folgerichtigkeit jeder einzelnen in Evidenz setzten.

Die parabolische Geometrie bedarf keiner solchen Versinnlichung, da sie mit der Euklidischen zusammenfällt und uns als solche geläufig ist.

Man hat nun für die elliptische und die hyperbolische Geometrie Bilder angegeben, welche die Art dieser Geometrien an Objekten demonstrieren, die im Sinne der Euklidischen Maßbestimmung gemessen werden. Dieselben erläutern indessen nur den planimetrischen Teil der fraglichen Geometrien. Beltrami, dem man die betreffende Versinnlichung der hyperbolischen Geometrie verdankt[7]), hat nachgewiesen, daß etwas Analoges für den Raum nicht möglich ist. Das Bild für den planimetrischen Teil der elliptischen Geometrie, ist, wie man ohne weiteres sieht, die Geometrie auf der Kugel[8]), überhaupt die Geometrie auf den Flächen von konstantem positiven Krümmungmaße. Die hyperbolische Geometrie dagegen findet ihre Interpretation auf den Flächen von konstantem negativen Krümmungsmaße. Diese letztere Interpretation bringt leider, wie es scheint, nie das gesamte Gebiet der Ebene zur Anschauung, indem die Flächen mit konstantem negativen Krümmungsmaße wohl immer durch Rückkehrkurven usw. begrenzt werden[9]).

Ich will nun hier zunächst für die dreierlei Geometrien sowohl in der Ebene als im Raume Bilder aufstellen, welche ihre Eigentümlichkeiten vollkommen übersehen lassen. Sodann werde ich zeigen, daß diese Bilder nicht nur Interpretationen der genannten Geometrien sind, sondern daß sie deren inneres Wesen darlegen und also ein deutliches Verständnis derselben mit sich führen.

Die fraglichen Bilder betrachten als Objekt der Maßbestimmung die Ebene resp. den Raum selbst und benutzen nur eine andere Maßbestimmung als die gewöhnliche, welche, im Sinne der projektivischen Geometrie, als eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Maßbestimmung erscheint. Es ist diese verallgemeinerte Maßbestimmung im wesentlichen von Cayley aufgestellt worden[10]); bei ihm sind nur die leitenden Gesichtspunkte ganz anderer Art, als die hier vorliegenden. Cayley konstruiert diese Maßbestimmung, um zu zeigen, wie die (Euklidische) Geometrie des Maßes als

[7]) Saggio di interpretazione della Geometria non-euclidea. Giornale di Matematiche Bd. 6, 1868. Werke, Bd. 1, S. 374—406.

[8]) [Hier ist zwischen der elliptischen Geometrie und der sphärischen Geometrie noch nicht scharf unterschieden, wie es in der folgenden Abh. XVI geschieht.]

[9]) [Dies ist in der Tat durch einen späteren Satz von Hilbert bestätigt worden. Vgl. D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie, 2. und folgende Auflagen, Anhang V.]

[10]) Im Sixth Memoir upon Quantics. Phil. Trans. Bd. 149 [Coll. Papers, Bd. II, S. 583—592]. Vgl. die Fiedlersche Übersetzung von Salmons Kegelschnitten, 2. Aufl. (Leipzig 1860), oder auch Fiedler: Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen (Leipzig 1862).

ein besonderer Teil der projektivischen Geometrie aufgefaßt werden kann. Er betrachtet dabei des näheren nur die Ebene. Er zeigt, wie man in der Ebene auf Grund der projektivischen Vorstellungen eine Maßbestimmung treffen kann, die sich auf einen beliebig gegebenen Kegelschnitt als „absoluten“ Kegelschnitt bezieht. Degeneriert dieser Kegelschnitt in ein imaginäres Punktepaar, so hat man eine Maßbestimmung, wie die von uns (in der Euklidischen Geometrie) angewandte ist; man erhält geradezu die gewöhnliche Maßbestimmung, wenn man die beiden imaginären Fundamentalpunkte mit zwei bestimmten Punkten der Ebene, nämlich den beiden Kreispunkten, zusammenfallen läßt.

Diese allgemeine Cayleysche Maßbestimmung soll hier kurz auf den Raum übertragen werden, wobei ich mich, gegenüber der Cayleyschen Auseinandersetzung, einer mehr geometrischen Darstellungsweise bediene. Sei eine beliebig anzunehmende Fläche zweiten Grades als „fundamentale“ Fläche gegeben. Zwei gegebene Raumpunkte bestimmen durch den Durchschnitt ihrer Verbindungslinie mit der Fläche zwei Punkte der letzteren. Die beiden gegebenen Punkte haben zu diesen beiden ein gewisses Doppelverhältnis, und *der mit einer willkürlichen Konstanten*[11]) *c multiplizierte Logarithmus dieses Doppelverhältnisses soll die Entfernung der beiden gegebenen Punkte genannt werden.* Analog, wenn zwei Ebenen gegeben sind, so lassen sich durch die Durchschnittslinie derselben zwei Tangentialebenen an die Fundamentalfläche legen. Dieselben bestimmen mit den beiden gegebenen Ebenen ein gewisses Doppelverhältnis. *Der mit einer willkürlich zu wählenden Konstanten c' multiplizierte Logarithmus dieses Doppelverhältnisses ist es, den wir als Winkel der beiden gegebenen Ebenen bezeichnen.*

Gemäß diesen Definitionen sind die Punkte der Fundamentalfläche von allen übrigen Punkten unendlich fern; die Fundamentalfläche ist also der Ort der unendlich fernen Punkte. Ebenso sind die Tangentialebenen der Fundamentalfläche solche Ebenen, welche mit einer beliebigen Ebene einen unendlich großen Winkel bilden. — Eine Entfernung gleich Null voneinander haben diejenigen Punkte, deren Verbindungslinie eine Tangente der Fläche ist. Einen Winkel gleich Null schließen miteinander solche Ebenen ein, deren Durchschnittslinie die Fläche berührt. — Unter einer Kugel ist eine Fläche zweiten Grades zu verstehen, welche die Fundamentalfläche nach einer ebenen Kurve berührt. Das Zentrum der Kugel ist der Pol der Ebene. — An Stelle der sechsfach unendlich vielen Bewe-

[11]) Cayley definiert die Entfernung zweier Punkte durch eine Formel, in der dieser Konstanten ein partikulärer Wert $\left(\frac{2}{\pi}\sqrt{-1}\right)$ beigelegt ist. Ebenso ist es mit der gleich zu nennenden Konstanten c'.

gungen, welche die gewöhnliche Maßbestimmung ungeändert lassen, tritt jetzt ein Zyklus von ebenso vielen linearen Transformationen. Die Fundamentalfläche geht nämlich, wie überhaupt eine Fläche zweiten Grades, durch sechsfach unendlich viele lineare Transformationen in sich über. Dieselben zerfallen in zwei, sechsfach unendliche Scharen, je nachdem sie die beiden Systeme gradliniger Erzeugender der Fläche vertauschen oder nicht. Die Transformationen der letzteren Art sind hier gemeint. Die Transformationen der ersteren Art lassen allerdings auch die Maßunterschiede ungeändert, da sie, gleich den anderen, die Doppelverhältnisse nicht ändern, deren Logarithmen die Maßunterschiede sind. Sie entsprechen aber nicht den Bewegungen des Raumes, sondern denjenigen Transformationen desselben, welche räumliche Figuren in beliebig gelegene symmetrisch kongruente Figuren umwandeln.

Aus dieser allgemeinen Maßbestimmung ergibt sich durch einen Grenzübergang eine Maßgeometrie, gleichartig der gewöhnlichen *parabolischen*, wenn die Fundamentalfläche zweiten Grades in einem imaginären Kegelschnitt ausartet. Ist dieser Kegelschnitt insonderheit der unendlich ferne imaginäre Kreis, so erhält man geradezu die gewöhnliche Maßgeometrie.

Aber die allgemeine projektivische Maßbestimmung ergibt bei passender Wahl der Fundamentalfläche auch eine Maßgeometrie, welche die Vorstellungen der *elliptischen*, andererseits eine, welche die Vorstellungen der *hyperbolischen* Geometrie darlegt; und sind dies die Bilder für die elliptische und die hyperbolische Geometrie, von denen im vorstehenden die Rede war.

Zu einer Maßgeometrie entsprechend der *elliptischen* Geometrie gelangt man, wenn man die Fundamentalfläche imaginär nimmt. Es hat dann ersichtlich keine gerade Linie reelle unendlich ferne Punkte, so daß die Gerade wie eine geschlossene Kurve von endlicher Länge ist. Des näheren wird man genau zu den (trigonometrischen) Formeln hingeleitet, wie sie die elliptische Geometrie anzunehmen hat. Es sind dies die Formeln der gewöhnlichen sphärischen Trigonometrie, in welche für den Radius der Kugel die Konstante $\frac{c}{\sqrt{-1}}$ eintritt[12]).

Zu einer Geometrie entsprechend der *hyperbolischen* wird man geführt, wenn man die Fundamentalfläche reell und nicht geradlinig nimmt und auf die Punkte in deren Innerem achtet. Diese Beschränkung auf das Innere der Fundamentalfläche ist naturgemäß. Denn gesetzt, man befände sich im Inneren der Fläche und man könne nur vermöge solcher linearer Raumtransformationen seinen Ort im Raume wechseln, die, bei der ge-

[12]) [Hierbei wird c zweckmäßigerweise als rein imaginäre Konstante angenommen. Vgl. die folgende Abh. XVI, § 5.]

troffenen Maßbestimmung, die Bewegungen des Raumes vorstellen. Dann würde man niemals aus dem Inneren der (für die Maßbestimmung) unendlich fernen Fläche zweiten Grades hinausgelangen können. Jenseits der Fundamentalfläche befände sich dann noch ein Raumstück, von dessen Vorhandensein man nichts weiß, und daß sich nur dadurch bemerkbar macht, daß sich nicht je zwei in einer Ebene verlaufende Gerade schneiden, wenn man nicht ein solches Raumstück supponiert. — Beschränkt man sich nun auf Konstruktionen, die nicht aus dem Inneren der Fläche hervortreten, so gelten für sie beim Gebrauche der betreffenden Maßbestimmung ganz diejenigen Gesetze, welche die hyperbolische Geometrie für die Raumkonstruktionen überhaupt aufstellt. Jede Gerade hat z. B. zwei reelle unendlich ferne Punkte, denn jede durch das Innere der Fläche gehende Gerade schneidet die Fläche in zwei reellen Punkten. Durch einen Punkt kann man zu einer Geraden zwei Parallele ziehen: diejenigen beiden Linien, welche den Punkt mit den beiden Schnittpunkten der gegebenen Geraden und der Fundamentalfläche verbinden. Ein Dreieck mit unendlich fernen Ecken, d. h. ein Dreieck, dessen Eckpunkte auf der Fundamentalfläche liegen, hat die Winkelsumme Null. Denn je zwei Linien, welche sich auf der Fundamentalfläche schneiden (je zwei Parallele) schließen einen Winkel gleich Null ein usw. Endlich repräsentiert die Konstante c, mit der der Logarithmus des betr. Doppelverhältnisses multipliziert werden muß, um die Entfernung zweier Punkte zu geben, die oben erwähnte in der hyperbolischen Geometrie vorkommende charakteristische Konstante.

III. Unabhängigkeit der projektivischen Geometrie von der Parallelentheorie. Begründung der dreierlei Maßgeometrien.

Im vorstehenden sind für die elliptische und hyperbolische Maßgeometrie in der allgemeinen Cayleyschen Maßbestimmung adäquate Bilder gefunden, indem wir die Fundamentalfläche einmal imaginär, das andere Mal reell und nicht geradlinig nahmen. Ähnlicherweise hatten wir ein Bild für die gewöhnliche, parabolische Geometrie, wenn die Fundamentalfläche in einen imaginären Kegelschnitt degenerierte. Aber dieses Bild ging in den Gegenstand, den es versinnlichte, d. h. in die parabolische Geometrie, selbst über, wenn wir den fundamentalen Kegelschnitt mit einem bestimmten Kegelschnitte, dem unendlich fernen imaginären Kreise, zusammenfallen ließen. Ähnlich nun gehen die Maßgeometrien, welche wir resp. als Bilder der elliptischen und hyperbolischen Geometrien aufgestellt haben, in diese Geometrien selbst über, wenn man die fundamentale Fläche derselben mit einer bestimmten (der unendlich fernen) Fläche zweiten Grades [dieser Geometrien] koinzidieren läßt.

Man gewinnt diese Überzeugung, indem man bemerkt, daß die projektivische Geometrie unabhängig ist von der Frage nach der Parallelentheorie[13]). In der Tat, um die projektivische Geometrie zu entwickeln und ihre Geltung in einem beliebig gegebenen begrenzten Raume nachzuweisen, genügt es, in diesem Raume Konstruktionen zu machen, die nicht über den Raum hinausführen und nur sogenannte Lagenbeziehungen betreffen. Die Doppelverhältnisse (die einzig festen Elemente der projektivischen Geometrie) dürfen dabei natürlich nicht, wie dies gewöhnlich geschieht, als Streckenverhältnisse definiert werden, da dies die Kenntnis einer Maßbestimmung voraussetzen würde. In von Staudts Beiträgen zur Geometrie der Lage[14]) sind aber die nötigen Materialien gegeben, um ein Doppelverhältnis als eine reine Zahl zu definieren. Von den Doppelverhältnissen mögen wir sodann zu den homogenen Punkt- und Ebenenkoordinaten aufsteigen, die ja auch nichts anderes sind, als die relativen Werte gewisser Doppelverhältnisse, wie dies v. Staudt gezeigt[15]) und noch neuerdings Herr Fiedler wieder aufgenommen hat[16]). Unentschieden bleibt dabei, ob sich zu sämtlichen reellen Werten der Koordinaten auch entsprechende Raumelemente finden lassen. Ist dies nicht der Fall, so steht nichts im Wege, den betreffenden Koordinatenwerten entsprechend zu den wirklichen Raumelementen uneigentliche hinzuzufügen. Dies geschieht in der parabolischen Geometrie, wenn wir von der unendlich fernen Ebene reden. Unter Zugrundelegung der hyperbolischen Geometrie würde man ein ganzes Raumstück zu adjungieren haben. Dagegen würde bei der elliptischen Geometrie eine Adjunktion uneigentlicher Elemente nicht stattfinden.

Ist so die projektivische Geometrie entwickelt, so wird man die allgemeine Cayleysche Maßbestimmung aufstellen können. Dieselbe bleibt, wie vorhin geschildert, durch sechsfach unendlich viele lineare Transformationen, die wir als Bewegungen des Raumes bezeichneten, ungeändert.

Nunmehr wende man sich der Betrachtung der tatsächlichen Bewegungen des Raumes und der durch sie begründeten Maßbestimmung zu. Man übersieht, daß die sechsfach unendlich vielen Bewegungen ebenso viele lineare Transformationen sind. Dieselben lassen überdies eine Fläche, die Fläche der unendlich fernen Punkte ungeändert. Nun gibt es aber, wie sich leicht beweisen läßt, keine anderen Flächen, die durch sechsfach

[13]) Es ist dies auch leicht hinterher zu verifizieren. Denn unter Zugrundelegung der elliptischen oder hyperbolischen Geometrie kann man in ganz ähnlicher Weise, wie man es bei der parabolischen Geometrie zu tun pflegt, die projektivische Geometrie aufbauen.

[14]) § 27, Nr. 393.

[15]) Beiträge § 29, Nr. 411.

[16]) Vierteljahrsschrift der naturforsch. Gesellschaft in Zürich. XV. 2. (1871).

unendlich viele lineare Transformationen in sich übergehen, als die Flächen zweiten Grades und ihre Ausartungen. Die unendlich fernen Punkte bilden also eine Fläche zweiten Grades, und die Bewegungen des Raumes subsumieren sich unter diejenigen sechsfach unendlichen Zyklen linearer Transformationen, welche eine Fläche zweiten Grades ungeändert lassen. Hiernach ist ersichtlich, wie sich die tatsächlich gegebene Maßbestimmung unter die allgemeine projektivische subsumiert. Während letztere eine beliebig anzunehmende Fläche zweiten Grades benutzt, ist diese bei ersterer ein für allemal gegeben.

Die Art dieser der tatsächlichen Maßbestimmung zugrunde liegenden Fläche zweiten Grades kann nun noch näher bestimmt werden, wenn man beachtet, daß eine Ebene durch fortgesetzte Drehung um eine beliebige in ihr im Endlichen gelegene Achse in die Anfangslage zurückkommt. Es sagt dies aus, daß die beiden Tangentialebenen, welche man durch eine im Endlichen gelegene Gerade an die Fundamentalfläche legen kann, imaginär sind. Denn wären sie reell, so fänden sich in dem betr. Ebenenbüschel zwei reelle unendlich ferne Ebenen (d. h. Ebenen, welche mit allen anderen einen unendlich großen Winkel bilden) und dann könnte keine in einem Sinne fortgesetzte Rotation eine Ebene des Büschels in die Anfangslage zurückführen.

Damit nun diese beiden Ebenen imaginär sind, oder, was dasselbe ist, damit der Tangentenkegel der Fundamentalfläche, der von einem Punkte des (uns durch die Bewegungen zugänglichen) Raumes ausgeht, imaginär sei, sind nur drei Fälle denkbar:

1. *Die Fundamentalfläche ist imaginär.* Dies ergibt die elliptische Geometrie.

2. *Die Fundamentalfläche ist reell, nicht geradlinig und umschließt uns.* Die Annahme der hyperbolischen Geometrie.

3. (Übergangsfall.) *Die Fundamentalfläche ist in eine imaginäre Kurve ausgeartet.* Die Voraussetzung der gewöhnlichen parabolischen Geometrie.

So sind wir denn gerade zu den dreierlei Geometrien hingeleitet, welche man, wie unter I. berichtet, von ganz anderen Betrachtungen ausgehend aufgestellt hat.

[Die Vorgeschichte der Nicht-Euklidischen Geometrie ist heutzutage dank insbesondere der Arbeiten von Stäckel und Engel sehr viel mehr geklärt, als es 1871 der Fall war, wo alles nur mehr gerüchtweise an uns herankam. Die ausgereifteste Darstellung findet sich in *Stäckels* letzter Schrift: *C. F. Gauß als Geometer* (1918 = Heft V der „Materialien für eine wissenschaftliche Biographie vom Gauß", demnächst in Bd. 10 von Gauß' Werken abzudrucken). Es wäre unmöglich und würde überdies den ganzen Charakter meiner eigenen Darlegungen entstellen, wollte man alle die Einzelergebnisse, wie sie insbesondere die Benutzung des wissenschaftlichen Nachlasses

der in erster Linie in Betracht kommenden Autoren gezeitigt hat, nun in den Text meiner Aufsätze einarbeiten. Vielmehr muß es an gegenwärtigem Platze bei den mehr summarischen Zitaten, wie sie sich in der ursprünglichen Fassung meiner Arbeiten fanden, sein Bewenden haben.

Was andererseits die erkenntnistheoretische Wertung der Untersuchungen über Nicht-Euklidische Geometrie angeht, so würde ich heute gern die Unterscheidung der immanenten und der transienten Bedeutung der mathematischen Erkenntnis voranstellen, mit der A. Voß seine bezüglichen Darlegungen in Heft E des mathematischen Bandes der Kultur der Gegenwart (B. G. Teubner, 1914) beginnt. Immanent berechtigt ist, was in sich widerspruchsfrei ist, transient, was für unsere Erfassung der Außenwelt Bedeutung hat. Ich habe in meinen Arbeiten über Nicht-Euklidische Geometrie, soweit sie hier im Bd. I abgedruckt werden, wesentlich die immanente Seite betont, bez. zur Entwicklung gebracht, bin aber nie zu der vollen Gleichgültigkeit den transienten Fragen gegenüber durchgedrungen, die sich vielfach bei den modernen Axiomatikern geltend macht. Im übrigen möchte ich mich in beiderlei Hinsicht gerade auch betreffs der Nicht-Euklidischen Geometrie den allgemeinen Auffassungen anschließen, die A. Voß, l. c., S. 118 ff., entwickelt.

Endlich will ich betr. der Einzelheiten der heutigen Axiomatik der Geometrie hier gleich auf das zusammenfassende Referat von Enriques in III_1, Heft 1, der mathematischen Enzyklopädie verweisen (deutsche Ausgabe 1907, französische Ausgabe 1911). Wegen der Grundlagen insbesondere der projektiven Geometrie siehe auch das Referat von Schönflies in der Enzyklopädie III_1, Heft 3 der deutschen Ausgabe (1909), bez. III_2, der französischen (1913, Bearbeiter Tresse). —

Im übrigen sei noch bemerkt, daß vorstehender Aufsatz XV selbstverständlich vor der ausführlichen Abhandlung XVI niedergeschrieben ist. K.]

XVI. Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie[1].

[Math. Annalen, Bd. 4 (1871).]

Die nachstehenden Erörterungen beziehen sich auf die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie von Gauß, Lobatschewsky, Bolyai und die verwandten Betrachtungen, welche Riemann und Helmholtz über die Grundlagen unserer geometrischen Vorstellungen angestellt haben. Sie sollen indes nicht etwa die philosophischen Spekulationen weiterverfolgen, welche zu den genannten Arbeiten hingeleitet haben, vielmehr ist ihr Zweck, *die mathematischen Resultate dieser Arbeiten, soweit sie sich auf Parallelentheorie beziehen, in einer neuen anschaulichen Weise darzulegen und einem allgemeinen deutlichen Verständnisse zugänglich zu machen.*

Der Weg hierzu führt durch die projektivische Geometrie. Man kann nämlich, nach dem Vorgange von Cayley[2], eine projektivische Maßbestimmung im Raume konstruieren, welche eine beliebig anzunehmende Fläche zweiten Grades als sogenannte fundamentale Fläche benutzt. Je nach der Art der von ihr benutzten Fläche zweiten Grades ist nun diese Maßbestimmung ein Bild für die verschiedenen in den vorgenannten Arbeiten aufgestellten Parallelentheorien. Aber sie ist nicht nur ein Bild für dieselben, sie deckt geradezu, wie sich zeigen wird, deren inneres Wesen auf.

Ich beginne damit, die in Rede stehenden Parallelentheorien kurz auseinander zu setzen (§ 1). Sodann wende ich mich der Cayleyschen Maßbestimmung zu, die ich im Zusammenhange entwickele, so zwar, daß fortwährend auf die verschiedenartigen Parallelentheorien Bezug genommen wird. Ich bin dabei um so lieber in ausführlichere Erörterungen eingegangen, als die bez. Cayleyschen Untersuchungen nicht hinlänglich be-

[1] Vgl. eine unter demselben Titel mitgeteilte Note in den Göttinger Nachrichten, 1871, Nr. 17. [Siehe Abh. XV dieser Ausgabe.]

[2] Im Sixth Memoir upon Quantics. Phil. Transactions, Bd. 149, 1859, Coll. Papers, Bd. II, S. 583—592. Vgl. die Fiedlersche Übersetzung von Salmons Kegelschnitten. 2. Aufl. (Leipzig 1866) oder auch Fiedler: Die Elemente der neueren Geometrie und der Algebra der binären Formen (Leipzig 1862).

kannt geworden zu sein scheinen, dann aber auch bei ihnen der leitende Gesichtspunkt ein anderer ist, als der hier vorliegende. Bei Cayley handelt es sich darum, nachzuweisen, daß die gewöhnliche (Euklidische) Maßgeometrie als ein besonderer Teil der projektivischen Geometrie aufgefaßt werden kann. Zu diesem Zwecke stellt er die allgemeine projektivische Maßbestimmung auf und zeigt sodann, daß aus ihren Formeln die Formeln der gewöhnlichen Maßgeometrie hervorgehen, wenn die fundamentale Fläche in einen bestimmten Kegelschnitt, den unendlich fernen imaginären Kreis, degeneriert. Hier dagegen handelt es sich darum, den *geometrischen Inhalt* der allgemeinen Cayleyschen Maßbestimmung möglichst deutlich darzulegen und zu erkennen, nicht nur, wie sie durch eine geeignete Partikularisation die Euklidische Maßgeometrie ergibt, sondern wesentlich, daß sie in ganz derselben Beziehung zu den verschiedenen Maßgeometrien steht, die sich den genannten Parallelentheorien anschließen.

Bei diesen Auseinandersetzungen ergeben sich einige neue Betrachtungen. Ich rechne dahin, abgesehen von den Detailausführungen, namentlich die Art und Weise, wie die Cayleysche Maßbestimmung durch Betrachtung wiederholter räumlicher Transformationen begründet wird. Sodann hebe ich noch die Form hervor, unter welcher in § 7 und § 14 der Begriff des Krümmungsmaßes auftritt.

Es ist übrigens die Definition, welche ich für die projektivische Maßbestimmung aufstelle, etwas allgemeiner, als die von Cayley selbst gegebene. Um die Entfernung zweier Punkte zu bestimmen, denke ich mir dieselben durch eine gerade Linie verbunden. Dieselbe schneidet die Fundamentalfläche in zwei weiteren Punkten, welche mit den beiden gegebenen ein gewisses Doppelverhältnis besitzen. *Den mit einer willkürlichen, aber fest gewählten Konstante c multiplizierten Logarithmus dieses Doppelverhältnisses bezeichne ich als die Entfernung der beiden Punkte.* Um den Winkel zweier Ebenen zu bestimmen, lege ich durch deren Durchschnittslinie die beiden Tangentialebenen an die Fundamentalfläche. Dieselben bilden mit den beiden gegebenen Ebenen ein gewisses Doppelverhältnis. *Als Winkel der beiden gegebenen Ebenen bezeichne ich sodann den mit einer anderen willkürlichen, aber fest gewählten Konstante c′ multiplizierten Logarithmus dieses Doppelverhältnisses.* Die hiermit aufgestellten geometrischen Definitionen stimmen mit den analytischen, von Cayley gegebenen überein, sobald man noch c und c' partikuläre Werte erteilt, nämlich beide gleich $\frac{\sqrt{-1}}{2}$ setzt[3]. Es ist aber für das Folgende

[3] Gelegentlich bezeichnet Cayley auch den „Quadranten“ als Einheit. Dies kommt darauf hinaus, c und c' gleich $\frac{\sqrt{-1}}{\pi}$ zu nehmen.

wesentlich, die Konstanten c und c' beizubehalten, da z. B. c gerade der in der Nicht-Euklidischen Geometrie vorkommenden charakteristischen Konstanten entspricht (vgl. auch § 4).

§ 1.

Die verschiedenen Parallelentheorien.

Das elfte Axiom des Euklides ist, wie bekannt, mit dem Satze gleichbedeutend, daß die Summe der Winkel im Dreiecke gleich zwei Rechten ist. Nun gelang es Legendre, zu beweisen[4]), daß die Winkelsumme im Dreiecke nicht größer sein kann, als zwei Rechte; er zeigte ferner, daß, wenn in einem Dreiecke die Winkelsumme zwei Rechte beträgt, dann ein Gleiches bei jedem Dreiecke der Fall ist. Aber er vermochte nicht zu zeigen, daß die Winkelsumme nicht möglicherweise kleiner ist, als zwei Rechte.

Eine ähnliche Überlegung scheint den Ausgangspunkt von Gauß' Untersuchungen über diesen Gegenstand gebildet zu haben. Gauß war der Auffassung, daß es in der Tat unmöglich sei, den Satz von der Gleichheit der Winkelsumme mit zwei Rechten zu beweisen, daß man vielmehr auf Grund der vorangehenden Axiome eine in sich konsequente Geometrie konstruieren könne, bei der die Winkelsumme kleiner ausfällt. Gauß bezeichnete diese Geometrie als *Nicht-Euklidische*[5]); er hat sich mit ihr viel beschäftigt, leider aber, von einigen Andeutungen abgesehen, nichts über dieselbe veröffentlicht. In dieser Nicht-Euklidischen Geometrie kommt eine gewisse, für die räumliche Maßbestimmung charakteristische Konstante vor. Erteilt man derselben einen unendlichen Wert, so erhält man die gewöhnliche Euklidische Geometrie. Hat aber die Konstante einen endlichen Wert, so hat man eine abweichende Geometrie, für welche u. a. folgende Gesetze gelten:

Die Winkelsumme im Dreiecke ist kleiner als zwei Rechte, und zwar um so mehr, je größer die Fläche des Dreiecks ist. Für ein Dreieck, dessen Ecken unendlich weit entfernt sind, ist die Winkelsumme gleich Null. — Durch einen Punkt außerhalb einer Geraden kann man zwei Parallele zu der Geraden ziehen, d. h. Linien, welche die Gerade auf der einen oder anderen Seite in einem unendlich fernen Punkte schneiden.

[4]) Dieser Beweis, sowie der sich auf den nämlichen Gegenstand beziehende Beweis von Lobatschewsky setzt die unendliche Länge der Geraden voraus. Läßt man diese Annahme fallen (vgl. den weiteren Text), so fallen auch die Beweise, wie man daraus deutlich übersehen mag, daß dieselben sonst in gleicher Weise für die Geometrie auf der Kugel gelten müßten.

[5]) Vgl. Sartorius v. Waltershausen, Gauß zum Gedächtnis, S. 81. Sodann einige Briefe in dem Briefwechsel von Gauß und Schumacher.

Die durch den Punkt gehenden Geraden, welche zwischen den beiden Parallelen verlaufen, schneiden die gegebene Gerade gar nicht.

Auf eben diese Nicht-Euklidische Geometrie ist Lobatschewsky[6]), Professor der Mathematik an der Universität zu Kasan und, einige Jahre später, der ungarische Mathematiker J. Bolyai[7]) geführt worden, und haben dieselben den Gegenstand in ausführlichen Veröffentlichungen behandelt. Indes blieben diese Arbeiten ziemlich unbekannt, bis man durch die Herausgabe des Briefwechsels zwischen Gauß und Schumacher, die 1862 erfolgte, auf dieselben aufmerksam gemacht wurde. Seitdem verbreitete sich die Auffassung, daß nunmehr die Parallelentheorie in ihrer realen Unbestimmtheit erkannt sei.

Aber diese Auffassung muß wohl einer wesentlichen Modifikation unterliegen, seit im Jahre 1867 nach Riemanns Tode dessen Habilitationsvorlesung: „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen" erschienen ist und bald darauf Helmholtz in den Göttinger Nachrichten (1868, Nr. 6) seine Untersuchungen: „Über die Tatsachen, welche der Geometrie zugrunde liegen", veröffentlichte.

In Riemanns Schrift ist darauf hingewiesen, wie die Unbegrenztheit des Raumes nicht auch notwendig dessen Unendlichkeit mit sich führt. Es wäre vielmehr denkbar und würde unserer Anschauung, die sich immer nur auf einen endlichen Teil des Raumes bezieht, nicht widersprechen, daß der Raum endlich wäre und in sich zurückkehrte: die Geometrie unseres Raumes würde sich dann gestalten, wie die Geometrie auf einer in einer Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen gelegenen Kugel von drei Dimensionen. — Diese Vorstellung, die sich auch bei Helmholtz findet, würde mit sich bringen, daß die Winkelsumme im Dreiecke (wie beim gewöhnlichen sphärischen Dreiecke) größer[8]) ist, als zwei Rechte, und zwar in dem Maße größer, als das Dreieck einen größeren Inhalt hat. Die gerade Linie würde alsdann keine unendlich fernen Punkte haben, und man könnte durch einen gegebenen Punkt zu einer gegebenen Geraden überhaupt keine Parallele ziehen.

Eine auf diese Vorstellungen gegründete Geometrie würde sich in ganz gleicher Weise neben die gewöhnliche Euklidische Geometrie stellen, wie

[6]) Im Kasanschen Boten 1829. — Schriften der Universität Kasan, 1835—38. — Crelles Journal, Bd. 17, 1837 (Géométrie imaginaire). — Geometrische Untersuchungen zur Theorie der Parallellinien. Berlin 1840. — Pangéométrie. Kasan 1855. (Die Pangéométrie findet sich in italienischer Übersetzung im Bd. 5 des Giornale di Matematiche, 1867.) [Ges. geometr. Werke, Bde. I, II, Kasan, 1883, 1886.]

[7]) In einem Appendix zu W. Bolyais Werke: Tentamen juventutem ... Maros-Vasarhely, 1832. Vgl. eine italienische Übersetzung desselben in Bd. 6 des Giornale di Matematiche, 1868.

[8]) Die entgegenstehenden Beweise von Legendre und Lobatschewsky setzen, wie bereits bemerkt, die Unendlichkeit des Raumes voraus.

die soeben erwähnte Geometrie von Gauß, Lobatschewsky, Bolyai. Während letztere der Geraden zwei unendlich ferne Punkte erteilt, gibt diese der Geraden überhaupt keine (d. h. zwei imaginäre) unendlich ferne Punkte. Zwischen beiden steht die Euklidische Geometrie als Übergangsfall; sie legt der Geraden zwei zusammenfallende unendlich ferne Punkte bei.

Einem in der neueren Geometrie gewöhnlichen Sprachgebrauche[9]) folgend, sollen diese drei Geometrien bezüglich als *hyperbolische*, als *elliptische* und als *parabolische* Geometrie im nachstehenden bezeichnet werden, je nachdem die beiden unendlich fernen Punkte der Geraden reell oder imaginär sind oder zusammenfallen.

Diese dreierlei Geometrien werden sich nun im folgenden als besondere Fälle der allgemeinen Cayleyschen Maßbestimmung erweisen. Zu der parabolischen (der gewöhnlichen) Geometrie wird man geführt, wenn man die Fundamentalfläche der Cayleyschen Maßbestimmung in einen imaginären Kegelschnitt degenerieren läßt. Nimmt man für die Fundamentalfläche eine eigentliche Fläche zweiten Grades, die aber imaginär ist, so erhält man die elliptische Geometrie. Die hyperbolische Geometrie endlich erhält man, wenn man für die Fundamentalfläche eine reelle, aber nicht geradlinige Fläche zweiten Grades nimmt und auf die Punkte in deren Innerem achtet.

Ich wende mich jetzt zu der Aufstellung der allgemeinen Cayleyschen Maßbestimmung, zunächst für die Grundgebilde erster Stufe. Dabei erörtere ich jedesmal, wie sich unter die projektivischen Vorstellungen die Vorstellungen der elliptischen und hyperbolischen Geometrie subsumieren.

Es mag hier übrigens noch des Zusammenhanges gedacht werden, in welchem sich die in Rede stehenden geometrischen Dinge mit den Betrachtungen befinden, die sich auf Maßbestimmung in beliebig ausgedehnten analytischen Mannigfaltigkeiten beziehen.

Herr Beltrami hat zuerst gezeigt[10]), wie der planimetrische Teil der hyperbolischen (Nicht-Euklidischen) Geometrie seine Interpretation in der gewöhnlichen Metrik der Flächen mit konstantem negativen Krümmungsmaße findet. In der hyperbolischen Geometrie ist also die Ebene wie eine Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen mit konstantem negativen Krümmungsmaße. Als darauf die bez. Riemannsche Arbeit erschien, in

[9]) Man bezeichnet z. B. die Punkte einer Fläche als hyperbolische oder elliptische oder parabolische, je nachdem die Haupttangenten reell oder imaginär sind oder zusammenfallen. Steiner nennt die Involutionen hyperbolisch oder elliptisch oder parabolisch, je nachdem die Doppelelemente reell oder imaginär sind oder zusammenfallen usf.

[10]) Saggio di interpretazione della Geometria non-euclidea. Giornale di Matematiche, 1868. Beltramis Werke, Bd. 1, 374—405.

der zum ersten Male der Begriff des Krümmungsmaßes auch für höhere Mannigfaltigkeiten aufgestellt wurde, dehnte Beltrami seine Untersuchungen auf Räume mit beliebig vielen Dimensionen aus[11]). Insbesondere zeigte er, daß bei der hyperbolischen Geometrie dem gewöhnlichen Raume (von drei Dimensionen) auch wieder ein konstantes negatives Krümmungsmaß beigelegt wird, daß geradezu die Annahme eines konstanten negativen Krümmungsmaßes sich mit der Annahme der hyperbolischen Geometrie deckt. Die elliptische Geometrie dagegen, oder, wie er sie bezeichnet, die sphärische[12]) (denn die gewöhnliche sphärische Geometrie gehört hierher), würde dem Raume ein konstantes positives Krümmungsmaß beilegen. Bei der parabolischen Geometrie endlich würde das Krümmungsmaß auch konstant, aber gleich Null sein.

Da nun, wie im folgenden gezeigt werden soll, die allgemeine Cayleysche Maßbestimmung im Raume von drei Dimensionen gerade die hyperbolische, elliptische und parabolische Geometrie umfaßt, sich also mit der Annahme eines konstanten Krümmungsmaßes deckt, so wird man zu der Vermutung geleitet, daß auch bei beliebig vielen Dimensionen die allgemeine Cayleysche Maßbestimmung und die Annahme eines konstanten Krümmungsmaßes übereinkommen. Dieses ist, wie indes nicht weiter gezeigt werden soll, in der Tat der Fall. Man wird also für die Räume mit konstantem Krümmungsmaße ohne weiteres die Formeln benutzen können, die im folgenden unter Annahme von zwei und drei Dimensionen aufgestellt werden. Es schließt dies ein, daß in solchen Räumen die kürzesten Linien wie gerade Linien durch lineare Gleichungen dargestellt werden können[13]); daß die unendlich fernen Elemente eine Fläche zweiten Grades bilden usw. Es sind dies Resultate, welche bereits Beltrami, von anderen Betrachtungen ausgehend, nachgewiesen hat[14]); auch ist, um von den Formeln von Beltrami zu denen von Cayley zu gelangen, kaum noch ein Schritt zu tun.

Zugleich mag hiermit der Zusammenhang angedeutet sein, der zwischen dem Nachstehenden und den allgemeinen Untersuchungen der Herren Christoffel[15]) und Lipschitz[16]) über Differentialausdrücke besteht.

[11]) Teoria fundamentale degli spazii di curvatura costante. Annali di Matematica, Serie II, Bd. 2, 1868/69. Beltrami's Werke, Bd. 1, 406—429.

[12]) Demgegenüber bezeichnet er die hyperbolische Geometrie als „pseudosphärische".

[13]) Insbesondere also wird für Räume mit konstanter Krümmung die projektivische Geometrie gelten. Vgl. § 17 des Textes.

[14]) Zunächst für Flächen von konstantem Krümmungsmaße in einem Aufsatze: Risolutione del problema di riportare i punti di una superficie usw. Annali di Matematica. Serie I, Bd. 7. 1866. Werke, Bd. 1, 262—280. Sodann allgemein in der genannten Abhandlung: Teoria generale usw.

[15]) Borchardts Journal. Bd. 70 (1869), S. 46.

[16]) Borchardts Journal. Bd. 70 (1869), S. 71; Bd. 72 (1870), S. 1.

§ 2.

Allgemeines über räumliche Maßbestimmung.

Alle räumlichen Maßbestimmungen lassen sich bekanntlich auf zwei fundamentale Aufgaben zurückführen: auf die Bestimmung *der Entfernung zweier Punkte* und auf die Bestimmung *der Neigung zweier sich schneidender Geraden;* wie denn die Instrumente, mit denen der praktische Geometer arbeitet, im allgemeinen *Strecken* oder *Winkel* messen; alle übrigen zu bestimmenden Dinge können aus diesen berechnet werden.

Im Sinne der projektivischen Geometrie wird man diese beiden Grundaufgaben als *das Problem der Maßbestimmung auf den Grundgebilden erster Stufe* bezeichnen können. Das Messen der Entfernung zweier Punkte entspricht der Maßbestimmung auf der geraden Punktreihe; das Messen der Neigung zweier sich schneidender Geraden der Maßbestimmung im ebenen Strahlbüschel. Die Maßbestimmung im Ebenenbüschel endlich ist von der im ebenen Strahlbüschel nicht verschieden, da als Neigung zweier Ebenen die Neigung solcher zwei sich schneidender Linien anzusehen ist, in welchen die beiden Ebenen durch eine auf ihrer Durchschnittslinie senkrechte Ebene geschnitten werden. Es bleiben sonach nur zu betrachten die Maßbestimmung auf der geraden Punktreihe und die Maßbestimmung im ebenen Strahlbüschel, und von ihnen soll hier zunächst gehandelt werden.

Sofern man die gerade Punktreihe und das ebene Strahlbüschel als in der Ebene gelegen betrachtet, sind sie durch das Prinzip der Dualität verknüpft. Nicht so die für dieselben geltenden Maßbestimmungen, die im Gegenteil wesentlich verschieden sind, z. B.:

Die Entfernung zweier Punkte ist eine algebraische, der Winkel zweier Geraden eine transzendente (zyklometrische) Funktion der Koordinaten.

Die Länge einer unbegrenzten geraden Punktreihe ist unendlich groß; dagegen ist die Summe der Winkel im Strahlbüschel endlich.

Eine Strecke ist (bis aufs Vorzeichen) eindeutig bestimmt, ein Winkel nur bis auf Multipla einer Periode. Entsprechend kann die Strecke auf einfache Weise in eine beliebige Anzahl gleicher Teile geteilt werden, nicht so der Winkel, bei dem im allgemeinen nur die Zweiteilung gelingt usw.

Trotz dieser Unterschiede haben beide Arten von Maßbestimmungen etwas Gemeinsames, und dieser Umstand wird gestatten, beide als besondere Fälle unter eine allgemeinere Maßbestimmung zu subsumieren. Dieses Gemeinsame ist zweierlei Art.

Erstens gilt für beide Maßbestimmungen das Gesetz, daß sich die

Maßunterschiede addieren[17]), d. h. daß der Maßunterschied $\overline{12}$, vermehrt um den Maßunterschied $\overline{23}$, gleich ist dem Maßunterschiede $\overline{13}$, in Zeichen $\overline{12}+\overline{23}=\overline{13}$. Diese *Addierbarkeit der Maßunterschiede* ist ein allgemeines Gesetz, welches bei allen Maßbestimmungen in Mannigfaltigkeiten einer Dimension von vornherein gegeben ist[18]). Dasselbe hat für die Bestimmung derjenigen Funktion der Koordinaten, welche den Maßunterschied darstellen soll, den Wert einer Funktionalgleichung. — Mit dieser Addierbarkeit der Maßunterschiede können wir gleich die weitere Eigenschaft verknüpfen, die ebenfalls bei allen Maßbestimmungen in Mannigfaltigkeiten einer Dimension hervortritt, nämlich die, daß die Entfernung eines Elementes von sich selbst gleich Null ist: $\overline{11}=0$. Hieraus und aus der eben genannten Eigenschaft folgt noch insbesondere: $\overline{12}=-\overline{21}$.

Zweitens haben die hier zu betrachtenden Maßbestimmungen noch eine zweite Eigenschaft, welche sie eben geeignet macht, zur Messung im Raume angewandt zu werden. Diese Eigenschaft ist die, *durch eine Bewegung im Raume nicht geändert zu werden.* Der Winkel zweier Geraden eines Büschels ändert sich insbesondere nicht, wenn man das Büschel in seiner Ebene um seinen Mittelpunkt eine Rotation ausführen läßt; ebensowenig die Entfernung zweier Punkte einer Geraden, wenn man die Gerade in sich verschiebt.

Die genannten beiden Eigenschaften reichen hin, um beide Maßbestimmungen zu charakterisieren; sie treten auch in deutlichster Weise hervor bei der Art, wie wirkliche Messungen ausgeführt werden. Man bedient sich dazu, sowohl beim Winkel- als beim Streckenmessen, *einer Skala äquidistanter Elemente,* die man beliebig an den zu messenden Gegenstand anlegt[19]). Die Zahl der Skalenteile, welche zwischen den beiden Elementen liegen, deren Maßunterschied zu bestimmen ist, ergibt geradezu den gesuchten Maßunterschied. Dabei soll nicht weiter diskutiert werden, wie die Zahl dieser Skalenteile im allgemeinen keine ganze und nicht einmal eine rationale ist, wie man damit zusammenhängend auch den Maßunterschied zweier Elemente nie genau, sondern nur innerhalb gewisser Fehlergrenzen wird bestimmen können. — Dagegen mögen wir des näheren

[17]) Bei der Winkelmessung gilt dies natürlich nur so weit, als man nicht, was man immer kann, den Winkeln $\overline{12}$ usw. unabhängig voneinander Multipla von π zufügt.

[18]) Dasselbe gilt z. B., wenn wir die Zeit oder Gewichte oder Intensitäten messen.

[19]) Beim Streckenmessen bedient man sich, in Übereinstimmung mit dem im Texte Gesagten, einer Skala äquidistanter, auf einer Geraden gelegener Punkte, eines *Maßstabs.* Dagegen wendet man beim Winkelmessen nicht eine Winkelskala, sondern einen *geteilten Kreis* an, der eine Winkelskala vertritt. Im Texte soll aber an der Vorstellung einer Winkelskala festgehalten werden, weil ein Kreis nicht im Sinne der projektivischen Geometrie ein Grundgebilde ist.

betrachten, wie die genannten beiden Eigenschaften der Maßbestimmung in der hier mit geschilderten Operation des Messens zutage treten. Die erste Eigenschaft, die Addierbarkeit der Maßunterschiede, ist unmittelbar darin ausgesprochen, daß wir als Maßunterschied zweier Elemente schlechthin die Zahl der zwischen ihnen befindlichen Skalenteile nehmen. Die zweite Eigenschaft tritt namentlich darin hervor, daß wir für den Maßunterschied dieselbe Zahl finden, unabhängig von der Art und Weise, wie wir die Skala an das zu Messende anlegen. Zu diesem Zwecke muß die Skala die Eigenschaft haben, sich selbst zu decken, wenn man sie an sich selbst beliebig anlegt. Oder, mit anderen Worten: Übt man auf die Skala eine Bewegung aus, bei der die gerade Punktreihe bez. das Strahlbüschel, welche ihre Träger sind, unverändert bleiben, bei der ferner ein Skalenteil in den nächstfolgenden übergeht, so geht jeder Skalenteil in den nächstfolgenden über.

Diese letztere Eigenschaft der Skala gestattet es, *dieselbe durch eine wiederholte Bewegung anzufertigen* [wie man dies in praxi tatsächlich tut].

Insbesondere, um eine Skala auf der geraden Punktreihe zu konstruieren, nehme man zwei Punkte (1) und (2) als Grenzpunkte eines ersten Skalenteils an. Sodann verschiebe man die Gerade in sich, bis (1) in (2) fällt. So ist (2) in einen Punkt (3) gerückt, welcher der dritte Skalenteilpunkt sein soll. Verschiebt man noch einmal um ein gleiches Stück, so rückt wieder (1) in (2), (2) in (3), endlich (3) in einen neuen Skalenteilpunkt (4) usw.

Ebenso, will man eine Skala auf dem ebenen Strahlbüschel konstruieren, so nehme man zuvörderst zwei Strahlen (1) und (2) an als Grenzstrahlen eines ersten Skalenteils[20]. Eine Drehung des Büschels in seiner Ebene um seinen Mittelpunkt bringe (1) in die Lage von (2), so hat (2) eine Lage (3) angenommen, welches der dritte Teilstrahl ist usf.

Verschiebung einer Punktreihe oder Drehung eines Strahlbüschels in sich fallen nun beide, vom Standpunkte der projektivischen Geometrie aus, unter den allgemeineren Begriff *einer linearen Transformation, welche das betreffende Grundgebilde in sich überführt*. Hiernach wird man sofort *eine allgemeinere Konstruktion einer Skala* für die gerade Punktreihe oder das Strahlbüschel und damit *eine allgemeinere Maßbestimmung* auf diesen Grundgebilden konzipieren, die dann die wirklich angewandten Konstruktionen und Maßbestimmungen als besondere Fälle umfaßt. Man wird sich nämlich dadurch, sei es für die Punktreihe oder für das Strahlbüschel, eine Skala konstruieren, daß man auf ein Element des betreffenden Ge-

[20]) In praxi wird man für den Skalenteil einen solchen Winkel nehmen, daß der rechte Winkel durch eine ganze Anzahl Skalenteile ausgedrückt wird, was hier nicht in Betracht kommt.

bildes eine beliebig anzunehmende lineare Transformation, durch welche das Gebilde in sich übergeht, wiederholt anwendet. Das anfänglich gewählte Element erzeugt dabei eine Elementenreihe, welche eben die Skala ist. Als Maßunterschied zweier Elemente gilt die Zahl der zwischen den beiden Elementen befindlichen Skalenteile[21]). Ist hiernach zunächst nur der Maßunterschied solcher Elemente definiert, welche genau um eine ganze Anzahl von Skalenteilen voneinander abstehen, so wird man durch fortgesetztes Unterabteilen der Skalenteile (vgl. den folgenden Paragraphen) auch den Maßunterschied zweier Elemente festlegen können, die um eine rationale Zahl von Skalenteilen verschieden sind; man wird endlich, indem man den Begriff der irrationalen Grenze aufnimmt, von einem Maßunterschiede zweier beliebiger Elemente reden können.

Diese allgemeinere Art der Maßbestimmung auf den Grundgebilden erster Stufe soll in dem folgenden Paragraphen näher untersucht werden. Man wird dabei so viele wesentlich verschiedene Maßbestimmungen erhalten, als es wesentlich verschiedene lineare Transformationen im Grundgebilde erster Stufe gibt. Nun gibt es aber solcher Transformationen nur zweierlei Arten:

1. Solche, bei denen zwei (reelle oder imaginäre) Elemente des Grundgebildes fest bleiben (allgemeiner Fall).

2. Solche, bei denen nur ein (doppeltzählendes) Element des Grundgebildes ungeändert bleibt (spezieller Fall).

Entsprechend wird es auch nur zwei wesentlich verschiedene Arten projektivischer Maßbestimmung auf den Grundgebilden erster Stufe geben: eine *allgemeine*, welche Transformationen erster Art, eine *spezielle*, welche Transformationen zweiter Art benutzt.

Die gewöhnliche Maßbestimmung im Strahlbüschel ist von der ersten Art. Denn bei einer Rotation des Büschels um seinen Mittelpunkt in seiner Ebene bleiben zwei getrennte Strahlen desselben, diejenigen, welche nach den unendlich fernen imaginären Kreispunkten hingehen, ungeändert.

Dagegen ist die gewöhnliche Maßbestimmung auf der Geraden von der zweiten Art. Denn bei einer Verschiebung einer Geraden in sich selbst bleibt nach der Annahme der gewöhnlichen parabolischen Geometrie nur ein Punkt derselben, der unendlich ferne Punkt, ungeändert. —

Hiermit ist denn bereits angedeutet, wie nach der Annahme der hyperbolischen bez. der elliptischen Geometrie die Maßbestimmung auf der Ge-

[21]) Hierdurch wird die Art der zu benutzenden linearen Transformation beschränkt. In erster Linie muß die lineare Transformation eine reelle sein, welche ein reelles erstes Element in ein reelles zweites überführt. Sodann ist auch noch erforderlich, daß die Skalenteilelemente in der Reihenfolge ihrer Entstehung aufeinander folgen, und nicht etwa das erste und zweite Element durch das dritte und vierte getrennt werden. Vgl. den weiteren Text.

raden den speziellen Charakter verliert, den ihr die parabolische Geometrie beilegt. Die hyperbolische Geometrie erteilt der Geraden zwei reelle, die elliptische zwei imaginäre unendlich ferne Punkte. Sie hat dementsprechend eine Verschiebung einer Geraden in sich als eine allgemeine lineare Transformation aufzufassen, welche zwei getrennte Punkte, die beiden unendlich fernen Punkte, ungeändert läßt. Es wird dies im folgenden noch näher erörtert werden.

§ 3.

Die allgemeine projektivische Maßbestimmung auf den Grundgebilden erster Stufe.

Wir wollen hier zunächst nur den allgemeinen Fall der eben aufgestellten projektivischen Maßbestimmung ins Auge fassen, daß nämlich zwei getrennte Elemente bei der die Skala erzeugenden linearen Transformation vorhanden sind. Dieselben mögen als die beiden *Fundamentalelemente* bezeichnet werden. In sie verlegen wir die beiden Grundelemente einer Koordinatenbestimmung, welche jedes weitere Element durch das Verhältnis zweier homogener Veränderlichen $x_1 : x_2$ festlegt. Den Wert dieses Verhältnisses mögen wir kurz durch z bezeichnen, so daß also $z = 0$ und $z = \infty$ die beiden Fundamentalelemente vorstellt. Alsdann ist die lineare Transformation, von der wir bei der Konstruktion der Skala ausgehen wollen, durch eine Gleichung von der folgenden Form gegeben:

$$z' = \lambda z,$$

wo λ eine die Transformation bestimmende Konstante ist[22]). — Wenden wir nun diese Transformation wiederholt auf ein willkürlich angenommenes Element $z = z_1$ an, so erhalten wir eine Elementenreihe:

$$z_1, \quad \lambda z_1, \quad \lambda^2 z_1, \quad \lambda^3 z_1, \ldots$$

und diese Elementenreihe ist unsere Skala. Dieselbe geht, wie a priori ersichtlich, durch die erzeugende Transformation in sich über.

Bezeichnen wir nun *den Skalenteil als Einheit der Entfernung*, so wird die Entfernung der Elemente $z_1, \lambda z_1, \lambda^2 z_1, \lambda^3 z_1, \ldots$ von dem Elemente z_1 bez. gleich $0, 1, 2, 3, \ldots$.

Jetzt werden wir, um auch die Entfernung anderer Elemente von dem Elemente z_1 messen zu können, die Skalenteile unterabteilen, etwa zunächst

[22]) Dieses λ darf nach einer oben gemachten Bemerkung nicht ganz beliebig sein, weil wir bei der Konstruktion der Skala nur reelle Elemente des Grundgebildes ins Auge fassen. Es muß λ zunächst der Beschränkung genügen, daß durch die Transformation $z' = \lambda z$ reelle Elemente in reelle übergehen (unabhängig davon, ob die beiden Fundamentalelemente $z = 0$, $z = \infty$ reell oder imaginär sind). Sodann muß λ (vgl. den weiteren Text) bei reellen Fundamentalelementen positiv sein.

in n (gleiche) Teile. Man erreicht dies, indem man auf das eine Grenzelement eines Skalenteils diejenige lineare Transformation $(n-1)$ mal anwendet, welche nach n-maliger Wiederholung die Transformation $z' = \lambda z$ ergibt, d. h. also die Transformation:

$$z' = \lambda^{\frac{1}{n}} \cdot z.$$

Dabei wird man die n-te Wurzel des Näheren so wählen[23]), daß das Element $\lambda^{\frac{1}{n}} z$ zwischen die Elemente z und λz zu liegen kommt.

Ist diese Unterabteilung ausgeführt, so kann man nunmehr die Entfernung aller Elemente von z_1 angeben, deren Koordinate z sich auf die folgende Form bringen läßt:

$$z = \lambda^{\alpha + \frac{\beta}{n}} \cdot z_1,$$

wo α, β ganze Zahlen sind. Diese Entfernung wird geradezu gleich dem Exponenten $\alpha + \frac{\beta}{n}$.

Indem man sich nun die Unterteilung der Skala unbegrenzt fortgesetzt denkt, ist ersichtlich, daß überhaupt als Entfernung eines Elementes z von dem Elemente z_1 derjenige Exponent α anzusehen ist, zu welchem λ erhoben werden muß, damit $\lambda^\alpha z_1 = z$ ist. Es ist dabei α irgendeine rationale oder irrationale Zahl.

Wir können dies, da offenbar $\alpha = \log \frac{z}{z_1} : \log \lambda$ ist, auch so aussprechen:

Die Entfernung eines Elementes z von dem Elemente z_1 ist gleich dem Logarithmus des Quotienten $\frac{z}{z_1}$, dividiert durch die Konstante $\log \lambda$.

Das Element z_1 ist dabei nur zufällig als Anfangselement der Skala gewählt, aber nicht weiter ausgezeichnet gewesen; man kann dasselbe durch eine lineare Transformation, welche die beiden Fundamentalelemente und also die ganze Maßbestimmung nicht ändert, überall hinbringen. Man hat also:

Die Entfernung zweier beliebiger Elemente z und z' ist gleich

$$\log \frac{z}{z'} : \log \lambda,$$

wie man noch verifizieren mag, indem man die Entfernungen der beiden

[23]) Warum gerade diese Bestimmung, übersieht man am besten an dem Beispiele der Kreisteilung. Soll bei einem Kreise ein Skalenteil, etwa ein Grad, untergeteilt werden, so ist das zunächst noch eine unbestimmte Aufgabe, weil der gegebene Skalenteil nur bis auf Multipla der Periode 2π gegeben ist. Diese Unbestimmtheit wird durch die Festsetzung im Texte aufgehoben. — Bei reellen Fundamentalelementen genügt es, $\lambda^{\frac{1}{n}}$ einfach als die positive reelle n-te Wurzel von λ zu definieren. Damit es aber eine solche gibt, muß λ positiv sein, was schon oben angegeben wurde. Bei negativem λ würde man für die Skala eine Elementenreihe erhalten, deren Elemente nicht in der Reihenfolge ihrer Entstehung aufeinander folgten.

Elemente z und z' von z_1, nämlich $\log\frac{z}{z_1}:\log\lambda$ und $\log\frac{z'}{z_1}:\log\lambda$ voneinander subtrahiert.

Statt der Konstanten $\frac{1}{\log\lambda}$ wollen wir jetzt kürzer c schreiben[24]), eine Bezeichnung, die im folgenden immer angewendet werden soll.

Dann ist also die Entfernung zweier beliebiger Elemente z und z' gleich $c\cdot\log\frac{z}{z'}$.

An diesem Ausdrucke für den Maßunterschied zweier Elemente verifiziert man leicht das Vorhandensein derjenigen Eigenschaften, durch deren Forderung wir ihn konstruiert haben. Zunächst findet die Addierbarkeit der Maßunterschiede statt:

$$c\log\frac{z}{z''} = c\log\frac{z}{z'} + c\log\frac{z'}{z''}.$$

Es ist ferner die Entfernung eines Elementes von sich selbst gleich Null:

$$c\cdot\log\frac{z}{z} = 0.$$

Endlich bleibt die Entfernung zweier Elemente:

$$c\log\frac{z}{z'},$$

ungeändert, wenn man auf z und z' gleichzeitig eine lineare Transformation anwendet, bei der die beiden Fundamentalelemente:

$$z = 0, \quad z = \infty$$

ungeändert bleiben, also eine Transformation, welche z und z' gleichzeitig in Multipla ihrer selbst überführt. —

Der hiermit für die Maßbestimmung gewonnene analytische Ausdruck läßt sich einfach geometrisch interpretieren. Der Quotient $\frac{z}{z'}$ hat, wie bekannt, die Bedeutung des Doppelverhältnisses der Elemente z, z' zu den beiden Fundamentalelementen $z = 0$, $z = \infty$.

Es wird also bei unserer Maßbestimmung die Entfernung zweier Elemente des Grundgebildes gleich dem mit einer gewissen Konstanten multiplizierten Logarithmus des von denselben mit den beiden Fundamentalelementen gebildeten Doppelverhältnisses.

Die fragliche Konstante c ist dabei unbestimmt und willkürlich anzunehmen.

---

[24]) Entsprechend den Beschränkungen, die der Konstanten λ aufgelegt waren, wird man Beschränkungen für die Konstante c erhalten. Dieselben gehen dahin, daß c reell oder rein imaginär sein muß, je nachdem die Fundamentalelemente reell oder imaginär sind. Wählte man c anders, so würde man noch immer den hier gewonnenen analytischen Ausdruck als Maßunterschied bezeichnen können, aber der Maßunterschied zweier konsekutiver reeller Elemente wäre dann imaginär.

§ 4.

Übergang zu komplexen Elementen. Verallgemeinerung der Koordinatenbestimmung.

Wir haben bei der Konstruktion der Skala und also bei der Definition des Maßunterschiedes zweier Elemente seither nur reelle Elemente des Grundgebildes betrachtet. Nun wir aber den analytischen Ausdruck für den Maßunterschied zweier Elemente gewonnen haben:

$$c\log\frac{z}{z'},$$

so können wir auch unmittelbar von einem Maßunterschiede zweier komplexen Elemente des Grundgebildes sprechen. Dabei tritt dann in Allgemeinheit eine Erscheinung auf, die wir beim Winkel kennen, und die, wie im nächsten Paragraphen weiter erörtert werden soll, bei reellen Elementen immer dann in Evidenz tritt, wenn die Fundamentalelemente imaginär sind. Es ist dies, *daß der Maßunterschied zweier Elemente keine eindeutig bestimmte, vielmehr eine unendlich vielwertige Funktion mit einem Periodizitätsmodul ist.*

Dieser Periodizitätsmodul beträgt, da die Funktion Logarithmus die Periode $2\pi i$ hat, $2c\pi i$.

Da ferner der Logarithmus unendlich groß wird, wenn sein Argument 0 oder ∞ beträgt, so sind offenbar solche Elemente unendlich weit voneinander entfernt, für welche $\frac{z}{z'} = 0$ oder $= \infty$ wird. Dies tritt dann und nur dann ein, wenn eines der beiden Elemente mit einem der beiden Fundamentalelemente ($z = 0$, $z = \infty$) zusammenfällt. Also:

Bei unserer Maßbestimmung erhält das Grundgebilde zwei (reelle oder imaginäre) unendlich ferne Elemente: die beiden Fundamentalelemente.

Die Entfernung dieser Elemente von einem beliebigen anderen ist in derselben Weise unendlich groß, wie $\log 0$ oder $\log\infty$.

Die beiden Fundamentalelemente sind logarithmisch unendlich weit.

Wir mögen nun auch die beschränkende Annahme fallen lassen, welche wir seither hinsichtlich der Koordinatenbestimmung gemacht hatten. Die beiden Fundamentalelemente mögen nicht mehr mit den Grundelementen der Koordinatenbestimmung zusammenfallen, sondern sollen durch eine allgemeine Gleichung zweiten Grades gegeben sein:

$$\Omega = az^2 + 2bz + c = 0,$$

oder, homogen geschrieben:

$$ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 = 0.$$

Um den Maßunterschied zweier Elemente mit den homogenen Koordinaten x_1, x_2 und y_1, y_2 anzugeben, hat man nur das Doppelverhältnis derselben zu den beiden Elementen $\Omega = 0$ zu bilden. Dieses letztere wird aber nach bekannten Regeln:

$$= \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}},$$

wo Ω_{xx}, Ω_{yy}, Ω_{xy} die folgenden Ausdrücke bedeuten. Es ist Ω_{xx}, Ω_{yy} dasjenige, was aus Ω entsteht, wenn man statt der Variabeln bez. x_1, x_2 und y_1, y_2 einsetzt, also:

$$\Omega_{xx} = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2, \qquad \Omega_{yy} = ay_1^2 + 2by_1y_2 + cy_2^2.$$

Sodann bedeutet Ω_{xy} den Ausdruck:

$$\Omega_{xy} = ax_1y_1 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cx_2y_2.$$

Bei Anwendung dieser Bezeichnung wird jetzt der Maßunterschied zweier Elemente gleich:

$$c \cdot \log \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}$$

und dies ist der allgemeine analytische Ausdruck für den Maßunterschied.

Gelegentlich werden wir statt des Logarithmus einen Arcus Cosinus einführen. Es ist bekanntlich:

$$c \log a = 2ic \cdot \arccos \frac{a+1}{2\sqrt{a}}.$$

Also auch unser Maßunterschied:

$$= 2ic \cdot \arccos \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx} \cdot \Omega_{yy}}}.$$

Dies ist diejenige Form des analytischen Ausdrucks, welche bei Cayley vorkommt; Cayley hat nur, wie bereits erwähnt, der Konstanten c den partikulären Wert $-\frac{i}{2}$ beigelegt, so daß bei ihm der Maßunterschied geradezu gleich wird dem betreffenden Arcus Cosinus.

§ 5.

Besondere Betrachtung der reellen Elemente des Grundgebildes.

Wir wollen nunmehr betrachten, wie sich die in den vorigen beiden Paragraphen entwickelte Maßbestimmung auf den Grundgebilden erster Stufe des näheren für die reellen Elemente des Gebildes gestaltet. Dabei werden die beiden Fälle zu unterscheiden sein, daß die Fundamentalelemente reell oder daß sie imaginär sind. Der bestimmteren Vorstellung wegen wollen wir dabei insbesondere die Maßbestimmung auf der geraden Punktreihe ins Auge fassen; für das Strahlbüschel gelten selbstverständlich die nämlichen Dinge.

Es mögen *erstens* auf der Geraden zwei reelle Fundamentalpunkte o, o' gegeben sein.

Sind dann x und y reelle Punkte der Geraden, so haben x, y zu o, o' ein negatives oder positives Doppelverhältnis, je nachdem die Strecke xy von der Strecke oo' getrennt wird oder nicht. Im ersten Falle ist also der Logarithmus des Doppelverhältnisses rein imaginär, im zweiten (bis auf imaginäre Perioden) reell. Stellen wir also die Forderung, daß die Entfernung zweier aufeinander folgender Punkte der Geraden reell sei, so müssen wir die den Logarithmus multiplizierende Konstante c ebenfalls reell nehmen. Dann gilt der Satz:

Die Entfernung zweier Punkte x, y ist eine imaginäre oder eine reelle Größe, je nachdem die Strecke xy von der Strecke oo' getrennt wird oder nicht.

Man könnte natürlich c (wie dies bei Cayley geschieht) einen rein imaginären Wert beilegen; dann würden sich in dem vorstehenden Satze die Worte reell und imaginär vertauschen. Von vornherein ist dies gerade so zulässig, wie die andere Annahme. Nur würde dadurch die Maßbestimmung einen ganz anderen Charakter für reelle Punkte bekommen, als die von uns gewöhnlich angewandte ist. Wollten wir z. B. eine Skala solcher Punkte konstruieren, $1, 2, 3, \ldots$, die jedesmal um die Einheit der Entfernung voneinander abstehen, so würde 2 von 1 und 3 durch oo' getrennt sein und die Entfernung 13 nur insofern gleich zwei Einheiten sein, als man von 1 zuerst zu 2, von 2 sodann zu 3 geht, während $\overline{13}$ unmittelbar gemessen einen imaginären Wert ergibt usf. Deshalb soll die Annahme eines imaginären c hier ausgeschlossen sein.

Bei reellem c haben wir zunächst den eben angegebenen Satz. Wir werden uns dementsprechend auf die Betrachtung der einen der beiden Strecken beschränken, in welche die Gerade durch die beiden Fundamentalpunkte zerlegt wird. Jede dieser beiden Strecken ist unendlich lang, insofern ihre beiden Grenzpunkte, die Fundamentalpunkte, von allen anderen Punkten unendlich fern sind.

Man stelle sich nun vor, daß man in einem Punkt der Strecke oo', die wir gerade betrachten, gesetzt wäre und daß man sich nicht anders auf der Geraden fortbewegen könne, als vermöge solcher linearer Transformationen, welche die Punkte o, o' und also die Maßbestimmung ungeändert lassen. Wir wollen dann auch von einer Geschwindigkeit der Bewegung sprechen, indem wir darunter das Verhältnis des durchlaufenen Raumes (gemessen in unserer Maßbestimmung) zu der gebrauchten Zeit verstehen. Wenn man sich dann mit konstanter Geschwindigkeit in dem einen oder dem anderen Sinne auf der Geraden bewegt, so wird man sich dem Punkte o oder o' beständig nähern, man wird ihn aber, da er unendlich fern ist, nie erreichen. *In die zweite Strecke $o'o$ aber, auf der* *man sich gerade nicht befindet, wird man nie gelangen, so daß man sich von ihrem Vorhandensein nicht wird überzeugen können.*

Dies ist nun gerade diejenige Vorstellung, welche man sich in der *hyperbolischen* Geometrie von dem Messen auf der geraden Linie bildet. Die hyperbolische Geometrie erteilt der Geraden zwei unendlich ferne Punkte. Ob jenseits der beiden unendlich fernen Punkte noch ein Stück der Geraden existiert, welches das im Endlichen gelegene Stück zu einer geschlossenen Kurve ergänzt, ist nicht zu sagen, da uns unsere Bewegungen nie an die unendlich fernen Punkte hinan, geschweige denn über dieselben hinausführen. Jedenfalls wird man aber ein solches Stück als ein gedachtes, ideales der geraden Linie hinzufügen können.

Wir wollen nun *zweitens* annehmen, die beiden der Maßbestimmung auf der Geraden zugrunde zu legenden Fundamentalpunkte seien (konjugiert) imaginär. Dann hat das Doppelverhältnis der beiden Fundamentalpunkte zu zwei beliebigen reellen Punkten x, y den absoluten Betrag 1, der Logarithmus ist daher rein imaginär. Wir müssen also c einen rein imaginären Wert $c_1 i$ erteilen, damit die Entfernung reeller Punkte reell sein kann. Dann aber ist zugleich die gegenseitige Entfernung aller reeller Punkte reell. Unendlich ferne reelle Punkte gibt es nicht. Die Linie kehrt wie eine geschlossene Kurve in sich zurück. Die reelle Entfernung zweier Punkte ist nicht vollständig bestimmt, sondern nur bis auf Multipla einer reellen Periode, welche die Gesamtlänge der Geraden vorstellt. Dieselbe beträgt $2i\pi c = -2\pi c_1$. Die Maßbestimmung auf der Geraden ist dann ganz so, wie die gewöhnliche Maßbestimmung auf einem Kreise mit dem Radius c_1.

Die hiermit geschilderte Maßbestimmung auf der Geraden ist gerade diejenige, welche die *elliptische* Geometrie anzunehmen hat. —

Was wir jetzt für die gerade Punktreihe ausgeführt haben, können wir genau in derselben Weise für das *Strahlbüschel* aussprechen.

Sind die beiden der Maßbestimmung im Strahlbüschel zugrunde liegenden Fundamentalstrahlen reell, so hat das Büschel zwei reelle Strahlen, welche einen unendlich großen Winkel mit allen übrigen einschließen. Eine Rotation eines Strahles im Büschel — entsprechend definiert, wie eben die Bewegung eines Punktes auf der Geraden — führt den Strahl nie an diese beiden Grenzstrahlen hinan oder gar über dieselben hinaus. Eine solche Maßbestimmung liegt unserer gewöhnlichen Winkelbestimmung gewiß nicht zugrunde, da eine fortgesetzte Rotation eines Strahles um einen auf ihm gelegenen Punkt den Strahl nach endlicher Zeit in seine Anfangslage zurückführt. Vielmehr verlangt diese Tatsache imaginäre Fundamentalstrahlen. Und in der Tat erkannten wir bereits in § 2, daß die gewöhnliche Winkelbestimmung zwei imaginäre Fundamentalstrahlen benutzt, nämlich diejenigen beiden Strahlen des Büschels, welche durch die unendlich fernen

imaginären Kreispunkte durchgehen. Bei der hyperbolischen und elliptischen Geometrie bleibt die Winkelbestimmung im Strahlbüschel ganz die gewöhnliche; die beiden Fundamentalstrahlen werden nur nicht mehr als diejenigen beiden Strahlen definiert, welche durch die Kreispunkte hindurchgehen, sondern als diejenigen, welche einen bestimmten Kegelschnitt, den in diesen Geometrien vorkommenden unendlich fernen Kreis (vgl. § 8) berühren.

Die in der allgemeinen Formel des § 4 unbestimmt bleibende Konstante c ist, damit dieselbe für die gewöhnliche Winkelbestimmung gilt, gleich $\pm\frac{\sqrt{-1}}{2}$ zu setzen. Zunächst muß sie, nach den vorstehend bei der geraden Punktreihe ausgeführten Betrachtungen, rein imaginär $= \pm c_1 i$ sein. Alsdann wird die Summe der Winkel im Strahlbüschel gleich $2\pi c_1$, und da dieselbe bei der gewöhnlichen Bestimmung gleich π gesetzt wird[25]), so ist $c_1 = \frac{1}{2}$ zu nehmen. Unter dieser Annahme ergibt die Formel des § 4 in der Tat die gewöhnlich bei der Winkelbestimmung benutzte Formel. Seien x und y rechtwinklige Koordinaten in der Ebene. Der Mittelpunkt des Strahlbüschels, welches wir betrachten, soll in den Koordinatenanfangspunkt fallen. So sind die beiden nach den Kreispunkten gehenden Strahlen:

$$x^2 + y^2 = 0.$$

Mögen sodann zwei Strahlen durch die homogenen Koordinaten x, y und x', y' festgelegt sein. So wird, nach der Formel des § 4, indem wir noch $c = \frac{i}{2}$ setzen, ihr Winkel

$$= \text{arc cos} \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

und dieses ist ersichtlich die gewöhnliche Winkelbestimmung.

Der Winkel zweier Geraden ist also im Sinne der projektivischen Geometrie zu definieren, *als der mit $\frac{\sqrt{-1}}{2}$ multiplizierte Logarithmus desjenigen Doppelverhältnisses, welches die beiden Geraden mit den von ihrem Schnittpunkte nach den beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkten gehenden Linien bilden.*

Gerade Linien bilden miteinander insbesondere einen rechten Winkel, wenn dieses Doppelverhältnis ein harmonisches ist. Die Bezeichnung eines solchen Winkels (oder auch einer entsprechenden Strecke) als eines Rechten werden wir in der Folge gelegentlich auch bei der allgemeinen Maßbestimmung anwenden.

[25]) Unter der Summe der Winkel im Strahlbüschel ist hier derjenige Winkel zu verstehen, den ein sich um einen seiner Punkte drehender Strahl durchlaufen muß, um zum ersten Male wieder mit seiner anfänglichen Lage zusammen zu fallen. Es ist dies die Hälfte desjenigen Winkels, den ein Punkt auf der Peripherie eines Kreises durchlaufen muß, um zur Anfangslage zurück zu gelangen.

§ 6.

Die spezielle Maßbestimmung bei zusammenfallenden Grundelementen.

Bisher hatten wir den besonderen Fall noch nicht in Betracht gezogen, der bei dem Zusammenfallen der beiden Fundamentalelemente der Maßbestimmung eintritt. Unsere allgemeine Formel

$$2ic \text{ arc cos } \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}$$

ergibt dann, unabhängig von den Werten, die man x und y beilegen mag, als Entfernung der beiden Elemente Null. Aber eine Maßbestimmung bleibt nach wie vor möglich, da die Art, wie die Entfernungen verschiedener Elemente beim Zusammenfallen der Fundamentalelemente Null werden, eine ganz bestimmte ist. Es ist offenbar:

$$\Omega_{xx} \cdot \Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2 = (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 \cdot \Delta,$$

wo Δ die Diskriminante $(ac - b^2)$ der quadratischen Form Ω ist. Deshalb können wir die allgemeine Formel für die Maßbestimmung auch so schreiben:

$$2ic \cdot \text{arc sin } \frac{(x_1 y_2 - y_1 x_2)\sqrt{\Delta}}{\sqrt{\Omega_{xx} \cdot \Omega_{yy}}}.$$

Fallen jetzt die beiden Fundamentalelemente zusammen, so wird Ω ein vollständiges Quadrat eines linearen Ausdruckes $p_1 x_1 + p_2 x_2 = p_x$ und Δ verschwindet. Wir können deshalb zunächst den arc sin dem Sinus selbst gleich setzen, also die Entfernung schreiben:

$$2ic\sqrt{\Delta} \cdot \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}},$$

oder, wenn wir für Ω_{xx}, Ω_{yy} noch bez. p_x^2 und p_y^2 einführen:

$$2ic\sqrt{\Delta} \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{(p_1 x_1 + p_2 x_2)(p_1 y_1 + p_2 y_2)}.$$

Den verschwindenden Faktor $\sqrt{\Delta}$ vereinigen wir mit dem $2ic$, dem wir einen beliebig großen Wert beilegen können, zu einer neuen Konstanten k. *So erhalten wir denn für den Maßunterschied die Formel*[26]):

$$k \cdot \frac{x_1 y_2 - y_1 x_2}{(p_1 x_1 + p_2 x_2)(p_1 y_1 + p_2 y_2)},$$

wo $p = 0$ das doppeltzählende Fundamentalelement vorstellt.

Daß dieser Ausdruck, den wir durch einen Grenzübergang gefunden haben, in der Tat den Forderungen genügt, die wir nach § 2 an ihn zu stellen haben, ist leicht zu verifizieren.

[26]) Cayley leitet diese Formel in ganz ähnlicher Weise ab.

Wir wollen ihn zu dem Zwecke in der etwas anderen Form schreiben:

$$\frac{q_1 x_1 + q_2 x_2}{p_1 x_1 + p_2 x_2} - \frac{q_1 y_1 + q_2 y_2}{p_1 y_1 + p_2 y_2},$$

wo q_1, q_2 im übrigen beliebige Größen sind, welche die Bedingung befriedigen:

$$q_1 p_2 - p_1 q_2 = k.$$

An dieser Form tritt zuvörderst die Addierbarkeit der Maßunterschiede ohne weiteres in Evidenz.

Sodann aber auch die Unveränderlichkeit derselben durch diejenigen speziellen linearen Transformationen, welche das Fundamentalelement $p = 0$ doppeltzählend ungeändert lassen. Diese Transformationen führen p in ein Multiplum seiner selbst über; jeden anderen linearen Ausdruck, also auch q, in dasselbe Multiplum seiner selbst, vermehrt um ein Vielfaches von p:

$$p' = \varrho p,$$
$$q' = \varrho q + \sigma p.$$

Der Quotient $\frac{q}{p}$ ändert sich dabei also um die Konstante σ, und der Maßunterschied zweier Elemente, der die Differenz zweier solcher Quotienten ist, bleibt völlig ungeändert, w. z. b. w.

Geometrisch definiert sich die hiermit gefundene Maßbestimmung folgendermaßen. Der Quotient $\frac{p_x}{q_x}$ stellt, wie bekannt, das Doppelverhältnis des Punktes x und desjenigen Punktes, für welchen $\frac{p}{q}$ den Wert 1 annimmt, zu den beiden Punkten $p = 0$, $q = 0$ dar, also zu dem gegebenen doppeltzählenden Fundamentalelemente und einem beliebig gewählten hinzutretenden Elemente. *Die Differenz der Werte dieses Doppelverhältnisses, gebildet für zwei Elemente, stellt den Maßunterschied der beiden Elemente dar.*

Diese Maßbestimmung, die sich als ein Grenzfall der allgemeinen ergab, soll der letzteren gegenüber fortan als *spezielle Maßbestimmung* bezeichnet werden. Dieselbe besitzt im Gegensatze zu der allgemeinen besonders die folgenden beiden Eigenschaften:

Sie ist nicht mehr mehrdeutig, sondern eindeutig definiert.

Sie besitzt nicht zwei logarithmisch unendlich ferne Elemente, sondern nur ein algebraisch unendlich weites (das doppeltzählende Fundamentalelement).

Unter diese spezielle Maßbestimmung subsumiert sich insbesondere, wie bereits in § 2 angedeutet, die gewöhnliche (euklidische, parabolische) Maßbestimmung auf der geraden Linie. Deshalb hat die Gerade bei der gewöhnlichen Anschauung auch nur einen unendlich fernen Punkt. Diesem Punkte kann man sich auf der einen oder der anderen Seite unausgesetzt nähern, ohne ihn allerdings zu erreichen. Die gerade Linie ist bei der parabolischen Geometrie, im Gegensatze zu der elliptischen, unendlich lang. Aber ein ideales Stück, wie bei der hyperbolischen Geometrie, besitzt sie nicht mehr; sie hängt im Unendlichen zusammen.

§ 7.

Spezielle Maßbestimmung, welche eine allgemeine in einem Elemente berührt. Krümmung der letzteren.

Wir wollen uns jetzt auf einem Grundgebilde erster Stufe zwei Maßbestimmungen denken, eine allgemeine und eine spezielle. Dieselben sollen in einer besonderen gegenseitigen Beziehung stehen, die als *Berührung der beiden Maßbestimmungen in einem Elemente* bezeichnet werden wird. Welcher Art diese Beziehung ist, wird man am besten an einem Beispiele erkennen.

Auf einer geraden Linie sei eine gewöhnliche Maßbestimmung gegeben, die den unendlich fernen Punkt der Geraden als Doppelelement benutzt. Die Punkte der Geraden seien durch eine nicht homogene Koordinate z vorgestellt, wo z geradezu den Abstand vom Koordinatenanfangspunkte bedeuten mag.

Sodann konstruiere man auf der Geraden in der folgenden Weise eine allgemeine Maßbestimmung. In dem Abstande 1 von der gegebenen Geraden und auf der im Koordinatenanfangspunkte errichteten Senkrechten sei der Mittelpunkt eines Strahlbüschels gelegen. Für dieses Strahlbüschel sei wiederum die gewöhnliche Maßbestimmung, d. h. jetzt die für das Strahlbüschel gewöhnliche Winkelbestimmung, gegeben. Diese Maßbestimmung kann man auf die gegebene Gerade übertragen, indem man als Maßunterschied zweier Punkte der Geraden den Winkel definiert, den die durch sie hindurchgehenden Strahlen des Büschels bilden. Sei z die Koordinate eines der Punkte, so ist der Winkel, den der hindurchgehende Strahl des Büschels mit dem durch den Koordinatenanfangspunkt gehenden bildet, gleich arc tang z; überhaupt wird also bei dieser Maßbestimmung der Maßunterschied zweier Elemente z und z':

$$= \text{arc tang } z - \text{arc tang } z'.$$

Die Fundamentalelemente dieser Maßbestimmung sind imaginär und des näheren bestimmt durch $z = \pm i$.

Zwischen der angenommenen speziellen Maßbestimmung und der jetzt hinzutretenden allgemeinen besteht nun die Beziehung, daß sie für Werte von z, die sehr wenig von $z = 0$ abweichen, nahezu übereinstimmen, da ja für sehr kleine Winkel der Unterschied zwischen Winkel und trigonometrischer Tangente verschwindet.

Am deutlichsten tritt dies hervor, wenn wir für den arc tang z seine Reihenentwicklung setzen: $= z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - + \ldots$. *Beide Maßbestimmungen sind also in der Nähe von $z = 0$ bis auf Größen dritter Ordnung identisch.* Diese Beziehung der beiden Maßbestimmungen ist es, welche als *Berührung* derselben bezeichnet sein soll.

Wenn sich, wie im vorstehenden, eine allgemeine und eine spezielle Maßbestimmung berühren, so ist augenscheinlich der Berührungspunkt der vierte harmonische Punkt zu den beiden Fundamentalpunkten der allgemeinen und dem doppeltzählenden Fundamentalpunkte der speziellen Maßbestimmung. Will man also, wenn auf einem Grundgebilde eine allgemeine Maßbestimmung gegeben ist, eine spezielle Maßbestimmung konstruieren, welche die gegebene in einem bestimmten Elemente berührt, so suche man zuerst zu diesem und zu den beiden Fundamentalelementen der allgemeinen Maßbestimmung das vierte harmonische. Dieses ist als Doppelelement der gesuchten Maßbestimmung zu benutzen. Es sind dann nur noch die absoluten Werte der in der letzteren vorkommenden Konstanten so zu bestimmen, daß in der Nähe des gegebenen Elementes zwischen beiden Maßbestimmungen Übereinstimmung stattfindet. Diese Übereinstimmung ist dann wegen der besonderen Lage des doppeltzählenden Fundamentalelementes sofort eine innigere, eine Berührung.

Nun findet ein charakteristischer Unterschied statt zwischen der allgemeinen Maßbestimmung mit imaginären und der allgemeinen Maßbestimmung mit reellen Fundamentalelementen.

Sind die beiden Fundamentalelemente imaginär, so eilt die in einem Punkte berührende spezielle Maßbestimmung der allgemeinen voran. Das heißt, für das eben gebrauchte Beispiel, der Abstand eines Punktes z vom Nullpunkte, gemessen in der tangierenden speziellen Maßbestimmung, ist immer größer als der Abstand derselben beiden Elemente, gemessen in der gegebenen allgemeinen Maßbestimmung. Man übersieht dies deutlich, wenn man bedenkt, daß die ganze Linie, gemessen in der speziellen Maßbestimmung, eine unendliche Länge hat, während sie in der gegebenen allgemeinen Maßbestimmung von endlicher Länge ist. Nur für Punkte, die unendlich nahe an dem Berührungspunkte ($z = 0$) gelegen sind, stimmen beide Maßbestimmungen überein.

Sind dagegen die beiden Fundamentalelemente der gegebenen allgemeinen Maßbestimmung reell, so bleibt umgekehrt die in einem Punkte berührende spezielle Maßbestimmung hinter der gegebenen zurück. In der Tat, die von den beiden Fundamentalelementen begrenzte Strecke ist in der gegebenen allgemeinen Maßbestimmung bereits unendlich groß, während sie für die berührende Maßbestimmung noch endlich ist.

Dieses Zurückbleiben resp. Voraneilen der allgemeinen Maßbestimmung, gegenüber der speziellen tangierenden, bezeichne ich als die *Krümmung der allgemeinen Maßbestimmung*, zunächst im Berührungselemente. Die Krümmung soll *positiv* heißen, wenn die Fundamentalelemente imaginär, *negativ*, wenn sie reell sind. Als *Maß der Krümmung* bezeichne ich, schlechthin ausgesprochen, die Größe des Zurückbleibens resp. Voraneilens. Dieses Krümmungsmaß erhält, wie ich jetzt zeigen will, für alle Elemente des Gebildes denselben Wert. Für diesen kann $-\frac{1}{4c^2}$ genommen werden, wo c die charakteristische Konstante der allgemeinen Maßbestimmung ist.

Die beiden Fundamentalelemente der allgemeinen Maßbestimmung mögen, wie oben in dem Beispiele, harmonisch zu $z=0$ und zu $z=\infty$ gelegen sein, und zwar seien sie durch:

$$z^2 = a$$

bestimmt. Ist dann c, wie immer, die charakteristische Konstante der Maßbestimmung, so findet man für den Abstand eines Elementes z vom Koordinatenanfangselemente:

$$2c \operatorname{arc\,tg} \frac{zi}{\sqrt{a}},$$

oder, in eine Reihe entwickelt:

$$+\frac{2ci}{\sqrt{a}}\cdot z + \frac{2ci}{3\sqrt{a^3}}\cdot z^3 + \frac{2ci}{5\sqrt{a^5}}\cdot z^5 + \ldots .$$

Die im Elemente $z=0$ tangierende spezielle Maßbestimmung ist diejenige, welche als Entfernung des Elementes z vom Elemente $z=0$ das erste Glied der Reihenentwicklung, also den Ausdruck:

$$\frac{2ci}{\sqrt{a}}\cdot z$$

benutzt. Als Abweichung der allgemeinen Maßbestimmung von der tangierenden speziellen, oder als Krümmungsmaß der ersteren, kann man dann definieren: das negativ genommene zweite Glied der Reihenentwicklung, multipliziert mit 3, dividiert durch die dritte Potenz des ersten Gliedes. Dies aber ergibt den eben angegebenen Ausdruck $-\frac{1}{4c^2}$.

Dieser Ausdruck für das Krümmungsmaß hat auch das oben festgesetzte Vorzeichen. Bei reellen Fundamentalelementen muß man (§ 4) c ein positives Vorzeichen erteilen, das Krümmungsmaß wird also negativ; bei imaginären Fundamentalelementen dagegen ist c rein imaginär zu nehmen, somit das Krümmungsmaß positiv. Das Krümmungsmaß einer speziellen Maßbestimmung wird Null. Denn wir mußten im vorigen Paragraphen, um durch einen Grenzübergang zu der speziellen Maßbestimmung zu gelangen, c einen unendlich großen Wert erteilen.

Endlich ist auch die Krümmung in allen Elementen unseres Grundgebildes dieselbe, insofern c für alle Elemente dieselbe Bedeutung hat.

Das hiermit aufgestellte Krümmungsmaß einer allgemeinen Maßbestimmung kann noch in der folgenden Weise definiert werden.

In § 5 wurde gezeigt, daß die Länge der ganzen Linie bei imaginären Fundamentalelementen und der Konstanten $c_1 i$ gleich $2c_1\pi$ wird. Der mit π^2 multiplizierte reziproke Wert des Quadrats dieses Ausdruckes ist aber das Krümmungsmaß. Das Krümmungsmaß ist gleich der mit π multiplizierten Fläche eines gewöhnlichen Kreises, der einen Radius gleich dem reziproken Werte der scheinbaren Länge der ganzen Geraden hat.

Bei reellen Fundamentalelementen kann man folgende Betrachtung machen. Der gegenseitige Abstand der beiden Fundamentalelemente $z=\pm\sqrt{a}$, gemessen in der tangierenden speziellen Maßbestimmung, ist gleich $4c$. Das Krümmungsmaß wird also gleich dem mit -4 multiplizierten reziproken Quadrate des in der tangierenden speziellen Maßbestimmung gemessenen Abstandes der beiden Fundamentalelemente.

Zum Schlusse sei noch bemerkt, daß die dreierlei Maßbestimmungen, welche die elliptische, die hyperbolische und die parabolische Geometrie auf der geraden Linie annehmen, zueinander in dem Verhältnisse der Berührung stehen. Die Berührung findet jedesmal in demjenigen Punkte statt, den wir gerade ins Auge fassen, von dem aus wir im Sinne der hyperbolischen oder der elliptischen oder der parabolischen Geometrie messen. Die Maßbestimmung der parabolischen Geometrie ist die spezielle Maßbestimmung, welche die allgemeine Maßbestimmung der elliptischen bez. der hyperbolischen Geometrie tangiert. Sie kann deswegen die letzteren für alle Punkte ersetzen, welche von dem Punkte, den wir gerade betrachten, wenig entfernt sind.

§ 8.

Die allgemeine projektivische Maßbestimmung in der Ebene.

Nachdem nunmehr die projektivische Maßbestimmung auf den Grundgebilden erster Stufe auseinandergesetzt worden ist, können wir, fast unmittelbar, zu den projektivischen Maßbestimmungen auf den Grundgebilden zweiter und sodann beliebiger Dimension übergehen. Wir finden sodann eine allgemeinere Maßbestimmung, welche die von uns bei diesen Grundgebilden gewöhnlich in Anwendung gebrachten Maßbestimmungen, andererseits aber auch die Maßbestimmungen, welche die elliptische und die hyperbolische Geometrie für die betreffenden Gebilde aufstellt, als spezielle Fälle umfaßt. Es soll dieselbe hier zunächst für die Ebene auseinandergesetzt werden. Für den Punkt (als Strahlen- und Ebenenbündel im

Raume) gestaltet sich dieselbe ganz in gleicher Weise, wie in § 10 noch näher erörtert werden soll.

So wie man bei der projektivischen Maßbestimmung auf den Grundgebilden erster Stufe zwei Elemente derselben als Fundamentalelemente benutzt, so legt man der projektivischen Maßbestimmung in der Ebene einen Kegelschnitt zugrunde, welcher *der fundamentale Kegelschnitt* heißen soll (bei Cayley „the absolute"). An diesen fundamentalen Kegelschnitt knüpft sich zunächst die Maßbestimmung auf allen Grundgebilden erster Stufe, welche der Ebene angehören, d. h. die Maßbestimmung auf den Geraden und in den Strahlbüscheln der Ebene. Jede gerade Linie schneidet den fundamentalen Kegelschnitt in zwei (reellen oder imaginären oder zusammenfallenden) Punkten. Diese sollen die Fundamentalpunkte für die auf ihr zu treffende Maßbestimmung sein. Unter den Linien jedes Büschels finden sich zwei (reelle oder imaginäre oder zusammenfallende) Tangenten des Kegelschnitts. Dieselben sollen als Fundamentalstrahlen für die Maßbestimmung im Strahlbüschel genommen werden. — Sodann wollen wir noch eine Festsetzung hinsichtlich der Konstanten c machen, die in Anwendung zu bringen sind. Zur Maßbestimmung auf allen geraden Punktreihen wollen wir dieselbe, übrigens willkürlich gewählte Konstante c benutzen; ebenso zur Maßbestimmung in allen Strahlbüscheln ein und dieselbe, übrigens beliebig angenommene Konstante c'.

Für die hiermit eingeführte Maßbestimmung wollen wir nunmehr den analytischen Ausdruck aufstellen.

Die Gleichung des Fundamentalkegelschnittes in Punktkoordinaten mag sein:

$$\Omega = 0.$$

Sodann seien durch:

$$\Omega_{xx}, \ \Omega_{yy}$$

diejenigen Ausdrücke bezeichnet, welche entstehen, wenn man in Ω die Koordinaten x_1, x_2, x_3 eines Punktes (x), resp. die Koordinaten y_1, y_2, y_3 eines Punktes (y) einsetzt. Endlich bedeute:

$$\Omega_{xy}$$

das Resultat der Einsetzung der Koordinaten y in die Polare von (x), oder, was dasselbe ist, der Koordinaten x in die Polare von (y). Dann ist das Doppelverhältnis der beiden Punkte (x) und (y) zu den beiden Schnittpunkten ihrer Verbindungsgeraden mit dem fundamentalen Kegelschnitt durch den Quotienten der Wurzeln der folgenden in λ quadratischen Gleichung gegeben:

$$\lambda^2 \Omega_{xx} + 2\lambda \Omega_{xy} + \Omega_{yy} = 0.$$

Das Doppelverhältnis ist also gleich:

$$\frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}},$$

und *die Entfernung der beiden Punkte wird:*

$$= c \log \frac{\Omega_{xy} + \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\Omega_{xy} - \sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}},$$

oder auch, was dasselbe ist:

$$= 2ic \cdot \arccos \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}.$$

Es sind dies also, bei der hier gebrauchten Bezeichnung, genau dieselben Ausdrücke, welche bei den Grundgebilden erster Stufe auftraten.

Auf ganz gleiche Weise ergibt sich der Winkel zweier Geraden mit den Koordinaten u_1, u_2, u_3 und v_1, v_2, v_3, wenn:

$$\Phi = 0$$

die Gleichung des fundamentalen Kegelschnittes in Linienkoordinaten ist, durch die folgende Formel. *Der Winkel der beiden Geraden ist:*

$$= c' \log \frac{\Phi_{uv} + \sqrt{\Phi_{uv}^2 - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}}{\Phi_{uv} - \sqrt{\Phi_{uv}^2 - \Phi_{uu}\Phi_{vv}}},$$

oder, was dasselbe ist:

$$= 2ic' \arccos \frac{\Phi_{uv}}{\sqrt{\Phi_{uu}\Phi_{vv}}}.$$

Es entsteht nun zunächst die Frage: Wo liegen diejenigen Punkte (y), welche von einem Punkte (x) gleich weit abstehen? Da die Entfernung xy nur von:

$$\frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}}\sqrt{\Omega_{yy}}},$$

abhängt, so erhalten wir die Gleichung des geometrischen Ortes für (y), indem wir diesen Ausdruck gleich einer Konstanten k, oder, was dasselbe ist, wenn wir:

$$\Omega_{xy}^2 = k^2 \Omega_{xx}\Omega_{yy}$$

setzen. Dies ist aber ein Kegelschnitt, welcher den fundamentalen Kegelschnitt $\Omega_{yy} = 0$ in den beiden Durchschnittspunkten mit $\Omega_{xy} = 0$, der Polare von (x) in bezug auf den fundamentalen Kegelschnitt, berührt.

Von dem Punkte (x) stehen alle diejenigen Punkte gleich weit ab, die demselben Kegelschnitte angehören, welcher den Fundamentalkegelschnitt in den beiden Durchschnitten mit der Polare des Punktes (x) berührt.

Diese Kegelschnitte also sind es, die wir, gewöhnlichem Sprachgebrauche folgend, bei unserer Maßbestimmung als *Kreise* zu bezeichnen haben. Der Punkt (x) ist das gemeinsame *Zentrum* der Kreise. Unter dem *Radius* des Kreises haben wir die Entfernung eines beliebigen seiner Punkte (y) vom Mittelpunkte (x), d. h. den Ausdruck:

$$2ic \arccos k$$

zu verstehen.

Unter diesen um das Zentrum (x) beschriebenen Kreisen findet sich insbesondere, $k=0$ und also einem Radius gleich $\pi i c$ entsprechend, die Polare des Punktes (x). Es findet sich ferner unter ihnen (für $k=1$) ein Kreis mit dem Radius Null. Derselbe besteht aus dem Paare der von (x) an den Fundamentalkegelschnitt gelegten Tangenten. Der Abstand zweier auf einer solchen Tangente gelegenen Punkte ist in der Tat immer Null, weil sie mit den Durchschnittspunkten ihrer Verbindungslinie mit dem Fundamentalkegelschnitt das Doppelverhältnis $+1$ bilden. Man müßte denn der Konstanten c einen unendlich großen Wert erteilen, was hier nicht angeht, da sonst die Entfernung aller nicht auf einer Tangente des Kegelschnitts gelegener Punkte unendlich groß würde. Es bleibt natürlich unbenommen, zur Maßbestimmung auf den Tangenten des Kegelschnitts dem c einen besonderen unendlich großen Wert beizulegen. Diese Maßbestimmung ist dann aber nicht mehr mit der allgemeinen vergleichbar. — Es gibt endlich unter den in Rede stehenden konzentrischen Kreisen, $k=\infty$ entsprechend, einen mit unendlich großem Radius. Dies ist der fundamentale Kegelschnitt selbst; wie denn auf jeder durch (x) hindurchgehenden Geraden die beiden Durchschnittspunkte mit dem fundamentalen Kegelschnitte die beiden unendlich fernen Punkte sind: *Der Fundamentalkegelschnitt ist der Ort derjenigen Punkte, welche von einem beliebigen Punkte unendlich abstehen.*

Ganz entsprechende Betrachtungen, wie vorstehend für die Punkte der Ebene, kann man ohne weiteres für die Geraden derselben anstellen

Diejenigen Geraden, welche mit einer festen Geraden (u) den nämlichen Winkel einschließen, umhüllen Kegelschnitte, welche den Fundamentalkegelschnitt in den beiden Durchschnittspunkten mit (u) berühren, unter denen sich also insbesondere der Pol von (u) (als Strahlbüschel gedacht) befindet. — Diejenigen Geraden, welche durch einen der Durchschnittspunkte des Fundamentalkegelschnitts mit (u) hindurchgehen, schließen mit (u) einen Winkel Null ein. — Die Tangenten des fundamentalen Kegelschnitts bilden mit (u) einen unendlich großen Winkel.

Diejenigen Kegelschnitte also, welche den Fundamentalkegelschnitt zweimal berühren, sind gleichzeitig Ort derjenigen Punkte, welche von einem festen Punkte, dem Pole der Berührungssehne, gleich weit abstehen, und werden umhüllt von denjenigen Geraden, welche eine feste Gerade, die Berührungssehne, unter konstantem Winkel schneiden. Man bemerke ferner noch dies. Als *parallele* Linien wird man solche Linien bezeichnen, die sich unendlich weit, d. h. auf dem Fundamentalkegelschnitte schneiden. Der Winkel zweier paralleler Linien ist gleich Null. Aber es steht nichts im Wege, für ein Büschel paralleler Linien, indem man c einen unendlich großen Wert beilegt, eine *spezielle* Maßbestimmung einzuführen. Auf

die Einführung einer solchen speziellen Maßbestimmung kommt es hinaus, wenn wir in der gewöhnlichen, parabolischen Geometrie von einem Abstande[27]) zweier Parallelen reden.

§ 9.

Über diejenigen linearen Transformationen der Ebene, welche an Stelle der Bewegungen treten.

Ein Kegelschnitt hat die Eigenschaft, durch dreifach unendlich viele lineare Transformationen der Ebene in sich überzugehen. Denn es gibt achtfach unendlich viele lineare Transformationen in der Ebene und nur fünffach unendlich viele Kegelschnitte, so daß jeder Kegelschnitt in jeden anderen, und also auch in sich selbst, durch dreifach unendlich viele lineare Transformationen übergeführt werden kann.

Bei einer solchen linearen Transformation der Ebene vertauschen sich die Punkte des Kegelschnittes unter sich, gerade so, wie bei einer linearen Transformation eines Grundgebildes erster Stufe, dessen Elemente untereinander vertauscht werden. Man wird hieraus schließen, daß bei jeder solchen linearen Transformation zwei Punkte des Kegelschnitts ungeändert bleiben. In der Tat, man betrachte die beiden Strahlbüschel $o(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ und $o(p_1', p_2', p_3', \ldots)$, welche von einem festen Punkte o des Kegelschnitts nach beliebig gegebenen Punkten $p_1, p_2, p_3, \ldots$ desselben und nach denjenigen Punkten $p_1', p_2', p_3', \ldots$ hingehen, die aus letzteren vermöge einer linearen Transformation der Ebene, die den Kegelschnitt ungeändert läßt, entspringen. Die beiden Büschel sind projektivisch, denn $o(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ ist projektivisch mit $o'(p_1', p_2', p_3', \ldots)$, wo o' den Punkt bezeichnet, in welchen o bei der Transformation übergeht. Dieser Punkt o' ist aber, wie o, ein Punkt des gegebenen Kegelschnittes, also ist $o'(p_1', p_2', p_3', \ldots)$ projektivisch zu $o(p_1', p_2', p_3', \ldots)$, und also letzteres auch zu $o(p_1, p_2, p_3, \ldots)$, w. z. b. w. Sind aber die beiden Büschel $o(p_1, p_2, p_3, \ldots)$ und $o(p_1', p_2', p_3'', \ldots)$ projektivisch, so haben sie zwei Strahlen $o\pi_1$ und $o\pi_2$ entsprechend gemein, mithin gibt es zwei Punkte π_1, π_2 des Kegelschnittes, welche bei der Transformation ungeändert bleiben.

Bleiben aber zwei Punkte des Fundamentalkegelschnitts ungeändert, so auch deren Verbindungslinie, die Tangenten in ihnen und deren Durchschnitt, überhaupt also das von der Verbindungslinie und den Tangenten gebildete Dreieck. Unter Zugrundelegung dieses Dreiecks als Koordinatendreieck ist die Gleichung des Kegelschnittes von der Form:

$$x_1 x_2 - x_3^2 = 0.$$

[27]) Es ist dabei eine Besonderheit der parabolischen Geometrie, wenn der Abstand zweier Parallelen gleich ist dem Minimalabstande zweier auf ihnen beweglicher Punkte.

Die lineare Transformation, durch welche er in sich selbst übergeht, muß, da sie das Dreieck ungeändert läßt, von der Form sein:

$$x_1 = \alpha_1 y_1, \quad x_2 = \alpha_2 y_2, \quad x_3 = \alpha_3 y_3.$$

Als Bedingung dafür, daß durch sie der Kegelschnitt ungeändert bleibt, kommt:

$$\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_3^2 = 0,$$

und da dies nur eine Bedingung für die drei homogenen α ist, so gibt es einfach unendlich viele lineare Transformationen, die das Dreieck und den Kegelschnitt ungeändert lassen.

Durch diese Transformationen bleibt der Quotient $\frac{x_1 x_2}{x_3^2}$ unabhängig von seinem Werte ungeändert. Es gehen also durch die nämlichen Transformationen alle Kegelschnitte von der Form:

$$x_1 x_2 - k x_3^2 = 0$$

in sich über[28]).

Hier ist nun eine Unterscheidung zwischen reellen Kegelschnitten mit reellen Punkten und solchen ohne reelle Punkte zu machen.[29])

Im ersteren Falle zerfallen die in Betracht kommenden linearen Transformationen der Ebene, die den Kegelschnitt in sich überführen, sofern sie reell sind, in zwei Scharen. *Die Transformationen der ersten Schar können durch Wiederholung einer reellen, unendlich kleinen Transformation derselben Art erzeugt werden und bilden daher eine Gruppe, die der zweiten nicht.*

Sind beispielsweise die beiden festbleibenden auf dem Kegelschnitt befindlichen Punkte π_1 und π_2, so hat man eine Transformation der ersten oder zweiten Gruppe, jenachdem $\alpha_3 = \sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$ oder $\alpha_3 = -\sqrt{\alpha_1 \alpha_2}$. Im letzteren Falle wird die Strecke $\pi_1 \pi_2$ von je zwei entsprechenden Punkten des Kegelschnitts getrennt, im ersteren nicht.

Die Transformationen der ersten Schar, durch die der Fundamentalkegelschnitt ungeändert bleibt, sind es nun, welche im vorliegenden Falle als *Bewegungen* der Ebene bezeichnet sein sollen. Dieselben gehen nämlich in den Zyklus der wirklichen Bewegungen der Ebene über, wenn wir den Fundamentalkegelschnitt in der Art passend partikularisieren, daß die auf ihn gegründete Maßbestimmung in die wirklich angewandte übergeht[30]).

[28]) Beiläufig bemerkt, sieht man hieraus: Nicht jede lineare Transformation führt einen Kegelschnitt in sich selbst über; steht aber die Transformation zu *einem* Kegelschnitte in dieser Beziehung, so gleich zu unendlich vielen.

[29]) [Daß diese Unterscheidung hier notwendig ist, hat Herr Study in den Math. Ann., Bd. 39 (1891) bemerkt. Dementsprechend ist die Fassung der nächstfolgenden Absätze abgeändert worden.]

[30]) Die andere Klasse von Transformationen des Kegelschnittes in sich selbst liefert bei diesem Übergange diejenigen Transformationen der Ebene, welche aus ebenen Figuren beliebig gelegene, invers kongruente machen.

Enthält aber der zugrunde zu legende, durch eine reelle Gleichung gegebene Kegelschnitt keine reellen Punkte, so werden sämtliche reelle lineare Transformationen, die den Kegelschnitt in sich überführen, als Bewegungen zu bezeichnen sein.[31])

Bei dieser Definition können wir den eben bewiesenen Satz, daß durch jede lineare Transformation, durch die der gegebene Kegelschnitt in sich übergeht, unendlich viel Kegelschnitte ungeändert bleiben, so aussprechen:

Bei einer Bewegung der Ebene geht nicht nur der Fundamentalkegelschnitt, sondern jeder Kegelschnitt (jeder Kreis) in sich über, welcher ihn in den beiden fest bleibenden Punkten berührt.

Unter diesen Kegelschnitten findet sich namentlich auch der Punkt $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, der gemeinsames Zentrum der Kreise ist. Wir wollen die Bewegung als eine *Rotation der Ebene um dieses Zentrum* bezeichnen.

Dann haben wir den Satz:

Jede Bewegung der Ebene besteht in einer Rotation um einen Punkt. Alle anderen Punkte beschreiben um diesen Punkt als Zentrum herumgelegte Kreise.

Es braucht kaum hervorgehoben zu werden, daß bei der Bewegung die Polare des Rotationszentrums dualistisch dieselbe Rolle spielt wie das Zentrum, daß also bei unserer Maßbestimmung Bewegung ein in sich selbst dualistischer Begriff ist. Diese Dualität wird erst aufgehoben, wenn wir, um zur parabolischen Geometrie zu gelangen, den fundamentalen Kegelschnitt undualistisch partikularisieren.

Unter den Bewegungen der Ebene gibt es noch einen ausgezeichneten Fall, der dann eintritt, wenn das Zentrum der Rotation unendlich weit, d. h. auf den Fundamentalkegelschnitt rückt.

Die Kreise, welche von den einzelnen Punkten der Ebene beschrieben werden, sind dann Kegelschnitte, die den fundamentalen Kegelschnitt im Zentrum vierpunktig berühren. Diejenige Art der Bewegung, welche dieser Annahme entspricht, bezeichnet man als *Translation*[32]).

Es ist nun ersichtlich, daß, wenn man Bewegungen der Ebene so definiert, wie vorstehend geschehen, dann der Satz gilt:

Bei den Bewegungen der Ebene bleiben die Maßverhältnisse ungeändert.

Denn da bei einer Bewegung der Fundamentalkegelschnitt in sich übergeht, so wird bei derselben das Doppelverhältnis zweier Punkte zu den

[31]) [Die Unterscheidung direkter und inverser Kongruenz fällt dabei weg, weil die unbegrenzte projektive und also auch die elliptischen Ebene eine einseitige Fläche vorstellt. Man vergleiche hierzu die Erörterungen des 2. Bandes dieser Ausgabe.]

[32]) Eine durch die Partikularisation des Fundamentalkegelschnitts herbeigeführte Besonderheit ist es, wenn bei der parabolischen Geometrie die Translationen ein geschlossenes System bilden und je zwei Translationen vertauschbar sind.

beiden Schnittpunkten ihrer Verbindungslinie mit dem Fundamentalkegelschnitte erhalten. Also auch der mit einer Konstanten multiplizierte Logarithmus des Doppelverhältnisses, d. h. die Entfernung der beiden Punkte. Ähnlich ist es mit dem Winkel zweier Geraden.

Es gilt dies nicht nur für die Bewegungen der Ebene, sondern auch, und aus demselben Grunde, bei den Transformationen zweiter Art, die den Fundamentalkegelschnitt in sich überführen [sofern ein solcher Unterschied besteht].

Es gilt ferner etwas Ähnliches bei denjenigen reziproken (dualistischen) Transformationen, die den Fundamentalkegelschnitt in sich überführen, namentlich für die durch denselben begründete Polarreziprozität. Denn zwei Punkten und den Durchschnittspunkten ihrer Verbindungslinie mit dem Fundamentalkegelschnitt, die ein gewisses Doppelverhältnis besitzen, entsprechen bei diesen Transformationen zwei Linien und die beiden von deren Durchschnittspunkte an den Fundamentalkegelschnitt gehenden Tangenten, welche dasselbe Doppelverhältnis miteinander bilden. Nehmen wir also die beiden Konstanten c und c' (§ 8) der beiden Maßbestimmungen gleich, so haben wir den Satz:

Die Entfernung zweier Punkte ist gleich dem Winkel der ihnen entsprechenden Geraden, und umgekehrt;

insbesondere:

Die Entfernung zweier Punkte ist gleich dem Winkel ihrer Polaren.

Wir werden hier diese Sätze nicht weiter benutzen, und nur noch im folgenden Paragraphen auf den letzten derselben zurückkommen. Unter ihn subsumiert sich nämlich der Satz aus der Geometrie der Kugel: daß sich die Seiten und Winkel eines sphärischen Dreiecks beim Übergange zum Polardreiecke vertauschen[33].

§ 10.

Die allgemeine projektivische Maßbestimmung im Strahlen- und Ebenenbündel.

In ganz ähnlicher Weise, wie in den beiden vorigen Paragraphen eine allgemeine projektivische Maßbestimmung für die Ebene aufgestellt wurde, wird man eine solche für das andere Grundgebilde zweiter Stufe, den Punkt (aufgefaßt als Ebenen- und Strahlenbündel), aufstellen können. Bei derselben wird man statt des fundamentalen Kegelschnittes einen *fundamentalen Kegel zweiten Grades* benutzen. Als Winkel zweier Geraden, die sich im Mittelpunkt des Kegels schneiden, ist der mit einer Konstanten c multiplizierte Logarithmus desjenigen Doppelverhältnisses anzusehen, welches

[33]) Vgl. Cayley, l. c.

die beiden Geraden mit den beiden Erzeugenden des Kegels bilden, die mit ihnen in einer Ebene liegen; als Winkel zweier durch den Mittelpunkt gehenden Ebenen der mit einer (anderen) Konstanten c' multiplizierte Logarithmus des Doppelverhältnisses der beiden Ebenen zu denjenigen beiden Tangentenebenen des fundamentalen Kegels, welche durch ihren Durchschnitt gehen.

Der analytische Ausdruck dieser Maßbestimmung ist genau derselbe, wie derjenige, der oben für die Maßbestimmung in der Ebene aufgestellt wurde. Man hat nur den Koordinaten (x), (y) bez. (u), (v) in der Ebene die Bedeutung von Strahlen- und Ebenenkoordinaten im Punkte zu geben. Auch alle anderen für die Ebene ausgeführten Entwicklungen lassen sich ohne weiteres auf den Punkt übertragen, welche Andeutung hier genügen soll.

Es ist nun leicht zu sehen, daß sich die gewöhnliche Maßbestimmung im Punkte[34]), d. h. die gewöhnliche Art und Weise, Winkel von Geraden oder Ebenen, die durch einen Punkt gehen, zu messen, als spezieller Fall unter diese allgemeine Maßbestimmung subsumiert. *Dieselbe benutzt als fundamentalen Kegel zweiten Grades den Kegel, der vom Punkte sich nach dem unendlich weit entfernten imaginären Kreise[35]) erstreckt; sie setzt überdies die beiden Konstanten c und c' gleich* $\frac{\sqrt{-1}}{2}$[36]).

Denn auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem bezogen, ist der Kegel, welcher von dem Punkte nach dem unendlich fernen imaginären Kreise hingeht, dargestellt durch:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0,$$

oder in Ebenenkoordinaten durch:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 0.$$

Für den Winkel, den zwei gerade Linien mit den Koordinaten (x, y, z), (x', y', z') bez. zwei Ebenen (u, v, w), (u', v', w') miteinander bilden,

[34]) Man spricht gewöhnlich nicht von der Maßbestimmung im Punkte, sondern von der Maßbestimmung auf einer um ihn als Zentrum herumgelegten Kugel (vom Radius 1). Im Texte ist die erstere Ausdrucksweise vorzuziehen, da der Punkt das einfache Grundgebilde ist, mit dem die projektivische Geometrie operiert. Dabei ist ein Unterschied nicht zu übersehen, der auch schon auftritt, wenn man statt von der Maßbestimmung im Strahlbüschel von der Maßbestimmung auf dem Kreise spricht. Jeder durch den Punkt hindurchgehenden Geraden (jedem Strahle des Büschels) entsprechen *zwei* Punkte der Kugel (des Kreises). Dadurch wird für die Maßbestimmung auf der Kugel (dem Kreise) noch ein Unterschied geschaffen, der hier nur unnötigerweise komplizieren würde.

[35]) Bei der elliptischen und hyperbolischen Geometrie muß statt dessen gesetzt werden: den Tangentenkegel, der sich von dem Punkte nach der unendlich fernen Fläche zweiten Grades erstreckt.

[36]) Dies ist diejenige Annahme der Konstanten, welche Cayley immer in Anwendung bringt.

erhalten wir also nach den Formeln des § 8, indem wir noch $c = c' = \frac{\sqrt{-1}}{2}$ setzen, bez.:

$$\arccos \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

und

$$\arccos \frac{uu' + vv' + ww'}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \cdot \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}}$$

und dies ist die gewöhnliche Winkelbestimmung. — Die Polare einer durch den Punkt gehenden Ebene mit Bezug auf den fundamentalen Kegel ist deren Senkrechte. Der letzte Satz des vorigen Paragraphen geht also jetzt in den Satz über: Der Winkel zweier Ebenen ist gleich dem Winkel ihrer Normalen. Auf diesem Satze beruht das in der sphärischen Geometrie angewandte Prinzip, nach welchem in einem sphärischen Dreiecke und seinem Polardreiecke die Maßverhältnisse dualistisch dieselben sind, d. h. dieselben sind, wenn man die Seiten mit den Winkeln vertauscht.

§ 11.

Die Maßbestimmung in der Ebene bei imaginärem Fundamentalkegelschnitte. Die elliptische Geometrie.

Die gewöhnliche Maßbestimmung im Punkte ist ein Bild dafür, wie sich überhaupt die projektivische Maßbestimmung in Punkt und Ebene stellt, wenn der fundamentale Kegel, resp. der fundamentale Kegelschnitt imaginär ist. Die einzige bei der gewöhnlichen Maßbestimmung im Punkte hinzutretende Partikularisation ist, daß die beiden Konstanten c und c' gleich $\frac{\sqrt{-1}}{2}$ gesetzt werden. Hätten wir sie allgemeiner gleich $c_1\sqrt{-1}$ und $c_1'\sqrt{-1}$ gesetzt, so würden die Maßunterschiede nur um Faktoren $2c_1$, $2c_1'$ gewachsen sein:

$$2c_1 \cdot \arccos \frac{xx' + yy' + zz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}}$$

und

$$2c_1' \cdot \arccos \frac{uu' + vv' + ww'}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} \cdot \sqrt{u'^2 + v'^2 + w'^2}},$$

Ausdrücke, an welche man ohne weiteres dieselben Entwicklungen anknüpfen kann, wie an die ursprünglichen.

Ist also in der Ebene ein imaginärer Fundamentalkegelschnitt gegeben, so ist die Länge jeder reellen Linie endlich, ebenso die Summe der Winkel im Strahlbüschel. Behalten wir die Bezeichnung c_1 und c_1' für die durch i dividierten Konstanten c und c' bei[37]), so ist die Länge der geraden Linie gleich $2c_1\pi$, die Summe der Winkel im Büschel gleich $2c_1'\pi$.

[37]) c und c' sind in der Tat rein imaginär zu nehmen, aus demselben Grunde, aus dem in § 5 die Konstante c bei imaginären Fundamentalelementen imaginär gesetzt wurde.

Es gibt weder reelle unendlich ferne Punkte, noch reelle Linien, welche mit anderen unendlich große Winkel bilden. Sodann werden sich auch alle Relationen zwischen den Winkeln von Linien und von Ebenen, die durch einen Punkt gehen, auf die Abstände von Punkten und die Winkel von Geraden in der Ebene übertragen, wenn man nur vorher die Abstände durch $2c_1$, die Winkel durch $2c_1'$ dividiert. *Die ebene Trigonometrie unter Zugrundelegung dieser Maßbestimmung wird also sein wie die sphärische Trigonometrie*, nur mit dem Unterschiede, daß man statt der Seiten der Dreiecke und ihrer Winkel die durch $2c_1$ dividierten Seiten in die durch $2c_1'$ dividierten Winkel in die Formeln einzuführen hat.

Die hiermit geschilderte Maßbestimmung in der Ebene ist nun gerade diejenige, welche die *elliptische* Geometrie anzunehmen hat. Man wird bei ihr noch insbesondere, damit die Winkelsumme im Büschel gleich π ist, die Konstante c_1', wie bei der gewöhnlichen Maßbestimmung im Punkte, gleich $\frac{1}{2}$ setzen. Die Winkelsumme im ebenen Dreiecke ist dann, wie beim sphärischen Dreiecke, größer als 2π, und wird nur gleich 2π beim unendlich kleinen Dreiecke usf.

Man hat hiernach ein Bild für den planimetrischen Teil der elliptischen Geometrie, wenn man sich in der Ebene einen imaginären Kegelschnitt willkürlich gegeben denkt und auf ihn eine projektivische Maßbestimmung gründet. Beispielsweise wähle man für den Kegelschnitt denjenigen, in welchem die Ebene von dem Kegel geschnitten wird, der von einem bestimmten Punkte des Raumes nach dem unendlich fernen imaginären Kreise hingeht. Sodann setze man c und c' gleich $\frac{\sqrt{-1}}{2}$. So ist die Entfernung zweier Punkte oder der Winkel zweier Geraden der Ebene gleich dem Winkel, unter welchem die beiden Punkte, bez. die beiden Geraden von dem gewählten Punkte aus erscheinen. — Andererseits: ist die uns tatsächlich gegebene Maßgeometrie die elliptische, so bilden die unendlich fernen Punkte der Ebene einen imaginären Kegelschnitt, und die elliptische Geometrie fällt mit der auf diesen Kegelschnitt gegründeten projektivischen Maßbestimmung zusammen.

§ 12.

Die Maßbestimmung in der Ebene bei reellem Fundamentalkegelschnitt. Die hyperbolische Geometrie.

Wir wollen uns jetzt in der Ebene einen reellen Fundamentalkegelschnitt gegeben denken. Es wird dies zu einer Maßbestimmung führen, die für die Punkte innerhalb des Fundamentalkegelschnittes mit den Vorstellungen der hyperbolischen Geometrie übereinkommt.

Ist der fundamentale Kegelschnitt reell, so zerfallen die reellen Punkte und Geraden der Ebene, jede für sich, in zwei Klassen. Es gibt Punkte, von denen aus sich zwei reelle, und solche, von denen aus sich keine reellen Tangenten an den Kegelschnitt legen lassen. Die ersteren bezeichnet man als die Punkte außerhalb, die letzteren als die Punkte innerhalb des Kegelschnittes. Analog zerfallen die Geraden in zwei Gruppen, in solche, welche den Kegelschnitt in zwei reellen, und in solche, welche ihn in zwei imaginären Punkten schneiden.

Des Zusammenhangs mit der hyperbolischen Geometrie wegen wollen wir uns auf die Betrachtung der Punkte innerhalb des Kegelschnittes und der durch sie hindurchgehenden Geraden beschränken.

Keins der Strahlbüschel, deren Mittelpunkte in den von uns betrachteten Raum fallen, hat reelle unendlich ferne Elemente. Deswegen soll die Konstante c' rein imaginär, gleich $c_1' i$, genommen werden. Die Winkelsumme in einem beliebigen Büschel, dessen Mittelpunkt innerhalb des fundamentalen Kegelschnittes liegt, ist dann $2 c_1' \pi$.

Dagegen hat jede Gerade, welche das von uns betrachtete Gebiet durchsetzt, zwei reelle (logarithmisch) unendlich ferne Punkte: ihre Durchschnittspunkte mit dem Fundamentalkegelscnitt. Deshalb werden wir der Konstanten c einen reellen Wert beilegen.

Bei dieser Festsetzung der Konstanten c und c' haben alle Punkte, welche innerhalb des Kegelschnittes liegen, einen reellen Abstand; ebenso bilden alle Geraden, die sich innerhalb des Kegelschnittes schneiden, miteinander einen reellen Winkel. Aber der Abstand zweier Punkte, die durch den Fundamentalkegelschnitt getrennt werden, ist imaginär. Der Fundamentalkegelschnitt ist der Ort der unendlich fernen Punkte. Zwei Gerade, die durch das Innere des Kegelschnittes verlaufen, aber sich außerhalb desselben schneiden, bilden einen imaginären Winkel. Zwischen ihnen und den Geraden, die sich innerhalb schneiden, bilden diejenigen den Übergang, deren Schnittpunkt auf den fundamentalen Kegelschnitt, also unendlich weit fällt, d. h. diejenigen Linien, welche parallel (§ 8) heißen. Ihr Winkel ist gleich Null.

Wir wollen uns jetzt denken, daß wir uns an irgendeiner Stelle im Inneren des Fundamentalkegelschnittes befänden und daß wir uns auf der Ebene nur vermöge derjenigen linearen Transformationen bewegen könnten, die den fundamentalen Kegelschnitt ungeändert lassen (vgl. § 5, § 9). Wir werden uns dann, wie bei unserer gewöhnlichen Maßbestimmung, um uns selbst drehen können und nach endlicher Drehung in die Anfangslage zurückkommen, wir werden ebenfalls, wie bei der gewöhnlichen Maßbestimmung, auf der geraden Linie nach der einen oder anderen Seite unausgesetzt fortschreiten können. *Aber wir werden nie den fundamentalen Kegelschnitt erreichen, geschweige denn überschreiten.* Wir sind also

in das Innere des Kegelschnittes festgebannt; der Kegelschnitt begrenzt für uns die Ebene; ob jenseits desselben noch ein Stück der Ebene vorhanden ist oder nicht, würden wir nicht sagen können. Ein Beobachter, der, mit der gewöhnlichen Maßbestimmung ausgerüstet, uns auf den fundamentalen Kegelschnitt zuschreiten sähe, während wir die Bewegung gemäß der neuen Maßbestimmung mit konstanter Geschwindigkeit ausführen, würde bemerken, wie wir (von einer gewissen Stelle an) zusehends immer langsamer vorwärts kämen und die uns gegebene Grenze, den Fundamentalkegelschnitt, nie erreichten.

Die hiermit geschilderte Maßgeometrie *entspricht nun durchaus den Vorstellungen der hyperbolischen Geometrie*, wenn wir noch die einstweilen unbestimmt gebliebene Konstante c_1' gleich $\frac{1}{2}$ setzen, damit die Winkelsumme im Strahlbüschel gleich π wird. Betrachten wir, um uns davon zu überzeugen, einige der Propositionen der hyperbolischen Geometrie etwas näher (dieselben sollen in Anführungszeichen aufgeführt werden).

„Durch einen Punkt der Ebene gibt es zu einer gegebenen Geraden zwei Parallele, d. h. Linien, welche die gegebene Gerade in unendlich fernen Punkten schneiden.“ Es sind dies die beiden Verbindungslinien des Punktes mit den beiden Schnittpunkten der gegebenen Geraden und des Fundamentalkegelschnittes.

„Die Neigung der beiden Parallelen, die durch einen Punkt zu einer Geraden gezogen werden können, nimmt bei zunehmender Entfernung des Punktes von der Geraden zu. Rückt der Punkt unendlich weit, so wird dieselbe gleich π, d. h. in anderem Sinne gerechnet, die beiden Parallelen bilden einen Winkel gleich Null.“ In der Tat, wenn der Punkt auf den Fundamentalkegelschnitt rückt, so schließen die beiden Parallelen, wie überhaupt zwei Gerade, die sich auf dem Fundamentalkegelschnitt schneiden, einen Winkel gleich Null ein. Daher auch der Satz: „Der Winkel zwischen einer Geraden und jeder ihrer Parallelen ist gleich Null.“ — Daß auch für nicht unendlich ferne Punkte der „Winkel des Parallelismus“, den die hyperbolische Geometrie aufstellt, sich bei unserer projektivischen Maßbestimmung wiederfindet, mag man daraus ersehen, daß, wie gleich gezeigt werden soll, überhaupt die trigonometrischen Formeln in beiden Fällen übereinstimmen.

„Die Winkelsumme im Dreiecke ist kleiner als 2π; für ein Dreieck mit unendlich fernen Ecken ist die Winkelsumme gleich Null.“ Das letztere folgt daraus, daß diese Ecken des Dreiecks notwendig auf dem Fundamentalkegelschnitt liegen, und je zwei Linien, die sich in einem Punkte des Fundamentalkegelschnittes schneiden, einen Winkel gleich Null einschließen. Die allgemeine Gültigkeit des ersteren Satzes, der dadurch wahrscheinlich gemacht wird, daß für unendlich große Dreiecke die Winkelsumme Null, für unendlich kleine gleich 2π ist, folgt aus den noch näher anzugebenden trigonometrischen Formeln.

„Zwei Perpendikel, auf einer Geraden errichtet, schneiden sich nicht." Bei uns schneiden sie sich allerdings, nämlich in dem Pole der Geraden. Aber dieser liegt in dem Raume außerhalb des Kegelschnittes, von dessen Existenz wir durch unsere Bewegungen nichts wissen können. Einen solchen Raum können wir uns aber — und das geschieht auch in der hyperbolischen Geometrie — als einen *idealen* Raum[38]) adjungieren; ganz in demselben Sinne, wie man in der parabolischen Geometrie den wirklich vorhandenen Elementen der Ebene eine (uneigentliche) unendlich ferne Gerade hinzufügt. Über die Existenz des idealen Raumstückes wird damit gar nichts ausgesagt; wir gebrauchen den Ausdruck nur als einen in sich nicht widersprechenden und bequemen Terminus.

„Ein Kreis mit unendlich großem Radius ist von einer Geraden verschieden." Ein Kreis mit unendlich großem Radius bedeutet bei uns einen Kegelschnitt, der den Fundamentalkegelschnitt vierpunktig berührt. Dagegen würde die Gerade, d. h. eine Gerade, die durch das von uns betrachtete Innere des Kegelschnittes geht, ein Kreis sein, dessen Zentrum (der Pol der Geraden) in das ideale Gebiet der Ebene fällt, und dessen Radius einen imaginären Wert hat. —

Wir wollen uns noch eine Vorstellung davon machen, wie sich die Ebene in sich transformiert, wenn sie um einen unendlich fernen oder einen idealen Drehpunkt rotiert (§ 9). Im ersteren Falle beschreiben alle Punkte Kegelschnitte, die sich in unendlicher Entfernung berühren. Im zweiten Falle beschreiben sie Kegelschnitte, welche den fundamentalen Kegelschnitt in zwei reellen Punkten berühren. Unter ihnen befindet sich eine im Endlichen gelegene Gerade, die Polare des idealen Drehpunktes. Diese Gerade verschiebt sich in sich; aber die übrigen Punkte beschreiben nicht etwa, entsprechend den Vorstellungen der parabolischen Geometrie, parallele Gerade, sondern (in der Nähe der Geraden flachgestreckte) Kegelschnitte, die den Fundamentalkegelschnitt in den beiden Durchschnittspunkten mit der ausgezeichneten Geraden berühren.

Was nun endlich die *trigonometrischen Formeln* angeht, die bei unserer jetzigen Maßbestimmung gelten, so erhält man dieselben unmittelbar durch die folgende Überlegung. In § 11 haben wir gesehen, daß, bei Zugrundelegung eines imaginären Kegelschnittes in der Ebene und bei der Annahme der Konstanten $c = c_1 i$, $c' = c_1' i = \frac{\sqrt{-1}}{2}$ für die Ebene eine Trigonometrie

[38]) Man vgl. hierzu namentlich die Auseinandersetzungen, welche Herr Battaglini gegeben hat: *Sulla geometria imaginaria di Lobatchefsky.* Giornale di Matematiche. Bd. 5 (1867).

gilt, deren Formeln sich aus den Formeln der sphärischen Trigonometrie ergeben, wenn man statt der Seiten die Seiten, dividiert durch $2c_1$, einführt. Ein Gleiches wird nun auch gelten, wenn ein reeller Kegelschnitt zugrunde gelegt wird. Denn die Geltung der Formeln der sphärischen Trigonometrie beruht doch auf analytischen Identitäten, die unabhängig sind von der Frage nach der Art des zugrunde gelegten fundamentalen Kegelschnittes. Der einzige Unterschied, der nun, gegenüber dem früheren Falle, eintritt, ist, daß $c_1 = \frac{c}{i}$ nunmehr imaginär geworden ist.

Die trigonometrischen Formeln, welche bei unserer jetzigen Maßbestimmung gelten, ergeben sich aus den Formeln der sphärischen Trigonometrie, wenn man statt der Seiten die Seiten, dividiert durch $\frac{c}{i}$, *einführt.*

Das ist aber dieselbe Regel, nach welcher man in der hyperbolischen Geometrie die trigonometrischen Formeln aufstellt. Die Konstante c ist die in der hyperbolischen Geometrie vorkommende charakteristische Konstante. Man kann sagen, daß die Planimetrie sich nach der Annahme der hyperbolischen Geometrie so gestaltet, wie die Geometrie auf einer Kugel mit dem imaginären Radius $\frac{c}{i}$.

Für die Vorstellungen der hyperbolischen Geometrie erhalten wir nach dem Vorstehenden sofort ein Bild, wenn wir einen beliebigen reellen Kegelschnitt hinzeichnen und auf ihn eine projektivische Maßbestimmung gründen. Umgekehrt: ist die uns tatsächlich gegebene Maßbestimmung von der Art, wie sie sich die hyperbolische Geometrie vorstellt, so bilden die unendlich fernen Punkte der Ebene einen reellen uns umschließenden Kegelschnitt, und ist die hyperbolische Geometrie nichts anderes, als die auf diesen Kegelschnitt gegründete projektivische Maßbestimmung.

§ 13.

Die spezielle Maßbestimmung in der Ebene. Die parabolische Geometrie.

Die Maßbestimmung der parabolischen Geometrie ist unter den jetzt betrachteten nicht mit enthalten, da sie keinen eigentlichen Kegelschnitt als fundamentales Gebilde benutzt. Vielmehr subsumiert sie sich unter einen Grenzfall der seither betrachteten allgemeinen Maßbestimmung, der dann entsteht, wenn der fundamentale Kegelschnitt sich in ein Punktepaar auflöst. Dieses fundamentale Punktepaar ist bei der parabolischen Geometrie imaginär; *es sind die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte.*

Ein imaginäres Punktepaar kann, wie hier beiläufig auseinandergesetzt werden mag, als Übergang eines reellen Kegelschnittes zu einem imaginären angesehen werden, und stellt sich deswegen auch die parabolische Geometrie als Übergangsfall zwischen die hyperbolische und die elliptische. Sei beispielsweise eine Hyperbel gegeben, deren (imaginäre) Nebenachse einen festen Wert hat, während die Hauptachse von einer gegebenen Größe an allmählich gegen Null abnimmt und dann imaginär wird. An der Grenze Null fallen die beiden Äste der Hyperbel in eine doppeltzählende Gerade, die Nebenachse, zusammen. Diese Linie vertritt den Kegelschnitt, insofern er durch Punkte erzeugt war. Aber sofern er von Linien umhüllt war, ist er in zwei konjugiert imaginäre Punkte ausgeartet, welche im Abstande der konstant gebliebenen Nebenachse auf der doppelt zählenden Geraden liegen. Alle Tangenten des Kegelschnittes sind beim Grenzübergange imaginär geworden bis auf die eine Gerade, die jetzt den ganzen Kegelschnitt repräsentiert und die als Doppeltangente desselben aufzufassen ist. Wird sodann auch die Hauptachse imaginär, so enthält der Kegelschnitt überhaupt keine reellen Elemente mehr.

Doch wir wollen zunächst allgemein eine solche Maßbestimmung in der Ebene betrachten, die statt eines fundamentalen Kegelschnittes ein Punktepaar benutzt. Eine solche Maßbestimmung soll eine *spezielle* Maßbestimmung heißen, im Gegensatz zu der bis jetzt betrachteten *allgemeinen*. Es versteht sich von selbst, daß man statt der Ausartung des Kegelschnittes in ein Punktepaar auch die Ausartung desselben in ein Linienpaar betrachten könnte; wenn wir uns hier auf die erste beschränken und ihr einen besonderen Namen geben, so geschieht dies, weil sie es ist, die unter sich die parabolische Geometrie begreift.

Wenn der fundamentale Kegelschnitt in ein Punktepaar ausartet, so bleibt die Bestimmung des Winkels ähnlich wie im allgemeinen Falle. Jedes Strahlbüschel, dessen Mittelpunkt nicht gerade auf der Verbindungsgeraden der beiden Fundamentalpunkte, d. h. auf den fundamentalen Kegelschnitt fällt, hat zwei getrennte Fundamentalstrahlen, diejenigen beiden, welche durch die Fundamentalpunkte durchgehen. Dagegen wird die Bestimmung des Abstandes zweier Punkte jetzt wesentlich anders als in dem allgemeinen Falle. Da der Fundamentalkegelschnitt jetzt aus einer doppeltzählenden Geraden besteht, so schneiden ihn alle Geraden in zusammenfallenden Punktepaaren. Die auf ihnen zu messende Distanz wird also, solange die Konstante c nicht einen unendlichen Wert bekommt, Null. Wir müssen, damit die Distanz endlich werde, c einen unendlich großen Wert erteilen. Dann wird die Distanz gleichzeitig eine algebraische Funktion der Koordinaten. Aber die Vergleichbarkeit von Strecken und Winkeln, die bisher bestanden hatte, fällt fort; richtiger ausgesprochen: die Strecken sind nur noch unendlich kleinen Winkeln vergleichbar. Auch

wenn wir c einen unendlich großen Wert erteilen, bleibt die Entfernung solcher Punkte, deren Verbindungsgerade durch einen Fundamentalpunkt durchgeht, gleich Null. Denn diese Linien entsprechen den Tangenten des früheren Kegelschnittes. Einen Winkel gleich Null bilden solche Geraden, welche sich in einem Punkte der Verbindungsgeraden der beiden Fundamentalpunkte schneiden.

Als Kreise wird man diejenigen Kegelschnitte bezeichnen, welche durch die Fundamentalpunkte gehen; konzentrische Kreise sind solche, die sich in den beiden Fundamentalpunkten berühren. Unter jedem Systeme konzentrischer Kreise findet sich einer mit dem Radius ∞. Er ist in die doppeltzählende Verbindungsgerade der beiden Fundamentalpunkte ausgeartet. *Die unendlich fernen Punkte bilden also jetzt eine doppeltzählende Gerade.* Die Kreise haben nicht mehr, wie früher, eine sich selbst dualistische Bedeutung. Diejenigen Linien, welche eine gegebene Linie unter konstantem Winkel schneiden, umhüllen nicht mehr einen eigentlichen Kreis, sondern einen unendlich fern liegenden Punkt. Die Kreise mit unendlich fernem Zentrum, welche den Fundamentalkegelschnitt im Zentrum vierpunktig berührten, sind jetzt in die unendlich ferne Gerade und eine weitere Gerade zerfallen usf. Alles das sind Dinge, die sich aus dem früher Aufgestellten durch Grenzübergang ohne weiteres ergeben.

So wie wir nun unter Zugrundelegung eines Kegelschnittes eine dreifach unendliche Schar linearer Transformationen der Ebene als *Bewegungen* bezeichnen konnten, so auch hier. Nur genügt es nicht mehr, die Bewegungen als diejenigen linearen Transformationen (oder vielmehr als die eine Klasse derselben) zu definieren, welche das fundamentale Gebilde ungeändert lassen. Denn ein Punktepaar geht nicht nur durch dreifach unendlich viele, sondern durch vierfach unendlich viele lineare Transformationen der Ebene in sich über. Unter ihnen aber sind dreifach unendlich viele dadurch ausgezeichnet, daß jede einzelne unter ihnen die Kreise eines konzentrischen Büschels ungeändert läßt. Diese selbst zerfallen wieder in zwei dreifach unendliche Scharen. Die eine Schar umfaßt die Bewegungen, die andere diejenigen Transformationen der Ebene, welche ebene Figuren in invers kongruente überführen. Die beiden Scharen sind einfach dadurch zu trennen, daß die Bewegungen jeden einzelnen der beiden Fundamentalpunkte ungeändert lassen, während die anderen Transformationen die beiden Fundamentalpunkte untereinander vertauschen. Jede Bewegung der Ebene besteht in einer Rotation um einen Punkt. Wird die Bewegung eine Translation, d. h. rückt das Rotationszentrum unendlich weit, so beschreiben alle Punkte der Ebene parallele Gerade, d. h. Gerade, welche sich in demselben unendlich fernen Punkte schneiden.

Es existiert jetzt der Begriff der *Richtung; parallele Gerade haben gleiche Richtung.* Die Bewegung hat den sich selbst dualistischen Charakter verloren, den sie im allgemeinen Falle besessen hatte. — Neben die Verwandtschaft der *Kongruenz*, welche durch jede der dreifach unendlich vielen Bewegungen, und der *inversen Kongruenz*, welche die dreifach unendlich vielen Transformationen der zweiten Gruppe entstand, stellt sich jetzt, dem vierfach unendlichen Zyklus linearer Transformationen entsprechend, welche das Fundamentalgebilde zuläßt, die Verwandtschaft *der direkten und der inversen Ähnlichkeit.* Direkt ist die Ähnlichkeit, wenn beide Fundamentalpunkte ungeändert bleiben, invers, wenn sich die beiden Punkte vertauschen. Bei der Ähnlichkeit bleiben alle Winkel ungeändert, während die Entfernungen in Multipla übergehen. Sei noch bemerkt, daß wir nunmehr durch die Bewegungen zu allen Punkten der Ebene hingelangen können, bis auf die Punkte der unendlich fernen Geraden. Ein ideales Gebiet, wie im Falle eines reellen Fundamentalkegelschnittes, gibt es nicht mehr, oder, wenn man will, es hat sich auf seine deswegen doppeltzählende Begrenzung zusammengezogen.

Die analytische Formel, welche jetzt die Entfernung zweier Punkte darstellt — und auf diese wollen wir uns beschränken —, nimmt folgende Gestalt an. Sei $p_x = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = 0$ die Gleichung der unendlich fernen Geraden, sei ferner $P_{xy} = 0$ die Bedingung, unter welcher die Verbindungslinie von (x) und (y) durch einen der beiden Fundamentalpunkte geht. So wird die Entfernung der beiden Punkte

$$= \frac{C\sqrt{P_{xy}}}{p_x \cdot p_y}.$$

Die Entfernung zweier Punkte wird also eine algebraische Funktion ihrer Koordinaten.

In der Tat wird man durch Grenzübergang von dem allgemeinen Ausdrucke der Entfernung zu dieser Formel geleitet. Der allgemeine Ausdruck läßt sich so schreiben:

$$2\,ic \arcsin \frac{\sqrt{\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}.$$

Zerfällt nun $\Omega = 0$ in ein Punktepaar, so wird $\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}$ identisch Null, doch in der Art, daß es einen verschwindenden konstanten Faktor (die Diskriminante von Ω) erhält. Sondert man diesen ab, so bleibt von $\Omega_{xy}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{yy}$ gerade noch P_{xy} stehen, d. h. der Ausdruck, der, gleich Null gesetzt, die Bedingung ausdrückt, daß die Verbindungsgerade von (x) und (y) eine Tangente nunmehr des ausgearteten Kegelschnittes sei. Aber wegen des verschwindenden Faktors können wir den Arcus Sinus dem Sinus selbst gleich setzen, und indem wir sodann den verschwindenden Faktor mit $2ic$

zu einer neuen Konstante C vereinigen, endlich noch statt Ω_{xx}, Ω_{yy} bez. p_x^2 und p_y^2 schreiben (da $p^2 = 0$ die Gleichung des ausgearteten Kegelschnittes in Punktkoordinaten ist), so kommt der vorstehend angegebene Ausdruck.

Aus ihm ergibt sich der in der parabolischen Geometrie gewöhnliche Ausdruck der Entfernung zweier Punkte ohne weiteres, wenn man die beiden Fundamentalpunkte so bezeichnet, wie man gewöhnlich die beiden Kreispunkte darstellt. Die unendlich ferne Gerade hat bei der gewöhnlichen Bezeichnung die Gleichung: Konstante $= 0$; es ist also $p_x = p_y$ gleich einer Konstanten k. Die Kreispunkte auf ihr stellt man in rechtwinkligen Koordinaten als ihre Durchschnitte mit dem Linienpaare

$$x^2 + y^2 = 0$$

dar. Die Bedingung, daß zwei Punkte (x, y) und (x', y') so liegen, daß ihre Verbindungsgerade durch einen Kreispunkt geht, ist dann:

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = 0.$$

Folglich wird die Entfernung der beiden Punkte

$$= \frac{C}{k^2} \cdot \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}.$$

Werden schließlich statt der x und y solche Multipla derselben gesetzt, daß die Entfernung zweier Punkte auf der x-Achse bez. der y-Achse geradezu durch die Differenz der betr. Koordinaten vorgestellt ist, so kommt:

$$\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2},$$

der gewöhnliche Ausdruck für die Entfernung in rechtwinkligen Koordinaten.

Wir wollen hier nicht weiter erörtern, wie sich die Vorstellungen der parabolischen Geometrie mit ihren imaginären Grundpunkten in die vorhergegangenen allgemeinen Betrachtungen einordnen[39]). Wir wollen nur hervorheben, daß bei imaginären Fundamentalpunkten die trigonometrischen Formeln in die betr. Formeln der parabolischen Geometrie übergehen, daß also die Winkelsumme im Dreiecke genau gleich 2π wird, während sie bei reellem Fundamentalkegelschnitt kleiner, bei imaginärem größer war.

§ 14.

Spezielle Maßbestimmung in der Ebene, welche eine allgemeine in einem Punkte berührt. Krümmung der letzteren.

So wie wir in § 7 eine spezielle Maßbestimmung auf der Geraden angeben konnten, welche mit einer gegebenen allgemeinen Maßbestimmung in einem Punkte und in dessen Nähe übereinstimmte, welche, wie wir uns

[39]) Vgl. Cayley, l. c.

ausdrückten, die gegebene Maßbestimmung in dem Punkte berührte, so werden wir auch in der Ebene von einer speziellen Maßbestimmung reden können, welche eine allgemeine gegebene in einem Punkte berührt. Dieselbe wird (§ 7) als unendlich ferne Gerade die Polare des gegebenen Punktes mit Bezug auf den Fundamentalkegelschnitt der allgemeinen Maßbestimmung benutzen, als Fundamentalpunkte die beiden Berührungspunkte der an den Fundamentalkegelschnitt gelegten Tangenten. Dann stimmt für beide Maßbestimmungen bei gehöriger Bestimmung der Konstanten die Winkelbestimmung in dem gegebenen Punkte vollkommen überein, sowie, bis auf Größen höherer Ordnung, die Bestimmung des gegenseitigen Abstandes aller von ihm unendlich wenig verschiedenen Punkte. Kreise, welche um den gegebenen Berührungspunkt in der allgemeinen Maßbestimmung herumgelegt sind, d. h. also Kegelschnitte, welche den Fundamentalkegelschnitt in den beiden Fundamentalpunkten der tangierenden speziellen Maßbestimmung berühren, sind auch Kreise mit Bezug auf letztere. Insbesondere wird der Fundamentalkegelschnitt selbst, der für die allgemeine Maßbestimmung der Kreis mit unendlich großem Radius ist, für die tangierende spezielle Maßbestimmung ein Kreis sein, aber ein Kreis mit endlichem Radius. Für die Größe dieses Radius findet man die Konstante $2c$. Denn auf jeder durch den gegebenen Berührungspunkt hindurchgehenden Geraden bestimmen die gegebene allgemeine und die tangierende spezielle Maßbestimmung zwei ebensolche Maßbestimmungen, die auch in dem Verhältnisse der Berührung stehen. Die Fundamentalpunkte der auf der Geraden getroffenen allgemeinen Maßbestimmung sind aber die Durchschnitte der Geraden mit dem Fundamentalkegelschnitt. Deren Abstand, gemessen in der tangierenden speziellen Maßbestimmung (§ 7), ist aber gleich $4c$; deshalb der gesuchte Radius gleich $2c$.

Wir wollen nun insbesondere diejenigen beiden Fälle der allgemeinen Maßbestimmung ins Auge fassen, die in § 11 und § 12 betrachtet wurden und die Bilder für die elliptische und hyperbolische Geometrie ergeben, daß nämlich entweder der Fundamentalkegelschnitt imaginär ist oder daß er reell ist und uns umschließt.

Die in einem Punkte berührende spezielle Maßbestimmung hat in beiden Fällen imaginäre Fundamentalpunkte, da die Polare des Berührungspunktes den Fundamentalkegelschnitt nicht in reellen Punkten schneiden wird. Aber es findet dabei zwischen den beiden Arten allgemeiner Maßbestimmung ein Unterschied statt, analog demjenigen, der in § 7 bei den betreffenden Maßbestimmungen auf der geraden Linie eintrat. Ist der Fundamentalkegelschnitt imaginär, so eilt die spezielle Maßbestimmung der allgemeinen voran, d. h. die Entfernung eines Punktes vom Berührungspunkte, gemessen in der speziellen Maßbestimmung, ist immer

größer als die Entfernung, gemessen in der gegebenen allgemeinen. Umgekehrt ist es bei reellem Fundamentalkegelschnitt[40]): die spezielle Maßbestimmung bleibt hinter der allgemeinen zurück. Dieses Voraneilen, resp. Zurückbleiben der speziellen Maßbestimmung soll als *Krümmung* der allgemeinen Maßbestimmung bezeichnet werden, und zwar soll die Krümmung im ersten Falle eine *positive*, im zweiten eine *negative* genannt werden. Als *Maß der Krümmung* soll derselbe Ausdruck betrachtet werden, der nach § 7 die Krümmung der allgemeinen Maßbestimmung auf einer durch den gegebenen Berührungspunkt laufenden Geraden angibt, nämlich $-\frac{1}{4c^2}$. Dieser Ausdruck ist unabhängig von dem Berührungspunkte, den man ursprünglich gewählt hat, und von der Geraden, die man durch ihn hindurchgelegt hat. Wir haben also den Satz:

Das Krümmungsmaß der allgemeinen Maßbestimmung ist in allen Punkten dasselbe, nämlich gleich $-\frac{1}{4c^2}$.

Dasselbe ist positiv bei imaginärem Fundamentalkegelschnitt (*also bei der elliptischen Geometrie*), *es ist negativ bei reellem Fundamentalkegelschnitt* (*also bei der hyperbolischen Geometrie*).

Für den Übergangsfall, daß der Fundamentalkegelschnitt in ein imaginäres Punktepaar ausartet (insonderheit für die parabolische Geometrie), wird das Krümmungsmaß Null.

Es soll nun jetzt gezeigt werden, daß die hier aufgestellte Definition des Krümmungsmaßes einer ebenen Maßbestimmung mit derjenigen übereinstimmt, welche Gauß für das Krümmungsmaß zweifach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten aufgestellt hat. Es findet nur der Unterschied zwischen dem Begriffe des Krümmungsmaßes, wie er hier und wie er bei Gauß auftritt, statt, daß bei Gauß das Krümmungsmaß eine bleibende Eigenschaft des betreffenden geometrischen Gebildes ist, während es hier nur eine Eigenschaft der in dem gegebenen Gebilde, der Ebene, zufällig gewählten Maßbestimmung ist.

Das Gaußsche Krümmungsmaß berechnet sich bekanntlich aus dem Ausdrucke für das Quadrat des Bogenelementes:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du\, dv + G dv^2.$$

Der betreffende Ausdruck ist hier zunächst aufzustellen. Sei $\Omega = 0$, wie immer, der Fundamentalkegelschnitt. Ω_{xx} habe die frühere Bedeutung. $\Omega_{x,dx}$, $\Omega_{dx,dx}$ sollen die Ausdrücke bezeichnen, die aus $\Omega_{x,y}$ und Ω_{yy} durch

[40]) Dies gilt natürlich nur für die Punkte innerhalb des Fundamentalkegelschnittes; für die Punkte außerhalb findet sowohl ein Voraneilen als ein Zurückbleiben statt, je nach der Richtung, in der man sich bewegt.

Einführung von Differentialen dx an Stelle der y entstehen. Nun war die Entfernung zweier Punkte (x) und (y)

$$= 2ic \arcsin \frac{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy} - \Omega_{xy}^2}}{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{yy}}}.$$

Setzt man $y_a = x_a + dx_a$, so wird dies unter Vernachlässigung von Größen höherer Ordnung:

$$= 2ic \arcsin \frac{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{dx,dx} - \Omega_{x,dx}^2}}{\Omega_{xx}^2},$$

oder, indem wir statt des Arcus Sinus des kleinen Argumentes den Sinus selbst setzen:

$$= 2ic \frac{\sqrt{\Omega_{xx}\Omega_{dx,dx} - \Omega_{x,dx}^2}}{\Omega_{xx}^2}.$$

Das Quadrat des Bogenelementes wird also:

$$ds^2 = 4c^2 \cdot \frac{\Omega_{x,dx}^2 - \Omega_{xx}\Omega_{dx,dx}}{\Omega_{xx}^2}.$$

Wir wollen diesen Ausdruck durch eine besondere Koordinatenannahme auf eine einfachere Form bringen. Da nämlich der Fundamentalkegelschnitt für die berührende spezielle Maßbestimmung ein Kreis ist, da ferner in den hier betrachteten Fällen die Fundamentalpunkte der letzteren wie bei der gewöhnlichen parabolischen Maßbestimmung imaginär sind, so wollen wir die Gleichung des Fundamentalkegelschnittes in der gewöhnlichen Form der Kreisgleichung schreiben:

$$x^2 + y^2 = 4c^2.$$

Diese Gleichung bezieht sich auf Koordinaten x, y, die in der tangierenden speziellen Maßbestimmung gemessen werden, denn der Radius des Fundamentalkreises, gemessen in der tangierenden speziellen Maßbestimmung, ist, wie in der vorstehenden Gleichung angenommen, gleich $2c$.

Nunmehr wird:

$$\Omega_{xx} = x^2 + y^2 - 4c^2, \quad \Omega_{dx,dx} = dx^2 + dy^2, \quad \Omega_{x,dx} = xdx + ydy.$$

Also der Ausdruck für das Quadrat des Bogenelementes:

$$ds^2 = 4c^2 \frac{(x\,dx + y\,dy)^2 - (x^2 + y^2 - c^2)(dx^2 + dy^2)}{(x^2 + y^2 - 4c^2)^2}$$

$$= 4c^2 \frac{-(y\,dx - x\,dy)^2 + 4c^2(dx^2 + dy^2)}{(x^2 + y^2 - 4c^2)^2}.$$

Führt man jetzt neue Veränderliche ein (Polarkoordinaten der speziellen Maßbestimmung), indem man setzt:

$$x = r \cdot \cos\varphi, \quad y = r \cdot \sin\varphi,$$

so wird:

$$ds^2 = \frac{16c^4 dr^2}{(r^2 - 4c^2)^2} - \frac{4c^2 r^2 d\varphi^2}{r^2 - 4c^2},$$

ein Ausdruck, der in den gewöhnlichen Ausdruck des Bogenelementes in Polarkoordinaten übergeht, wenn c unendlich groß wird[41]). Vergleicht man ihn mit der von Gauß zugrunde gelegten Formel:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

so verschwindet F, und E und G hängen nur von der einen Veränderlichen, etwa von u ab. Unter dieser Voraussetzung ist aber das Gaußsche Krümmungsmaß K:

$$4E^2G^2 \cdot K = E\left(\frac{\partial G}{\partial u}\right)^2 + G \cdot \frac{\partial E}{\partial u} \cdot \frac{\partial G}{\partial u} - 2EG\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}.$$

Setzt man hier für E, G ihre Werte:

$$E = \frac{16c^4}{(u^2 - 4c^2)^2}, \quad G = -\frac{4c^2u^2}{u^2 - 4c^2},$$

so kommt:

$$K = -\frac{1}{4c^2},$$

also derselbe Wert, den wir vorhin aufgestellt hatten.

Wir können jetzt, Krümmungsmaß im Gaußschen Sinne aufgefaßt, den Satz aussprechen:

Je nachdem wir die elliptische, hyperbolische oder parabolische Geo-

---

41) Setzt man r konstant, so kommt:

$$ds = \frac{2cr}{\sqrt{4c^2 - r^2}} \cdot d\varphi.$$

Es wird also die Peripherie eines Kreises mit dem Radius r gleich $\frac{4cr\pi}{\sqrt{4c^2 - r^2}}$. Aber dieses r bedeutet nur den Radius des Kreises, gemessen in der im Mittelpunkte tangierenden speziellen Maßbestimmung. Den in der allgemeinen Maßbestimmung gemessenen Radius ϱ erhält man aus der Formel des Textes, indem man statt ds $d\varrho$ schreibt, und $d\varphi$ gleich Null setzt, also:

$$d\varrho = \frac{-4c^2 dr}{r^2 - 4c^2}$$

oder:

$$r = \frac{e^{\frac{\varrho}{c}} - 1}{e^{\frac{\varrho}{c}} + 1}.$$

Setzt man dies für r ein, so erhält man die Peripherie des Kreises mit dem Radius ϱ gleich:

$$2c\pi\left(e^{\frac{\varrho}{2c}} - e^{-\frac{\varrho}{2c}}\right),$$

eine Formel, welche Gauß in einem Briefe an Schumacher anführt. Die Konstante k, welche er dort benutzt, entspricht geradezu der hier gebrauchten Konstante c.

metrie annehmen, ist die Ebene eine Fläche von konstantem positiven, von konstantem negativen, oder von verschwindendem Krümmungsmaße.

Deshalb findet auch (wie in § 1 erwähnt), unter Zugrundelegung der parabolischen Maßbestimmung, die elliptische Geometrie ihre Interpretation auf der Kugel oder den aus derselben durch Deformation entspringenden Flächen, die hyperbolische Geometrie auf den Flächen von konstantem negativen Krümmungsmaße.

§ 15.

Das gegenseitige Verhältnis der elliptischen, hyperbolischen und parabolischen Geometrie in der Ebene.

In dem Vorstehenden haben wir gesehen, wie sowohl diejenige Maßbestimmung, welche die parabolische, als diejenige, welche die elliptische oder hyperbolische Geometrie in der Ebene voraussetzt, in der allgemeinen projektivischen ebenen Maßbestimmung als spezielle Fälle enthalten sind. Die parabolische Geometrie benutzt als fundamentalen Kegelschnitt ein imaginäres Punktepaar, die sogenannten unendlich weiten[42]) imaginären Kreispunkte. Der Ort der unendlich fernen Punkte ist eine doppeltzählende Gerade. Die elliptische Geometrie bezieht sich auf einen eigentlichen Fundamentalkegelschnitt, der aber imaginär ist. Die hyperbolische Geometrie endlich hat gleich der elliptischen einen eigentlichen Fundamentalkegelschnitt, der aber reell ist (und uns umschließt).

In der Nähe eines Punktes, den wir gerade betrachten, kommen alle drei Geometrien, mag nun die tatsächlich vorhandene Maßbestimmung parabolisch oder elliptisch oder hyperbolisch sein, miteinander überein. Sie berühren sich also in dem betreffenden Punkte; die parabolische Geometrie gibt die spezielle tangierende Maßbestimmung für die elliptische wie für die hyperbolische Geometrie.

Ist uns also die parabolische Geometrie tatsächlich gegeben, so können wir ohne weiteres eine Geometrie konstruieren, die uns ein Bild für die Vorstellungen der hyperbolischen Geometrie ist, indem wir eine allgemeine Maßbestimmung mit reellem Fundamentalkegelschnitt konstruieren, welche die gegebene spezielle in dem Punkte, den wir betrachten, berührt. Wir erreichen dies, indem wir um den Punkt, den wir gerade ins Auge fassen, einen Kreis mit dem Radius $2c$ beschreiben und auf ihn eine projektivische Maßbestimmung mit der Konstanten c zur Bestimmung der Entfernung zweier Punkte und der Konstanten $c' = \frac{\sqrt{-1}}{2}$ zur Bestimmung des Winkels

[42]) Diese Punkte unendlich weit zu nennen, ist eigentlich unberechtigt, da ihre Entfernung von einem beliebig im Endlichen gelegenen Punkte nicht unendlich, sondern unbestimmt ist, weil ja alle um einen solchen Punkt herum gelegten Kreise dieselben enthalten.

zweier Geraden gründen. Diese allgemeine Maßbestimmung schließt sich um so genauer an die gegebene parabolische an, je größer c ist; sie fällt mit ihr zusammen, wenn c unendlich wird.

Auf ganz ähnliche Weise konstruieren wir eine Geometrie, die uns versinnlicht, wie sich die elliptische Geometrie des näheren gestalten würde. Zu dem Zwecke ist nur dem c, welches wir eben benutzten, ein rein imaginärer Wert gleich $c_1 i$ beizulegen. Es kommt dies darauf hinaus, daß wir in der Entfernung $2c_1$ über dem vorgegebenen Berührungspunkte einen Punkt festlegen und als Entfernung zweier Punkte der Ebene den mit c_1 multiplizierten Winkel betrachten, unter welchem die beiden Punkte von dem festen Punkt aus erscheinen. Der Winkel zweier Geraden der Ebene ist geradezu gleich dem Winkel zu nehmen, unter dem sie von dem festen Punkte aus gesehen werden. Die so entstehende Maßbestimmung schließt sich wieder um so genauer an die gegebene parabolische an, je größer c_1 ist, und geht, wenn c_1 unendlich wird, geradezu in die parabolische über.

Aber auch, wenn die elliptische oder die hyperbolische Geometrie die tatsächlich gegebenen wären, würde man auf diese Weise sich ein Bild davon machen können, welche Vorstellungen die parabolische oder bezüglich die hyperbolische und elliptische Geometrie mit sich führen.

Es bleibt uns nur noch übrig, die bis jetzt allein für die Grundgebilde erster und zweiter Stufe auseinander gesetzten Dinge auf den Raum zu übertragen, was noch in möglichster Kürze geschehen soll.

§ 16.

Die projektivische Maßbestimmung im Raume.

Der allgemeinen projektivischen Maßbestimmung im Raume wird man eine beliebig anzunehmende *fundamentale Fläche zweiten Grades* zugrunde legen.

Um dann die Entfernung zweier Punkte zu bestimmen, verbinde man sie durch eine gerade Linie. Dieselbe trifft die fundamentale Fläche in zwei neuen Punkten, die mit den beiden gegebenen ein gewisses Doppelverhältnis bilden. *Der mit einer willkürlichen Konstante c multiplizierte Logarithmus dieses Doppelverhältnisses ist es, der als Entfernung der beiden gegebenen Punkte zu bezeichnen ist.*

Auf ähnliche Weise bestimmt man den Winkel zweier gegebenen Ebenen. Man lege durch die Durchschnittsgerade derselben die beiden Tangentialebenen an die Fundamentalfläche. Dieselben bestimmen mit den beiden gegebenen ein gewisses Doppelverhältnis. *Der Winkel der beiden Ebenen ist gleich dem mit einer beliebig gewählten Konstanten c' multiplizierten Logarithmus dieses Doppelverhältnisses.*

Unter den *Bewegungen* des Raumes wird man einen Zyklus linearer Transformationen verstehen, welche die Fundamentalfläche ungeändert lassen. Eine Fläche zweiten Grades bleibt durch sechsfach unendlich viele lineare Transformationen ungeändert. Aber diese zerfallen in zwei Klassen, von denen die eine ein geschlossenes System, die andere kein solches umfaßt [ohne daß jetzt Unterscheidungen hinsichtlich der Realität der Flächenpunkte zu machen wären]. Die beiden Klassen lassen sich durch das Verhalten der Erzeugenden der Fläche ihren Transformationen gegenüber charakterisieren. Bei den Transformationen erster Klasse — und diese bezeichnen wir als Bewegungen[43]) des Raumes — bleiben die Systeme geradliniger Erzeugender als solche ungeändert; bei den Transformationen zweiter Klasse vertauschen sich dieselben unter sich. Es gibt sechsfach unendlich viele Bewegungen; dieselben lassen die Maßverhältnisse ungeändert.

Unter *Kugeln* hat man solche Flächen zweiten Grades zu verstehen, welche die fundamentale Fläche nach einer ebenen Kurve berühren. Das Zentrum der Kugel ist der Pol der Ebene, welche die Berührungskurve enthält. Die Fundamentalfläche selbst ist als eine um ein beliebiges Zentrum herumgelegte Kugel mit dem Radius ∞ anzusehen usw.

Achtet man insbesondere auf die reellen Elemente des Raumes, so wird man unterscheiden, ob die Fundamentalfläche imaginär oder reell ist, und im letzteren Falle, ob sie geradlinig ist oder nicht.

Ist die Fundamentalfläche *imaginär*, so haben alle geraden Linien eine endliche Länge, alle Ebenenbüschel eine endliche Winkelsumme. Unter diesen Fall subsumiert sich die Maßbestimmung der *elliptischen* Geometrie, wenn noch die Konstante c' der Winkelbestimmung gleich $\frac{\sqrt{-1}}{2}$ gesetzt wird, damit die Winkelsumme im Ebenenbüschel gleich π ist.

Den Fall, daß die Fundamentalfläche *reell* und *geradlinig* ist, daß sie also ein einschaliges Hyperboloid ist, wollen wir hier nicht weiter betrachten, weil er zu den dreierlei Geometrien, die wir hier betrachten, der elliptischen, hyperbolischen, parabolischen, in keiner Beziehung steht.

Ist endlich die Fundamentalfläche *reell* und *nicht geradlinig*, so werden wir für Punkte im Inneren eine Maßbestimmung erhalten, die unter sich die Maßbestimmung der *hyperbolischen* Geometrie begreift, wenn man die Konstante c' wieder gleich $\frac{\sqrt{-1}}{2}$ setzt.

[43]) Ich habe diese Verhältnisse bereits in einer früheren Arbeit: *Über die Mechanik starrer Körper*, Math. Annalen, Bd. 4 [s. Abh. XIV dieser Ausgabe] auseinandergesetzt. Hinzufügen muß ich, daß bereits Herr Schering in dem Aufsatze: *Die Schwerkraft im Gaußschen Raume*, Gött. Nachrichten 1870, Nr. 15 die Bewegungen des Raumes im Sinne der hyperbolischen Geometrie betrachtet hat.

Die *parabolische* Geometrie subsumiert sich unter einen speziellen Fall der allgemeinen Maßbestimmung, der eintritt, wenn die Fundamentalfläche sich in einen Kegelschnitt, insbesondere in einen imaginären Kegelschnitt, partikularisiert. Der fundamentale Kegelschnitt der parabolischen Geometrie ist der sogenannte unendlich ferne, imaginäre Kreis. In dem undualistischen Charakter der Partikularisation, welche die Fundamentalfläche erfahren hat, haben die undualistischen Eigenschaften der parabolischen Maßbestimmung ihren Grund.

Man kann nun wieder von *Krümmung* einer allgemeinen Maßbestimmung usw. reden; doch sollen alle diese Dinge der Kürze wegen hier unerörtert bleiben.

§ 17.

Die Unabhängigkeit der projektivischen Geometrie von der Parallelentheorie.

Man könnte gegen das gesamte Vorhergehende einen Einwand machen, der bei der seither eingehaltenen Darstellungsweise nicht unbegründet ist, der aber sofort weggeräumt werden kann.

Bei der Begründung der allgemeinen projektivischen Maßbestimmung sind wir einmal geometrisch verfahren, indem wir Distanz zweier Punkte usw. als Logarithmen gewisser Doppelverhältnisse definierten, sodann analytisch, indem wir homogene Koordinaten in Anwendung brachten. Beide Dinge: die Doppelverhältnisse und die homogenen Koordinaten, setzen in ihrer gewöhnlichen Begründung die parabolische Maßbestimmung voraus, wo dann Doppelverhältnisse wie homogene Koordinaten als gewisse Streckenverhältnisse definiert werden. Man würde also, wenn die tatsächlich gegebene Maßbestimmung nicht parabolisch ist, zunächst von diesen Dingen nicht reden können, und alle vorhergehenden Auseinandersetzungen würden ihre Geltung verlieren.

Demgegenüber hat man sich zu überzeugen, daß die projektivische Geometrie unabhängig von der Frage nach der Art der Maßbestimmung gültig ist.

Der Beweis dafür kann in der Art geführt werden, daß man die projektivische Geometrie einmal unter Zugrundelegung der elliptischen, dann unter Zugrundelegung der hyperbolischen Maßgeometrie aufbaut. Es ist dies nicht schwer zu leisten, wie man daraus übersehen mag, daß für den Punkt, als Strahlen- und Ebenenbündel im Raume, für den doch auch in der parabolischen Geometrie eine elliptische Maßbestimmung angewandt wird, die projektivische Geometrie ungestört gilt.

Aber wesentlicher ist es wohl, zu bemerken, *daß die projektivische Geometrie überhaupt vor Erledigung der Frage nach der Maßbestimmung entwickelt werden kann.*

Denn um die Geltung der projektivischen Geometrie in einem beliebig gegebenen begrenzten Raume zu erweisen, genügt es, in diesem Raume Konstruktionen zu machen, die nur sogenannte Lagenbeziehungen betreffen und die nicht über den Raum hinausführen. Die Doppelverhältnisse dürfen dabei natürlich nicht als Streckenverhältnisse definiert werden, da dies die Kenntnis einer Maßbestimmung voraussetzen würde. In v. Staudt's Beiträgen zur Geometrie der Lage[44]) sind aber die nötigen Materialien gegeben, um ein Doppelverhältnis als eine reine Zahl zu definieren. Von den Doppelverhältnissen mögen wir sodann zu den homogenen Punkt- und Ebenenkoordinaten aufsteigen, die ja auch nichts anderes sind, als die relativen Werte gewisser Doppelverhältnisse, wie dies v. Staudt ebenfalls gezeigt[45]) und noch neuerdings Herr Fiedler[46]) wieder aufgenommen hat. — Unentschieden bleibt dabei, ob sich zu sämtlichen reellen Werten der Koordinaten auch entsprechende Raumelemente finden lassen. Ist dies nicht der Fall, so steht nichts im Wege, den betreffenden Koordinatenwerten entsprechend, zu den wirklichen Raumelementen uneigentliche hinzuzufügen. Dies geschieht in der parabolischen Geometrie, wenn wir von der unendlich fernen Ebene reden. Unter Zugrundelegung der hyperbolischen Geometrie würde man ein ganzes Raumstück zu adjungieren haben. Dagegen würde bei der elliptischen Geometrie eine Adjunktion uneigentlicher Elemente nicht nötig sein.

§ 18.

Ableitung der dreierlei Geometrien: der elliptischen, hyperbolischen und parabolischen aus der projektivischen.

Hat man, wie vorstehend auseinandergesetzt, die projektivische Geometrie begründet, so wird man die allgemeine Cayleysche Maßbestimmung aufstellen können. Dieselbe bleibt durch sechsfach unendlich viele lineare Transformationen, die wir als Bewegungen des Raumes bezeichneten, ungeändert, und kann als geradezu durch den Zyklus dieser linearen Transformationen erzeugt angesehen werden (§§ 2, 3).

Nunmehr wende man sich der Betrachtung der tatsächlichen Bewegungen im Raume und der durch sie begründeten Maßbestimmung zu. Man übersieht, daß die sechsfach unendlich vielen Bewegungen ebenso viele lineare Transformationen sind. Dieselben lassen überdies eine Fläche, die Fläche der unendlich fernen Punkte, ungeändert. Es gibt aber, wie sich leicht beweisen läßt, keine anderen Flächen, welche durch sechsfach un-

[44]) § 27. Nr. 393. [Vgl. hierzu die Ausführungen in den Vorbemerkungen, S. 241.]
[45]) Beiträge. § 29. Nr. 411.
[46]) Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich. XV. 2. (1871). — Die darstellende Geometrie von Fiedler. Leipzig 1871.

endlich viele lineare Transformationen in sich übergehen, als die Flächen zweiten Grades und ihre Ausartungen. Die unendlich fernen Punkte bilden also eine Fläche zweiten Grades, und die Bewegungen des Raumes subsumieren sich unter die vorgenannten sechsfach unendlichen Zyklen linearer Transformationen, welche eine Fläche zweiten Grades ungeändert lassen. Deshalb subsumiert sich auch die durch die Bewegungen gegebene (tatsächliche) Maßbestimmung unter die allgemeine projektivische. Während letztere sich auf eine beliebig anzunehmende Fläche zweiten Grades bezieht, ist diese Fläche bei ersterer ein für allemal gegeben.

Die Art dieser der tatsächlichen Maßbestimmung zugrunde liegenden Fläche zweiten Grades kann nun noch näher bestimmt werden. Man beachte, daß eine Ebene durch fortgesetzte Drehung um eine beliebig in ihr im Endlichen gelegene Achse in die Anfangslage zurückkommt. Es sagt dies aus, daß die beiden Tangentialebenen, welche man durch eine im Endlichen gelegene Gerade an die Fundamentalfläche legen kann, imaginär sind. Denn wären sie reell, so fänden sich in dem betreffenden Ebenenbüschel zwei reelle unendlich ferne Ebenen (d. h. Ebenen, welche mit allen anderen einen unendlich großen Winkel bilden) und dann könnte keine in einem Sinne fortgesetzte Rotation eine Ebene des Büschels in die Anfangslage zurückführen.

Damit nun diese beiden Ebenen imaginär sind, oder, was dasselbe ist, damit der Tangentenkegel der Fundamentalfläche, der von einem beliebigen Punkte des (uns durch die Bewegungen zugänglichen) Raumes ausgeht, imaginär sei, sind drei und nur drei Fälle denkbar:

1. *Die Fundamentalfläche ist imaginär.* Dies ergibt die elliptische Geometrie.

2. *Die Fundamentalfläche ist reell, nicht geradlinig und umschließt uns.* Die Annahme der hyperbolischen Geometrie.

3. (Übergangsfall.) *Die Fundamentalfläche ist in eine imaginäre ebene Kurve ausgeartet.* Die Voraussetzung der gewöhnlichen parabolischen Geometrie.

So sind wir denn gerade zu den dreierlei Geometrien hingeleitet, welche man, wie in § 1 berichtet, von ganz anderen Betrachtungen ausgehend, aufgestellt hat.

Düsseldorf, 19. August 1871.

XVII. Über einen Satz aus der Analysis situs.

[Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Nr. 14, (5. Juni 1872).]

In v. Staudts Geometrie der Lage wird die projektivische Geometrie, wie bekannt, durch bloße Betrachtung des Ineinanderliegens von Ebene, Gerade und Punkt aufgebaut. Von Maßbestimmung ist dabei zunächst keine Rede; es wird aber das Parallelenaxiom vorausgesetzt, weil sonst z. B. zwischen einer geraden Punktreihe und einem Ebenenbüschel kein vollständiges Entsprechen stattzufinden brauchte, vielmehr ein ganzer Teil der Ebenen des Büschels von der geraden Punktreihe möglicherweise nicht getroffen wurde. Nun hat sich aber gezeigt, daß die Ebenen und Geraden der Nicht-Euklidischen Geometrie, in welcher das Parallelenaxiom nicht zugrunde gelegt ist, trotzdem die projektivischen Beziehungen besitzen. Es folgt dies aus den Arbeiten Beltramis[1]), der nachweist, daß in einem Raume von konstantem Krümmungsmaße die kürzesten Linien durch lineare Gleichungen dargestellt werden können. Insbesondere habe ich dann gezeigt[2]), daß die Maßbestimmung der Nicht-Euklidischen Geometrie mit der projektivischen zusammenfällt, welche man nach Cayleys Vorgange auf eine Fläche zweiten Grades gründen kann. Es muß also möglich sein, die projektivische Geometrie unabhängig von dem Parallelenaxiome aufzubauen, und wenn bei Staudt das letztere vorausgesetzt wird, so kann dasselbe der Sache nach keine wesentliche Rolle spielen, wenn auch möglicherweise die Form, unter welcher Staudt seine Betrachtungen vorträgt, davon abhängen kann. Um sich hierüber Klarheit zu verschaffen, mag man sich die Frage vorlegen, ob man nicht den von Staudt eingeschlagenen Gang Schritt für Schritt verfolgen kann, wenn man sich das Gesetz auferlegt, mit den nötigen Konstruktionen aus einem gegebenen begrenzten Raume nicht hinauszutreten. Es seien also die Ebenen, Geraden und Punkte nach ihren gegenseitigen Lageverhältnissen in einem begrenzten Raume gegeben,

[1]) Bes. Teoria fundamentale degli spazii di curvatura costante. Annali di Matematica. Serie II, Bd. 2, 1868/69, Werke, Bd. 1, S. 406—429.

[2]) Diese Nachrichten 1871. Math. Annalen, Bd. 4. „Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie". [S. Abh. XVI dieser Ausgabe.]

den man der Übersichtlichkeit wegen als einfach zusammenhängend und überall konvex begrenzt denken mag; ob außerhalb des Raumes die Ebenen und Geraden überhaupt existieren, bleibe unbestimmt, um so mehr also, welche Relationen sie zueinander im Unendlichen haben. Wird es dann noch möglich sein, im Anschlusse an den von Staudt eingeschlagenen Gang die projektivische Geometrie als innerhalb des gegebenen Raumes gültig zu erweisen? Diese Frage habe ich in der genannten Mitteilung „Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie" aufgeworfen und bejaht, allerdings ohne näher auf die Begründung der bejahenden Antwort einzugehen. Von verschiedenen Seiten her sind Zweifel an der Richtigkeit meiner Behauptung geltend gemacht worden. Indem ich deshalb neuerdings die Frage wieder aufnahm und eine ausführlichere Darlegung derselben vorbereitete, bemerkte ich, daß bei der Staudtschen Betrachtung nicht nur das Parallelenaxiom unwesentlich ist, sondern auch die Forderung, daß man mit den wirklichen Ebenen und Geraden zu tun habe, daß man vielmehr dieselben Betrachtungen auf jedes System von Flächen und Kurven übertragen kann, welches eine ähnliche Anordnung wie das System der Ebenen und Geraden besitzt. Mit anderen Worten, man kann den folgenden Satz[3]) aufstellen, den ich als einen Satz der Analysis situs bezeichne, insofern die geometrischen Dinge, von denen in ihm gehandelt wird, alle bei einer stetigen Verzerrung des Raumes ungeändert bleiben.

„In einem einfach zusammenhängenden Raume sei eine unendliche Schar einfach zusammenhängender, überall stetig gekrümmter, nur durch die Begrenzung des Raumes geendigter Flächen gegeben, welche die folgende Anordnung besitzen:

1. Durch drei beliebig angenommene Punkte des gegebenen Raumes geht eine und nur eine Fläche des Systems;

2. Zwei Flächen des Systems haben, wenn sie sich treffen, eine nur aus einem Zuge bestehende und bis an die Begrenzung des Raumes hinanreichende Durchschnittskurve gemein;

3. Jede Fläche des Systems, welche zwei Punkte einer solchen Durchschnittskurve enthält, enthält dieselbe ganz."

„Dann kann man im Anschlusse an Staudt[4]) *für dieses Flächen-*

[3]) Dem Satze sind einige Beschränkungen hinzugefügt hinsichtlich des *Zusammenhangs* der vorkommenden Gebilde, die möglicherweise entfernt werden können.

[4]) Dem Staudtschen Gange stellen sich einige Bedenken entgegen, welche nur durch besondere Axiome zu beseitigen zu sein scheinen, wie sie überhaupt immer nötig werden, wenn es sich darum handelt, den Raum als eine Zahlenmannigfaltigkeit aufzufassen. Dieselben Bedenken finden sich bei dem geometrischen Beweise des im Text genannten Satzes wieder und mögen durch die entsprechenden Forderungen erledigt werden, die dann weniger Axiome sind als Bedingungen, welche die Flächensysteme charakterisieren, auf die der Satz Anwendung finden soll.

und Kurvensystem die Geltung der projektivischen Geometrie erweisen; anders ausgedrückt: *dann kann man den Punkten des gegebenen Raumes in der Weise Koordinaten erteilen, daß die gegebenen Flächen durch lineare Gleichungen dargestellt werden*."

Daß es Flächensysteme der gemeinten Art überhaupt gibt, zeigt das Beispiel der Ebenen. Unbegrenzt viele solcher Flächensysteme erzeugt man, indem man sich die Ebenen in einem konvex begrenzten, einfach zusammenhängenden Raumstück konstruiert denkt, und dann das Raumstück einer durch stetige Prozesse herbeiführbaren Deformation unterwirft. Und die in Rede stehende Behauptung kann geradezu dahin ausgesprochen werden: Jedes den Voraussetzungen des Satzes genügende Flächensystem kann auf diese Weise aus dem Systeme der Ebenen erzeugt werden.

Was diesen Satz sehr merkwürdig macht, ist, daß ein analoger Satz, den man für die Ebene formulieren möchte, nicht existiert. Ist nämlich in einem begrenzten Teile der Ebene ein Kurvensystem von der Eigenschaft gegeben, daß durch je zwei Punkte eine und nur eine Kurve hindurchgeht, so bedarf es noch weiterer Bedingungen, ehe die Kurven durch lineare Gleichungen zwischen Punktkoordinaten dargestellt werden können. Diesen negativen Satz mag man, sofern ein Beweis überhaupt nötig scheint, aus einem Theoreme von Beltrami ableiten. Ein Kurvensystem der gemeinten Art erhält man nämlich z. B., wenn man auf einer einfach zusammenhängenden begrenzten Fläche [hinreichend geringer Ausdehnung] die geodätischen Kurven zieht und dann die Fläche auf einen Teil der Ebene beliebig ausbreitet. Aber Beltrami zeigt[5]), daß nur den Flächen von konstantem Krümmungsmaße die Eigenschaft zukommt, sich so auf die Ebene übertragen zu lassen, daß sich alle geodätischen Kurven mit geraden Linien decken.

Man darf es daher auch nicht, wie seither wohl geschehen, als einen *Kunstgriff* von Staudts auffassen, wenn er behufs Begründung der projektivischen Geometrie auch der Ebene die stereometrischen Verhältnisse in Betracht zog; sondern es entspricht dieser Ausgangspunkt dem Wesen der Sache: es gilt für die geraden Linien der Ebene, falls man im Anschlusse an Staudt die Betrachtung der Maßverhältnisse ausschließt, nur deshalb die projektivische Geometrie, weil Ebene und Gerade als Glieder eines räumlichen Systems aufgefaßt werden können. —

War der in Rede stehende Satz dem Bedürfnisse entsprechend, aus dem er entsprungen ist, vorstehend in rein geometrischer Form mitgeteilt, so ist das als zufällig anzusehen; man kann seinen Inhalt rein analytisch formulieren und dann auf Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Dimen-

[5]) In den Annali di Matematica. Serie 1, Bd. 7 (1866), S. 185. Werke, Bd. 1, S. 262—280.

sionen übertragen. Er gilt, solange die Zahl der Dimensionen nicht kleiner ist als drei; für zwei Dimensionen gilt er nicht mehr, für eine Dimension hat er keinen Inhalt. Weshalb der Satz in dieser Weise an die Zahl der Dimensionen geknüpft ist, mag man aus den folgenden Betrachtungen ersehen, die man gleichzeitig als einen analytischen Beweis desselben auffassen kann.

Es seien drei Mannigfaltigkeiten bez. von eins, zwei, drei Dimensionen gegeben, dieselben mögen, der Anschaulichkeit wegen, durch die Punkte eines Kurvenstückes, bez. eines einfach zusammenhängenden Flächen- oder Raumstücks vorgestellt sein, die man sich jetzt also irgendwie durch Koordinatenwerte bezeichnet zu denken hat. Für die Punkte der Kurve existiert, sofern man beliebige [stetige] Änderungen der Kurve in Betracht zieht, keine andere (geometrische) Beziehung, als daß konsekutive Punkte konsekutive Punkte bleiben. Bei den Punkten der Fläche gibt es bereits unendlich viele Fortschreitungsrichtungen zu benachbarten *und für diese Fortschreitungsrichtungen bestehen dieselben projektivischen Beziehungen wie für die Geraden eines ebenen Strahlenbüschels*. Das heißt, man kann von einem Doppelverhältnis von vier Fortschreitungsrichtungen usw. reden. Von den Punkten des Raumes aus endlich gibt es zweifach unendlich viele Fortschreitungsrichtungen, für welche dann die nämlichen projektivischen Beziehungen gelten, wie für die Geraden eines Strahlenbündels. Insbesondere also kann man die Fortschreitungsrichtungen in unendlich viele Büschel zusammenfassen *und zu drei Elementen eines Büschels das vierte harmonische vermöge einer Konstruktion, die der gewöhnlichen Vierseitskonstruktion nachgebildet ist, auffinden*.

Auf der gegebenen Fläche sei jetzt ein Kurvensystem C konstruiert, von der Art, daß durch je zwei Punkte der Fläche eine und nur eine C geht; andererseits in dem gegebenen Raume ein Flächensystem F, welches die in dem in Rede stehenden Satze vorausgesetzten Eigenschaften besitzt.

Auf der gegebenen Fläche geht durch jeden Punkt ein Büschel von Kurven C; auf die C eines solchen Büschels überträgt sich die zwischen den vom Punkte ausgehenden Fortschreitungsrichtungen bestehende projektivische Zuordnung. Man wähle unter den C des Büschels vier C, die ein bestimmtes Doppelverhältnis miteinander bilden, aus, etwa vier harmonische C, und schneide sie mit einer nicht dem Büschel angehörigen Kurve C'. Zieht man durch diese Schnittpunkte und einen beliebig sonst in der Fläche angenommenen Punkt nun wieder vier Kurven C, so ist gar kein Grund vorhanden, weshalb dieselben für das zu dem neuen Punkte gehörige Büschel harmonisch gelegene Kurven sein sollen.

Ganz anders aber ist es im Raume mit dem Flächensysteme F. Man betrachte zunächst das Flächenbündel, welches durch einen Punkt geht.

Auf dasselbe überträgt sich in dualistischem Sinne die projektivische Geometrie, welche für die Fortschreitungsrichtungen vom Punkte aus galt, indem jede Fortschreitungsrichtung eine der den Flächen F des Bündels gemeinsame Durchschnittskurve bezeichnet. Man schneide jetzt das Bündel durch eine ihm nicht angehörige Fläche F'. So erhält man in F' ein Kurvensystem der oben betrachteten Art, welches außerdem aber die Eigenschaft besitzt, daß man zu drei Punkten einer Kurve vermöge der Vierseitskonstruktion einen bestimmten vierten sog. harmonischen Punkt finden kann. Denn die entsprechende Konstruktion gilt für das ursprünglich angenommene Bündel F, und die Konstruktion hat die Eigenschaft, sich beim Schnitte zu übertragen. Laut Voraussetzung wird aber die Fläche F' von jedem anderen Bündel von Flächen F in denselben Kurven geschnitten. Da sich auch rückwärts von F' auf ein schneidendes Bündel die Vierseitskonstruktion überträgt, so werden also durch F' vier harmonischen Elementen des ursprünglichen Bündels vier harmonische Elemente jedes anderen Bündels zugeordnet; mit anderen Worten: *durch die F' sind alle Bündel von F aufeinander projektivisch bezogen*, was denn unmittelbar zur Folge hat, daß man die F', d. h. jede beliebige F, durch eine lineare Gleichung darstellen kann.

[Zunächst eine historische Bemerkung: Daß man die grundlegenden Sätze über den harmonischen Schnitt gerader Linien in der Ebene aus den räumlichen Lagebeziehungen ohne weiteres ableiten kann, hat nicht erst v. Staudt, sondern bereits Desargue bemerkt; sehr nachdrücklich betont es Moebius in II, 207 seines baryzentrischen Kalkuls (1822). Werke, Bd. 1, S. 252–254.

Im übrigen formuliere ich gern die Bedeutung der in meiner Note gegebenen Überlegungen in der Sprache der modernen Axiomatik, etwa dahingehend: daß es bei der Grundlegung der projektiven Geometrie (NB. im begrenzten Raumstück) keineswegs auf die transiente Bedeutung der Worte „Ebene" und „Gerade" ankommt, sondern nur auf die für diese Elemente geltenden Sätze der Verknüpfung und Anordnung (bzw. die Postulate der Stetigkeit). Die Sätze der Anordnung werden bei mir allerdings nicht ausdrücklich ausgesprochen. Dies ist erst von Pasch in seinen Vorlesungen über neuere Geometrie (1882) geschehen. Sein Fortschritt ist ein methodischer. Man hat vorher gemeint, die Aussagen über die Anordnung je von Fall zu Fall durch einen Blick auf die gerade vorliegende Figur ersetzen zu können. Pasch dagegen entnimmt der Anschauung ein für allemal gewisse Grundsätze der Anordnung und ist daraufhin in der Lage, alle weiteren Anordnungsfragen durch bloße Überlegungen beantworten zu können.

Eine längere Kritik würde sodann daran angeknüpft werden können, daß ich die vorkommenden Kurven und Flächen, bzw. Funktionen, dem damaligen naiven Denken entsprechend, ohne weiteres als stetig gekrümmt bzw. differentiierbar voraussetze. Daß eine stetige Funktion noch nicht differentiierbar zu sein brauche, verbreitete sich in jenen Jahren wie eine Art Geheimlehre. Ich selbst habe erst 1873, als ich von England zurückkam, in dem Aufsatz „Über den allgemeinen Funktionsbegriff und seine Darstellung durch eine willkürliche Kurve" dazu Stellung genommen.

Diese Bemerkungen sollen zugleich für Teil 2 der folgenden Abhandlung Bedeutung haben. K.]

XVIII. Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.

(Zweiter Aufsatz.)

[Math. Annalen, Bd. 6 (1873).]

Die nachstehenden Auseinandersetzungen schließen sich an einen früheren Aufsatz über denselben Gegenstand (Math. Annalen Bd. 4 [s. Abh. XVI dieser Ausgabe]) an und sind bestimmt, einige dort nur angedeutete Punkte weiter auszuführen. Es galt mir damals hauptsächlich, in möglichst anschaulicher Weise darzulegen, wie Cayleys projektivische Maßbestimmung in Ebene und Raum ein äquivalentes Bild für die Lehren der Nicht-Euklidischen Geometrie ergibt. Ich durfte hoffen, letztere dadurch einem allgemeinen Verständnisse zugänglicher gemacht, gleichzeitig aber auch Ausgangspunkte für weitere Untersuchungen gewonnen zu haben. In letzterem Betracht hatte ich nur angedeutet, wie die vorgetragenen geometrischen Überlegungen für Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Dimensionen zu verwerten seien. Ich hatte ferner die Ansicht entwickelt, daß man in ähnlicher Weise, wie v. Staudt, die projektivische Geometrie aufbauen könne, auch ohne über das Parallelenaxiom etwas festzusetzen. Es sind hauptsächlich diese beiden Punkte, welche im folgenden im Sinne des damaligen Aufsatzes, aber in der fortentwickelten Form, die sie inzwischen bei mir gewonnen haben, dargelegt werden sollen. Wenn ich dabei oft weiter aushole und gelegentlich vielleicht etwas weitläufig werde, so trieb mich dazu der Wunsch, möglichst verständlich zu schreiben und dadurch von vornherein Zweifel an der Richtigkeit der Betrachtung zu beseitigen, welche sich bei so abstrakten Gegenständen nur zu leicht aufdrängen. Zugleich mögen dann dadurch die Bedenken entfernt werden, welche mir von verschiedenen Seiten her hinsichtlich meiner früheren Arbeit geäußert worden sind.

Die nachstehenden Untersuchungen sind wie die damaligen rein mathematischen Inhaltes. Es bleiben ihnen also durchaus die Fragen fern, welche Vorteile aus den bezüglichen mathematischen Resultaten für die Raumanschauung oder überhaupt die Naturerkenntnis gewonnen werden können. Aber es ist vielleicht nicht überflüssig, nach dieser Seite hin den Gegenstand hier zu präzisieren, da nur zu vielfach diese mathematischen

Betrachtungen mit eventuellen Anwendungen derselben untermischt und verwechselt werden.

Die Untersuchungen der Nicht-Euklidischen Geometrie haben durchaus nicht den Zweck, über die Gültigkeit des Parallelenaxioms zu entscheiden, sondern es handelt sich in denselben nur um die Frage: *ob das Parallelenaxiom eine mathematische Folge der übrigen bei Euklid aufgeführten Axiome ist;* eine Frage, die durch die fraglichen Untersuchungen definitiv mit *Nein* beantwortet wird. Denn sie haben ergeben, daß man ein in sich konsequentes Lehrgebäude auf Grund allein der übrigen Axiome aufbauen kann, welches das Lehrgebäude der Euklidischen Geometrie nur als einen speziellen Fall umfaßt.

Ähnliche Untersuchungen könnte man und sollte man mit Bezug auf alle anderen Voraussetzungen, die unseren geometrischen Vorstellungen zugrunde liegen, anstellen. Es ist die Nicht-Euklidische Geometrie ein erster Schritt in einer Richtung, deren allgemeine Möglichkeit durch Riemanns Arbeit[1]) „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zugrunde liegen" vorgezeichnet ist. Ein ähnlicher Schritt ist es, wenn man das Axiom von der unendlichen Länge der Geraden fallen läßt, wie ich dies in meinem vorigen Aufsatze im Anschlusse an die Arbeiten von Riemann und Helmholtz getan habe. Dann ist außer der Nicht-Euklidischen Geometrie im Sinne von Lobatschewsky, Bolyai, oder, wie ich sie nenne, der hyperbolischen Geometrie, noch eine zweite Geometrie, die elliptische, möglich; zwischen beiden bildet die gewöhnliche, parabolische Geometrie den Übergangsfall.

Allerdings sind wohl nicht immer und nicht alle Bearbeiter der Nicht-Euklidischen Geometrie oder verwandter Gegenstände der hier entwickelten Ansicht gewesen. Man möchte dies wenigstens schließen, wenn z. B. Bolyai die Abhandlung, in der er das Parallelenaxiom fallen läßt, „über die absolut wahre Raumlehre" betitelt. Auch in der neuesten Zeit scheint diese Auffassung noch nicht ganz verschwunden, so daß es wohl nicht überflüssig ist, hier ausdrücklich auf dieselbe als eine von der hier vorgetragenen abweichende aufmerksam zu machen.

Man kann fragen, ob solche Untersuchungen, wie sie durch die Nicht-Euklidische Geometrie als Beispiel vertreten sind, noch außerhalb des speziellen Zweckes, um dessen willen sie entwickelt werden, anderweitigen Nutzen besitzen und in welcher Richtung derselbe zu suchen ist. Mir scheint ein zweifacher Nutzen zu resultieren, ein rein mathematischer und

[1]) Bei Riemann ist die rein mathematische Betrachtung nicht überall von den Betrachtungen mehr spekulativen Charakters geschieden, die sich auf die Objektivität der Raumanschauung usw. beziehen. Auf diesen Umstand ist die vielfach über die bez. Dinge verbreitete Unklarheit wohl zum großen Teile zurückzuführen.

ein, wenn die Ausdrucksweise gestattet ist, physikalischer. In erster Linie erweitern die Untersuchungen den Kreis unserer mathematischen Begriffe. So haben die Betrachtungen über Parallelentheorie, ganz allgemein zu reden, *einen* wesentlich neuen Begriff geliefert, den Begriff einer beliebig ausgedehnten Mannigfaltigkeit von konstantem Krümmungsmaße. Dann aber — und das ist die physikalische Wichtigkeit solcher Forschungen — gewinnen wir durch dieselben Material, um die uns geläufigen geometrischen Vorstellungen nach ihrer Notwendigkeit beurteilen und eine Abänderung derselben, falls eine solche wünschenswert scheinen sollte, zweckmäßig treffen zu können. Ich kann in dieser Beziehung nur (in etwas freier Fassung) die Schlußworte der Riemannschen Arbeit zitieren:

„*Solche Untersuchungen, welche, wie die hier geführte, von allgemeinen Begriffen ausgehen, können dazu dienen, daß die Umarbeitung der überkommenen räumlich-mechanischen Vorstellungen nicht durch die Beschränktheit der Begriffe gehindert und der Fortschritt im Erkennen des Zusammenhanges der Dinge nicht durch überlieferte Vorurteile gehemmt wird.*"

Aber einseitig würde es sein, wollte man, wie dies gelegentlich von physikalischer oder philosophischer Seite geschieht, in einer solchen eventuellen Verwendung der betreffenden Untersuchungen den einzigen Nutzen derselben erblicken; und es ist jedenfalls nur vorteilhaft, wenn man die Fragen trennt, und zunächst die rein mathematischen Betrachtungen, welche die Grundlagen für die sich anschließenden spekulativen sind, durcharbeitet. —

Die folgenden Ausführungen zerfallen in zwei Abschnitte, die unter einander nur lose zusammenhängen und hier nur vereinigt sein mögen, weil sie sich beide an den früheren Aufsatz anlehnen.

Der erste Abschnitt ist durch den Umstand hervorgerufen, daß in meiner früheren Arbeit die Frage nach dem Begriffe einer Mannigfaltigkeit von konstantem Krümmungsmaße, und die Frage, wie unsere räumlichen Anschauungen zu modifizieren wären, falls der Raum ein nicht verschwindendes Krümmungsmaß besäße, nicht voneinander getrennt behandelt sind. Es scheint dies bei dem Verständnisse der Arbeit eine Hauptschwierigkeit zu bilden, und deshalb sollen die dort mit Bezug auf die erste Frage gewonnenen Resultate hier ohne alle Verbindung mit der zweiten Frage noch einmal ausgesprochen und ihrem Sinne und ihrer Tragweite nach deutlich begrenzt werden. Ich stelle mich dabei auf den rein analytischen Standpunkt und handele sofort von Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Dimensionen: wenn ich dabei gelegentlich von geometrischen Dingen rede, so geschieht es nur, um abstrakte Begriffe an einem konkreten Bilde zu erläutern. Es wird dabei die gewöhnliche geometrische Anschauung mit ihrem Parallelen-Axiome zugrunde gelegt, was ja ein durchaus berechtigtes Hilfsmittel ist, auch wenn die objektive Gültigkeit des Parallelenaxioms (oder der anderen Axiome) als nicht feststehend betrachtet wird, da diese uns geläufige Anschauung in sich nicht widersprechend ist, also wirkliche mathematische Beziehungen in Evidenz setzt. Der begriffliche Unterschied zwischen einer Mannigfaltigkeit von konstantem Krümmungsmaße und dem, was ich eine projektivische Mannigfaltigkeit nenne — oder, was das geometrische Analogon ist: der Unterschied zwischen metrischer und projektivischer Geometrie wird dabei in möglichst bestimmter Form hervorgehoben, da so erst die Resultate einen durchsichtigen Inhalt erhalten. Ich glaube nicht, daß die Art und Weise, wie ich diesen Unterschied einführe, wesentlich neu ist: vielmehr wird jeder, der darüber nachgedacht hat, den Unterschied in ähnlicher Weise auffassen; es ist mir aber nicht bekannt, daß diese Auffassung irgendwo dargestellt wäre und ich möchte sie hier um so weniger unerörtert lassen, als sie nach meiner Meinung für mathematische Fragen überhaupt von fundamentaler Bedeutung ist. Dementsprechend haben diese Auseinandersetzungen eine Ausdehnung gewonnen, hinter welcher die Partien, die sich insbesondere auf das konstante Krümmungsmaß beziehen, verhältnismäßig zurücktreten.[2]).

In dem zweiten Abschnitte begründe ich denn eingehender die bereits genannte Behauptung: daß man in ähnlicher Weise, wie v. Staudt, die projektivische Geometrie entwickeln kann, auch wenn man das Parallenaxiom nicht zugibt. Zu dem Zwecke zeige ich, daß nicht nur für die Ebenen und Geraden des Raumes, sondern überhaupt für jedes Flächen- und Kurvensystem, daß in einem endlichen Raumstücke ähnliche Lagenverhältnisse besitzt, wie man sie bei den Ebenen und Geraden voraussetzt, innerhalb des begrenzten Raumes die projektivische Geometrie gilt. Diese Untersuchung, die hier zum Beweise der genannten Behauptung geführt wird, scheint an und für sich von Interesse. Sie lehrt einmal ein merkwürdiges Theorem der Analysis situs kennen, insofern der oben angedeutete Satz[3]) nur von solchen räumlichen Dingen handelt, die bei einer stetigen Verzerrung des Raumes ungeändert bleiben, und kann also in diese noch wenig entwickelte geometrische Disziplin eingereiht werden; anderer-

[2]) [In diesem ersten Teil der nachstehenden Abhandlung handelt es sich schließlich um eine vorläufige Redaktion der Überlegungen, welche ich im Oktober desselben Jahres (1872) im meinem „Erlanger Programm" dargelegt habe (siehe unten Abh. XXVII). Fertiggestellt im Juni, ist diese erste Redaktion doch erst lange nach dem Erlanger Programm ausgegeben worden (nach den Angaben im Generalregister zu Bd. 50 der Math. Annalen erst Mitte Juni 1873). Ursache der Verzögerung war der große Setzerstreik von 1872/3. — Über die Entstehung der in Betracht kommenden Ideen wird weiter unten im Zusammenhang zu berichten sein, S. 411—412. K.]

[3]) Ich habe diesen Satz bereits in den Gött. Nachrichten 1872, 5. Juni mitgeteilt. [S. Abh. XVII dieser Ausgabe.]

seits kann man sie als einen Schritt in der oben angedeuteten Untersuchungsrichtung der Axiome der Geometrie betrachten, insofern sie von weniger Annahmen ausgeht, als man den Ebenen und Geraden des Raumes gewöhnlich beilegt, und doch das Vorhandensein einer Reihe denselben sonst zukommender Eigenschaften nachweist.

Erster Abschnitt.

Die Mannigfaltigkeit von konstantem Krümmungsmaße, die projektivische Mannigfaltigkeit und ihr gegenseitiges Verhältnis.

§ 1.

Begriff einer Mannigfaltigkeit von beliebig vielen Dimensionen, wie er im folgenden zugrunde gelegt wird.

Wenn n Veränderliche

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

gegeben sind, so konstituieren die n-fach unendlich vielen Wertsysteme, die man erhält, wenn man die x unabhängig voneinander die reellen Werte von $-\infty$ bis $+\infty$ durchlaufen läßt, dasjenige, was hier, in Übereinstimmung mit der gewöhnlichen Bezeichnungsweise, *eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen* genannt werden soll. Das einzelne Wertsystem

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

werde als ein *Element* derselben bezeichnet.

Für $n = 3$ kann man — und das ist der ursprüngliche Grundgedanke der analytischen Geometrie — die Elemente der bez. Mannigfaltigkeit durch die Punkte des Raumes, die Mannigfaltigkeit selbst also durch den als Punktaggregat gedachten Raum vorgestellt sein lassen. Wir werden hier und im folgenden diese anschauliche und uns geläufige Interpretation eines einzelnen Falles benutzen, um uns an ihr jedesmal diejenigen Ideen zu bilden, welche auf den allgemeinen Mannigfaltigkeitsbegriff übertragen werden sollen. Den Punktraum denken wir uns dabei, wie bereits in der Einleitung gesagt, mit den Eigenschaften ausgerüstet, die wir ihm gewöhnlich, d. h. in der Euklidischen Geometrie beilegen.

Im folgenden soll bei Betrachtung der Mannigfaltigkeiten gewöhnlich von algebraischen Gebilden und algebraischen Prozessen gehandelt werden. In solchen Fällen mögen wir, wie dies in der neueren Geometrie geschieht, zu den bisherigen Elementen der Mannigfaltigkeit neue, *komplexe* hinzufügen, indem wir den n Variabeln

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

fortan gestatten, beliebige komplexe Werte anzunehmen. Dabei wird es, wieder wie in der Geometrie, dennoch gestattet sein, der Ausdrucksweise nach an einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit festzuhalten; der Vergleich mit der in der Geometrie üblichen Redeweise wird alle Schwierigkeiten in dieser Richtung fortheben.

§ 2.

Transformationen und Transformationsgruppen.

Als eine *Transformation* der Mannigfaltigkeit in sich selbst sei der Übergang verstanden, welcher von jedem Elemente zu einem (oder einigen) zugeordneten führt. Man mag die Transformation durch n Gleichungen bestimmen, nach welchen das zugeordnete Element von dem jedesmaligen ursprünglichen abhängt. Die Art der Gleichungen und ihre gegenseitige Beziehung ist für den Begriff zunächst gleichgültig; im folgenden werden wir aber immer voraussetzen, daß sie umkehrbar sind. Die umgekehrten Gleichungen repräsentieren, was die *umgekehrte Transformation* heißen soll. Bezeichnet man, wie im folgenden geschehen soll, eine Transformation durch einen Buchstaben $A, B, \ldots$, die Zusammensetzung zweier Transformationen A, B durch das Symbol (Produkt) AB, so wird die umgekehrte Transformation von A durch A^{-1} darzustellen sein.

Wir bemerken ferner, daß die Transformationen, die weiterhin vorkommen, wesentlich *algebraische* sind, und daß wir in solchen Fällen die Mannigfaltigkeit immer als eine komplexe Mannigfaltigkeit und die Transformation als gleichzeitig für die komplexen Elemente eintretend ansehen.

Sei nun eine Reihe von Transformationen $A, B, C \ldots$ gegeben. *Wenn diese Reihe die Eigenschaft besitzt, daß je zwei ihrer Transformationen zusammengesetzt eine Transformation ergeben, die selbst wieder der Reihe angehört, so soll sie eine Transformationsgruppe*[4] *heißen.*

Beispiele für diesen Begriff mag man sich an der durch den Punktraum versinnlichten Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen bilden. Eine jede Bewegung, eine jede Kollineation ist eine räumliche Transformation. Eine *Gruppe* bilden z. B. die Gesamtheit aller Bewegungen; denn zwei Bewegungen zusammengesetzt ergeben eine neue Bewegung. Eine *Gruppe* bilden ferner etwa die Gesamtheit aller Kollineationen, insbesondere diejenigen Kollineationen, die ein bestimmtes Gebilde, z. B. eine Fläche zweiten Grades, in sich überführen. Es ist übrigens zum Begriffe der

[4]) Name wie Definition sind herübergekommen von der analogen Begriffsbildung der Substitutionstheorie, die sich nur dadurch von der hier vorgetragenen unterscheidet, daß die in ihr betrachteten Mannigfaltigkeiten aus einer endlichen Zahl diskreter Elemente bestehen. In einem früheren Aufsatze (Math. Ann., Bd. 4 [s. Abh. XXVI dieser Ausgabe]) haben Lie und ich das, was hier Transformationsgruppe heißt, als ein „geschlossenes System von Transformationen" bezeichnet. [Um die Auffassungsweise des Gruppenbegriffs hier und im Erlanger Programm korrekt zu formulieren, muß bei Gruppen ausdrücklich noch vorausgesetzt werden, (wie dies sehr bald von Lie bemerkt wurde), daß mit jeder Operation auch deren inverse in der Gruppe enthalten sei. K.]

Gruppe durchaus nicht wesentlich, daß die sie konstituierenden Transformationen, wie in den genannten Beispielen, an Zahl unendlich sind und sich kontinuierlich aneinander anschließen, obwohl dies der Charakter derjenigen Gruppen sein wird, die im folgenden gebraucht werden. Vielmehr bilden z. B. die unendlich vielen ruckweise aufeinander folgenden Verschiebungen, welche eine Sinuslinie mit sich selbst zur Deckung bringen, eine Gruppe; ebenso die in endlicher Anzahl vorhandenen Bewegungen, welche einen Würfel mit sich selbst zur Deckung bringen[5]). Ähnliche Unterscheidungen finden bei den Transformationsgruppen in beliebigen Mannigfaltigkeiten ihre Stelle, doch mag die nähere Erörterung der sich anschließenden Fragen als für das Folgende unnötig hier unterbleiben.

Zwei Transformationsgruppen heißen *ähnlich*[6]), wenn man die Transformationen der einen Gruppe so den Transformationen der anderen Gruppe zuordnen kann, daß die Zusammensetzung entsprechender Transformationen entsprechende Transformationen ergibt. Eine Transformationsgruppe, welche mit einer gegebenen ähnlich ist, erhält man z. B., wenn man mit allen Transformationen A der gegebenen Gruppe eine Transformation C und deren umgekehrte C^{-1} in der Art verbindet, daß die Transformationen $C^{-1}AC$ entstehen. Man kann dies so aussprechen: Die Transformationen A führen die ursprünglichen Elemente der Mannigfaltigkeiten bez. in neue über. Auf die ursprünglichen und die neuen wende man gleichzeitig die Transformation C an. So drücken die Transformationen $C^{-1}AC$ die Beziehung aus, welche zwischen den Elementen besteht, die durch C aus den früher zugeordneten hervorgehen.

Man kann unter gewissen Einschränkungen beweisen, daß je zwei ähnliche Gruppen in diesem Sinne auseinander durch Anwendung einer Hilfstransformation C hervorgehen; für das Folgende haben wir die Begründung und die Begrenzung dieses Satzes nicht nötig, *wir wollen vielmehr unter zwei ähnlichen Transformationsgruppen schlechthin solche zwei verstehen, die durch Anwendung einer Transformation C aus einander entstanden sind.* Dabei braucht C noch durchaus keine eindeutige Transformation zu sein; sie kann recht wohl vieldeutig, selbst unendlich vieldeutig sein[7]).

[5]) In einem Aufsatze: Sur les groupes de mouvements [Annali di matematica. Ser 2, Bd. 2 (1869)] hat Camille Jordan alle Gruppen von Bewegungen aufgestellt.

[6]) Man vgl. immer die analoge Terminologie und Begriffsbildung der Substitutionstheorie.

[7]) Z. B. sollen, für $n = 2$, noch als ähnlich bezeichnet sein die Gruppen:

$$x_1' = x_1 + a_1, \quad x_2' = x_2 + a_2$$

und

$$y_1' = b_1 y_1, \quad y_2' = b_2 y_2,$$

weil sie durch die Substitution

$$x_i = \log y_i, \quad x_i' = \log y_i'$$

auseinander hervorgehen.

§ 3.

Die Hauptgruppe der räumlichen Transformationen.

Die Geometrie kann sich, unseren gewöhnlichen Vorstellungen nach[8]), überhaupt nur mit solchen Eigenschaften der räumlichen Gebilde befassen, welche unabhängig sind von der Stelle im Raume, die von den Gebilden eingenommen wird, sowie von der absoluten Größe der Gebilde. Auch kann sie nicht (immer ohne Zuhilfenahme eines dritten Körpers) zwischen den Eigenschaften eines Körpers und denen seines Spiegelbildes unterscheiden. Durch diese Sätze ist eine Gruppe räumlicher Transformationen charakterisiert — sie mag die *Hauptgruppe* genannt werden —, deren Transformationen die Gesamtheit der geometrischen Eigenschaften eines Gebildes unberührt lassen. Es setzt sich diese Gruppe zusammen aus den sechsfach unendlich vielen Bewegungen, aus den einfach unendlich vielen Ähnlichkeitstransformationen und aus der Transformation durch Spiegelung an einer Ebene.

Hatten wir seither den Punktraum schlechthin als eine dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit aufgefaßt, so können wir jetzt eine nähere Bestimmung hinzufügen, welche durch das Vorhandensein der Hauptgruppe räumlicher Transformationen bedingt wird:

Der Punktraum ist eine Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen, bei deren Behandlung man nur auf solche Eigenschaften auftretender Gebilde zu achten hat, die durch die Transformationen der Hauptgruppe ungeändert bleiben[9]).

Man übersieht bereits hier, wie von einer bestimmten Behandlung einer Mannigfaltigkeit von n Dimensionen erst dann die Rede sein kann, wenn eine Transformationsgruppe gegeben ist, welche die Eigenschaften, auf welche man achten will, charakterisiert als die durch die Transformationen der Gruppe unveränderlichen Relationen. Je umfangreicher die Gruppe ist, um so geringer wird die Zahl der bleibenden Eigenschaften und umgekehrt. Bestände die Gruppe aus der identischen Transformation, d. h. aus derjenigen, die jedes Element sich selbst zuordnet, so würde jedes Element der Mannigfaltigkeit bei deren Behandlung ein individuelles Interesse besitzen.

---

[8]) In der Nicht-Euklidischen Geometrie ist dies insofern anders, als die Verwandtschaft der Ähnlichkeit nicht existiert.

[9]) Dem Raume an und für sich kann man bekanntlich, nach der Plückerschen Auffassung, beliebig viele Dimensionen zuerteilen, je nach dem Gebilde, welches man als Raumelement zugrunde legen will. Aber die Hauptgruppe der Transformationen, welche die geometrischen Eigenschaften ungeändert läßt, ist von der Wahl des Raumelementes unabhängig. Der Raum erscheint also als das Bild einer beliebig ausgedehnten Mannigfaltigkeit, bei der jedesmal eine Transformationsgruppe von demselben Charakter adjungiert ist. Vgl. den folgenden Text.

§ 4.

Die verschiedenen Methoden der Geometrie sind durch eine zugehörige Transformationsgruppe charakterisiert.

Wenn man von bloß formellen Unterschieden absieht — also etwa davon, ob die Art der Behandlungweise in fortwährender Verbindung mit der räumlichen Anschauung oder unter Zuhilfenahme eines rechnenden Algorithmus geschieht — so wird man den Unterschied der in der Geometrie üblichen Methoden in der Art der bei der Behandlung adjungierten Transformationsgruppe erblicken müssen. Für alle geometrischen Betrachtungen ist, wie gesagt, von vornherein die Hauptgruppe der Transformationen gegeben. Wollte man nur einen Teil ihrer Transformationen in Betracht ziehen, so erhielte man solche geometrische Eigenschaften der räumlichen Gebilde, welche sich auf fest gedachte gegebene Elemente beziehen, die unter sich natürlich die eigentlichen, nicht von der Annahme fester Elemente abhängigen geometrischen Beziehungen begreifen. Aber es bleibt unbenommen, der allgemeinen geometrischen Betrachtung statt der Hauptgruppe eine weitere, die Hauptgruppe umfassende Gruppe von Transformationen zugrunde zu legen. Und in der Einführung solcher allgemeinerer Gruppen an Stelle der Hauptgruppe besteht das Wesen der verschiedenen geometrischen Methoden, die sich in der Neuzeit entwickelt haben, insbesondere, worauf es uns hier ankommt, das Wesen *der projektivischen Geometrie*. Sie faßt an den räumlichen Dingen nur das auf, was durch kollineare Umformungen nicht geändert wird, *sie adjungiert sich also in dem eben erörterten Sinne die Gruppe aller kollinearen Umformungen*. Die Transformationen der Hauptgruppe sind dann[10]) dadurch definiert, daß sie diejenigen reellen Kollineationen sind, welche ein individuelles Gebilde, den sogenannten unendlich fernen imaginären Kreis ungeändert lassen. Die nicht projektivischen Eigenschaften räumlicher Gebilde erscheinen als kovariante Beziehungen der Gebilde zum imaginären Kreise. Ein anderes Beispiel, welches hier, um die Verschiedenartigkeit der möglichen Methoden hervorzuheben, erwähnt sein mag, gibt diejenige Behandlungsweise geometrischer Dinge, wie sie in der sog. *Analysis situs* gehandhabt wird. Hier besteht die Gruppe der adjungierten räumlichen Transformationen aus denjenigen Raumtransformationen, welche man Verzerrungen (Deformationen) des Raumes nennt und die dadurch definiert sind, daß sie sich aus unendlich kleinen reellen Raumtransformationen zu-

---

[10]) Man muß bei der projektivischen Geometrie verschiedene Stadien der Entwicklung unterscheiden. Lange Zeit dachte man bei einer Kollineation immer an eine reelle Kollineation, und noch immer wohl ist die Anschauung, daß man in der projektivischen Geometrie alle vorkommenden Größen als unbedingt komplex veränderlich auffassen soll, nicht überall durchgedrungen.

sammensetzen lassen. Indem bei ihr der Begriff des Reellen wesentlich, der Begriff der Algebraischen zunächst überhaupt nicht vorhanden ist, so ist bei ihr das Punktgebiet des Raumes nicht durch komplexe Punkte zu erweitern.

Eine nähere Durchführung des hier entwickelten Gesichtspunktes zur Klassifizierung der verschiedenen geometrischen Methoden scheint sehr interessant, es würde eine solche aber hier außerhalb des eigentlichen Themas liegen, und es mag daher bei den genannten Beispielen, die zur Illustration der allgemeinen Betrachtungen des folgenden Paragraphen ausreichen, sein Bewenden haben[11]).

§ 5.

Behandlungsweise der Mannigfaltigkeiten aus n Dimensionen.

Aus den vorigen beiden Paragraphen ist ersichtlich, wie die Behandlungsweise einer Mannigfaltigkeit von n Dimensionen *durch die Transformationsgruppe charakterisiert wird, welche man adjungiert.* Alle diejenigen Behandlungsweisen stimmen dabei im Wesen überein und können durch passende Einführung neuer Variabeln auch in formelle Übereinstimmung gebracht werden, welche *ähnliche* Transformationsgruppen benutzen. Es ist das bei der in § 3 entwickelten Definition von ähnlichen Gruppen selbstverständlich. Denn eine einmalige Transformation der Mannigfaltigkeit in sich selbst (die wir dort mit dem Buchstaben C bezeichnet hatten) kann auch als eine Einführung neuer Variabeln zur Behandlung der Mannigfaltigkeit, als eine Koordinatentransformation, angesehen werden, wobei denn die Gruppe *der* Änderungen, welche man als nicht in Betracht kommend ansieht, unberührt dieselbe bleibt.

Als einfachste Transformationsgruppe erscheint die Gruppe aller *linearen* Transformationen, hierunter diejenigen verstanden, welche statt der ursprünglichen Variabeln gebrochene lineare Funktionen derselben mit gemeinsamem Nenner einführen. Die auf sie gegründete Behandlungsweise[12])

[11]) Ich habe seitdem versucht, diese Verhältnisse in einem Programme: *Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen* (Erlangen 1872. Bei A. Deichert) [s. Abh. XXVII dieser Ausgabe] allgemein zu entwickeln.

[12]) Eine der frühesten Behandlungen des allgemeinen Mannigfaltigkeitsbegriffs findet sich in Graßmanns linealer Ausdehnungslehre von 1844. Seine Methode ist wenigstens in vielfacher Hinsicht eben die hier gemeinte projektivische; was hier Element der Mannigfaltigkeit heißt, heißt bei ihm extensive Größe. [Sehr merkwürdig ist und wieder nur als Ergebnis einseitiger Tradition zu verstehen, daß ich hier (wie auch im Erlanger Programm) zwischen der projektiven Geometrie und der gewöhnlichen metrischen Geometrie nicht die „affine" eingeschaltet habe (welche sich, bei Zugrundelegung nicht homogener Variabler, auf die Gruppe aller *ganzen* linearen Substitutionen der Veränderlichen stützt). Ich habe dies ausführlicher erst 1895—96 in meinen (seitdem autographierten) Vorlesungen über Zahlentheorie getan und später

der Mannigfaltigkeit — ich will sie die *projektivische* nennen — ist es, deren sich die *neuere Algebra* bedient (wobei es nur als ein Mittel zur übersichtlicheren Darstellung, allerdings als ein sehr wesentliches und der Natur der Sache durchaus entsprechendes Mittel erscheint, wenn man statt der n Veränderlichen, durch die ursprünglich das Element der Mannigfaltigkeit bestimmt wurde, $(n+1)$ homogene einführt). Der Namen „*Invariantentheorie*", den man der neueren Algebra beilegt, bezeichnet recht gut das Wesen, welches nach der hier dargelegten Auffassung überhaupt jeder Behandlungsweise einer Mannigfaltigkeit zukommt; es handelt sich immer darum bei gegebenem Umfange der Änderungen, die invarianten Beziehungen zu entdecken.

Zu einer anderen Behandlung der Mannigfaltigkeiten, die aber in der vorangeführten projektivischen Behandlung enthalten ist, insofern ihre Transformationsgruppe aus einem Teile der Gruppe aller linearen Transformationen besteht, wird man geführt, wenn man die Betrachtungen der gewöhnlichen metrischen Geometrie, bei denen die Hauptgruppe räumlicher Transformationen zugrunde gelegt ist, auf beliebig viele Veränderliche verallgemeinert[13]). Die bezüglichen Transformationen erscheinen vom Standpunkte der projektivischen Betrachtung als diejenigen reellen linearen Transformationen, welche ein individuelles Gebilde, das durch eine lineare und eine quadratische Gleichung vorgestellt wird, ungeändert lassen. Es mag die hier anknüpfende Behandlungsweise der Mannigfaltigkeit als die *gewöhnliche metrische* bezeichnet sein.

Man könnte sich ferner eine Behandlungsweise denken, welche der *Analysis situs* entspräche usw. usw.

Besonders betont sei noch einmal, daß *ähnliche* Transformationsgruppen zu identischen Behandlungsweisen Anlaß geben. Projektivisch mag deshalb geradezu jede Behandlungsweise heißen, welche eine Gruppe adjungiert, die durch passende Einführung neuer Veränderlichen auf die Gesamtheit der linearen Transformationen umgeformt werden kann usw.

Sodann sei noch auf einen Umstand aufmerksam gemacht, der zwar nicht im nächstfolgenden hervortritt, der aber für den zweiten Abschnitt dieses Aufsatzes von Bedeutung wird. Es ist, daß beliebige Transforma-

immer wieder vorangestellt. Erst so wird man den Arbeiten von Moebius und Graßmann wirklich gerecht, und auch erst hier findet (wenn man noch den Koordinatenanfangspunkt festläßt, und die Determinante $= 1$ nimmt, d. h. sich auf ganze, *homogene* lineare Substitutionen des Veränderlichen beschränkt), die algebraische Invariantentheorie ihre volle geometrische Deutung. (In der projektiven Geometrie kann immer nur das Verschwinden der „relativen" Invarianten, nicht ihr numerischer Wert, geometrisch erfaßt werden, aber man hatte sich früher, unter dem Einfluß wohl namentlich der Salmonschen Lehrbücher, gewöhnt, damit zufrieden zu sein). K.]

[13]) Hierher sind beispielsweise alle derartigen Betrachtungen zu rechnen, welche die gew. Krümmungstheorie auf n Dimensionen übertragen usw.

tionen einer Mannigfaltigkeit, sofern sie die implizite immer vorausgesetzten Stetigkeitseigenschaften haben, *für unendlich kleine Partien der Mannigfaltigkeit durch lineare Transformationen ersetzt werden können*[14]). Welcher Art also auch die Behandlungsweise ist, der man eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen unterwerfen mag, *für die $(n-1)$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit, welche von den von einem Elemente aus möglichen Fortschreitungsrichtungen zu benachbarten Elementen gebildet wird, ist sie in der projektivischen Behandlungsweise enthalten.*

§ 6.

Die Mannigfaltigkeit von konstantem nicht verschwindendem Krümmungsmaße.

Die vorhergehenden Paragraphen enthalten die notwendigen Auseinandersetzungen, um nunmehr den Begriff einer Mannigfaltigkeit von konstantem Krümmungsmaße einführen und sein Verhältnis zu dem Begriffe der projektivischen Mannigfaltigkeit erörtern zu können.

Wenn man einer Mannigfaltigkeit ein bestimmtes konstantes, nicht verschwindendes Krümmungsmaß beilegt[15]), so hat man dem bloßen Begriffe einer n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit ganz so, wie in den im vorigen Paragraphen aufgeführten Beispielen, als nähere Bestimmung eine Transformationsgruppe zugefügt, die durch die Forderung freier Beweglichkeit starrer Körper in bekannter Weise konstruiert wird[16]). Der Wert des dann notwendig konstanten Krümmungsmaßes kann noch durch bestimmte weitere Forderungen näher umgrenzt und endlich durch Einführung der Längeneinheit numerisch festgelegt werden (vgl. § 7).

Mann kann nun die Frage aufwerfen, ob die so eingeführte Behandlungsweise zu der projektivischen Behandlung der Mannigfaltigkeit in einer ähnlichen Beziehung steht, wie nach der bez. Bemerkung des vorigen Paragraphen die gewöhnliche metrische Methode; anders ausgedrückt: Die bei der gewöhnlichen metrischen Methode zugrunde gelegte Gruppe war bei passender Koordinatenbestimmung in der Gruppe der linearen Transformationen, allgemein zu reden also in einer mit dieser Gruppe ähnlichen Gruppe enthalten: trifft das bei der nun vorliegenden Behandlungsweise auch zu?

[14]) [Im Sinne moderner Auffassungen würde man bei dem im folgenden eingehaltenen Gedankengange den die Transformationen definierenden Funktionen selbstverständlicherweise die Differentiierbarkeit als Forderung auferlegen müssen. K.]

[15]) Man vgl. hierzu außer der Riemannschen Schrift namentlich Beltrami: Teoria generale degli spazii di curvatura costante. (Annali di Matematica. Serie 3, Bd. 2, 1868/69, Werke, Bd. I, 406—429.) Dieselbe ist von Hoüel übersetzt im Journal de l'École Normale Supérieure, Bd. 4.

[16]) Vgl. die Arbeiten von Riemann und Helmholtz, auf welche sich auch die im Texte gebrauchte geometrische Redeweise bezieht.

Die so gestellte Frage findet ihre Beantwortung in den Arbeiten Beltramis[17]). Derselbe zeigt nämlich: *daß man in einer Mannigfaltigkeit von konstantem Krümmungsmaße die Variabeln so wählen kann, daß die geodätischen Linien durch lineare Gleichungen dargestellt sind; daß ferner bei dieser Koordinatenbestimmung die Transformationen, welche die Maßverhältnisse ungeändert lassen, durch lineare Gleichungen dargestellt werden.* Von dem hier vorliegenden Gesichtspunkte aus wird man das dahin aussprechen: *daß die Transformationsgruppe, welche bei einer Mannigfaltigkeit adjungiert wird, wenn man ihr konstantes Krümmungsmaß beilegt, bei passender Koordinatenbestimmung in der Gruppe der linearen Transformationen enthalten ist,* woraus man sofort schließen wird: *daß die Behandlung einer Mannigfaltigkeit von konstantem Krümmungsmaße in der projektivischen Behandlung enthalten ist.*

Ich habe in meiner früheren Arbeit namentlich noch gezeigt, daß die Maßbestimmung, wie man sie unter Annahme eines konstanten Krümmungsmaßes erhält, mit der projektivischen zusammenfällt, welche man nach Cayleys Vorgange unter Zugrundelegung einer quadratischen Gleichung aufbauen kann, und dieses ist nach der analytischen Seite hin das wesentliche Resultat meiner Arbeit. Ich hatte damals dem Resultate unter bloßem Hinweis auf die Theorie mehrfach ausgedehnter Mannigfaltigkeiten die geometrische Einkleidung gegeben: daß die auf einen passenden Kegelschnitt, bez. eine passende Fläche zweiten Grades gegründete Cayleysche Maßbestimmung ein äquivalentes Bild für die Maßbestimmung in Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung bez. von zwei und drei Dimensionen abgibt. Und im Zusammenhange mit dem Vorhergehenden wird man das Resultat so formulieren: *Die Gruppe von Transformationen, welche die Maßbestimmung in einer Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung ungeändert lassen, besteht bei passender Koordinatenbestimmung aus der Gruppe derjenigen linearen Transformationen, welche eine quadratische Gleichung in sich überführen.*

Ich muß hier einen Unterschied erwähnen, der zwischen der vom Beltrami eingeschlagenen Darstellungsweise und der meinigen statt hat. Bei Beltrami wird immer nur von reellen Werten der Veränderlichen gesprochen, wenigstens die komplexe Variabilität der Argumente nicht prinzipiell eingeführt. In meiner vorigen Arbeit dagegen fasse ich, wie auch hier, zunächst die Veränderlichen als komplexe Veränderliche auf, und führe erst hinterher die Beschränkung auf das reelle Wertgebiet ein. Dadurch ist es möglich, den Aussagen, wie die vorstehenden sind, eine vollkommen allgemeine Form zu geben; achtet man nur auf reelle Werte der Variabeln, so treten

[17]) Vgl. besonders wieder die Teoria generale usw.

eine Reihe Beschränkungen hinzu, über welche man meinen früheren Aufsatz und die §§ 8, 9 dieses Abschnittes (S. 327—330) vergleichen mag.

Sodann erscheint bei Beltrami die Mannigfaltigkeit konstanter Krümmung als durch eine quadratische Gleichung aus einer gewöhnlich metrischen Mannigfaltigkeit von einer Dimension mehr ausgeschieden; während in meiner früheren Arbeit und auch hier von einer solchen umfassenderen Mannigfaltigkeit nicht die Rede ist. Hiermit hängt eine nach meiner Auffassung zu ändernde Behauptung bei Beltrami zusammen, auf die ich hier kurz eingehen will, um den Gegenstand wenigstens berührt zu haben, wenn er auch den Gang der allgemeinen Betrachtung unterbricht. Es heißt dort: in der Mannigfaltigkeit von konstantem positiven Krümmungsmaße gelte nicht allgemein das Axiom von der Geraden, d. h. die Forderung, daß die geodätische Linie durch zwei ihrer Punkte vollkommen bestimmt sei. Beltramis Überlegung ist dabei etwa folgende: Man betrachte eine Kugel als Bild einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit von konstantem positiven Krümmungsmaße; ihre größten Kreise repräsentieren die geodätischen Linien. Ein größter Kreis ist nun im allgemeinen durch zwei seiner Punkte bestimmt, nicht aber, wenn diese Punkte einander diametral gegenüberstehen. Ähnlich wird es, so schließt Beltrami, überhaupt bei Mannigfaltigkeiten auch von mehr Dimensionen sein, die positives Krümmungsmaß besitzen. — Aber die Kugel ist nach den Auseinandersetzungen meines vorigen Aufsatzes (§ 10) nicht das einfachste Bild für eine Mannigfaltigkeit von positivem konstantem Krümmungsmaße, sondern dies wird durch die Strahlen eines Strahlenbündels vorgestellt, wobei die von den Strahlen gebildeten Ebenen die geodätischen Kurven vertreten. Eine solche Ebene ist vollständig durch zwei der Strahlen bestimmt. Wenn es auf der Kugel nicht so ist, so liegt das daran, weil sie vermöge einer *zweideutigen* Verwandtschaft auf ihr zentrales Strahlenbündel bezogen ist. Wollte man ein Strahlenbündel auf eine beliebig gelegene Fläche n-ten Grades in gleicher Weise beziehen, so daß als Abstand zweier Punkte der Fläche der Winkel erscheint, den ihre Verbindungsgeraden mit dem Zentrum des Bündels einschließen, so würden gelegentlich n Punkte nicht ausreichen, um eine geodätische Kurve eindeutig zu bestimmen. Aber das würde in ganz ähnlicher Weise bei anderen Maßbestimmungen, auch der Maßbestimmung von konstantem negativem Krümmungsmaße der Fall sein können und hängt mit dem positiven konstanten Krümmungsmaße als solchem gar nicht zusammen[18]).

[18]) Wenn es im Raume vom Krümmungsmaße Null keine geschlossene Fläche gibt von konstantem positivem Krümmungsmaße, auf der sich die geodätischen Linien in weniger als zwei Punkten schneiden, so hat man darin vielmehr eine Eigenschaft der dem Raume beigelegten Maßbestimmung zu erblicken.

Endlich mag auch noch die folgende Bemerkung hier ihre Stelle finden, die bestimmt ist, die Fruchtbarkeit der Untersuchung von Mannigfaltigkeiten konstanten Krümmungsmaßes auch für andere Fragen, als diejenigen, welche man gewöhnlich mit ihr in Verbindung bringt, hervorzuheben, und die zugleich die Aussage, daß ähnliche Transformationsgruppen identische Behandlungsweise nach sich ziehen, illustriert. Jede Behandlungsweise einer Mannigfaltigkeit, welche die linearen Transformationen in Betracht zieht, die eine quadratische Gleichung ungeändert lassen, muß nach dieser Behauptung mit der Behandlung der Mannigfaltigkeit als einer solchen von konstanter Krümmung übereinstimmen. Nun aber habe ich bei einer früheren Gelegenheit gezeigt (Math. Ann., Bd. 5 [s. Abh. VIII dieser Ausgabe]), daß die Theorie der binären Formen eine Transformationsgruppe benutzt, die mit der Gruppe der linearen Transformationen eines Kegelschnittes in sich selbst ähnlich ist, daß ein Gleiches ferner stattfindet mit den kollinearen und dualistischen Umformungen des Raumes und den linearen Transformationen einer quadratischen Gleichung zwischen fünf (sechs homogenen) Variabeln in sich selbst. Man muß zu diesem Zwecke als Element der geraden Linie nur das Punktepaar, als Element des Raumes den linearen Linienkomplex betrachten. Wir werden dieses Resultat jetzt so aussprechen können: *Die Theorie der binären und quaternären Formen ist bez. identisch mit der Theorie einer Mannigfaltigkeit konstanten Krümmungsmaßes von zwei und von fünf Dimensionen.* Jede Eigenschaft binärer Formen also ist auch eine Eigenschaft der Nicht-Euklidischen Geometrie in der Ebene, und umgekehrt. Die hiermit angedeutete interessante Analogie weiter auszuführen, ist hier nicht der Ort. Aber es sei noch einmal betont, daß so schlechthin ausgesprochen, wie vorstehend geschehen, die Analogie nur gilt, sowie von dem Unterschiede von Reell und Imaginär abstrahiert wird; auch sind, was nicht ausdrücklich erwähnt wurde, die vorkommenden quadratischen Gleichungen als allgemeine ihrer Art, d. h. als Gleichungen mit nicht verschwindender Determinante vorausgesetzt.

§ 7.

Ableitung des Begriffs einer Mannigfaltigkeit von konstantem Krümmungsmaße aus demjenigen der projektivischen Mannigfaltigkeit.

Die Auseinandersetzungen des vorigen Paragraphen begründen nun die folgende Methode, um zu der Vorstellung einer Mannigfaltigkeit von konstanter Krümmung zu gelangen:

1. Man entwickele die projektivische Behandlungsweise einer Mannigfaltigkeit von beliebig vielen Dimensionen, im Anschluß daran den Begriff algebraischer Gebilde und komplexer Elemente.

2. Man gründe auf ein Gebilde, welches durch eine quadratische Gleichung (von nicht verschwindender Determinante) zwischen den projektivischen Koordinaten dargestellt wird, zunächst ohne auf den Unterschied von Reell und Imaginär zu achten, die Cayleysche Maßbestimmung.

3. Man beschränke sich auf die Betrachtung quadratischer Gleichungen mit reellen Koeffizienten, und untersuche, welche besonderen Eigenschaften die auf eine solche Gleichung gegründete Maßbestimmung für die reellen Elemente besitzt je nach der *Art* der gegebenen Gleichung. Unter der Einteilung der quadratischen Gleichungen mit reellen Koeffizienten in *Arten* ist dabei die Unterscheidung derselben nach ihrem Verhalten gegenüber reellen Umformungen in die Summe von Quadraten gemeint. Bei jeder solchen Umformung ist bekanntlich der Unterschied in der Zahl der resultierenden positiven und negativen Quadraten ein konstanter, und hierauf gründet sich die fragliche Einteilung.

Hat die zugrunde gelegte und auf die Summe von Quadraten transformierte Gleichung lauter übereinstimmende Zeichen, so ergibt die auf sie gegründete Cayleysche Maßbestimmung die Vorstellung der Mannigfaltigkeit von konstanter *positiver* Krümmung. Die konstante *negative* Krümmung resultiert, wenn nur ein Zeichen von den übrigen verschieden vorausgesetzt wird. Die auf quadratische Gleichungen der übrigen Arten gegründeten Maßbestimmungen finden in der Theorie der Mannigfaltigkeiten von konstanter Krümmung, wie sie gewöhnlich vorgetragen wird, keine Stelle. Denn bei der letzteren setzt man von vornherein voraus, daß die Entfernung reeller konsekutiver Elemente reell sei, man nimmt entsprechend das Bogenelement als eine *definite* quadratische Form der Koordinaten-Differentiale an, und diese Annahme paßt nicht auf die noch übrigen Arten von quadratischen Gleichungen. Um diese Verhältnisse deutlich zu übersehen, denke man an die Cayleysche Maßbestimmung, die man im Raume auf eine Fläche zweiten Grades gründen kann. Ist die Fläche eine imaginäre, so hat man die positive Krümmung, ist sie ein Ellipsoid oder zweischaliges Hyperboloid, so herrscht im Innern die negative Krümmung. Ist aber die Fläche ein einschaliges Hyperboloid, so gibt es keine Partie des Raumes, von deren Punkten aus nicht reelle Kegel an die Fläche gingen; diese Kegel bezeichnen Fortschreitungsrichtungen von der Länge Null; das Bogenelement wird nicht mehr durch eine definite Form der Differentiale dargestellt (vgl. hierzu die §§ 11, 12, 16, 18 meines ersten Aufsatzes).

Auf diese Weise ist der Begriff einer Mannigfaltigkeit von konstantem Krümmungsmaße gewonnen. Man mag hinterher die Untersuchung durchführen, welche Verhältnisse in einer Mannigfaltigkeit durch die bloße Forderung der freien Beweglichkeit starrer Körper definiert werden. Es ist diese freie Beweglichkeit eine Eigenschaft der Cayleyschen Maßbestimmung; die Untersuchung zeigt, daß ihre Annahme auch notwendig zur Cayleyschen Maßbestimmung hinführt[19]). Dabei erhält man zunächst *alle* Fälle der Cayleyschen Maßbestimmung und die beiden, gewöhnlich allein betrachteten, erscheinen erst als die einzig möglichen, wenn man die Forderung hinzufügt, daß das Bogenelement durch eine definite Form der Differentiale dargestellt wird (oder eine äquivalente Forderung).

In den nun folgenden beiden Paragraphen mögen einige Bemerkungen ihre Stelle finden, welche mit dem Vorhergehenden wenig zusammenhängen, die aber einmal als eine Ergänzung meines vorigen Aufsatzes in einzelnen Punkten zu betrachten sind, andererseits auch bei dem zweiten hier folgenden Abschnitte vorausgesetzt werden müssen.

§ 8.

Ableitung der projektivischen Behandlungsweise einer Mannigfaltigkeit von konstanter Krümmung.

Der vorhin skizzierte Weg, vermöge dessen man von den projektivischen Vorstellungen zu der Vorstellung eines konstanten Krümmungsmaßes gelangt, zeichnet vor, wie das Umgekehrte zu leisten ist, und es mag hier nur kurz die hauptsächliche dabei zu benutzende Formel hingestellt werden. Dabei sei es gestattet, den Ausdruck so zu wählen, daß er sich an das für zwei oder drei Dimensionen in meinem früheren Aufsatze in der Ebene und im Raume aufgestellte Bild anschließt. Wir denken uns also in der Ebene oder im Raume Maßverhältnisse gegeben, wie sie sich unter der Annahme konstanter Krümmung gestalten; die gerade Linie sei als kürzeste Linie zwischen zwei Punkten definiert. Wie bestimmt man diejenigen Koordinaten, in welchen die Gerade durch lineare Gleichungen ausgedrückt wird? Aus der projektivischen Geometrie ist bekannt, daß die bez. Koordinaten die relativen Werte gewisser Doppelverhältnisse vorstellen, und die Frage kommt also auf die folgende zurück: *Welche Funktion der gegenseitigen Entfernungen von vier Punkten einer Geraden ist deren Doppelverhältnis?*

Seien vier Punkte einer Geraden: x, y, z, t gegeben. Auf der Geraden befinden sich gemäß der Cayleyschen Vorstellung zwei unendlich ferne Punkte o, o' und es ist die Entfernung etwa von x und y:

$$(x, y) = c \, . \, \log [x, y, o, o'],$$

[19]) Man kann diesen Beweis sehr einfach stellen, worauf ich gelegentlich zurückzukommen gedenke.

wo c eine charakteristische Konstante[20]) und $[x, y, o, o']$ das Doppelverhältnis von x, y zu o, o' bedeutet. Hieraus:

$$[x, y, o, o'] = e^{\frac{(x\,y)}{c}}.$$

Nun ist aber:

$$[x, y, o, o'] = 1 - [x, o, y, o'];$$

ferner:

$$[x, y, z, t] = \frac{[x, o, z, o']\,[y, o, t, o']}{[x, o, t, o']\,[y, o, z, o']}.$$

Also:

$$[x, y, z, t] = \frac{\left(e^{\frac{(x,z)}{c}} - 1\right) \cdot \left(e^{\frac{(y,t)}{c}} - 1\right)}{\left(e^{\frac{(x,t)}{c}} - 1\right) \cdot \left(e^{\frac{(y,z)}{c}} - 1\right)}$$

und als diese Funktion der Entfernungen vier in gerader Linie befindlicher Punkte ist also das Doppelverhältnis zu definieren, — womit der Übergang zur projektivischen Geometrie vermittelt ist[21]). Das heißt: hat man unter Voraussetzung konstanten Krümmungsmaßes irgendein Formelsystem, welches gestattet, die Entfernung zweier Punkte zu bestimmen, nennt dann die aus den Entfernungen von vier Punkten einer kürzesten Linie nach der vorstehenden Formel gebildete Funktion ein Doppelverhältnis, führt endlich eine auf derartige Doppelverhältnisse gegründete Koordinatenbestimmung ein, so wird die Gleichung der kürzesten Linie linear, und die projektivische Behandlung kann beginnen.

§ 9.

Besondere Betrachtung der reellen Elemente. Einführung idealer Elemente.

Sei wieder in der Ebene, die uns die Mannigfaltigkeiten konstanter Krümmung überhaupt vertreten soll, eine auf einen Kegelschnitt gegründete projektivische Maßbestimmung gegeben, so mögen wir zuerst eine

[20]) $-\frac{1}{4c^2}$ ist das Krümmungsmaß.

[21]) Man kann, da für vier in gerader Linie liegende Punkte offenbar

$$\frac{e^{\frac{(x,z)}{2c}} \cdot e^{\frac{(y,t)}{2c}}}{e^{\frac{(x,t)}{2c}} \cdot e^{\frac{(y,z)}{2c}}} = 1,$$

die Formel des Textes auch so schreiben:

$$[x, y, z, t] = \frac{\left(e^{\frac{(x,z)}{2c}} - e^{-\frac{(x,z)}{2c}}\right) \cdot \left(e^{\frac{(y,t)}{2c}} - e^{-\frac{(y,t)}{2c}}\right)}{\left(e^{\frac{(x,t)}{2c}} - e^{-\frac{(x,t)}{2c}}\right) \cdot \left(e^{\frac{(y,z)}{2c}} - e^{-\frac{(y,z)}{2c}}\right)};$$

metrische Koordinatenbestimmung treffen, etwa indem wir den Punkt durch seine Abstände von zwei festen Geraden definieren, sodann eine zweite, projektivische Koordinatenbestimmung, nach Anleitung des vorigen Paragraphen.

Ist das konstante Krümmungsmaß positiv, so werden den reellen Koordinatenwerten der einen Art immer reelle Koordinatenwerte der anderen entsprechen, und zwar in der Weise, daß zu jedem Paare metrischer Koordinaten ein Paar projektivischer zugehört, umgekehrt aber zu jedem Paare projektivischer unendlich viele Paare metrischer, da der Abstand zweier Punkte eine reelle Periode hat, die man beliebig oft zufügen kann (vgl. § 11 des ersten Aufsatzes).

Ist dagegen das Krümmungsmaß negativ, so entsprechen reellen metrischen Koordinaten immer auch reelle projektivische, nicht aber umgekehrt. Die Punkte nämlich, welche außerhalb des dann reellen Fundamental-Kegelschnittes liegen, bilden mit den Punkten innerhalb reelle Doppelverhältnisse, haben aber von ihnen imaginäre Abstände.

Unter rein analytischem Gesichtspunkte hat dieser Umstand durchaus nichts Merkwürdiges; aber man kann die Frage etwas anders stellen, und dann verlangt sie eine besondere Erledigung, die denn hier gegeben werden soll, weil sie im folgenden Abschnitte benutzt wird.

Gesetzt, man befände sich auf der Ebene von konstanter, negativer Krümmung und man könne sich auf derselben frei bewegen; wie wird man geometrisch die Punkte, welche reelle Doppelverhältnisse, aber imaginäre Abstände besitzen, definieren können? Oder in etwas anderer Form: Gibt es geometrische Eigenschaften des durch Bewegung zugänglichen Gebietes der Ebene, die man in übersichtlicher Weise ausdrückt, wenn man solche *ideale* Punkte — deren Zulässigkeit aus ihrer analytischen Definition erhellt — adjungiert?

Erinnern wir zum Zwecke der Beantwortung an die Art und Weise, wie in der gewöhnlichen (parabolischen) Geometrie die uneigentlichen Elemente, d. h. die unendlich fernen und die komplexen Elemente definiert werden. Der unendlich ferne Punkt ist nur der Repräsentant des durch ihn gehenden Parallelstrahlenbüschels: weil dieser Büschel alle wesentlichen projektivischen Eigenschaften besitzt, die einem Büschel von Geraden zukommen, welche durch einen wirklichen Punkt gehen, ist die Ausdrucksweise: „ein unendlich ferner Punkt“ gestattet und brauchbar. Ganz ähn-

und setzt man nun, wie bei der gewöhnlichen Winkelbestimmung (vgl. meinen früheren Aufsatz), $c = \frac{\sqrt{-1}}{2}$, so kommt die bekannte Formel:

$$[x, y, z, t] = \frac{\sin(x, z) \cdot \sin(y, t)}{\sin(x, t) \cdot \sin(y, z)}.$$

lich ist es mit den Ausdrucksweisen: unendlich ferne Gerade, komplexer Punkt, komplexe Gerade usw., wie ja hier wohl nicht weiter erörtert zu werden braucht.

Durch einen Prożeß derselben Art kann man nun die in Rede stehenden idealen Punkte, ideale Gerade usw. einführen. Durch den idealen Punkt geht ein Büschel wirklicher Geraden hindurch, allerdings kein geschlossenes, sondern ein begrenztes. Aber diesem Büschel kommen alle projektivischen Eigenschaften zu, welche einem begrenzten Teile eines wirklichen Büschels eigentümlich sind. Wenn man z. B. ein Vierseit konstruiert, von welchem vier Ecken auf zwei festen Geraden des Büschels liegen, während sich die fünfte Ecke über eine dritte Gerade des Büschels bewegt, so findet mit der sechsten Ecke (falls diese überhaupt existiert, d. h. nicht schon in das ideale Gebiet fällt) dasselbe mit Bezug auf eine vierte Gerade des Büschels statt usw. Hier anknüpfend kann man rein geometrisch ideale Gerade, ideale Kurven usw. definieren, wobei nur Übung dazu gehört, um sich gerade so sicher in diesen idealen Gebilden wie in den gleichbenannten wirklichen Gebilden zurecht zu finden.

Zweiter Abschnitt.

Über die Möglichkeit, auch ohne Voraussetzung des Parallelenaxioms nach dem Vorgange v. Staudts die projektivische Geometrie aufzubauen.

§ 1.

Formulierung des Problems.

Der Aufbau der projektivischen Geometrie geschieht bei Staudt[22]) wie bekannt, durch bloßes Betrachten des Ineinanderliegens von Ebenen, Geraden und Punkten. Es werden die verschiedenen Grundgebilde, mit denen die projektivische Geometrie operiert: die gerade Punktreihe, das Ebenenbüschel usw. aufgestellt; dieselben erscheinen vermöge ihres Ineinanderliegens aufeinander bezogen, und die Beziehung ist der Art, daß man ohne weiteres zu dem Begriffe der harmonischen Teilung, weiterhin des Doppelverhältnisses gelangt, womit alle Grundlagen zur Behandlung, namentlich auch zur analytischen[23]) Behandlung der projektivischen Geo-

[22]) Die Geometrie der Lage. 1847. Man vgl. auch Reyes Geometrie der Lage, in welcher die Staudtschen Betrachtungen in übersichtlicher Form reproduziert wird.

[23]) Von analytischer Seite hat man die Staudtschen Untersuchungen nur zu wenig berücksichtigt, wozu die vielfach verbreitete Auffassung beigetragen haben mag,

metrie gegeben sind. Bei allen diesen Entwicklungen wird von Maßbestimmung nicht geredet, aber allerdings wird das Parallelenaxiom vorausgesetzt, weil sonst z. B. zwischen einer geraden Punktreihe und einem Ebenenbüschel kein vollständiges Entsprechen stattzufinden brauchte, sondern das Ebenenbüschel eine ganze Reihe von Ebenen enthalten könnte, welche der Punktreihe gar nicht begegnen.

Nun hat sich aber ergeben, worüber man den voraufgehenden Abschnitt dieser Arbeit vergleichen mag, daß die projektivische Geometrie auch gilt, wenn man das Parallelenaxiom nicht zugibt, wenn man vielmehr den Raum als eine Punkt-Mannigfaltigkeit von konstantem nicht verschwindendem Krümmungsmaße betrachtet. Nimmt man das Krümmungsmaß positiv — die Annahme der elliptischen Geometrie — so gilt die projektivische Geometrie unbeschränkt, während in der gewöhnlichen parabolischen Geometrie, die eine verschwindende Krümmung voraussetzt, zur vollen Geltung der projektivischen Beziehung die Adjunktion uneigentlicher Elemente, der unendlich fernen, notwendig wird. Ist das Krümmungsmaß negativ, so müssen außer den unendlich fernen Elementen noch weitere „ideale“ Elemente adjungiert werden, die aber, nach dem letzten Paragraphen des vorigen Abschnittes dieser Arbeit, eine vollkommen bestimmte rein geometrische Bedeutung haben, so gut wie die unendlich fernen Elemente der parabolischen Geometrie.

Ist in dem durch diese Bemerkungen beschränkten Sinne die projektivische Geometrie unabhängig von dem Parallelenaxiome gültig, so muß es möglich sein, dieselbe ohne vorherige Entscheidung über dieses Axiom aufzubauen; und wenn bei v. Staudt das Axiom mit in die Prämissen aufgenommen wird, so kann dasselbe nur eine beiläufige, keine wesentliche Rolle spielen. Immerhin wäre es möglich, daß der durch Staudt eingeschlagene Gang das Axiom wesentlich benutzte, aber es müßte sich dann der Gang so abändern lassen, daß das nicht mehr geschieht. Im nachfolgenden soll nun gezeigt werden, daß man bei Nichtannahme des

als sei die synthetische Form, nicht die projektivische Auffassungsweise das Wesentliche an der Staudtschen Geometrie. —

Die Betrachtungen von Staudts haben eine Lücke, welche nur durch ein bez. Axiom zu überbrücken scheint, wie dies im Texte noch weiter auseinander gesetzt werden soll. Dieselbe Lücke findet sich bei der Ausdehnung der Staudtschen Methode, wie sie hier beabsichtigt wird, an der entsprechenden Stelle wieder; sie betreffen aber nicht die Ausdehnung, sondern das zugrunde liegende Original. Geht man, wie im Texte zum Schlusse geschehen soll, von der rein räumlichen Auffassung ab und sucht den analytischen Inhalt der Staudtschen Betrachtungen, so verschwinden die Schwierigkeiten, und man kann dieselben hierdurch in der Forderung zusammenfassen: *daß man den Punktraum unter dem Bilde einer dreifach ausgedehnten Zahlenmannigfaltigkeit soll auffassen können*, eine Voraussetzung, die allen unseren räumlichen Spekulationen auch sonst zugrunde liegt.

Parallelenaxioms den von Staudt eingehaltenen Gang *nicht* wesentlich zu modifizieren braucht, eine Behauptung, die durch die vorhergehenden Auseinandersetzungen so wahrscheinlich gemacht wird, daß ich eine ausgeführte Begründung derselben für kaum nötig erachten würde, hätten sich nicht gerade dieser Behauptung gegenüber, die ich in meinem früheren Aufsatze aussprach (§ 17), von verschiedenen Seiten her Zweifel geltend gemacht.

Ein Aufbau der projektivischen Geometrie vor Entscheidung über das Parallelenaxiom ist aber deshalb für die theoretische Spekulation von Wert, weil man dann beim Raume in ähnlicher Weise die Maßbestimmung einführen könnte, wie dies in § 7 des vorhergehenden Abschnittes für Zahlenmannigfaltigkeiten geschah: man würde den Raum zunächst als eine projektivische Mannigfaltigkeit, sodann erst als eine Mannigfaltigkeit von konstanter Krümmung bezeichnen, und endlich durch Einführung des Parallelenaxioms den Wert des Krümmungsmaßes auf Null festsetzen. Man vergleiche hierzu den letzten Paragraphen (§ 18) meines früheren Aufsatzes, wo ich diese Art, die Axiome der Geometrie einzuführen, etwas näher auseinandersetze; eine ausführlichere Darlegung werde ich vielleicht bei einer anderen Gelegenheit geben können. Ich will übrigens ausdrücklich bemerken, um Mißverständnissen vorzubeugen, daß dieser theoretisch mögliche Weg nach meiner Meinung durchaus nicht theoretisch notwendig ist, daß er unter vielen möglichen Wegen eben nur einen konstituiert.

Um mich zu überzeugen, daß Staudts Betrachtungen das Parallelenaxiom nicht wesentlich benutzen, wie ich vermutete, und zugleich, um allen Beschränkungen, die aus der Nicht-Annahme des Parallelenaxioms hervorgehen können (wie z. B. in der hyperbolischen Geometrie), aus dem Wege zu gehen, stellte ich mir die Frage, ob man nicht alles, was Staudt braucht, leisten kann, wenn man sich bei den erforderlichen Konstruktionen das Gesetz auferlegt, nicht aus einem *gegebenen begrenzten* Raume hinauszutreten. Man denke sich also innerhalb eines begrenzten Raumes die Punkte, Geraden und Ebenen in ihrer gegenseitigen Lagenbeziehung gegeben. Ob außerhalb des gegebenen Raumstückes diese Gebilde überhaupt noch vorhanden sind, bleibe dahingestellt; um so mehr, welche Beziehungen sie eventuell zueinander haben. Wird es dann noch möglich sein, im Anschlusse an von Staudts Betrachtungsweisen innerhalb dieses Raumes die Geltung der projektivischen Beziehungen zu erschließen?

In dieser Form, die ich bereits in § 17 meiner vorigen Arbeit bezeichnete, soll im folgenden die Frage über die Unabhängigkeit der projektivischen Betrachtung von der Parallelentheorie untersucht werden.

§ 2.

Erweiterung des Problems. Aufstellung eines allgemeinen der Analysis situs angehörigen Satzes.

Das im vorigen Paragraphen aufgestellte Problem mag vorerst noch verallgemeinert werden. Der Ausgangspunkt der Staudtschen Betrachtung ist die Voraussetzung der Ebenen und Geraden, aber von deren Eigenschaften kommen, sofern man von dem hinzutretenden Parallelenaxiome absieht, wesentlich nur in Betracht, daß durch drei beliebig angenommene Punkte eine und nur eine Ebene geht, und daß durch zwei Punkte ein Ebenenbüschel geht, dessen Ebenen alle dieselbe Durchschnittsgerade besitzen. Ist dem so, so wird man, die Richtigkeit der im vorigen Paragraphen vorgetragenen Behauptung zugegeben, die Staudtschen Überlegungen auf jedes System von Flächen und Kurven übertragen können, welches, schlechthin ausgesprochen, dieselben Lagenbeziehungen in einem gegebenen begrenzten Raume besitzt; mit anderen Worten, man wird den folgenden Satz aufstellen können:

„In einem begrenzten Raume sei eine unendliche Zahl überall stetig gekrümmter, nur durch die Begrenzung des Raumes geendigter Flächen gegeben, welche die folgende Gruppierung besitzen:

1. Durch drei beliebig angenommene Punkte des gegebenen Raumes geht eine und nur eine Fläche des Systems hindurch.

2. Die Durchschnittskurve, welche zwei Flächen des Systems gemein haben können, gehört allen Flächen an, die zwei Punkte der Kurve enthalten."

„*Für ein solches System von Flächen und Kurven gilt die projektivische Geometrie in demselben Sinne wie gemäß den gewöhnlichen Vorstellungen für das System der Ebenen und Geraden in einem beliebig begrenzten Raume.* Anders ausgesprochen: *Man wird den Punkten des gegebenen Raumes in der Art Zahlen zuordnen (Koordinaten erteilen) können, daß die Flächen des Systems durch lineare Gleichungen dargestellt werden.*"

Die hiermit formulierte Behauptung muß, falls sie richtig ist, vor allen Definitionen von Ebene, Gerade usw. bewiesen werden können, denn sie benutzt nur die Begriffe der stetig gekrümmten Fläche, der kontinuierlich verlaufenden Kurve, die den Begriffen von Ebene und Gerade vorausgehen. Bei dem Beweise, wie er in den nächsten Paragraphen vorgetragen werden soll, sind dann auch die Ebenen und Geraden des Raumes nicht vorausgesetzt.

Daß es überhaupt Flächensysteme der hier gemeinten Art gibt, zeigt das Beispiel der Ebenen der gewöhnlichen Geometrie. Unbegrenzt viele solcher Flächensysteme erzeugt man, indem man sich die Ebenen in einem beliebig begrenzten Raume konstruiert denkt, und dann das Raumstück einer durch stetige Prozesse herbeiführbaren Deformation unterwirft. Und die vorgetragene Behauptung kann geradezu dahin ausgesprochen werden: daß jedes den Voraussetzungen des Satzes entsprechende Flächensystem aus dem Systeme der Ebenen in dieser Weise erzeugt werden kann.

Was diesen Satz sehr merkwürdig macht, ist, daß ein analoger Satz, den man für die Ebene formulieren möchte, nicht existiert. Ist nämlich in einem begrenzten Teile der Ebene ein Kurvensystem von der Eigenschaft gegeben, daß durch je zwei Punkte eine und nur eine Kurve hindurchgeht, so bedarf es noch weiterer Bedingungen, ehe die Kurven durch lineare Gleichungen zwischen Punktkoordinaten dargestellt werden können. Diesen negativen Satz mag man aus einem Theoreme Beltramis ableiten. Ein Kurvensystem der gemeinten Art erhält man nämlich z. B., wenn man auf einer begrenzten [nicht zu ausgedehnten] einfach zusammenhängenden Fläche die geodätischen Kurven zieht und dann die Fläche auf einen Teil der Ebene beliebig ausbreitet. Aber Beltrami zeigt[24]), daß nur den Flächen von konstantem Krümmungsmaße die Eigenschaft zukommt, sich so auf die Ebene übertragen zu lassen, daß sich alle geodätischen Kurven mit geraden Linien decken. Man darf es daher auch nicht, wie seither wohl geschehen, als einen *Kunstgriff* v. Staudts auffassen, wenn er behufs Begründung der projektivischen Geometrie auch der Ebene die stereometrischen Verhältnisse in Betracht zog; es entspricht sein Ausgangspunkt durchaus dem Wesen der Sache: es gilt für die geraden Linien der Ebene, falls man im Anschluß an Staudt die Betrachtung der Maßverhältnisse ausschließt, nur deshalb die projektivische Geometrie, weil Ebene und Gerade als Glieder eines räumlichen Systems aufgefaßt werden können.

Ich werde nun den aufgestellten Satz unter engstem Anschluß an die Staudtschen Betrachtungen rein geometrisch erweisen, wobei, wie bereits angedeutet, an einer Stelle (§ 5) eine Schwierigkeit auftritt, die sich auch bei Staudt findet und die nur durch ein Axiom zu beseitigen zu sein scheint: durch das Axiom, *daß man einen Punkt, der durch einen konvergenten unendlichen Prozeß erzeugt werden soll, als wirklich existierend annehmen darf.* Sodann gebe ich in den letzten Paragraphen einen analytischen Beweis des in Rede stehenden Satzes, der diese Lücke nicht mehr hat, insofern bei ihm der Raum als von vornherein unter dem Bilde einer Zahlenmannigfaltigkeit gegeben erscheint. Dieser analytische Beweis deckt zugleich den Grund auf, weshalb der Satz für den Raum, das Gebilde von drei Dimensionen, gilt, nicht aber mehr für die Ebene, das Gebilde von zwei Dimensionen.

Der Einfachheit wegen denke ich im folgenden den Raum, in welchem

[24]) In den Annali di Matematica. Serie I, Bd. 7 (1866), S. 185, Werke, Bd. I, S. 262—280.

die Flächen gegeben sind, sowie die Flächen selbst als einfach zusammenhängend; die Fälle, in denen ein mehrfacher Zusammenhang stattfindet, können auf diese Annahme zurückgeführt werden, indem man aus dem gegebenen Raume zunächst ein einfach zusammenhängendes Stück ausschneidet, innerhalb dessen die gegebenen Flächen einfach zusammenhängend sind.

§ 3.

Die Grundgebilde. Beziehung derselben aufeinander.

Das vorhin eingeführte Flächensystem heiße das System der Flächen F. Die Durchschnittskurve zweier F, falls eine solche existiert, heiße K.

Aus den Punkten des gegebenen Raumes, den Kurven K und den Flächen F setzen sich eine Reihe von Grundgebilden zusammen. Grundgebilde erster Stufe gibt es drei: die Kurve K, als Ort für Punkte aufgefaßt; das Büschel der Kurven K, welche innerhalb einer F durch einen Punkt gehen; das Büschel der F, welche eine K enthalten. Man hat ferner vier Grundgebilde zweiter Stufe: die F, aufgefaßt als Punktgebilde oder als Aggregat von Kurven K, und die Gesamtheit der F, wie die Gesamtheit der K, die durch einen Punkt gehen: Alles, wie in der gewöhnlichen projektivischen Geometrie.

Aber ein Unterschied tritt hinzu wegen der Begrenztheit des gegebenen Raumes. Unter den Grundgebilden finden sich *begrenzte und unbegrenzte*. Begrenzt ist z. B. die Reihe der auf einer K befindlichen Punkte, unbegrenzt das Büschel von F, die durch eine K hindurchgehen.

Zwei Grundgebilde heißen aufeinander *bezogen*, wenn das eine ein Schnitt des anderen ist, oder wenn beide auf ein anderes als Schnitte bezogen sind. Es heißt z. B. das Bündel der durch einen Punkt gehenden K auf eine F als Punktgebilde bezogen, wenn man jedem Punkte der F diejenige K zuordnet, welche durch ihn hindurchgeht usw. Diese Beziehung ist außerdem, was man *unvollständig* nennen mag, insofern allerdings zu jedem Punkte der F eine K des Bündels gehört, nicht aber umgekehrt. Unmittelbar vollständig aufeinander bezogen sind nur das Büschel der durch eine K gehenden F und das Büschel der durch einen Punkt gehenden K, die in einer durch den Punkt hindurchgehenden, die feste K nicht enthaltenden, F verlaufen.

§ 4.

Definition harmonischer Elemente.

Zu drei Elementen A, B, C eines unbegrenzten Grundgebildes erster Stufe kann man vermöge einer Konstruktion, die der in der gewöhnlichen projektivischen Geometrie angewandten Vierseits-Konstruktion analog ist, ein bestimmtes viertes Element D konstruieren, welches das *vierte harmonische* zu A, B, C genannt werden soll.

Um sich hiervon zu überzeugen, wollen wir den folgenden beschränkteren Satz für die Punktreihe K beweisen, deren Anschauung uns geläufiger ist als die Anschauung der unbegrenzten Grundgebilde erster Stufe:

Sind A, B, C Punkte einer K, *welche in der alphabetischen Reihenfolge einander auf der K folgen*, so führt die Vierseitskonstruktion zu einem bestimmten vierten Elemente D, welches zu A, B, C harmonisch heißt. Die Reihenfolge von A, B, C muß hier deswegen besonders festgesetzt werden, weil sonst der gesuchte Punkt D gelegentlich über die Begrenzung des gegebenen Raumes hinausfallen, d. h. gar nicht vorhanden sein könnte. Zum Zwecke des für unbegrenzte Grundgebilde aufgestellten Satzes genügt es aber auch, den nun vorliegenden Satz mit seiner Beschränkung zu beweisen; denn man überzeugt sich leicht: Wenn A, B, C drei Elemente eines F-Büschels sind, so kann man eine K immer so legen, daß die Schnittpunkte mit A, B, C beliebige Reihenfolge haben. Wenn drei Elemente A, B, C eines K-Büschels gegeben, so würde man dasselbe zunächst auf ein F-Büschel beziehen und dann dieses durch eine K in gehöriger Weise schneiden.

Den nun mit Bezug auf die Punktreihe K aufgestellten Satz beweist man genau im Anschlusse an das gewöhnliche Verfahren der Geometrie der Lage. Es darf an dasselbe hier kurz erinnert werden:

Sind A, B, C Punkte einer Geraden, so lege man durch A eine neue Gerade. Durch zwei Punkte β, γ derselben und B und C lege man die beiden Geradenpaare βB, γC und βC, γB, welche bezüglich die beiden Schnittpunkte α und δ besitzen. Dann schneidet die Verbindungsgerade $\alpha\delta$ die ursprünglich gegebene Gerade in einem *festen* Punkte D, dem sogenannten vierten harmonischen Punkte zu A, B, C.

Der Beweis, daß der Punkt D von den bei der Konstruktion willkürlichen Elementen unabhängig ist, ist folgender. Konstruiert man aus A, B, C in einer anderen durch die gegebene Gerade hindurchgelegten Ebene ein neues Viereck $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$, so werden die Verbindungsgeraden $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma', \delta\delta'$ sich in einem Punkte treffen; die beiden Vierecke müssen deshalb Schnitte des nämlichen Vierkants sein; es muß daher auch der Punkt D in beiden übereinstimmen. Wäre das zweite Viereck in derselben durch die gegebene Gerade hindurchgelegten Ebene konstruiert, wie das erste, so übertrage man es durch Projektion auf eine zweite durch die gegebene Gerade gehende Ebene[25]) und man hat den vorigen Fall.

[25]) Statt dessen wird gelegentlich gesagt: so drehe man des Viereck samt seiner Ebene um die gegebene Gerade in eine neue Lage; aber diese Operation würde man bei dem Systeme der K und F nicht wiederholen können, da zunächst noch nicht bekannt ist (was allerdings später erschlossen wird. § 7), daß dieses System Transformationen in sich selbst zuläßt.

Genau dieselben Betrachtungen können nun angestellt werden, wenn statt des Systems der Geraden und Ebenen das System der K und F gegeben ist. Die Annahme über die Reihenfolge von A, B, C sichert die Möglichkeit, trotz der Begrenzung unseres Raumes, die nötige Konstruktion ausführen zu können. Hat man dann zwei Vierecke $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ und $\alpha', \beta', \gamma', \delta'$ in verschiedenen durch K hindurchgehenden F, so ziehe man die K $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma', \delta\delta'$. Dann folgt ohne weiteres: Schneiden sich zwei dieser K in einem Punkte, so gehen auch die anderen durch denselben. Aber der Schnittpunkt kann gelegentlich über den gegebenen begrenzten Raum hinausfallen, d. h. gar nicht vorhanden sein. In dem Falle wird man eins der beiden Vierecke durch Projektion auf eine neue durch K gehende F übertragen, und mit diesem Verfahren so lange fortfahren, bis die Verbindungskurven K der Ecken des ursprünglichen und des neu konstruierten Vierecks sich treffen. Es ist das ein Prozeß, der immer zu leisten ist, wie man sich sofort überzeugt, sowie man zwei Vierecke in den bewußten Lagenverhältnissen gezeichnet denkt. Eine ausgeführte Diskussion würde nur mit dem Begriffe des Größer oder Kleiner, nicht aber mit einem Maße eines solchen Unterschiedes zu tun haben. Von zwei Strecken AB, AC einer K heißt AB kleiner als AC, sofern man, um von A nach C zu gelangen, B überschreiten muß.

Man beweist ferner, daß vier harmonischen Elementen eines Grundgebildes bei einer vollständigen Beziehung wieder vier harmonische Elemente entsprechen. Bei einer unvollständigen Beziehung ist das Entsprechende wahr, sofern den vier Elementen des einen Gebildes wirklich vier Elemente des anderen zugeordnet sind.

§ 5.

Projektivische Beziehungen.

Zwei Grundgebilde heißen aufeinander *projektivisch bezogen*, wenn je vier harmonischen Elementen des einen, sofern überhaupt vier entsprechende Elemente im anderen Gebilde vorhanden sind, vier harmonische Elemente des letzteren entsprechen.

Aus dieser Definition schließt man nun nach Staudt, daß das projektivische Entsprechen zwischen zwei Grundgebilden erster Stufe durch drei einander entsprechende Elemente A, B, C und A', B', C' festgelegt ist[26]). Da dieser Schluß, wie bereits angedeutet wurde, in seinem Beweise eine Lücke hat, die nur durch ein Axiom zu überbrücken scheint, so möge es gestattet sein, hier etwas ausführlicher bei demselben zu verweilen.

[26]) Geometrie der Lage. S. 50. Vgl. S. 44 des Reyeschen Buches.

Die bez. Auseinandersetzungen und Forderungen gelten gleichmäßig für das System der Ebenen und Geraden, wie für das System der F und K.

Staudts Schlußweise ist etwa die folgende. Entsprechen einander A, B, C und A', B', C' so auch D und D' die bez. vierten harmonischen Punkte zu A, B, C und A', B', C'; ferner E und E', die vierten harmonischen Punkte zu irgend drei der vier Punkte A, B, C, D bez. A', B', C', D', usw. usw. Die Art der Zuordnung ist hiernach durch die Zuordnung der drei Elemente A, B, C und A', B', C' vollständig gegeben, sowie man zeigen kann, daß man zu jedem Punkte einer Geraden hingelangen kann, indem man zu drei gegebenen Punkten den vierten harmonischen aufsucht, zu irgend drei der so bestimmten vier Punkte wieder den vierten harmonischen usw. Es kann diese Behauptung nur den Sinn haben, daß man jedem Punkte der Geraden durch die wiederholte Konstruktion des vierten harmonischen Punktes beliebig nahe kommen kann, d. h. daß man immer einen entsprechenden Punkt finden kann, der zwischen dem zu bestimmenden Punkte und einem beliebig von ihm verschieden angenommenen inne liegt. Staudt beweist dies, indem er die Absurdität der Annahme zeigt, ein gewisser Punkt sei der letzte, über den die Konstruktion nicht mehr hinausführe. Aber die Annahme, daß es einen letzten durch die Konstruktion erreichbaren Punkt gebe, ist noch willkürlich. Es wäre denkbar, daß der fortgesetzte Prozeß der Aufsuchung des vierten harmonischen Punktes über eine bestimmte Grenze nicht hinausführte, ohne doch eine letzte Lage für den Punkt zu erreichen. Über diese Möglichkeit hilft, soviel ich sehe, nur das Axiom hinweg, *daß es gestattet sein soll, den Grenzpunkt, auch wenn er in dieser Weise durch einen unendlichen Prozeß definiert ist, als fertig vorhanden aufzufassen.* Bei dieser Annahme tritt der Staudtsche Beweis wieder in Kraft und zeigt die Unmöglichkeit der Existenz von Grenzpunkten[27]).

Dieselben Erwägungen, die hier für die Gerade vorgetragen worden sind, übertragen sich auf die Grundgebilde erster Dimension aus dem Systeme der K und F, wobei man zunächst auf die unbegrenzten Grundgebilde achten wird. Auch bei ihnen wird man ein dem vorhergehenden analoges Axiom hinzuzufügen haben, *was dann als eine Forderung aufgefaßt werden kann, der das System der K und F genügen soll.* Diese Forderung ist mit den dem Systeme sonst auferlegten verträglich — das zeigt das Beispiel der gewöhnlichen Geraden und Ebenen —, ob sie aus den früheren zum Teile folgt, bleibe dahingestellt. Die Definition der projektivischen Beziehung, die so für unbegrenzte Grundgebilde erster Stufe

[27]) [Näheres hierüber findet man in folgender Abhandlung XIX.]

aufgestellt ist, überträgt sich ohne weiteres auf begrenzte, indem man begrenzte Gebilde projektivisch sein läßt, wenn sie Schnitte projektivischer unbegrenzter Gebilde sind.

§ 6.

Die Geometrie im Grundgebilde zweiter Stufe und im Raume.

Die aufgestellten Prinzipien genügen, um für die unbegrenzten Grundgebilde zweiter Stufe, d. h. für das Bündel der durch einen Punkt gehenden K und das Bündel der durch einen Punkt gehenden F die projektivische Geometrie aufzubauen. Man vergleiche hierzu nur etwa die Partien des Reyeschen Buches (S. 45 ff.), in denen für die als unbegrenztes Grundgebilde gedachte Ebene das Entsprechende durchgeführt wird. Es ist dies wohl der einzige Gedanke, der bei den hier vorgetragenen Dingen nicht ohne weiteres gegeben war, nämlich der Gedanke, darauf zu achten, daß, auch wenn der Punktraum, der gegeben ist, begrenzt ist, darum doch noch unbegrenzte Grundgebilde erster und zweiter Stufe vorhanden sind, und daß man für *sie* die Betrachtungen durchführen kann, die man sonst in bezug auf die unbegrenzt angenommene Ebene anstellt.

Namentlich wird man für die unbegrenzten Grundgebilde zweiter Stufe nun auch das Gesetz der *Dualität* entwickeln können, welches jetzt dahin auszusprechen ist, daß man in allen Sätzen, die sich auf K und F beziehen, welche durch einen Punkt gehen, statt K und F auch F und K setzen kann.

Durch Übertragung vom unbegrenzten Grundgebilde zweiter Stufe, dem Punkte (als Bündel von K und F gedacht), gewinnt man die Geometrie auf dem begrenzten Grundgebilde zweiter Stufe der (als Punktaggregat oder als Ort für Kurven K gedachten) F. Aber die projektivischen Beziehungen und die dualistischen gelten auf der F nur dann uneingeschränkt, wenn man der F *ideale* Punkte und Kurven K adjungiert, entsprechend denjenigen Kurven K und Flächen F des angenommenen Bündels, von dem aus man die projektivisch dualistischen Beziehungen auf die F überträgt, welche die F nicht treffen. Es ist ersichtlich, wie diese idealen Elemente der F, die ihrem Wesen nach durchaus mit den idealen Elementen übereinstimmen, von denen im letzten Paragraphen des vorigen Abschnittes die Rede war, unabhängig sind von dem Bündel, von dem man gerade ausging. Der Grund liegt darin, daß nach Voraussetzung die F von allen anderen F in denselben K, d. h. von jedem Bündel von F in demselben Kurvensystem K geschnitten wird. Der ideale Punkt der gegebenen F z. B. ist zunächst definiert durch eine irgend einem Bündel angehörige Kurve K, welche die F nicht trifft. Aber durch die K geht ein Büschel von F und ein begrenzter Teil des Büschels begegnet der gegebenen F. Auf der letzteren erhalten wir also eine Schar von Kurven K, welche dieselben Eigenschaften haben, besonders hinsichtlich der Konstruktion des vierten harmonischen Elementes, wie ein begrenzter Teil eines durch einen Punkt gehenden Büschels von Kurven K. Legt man jetzt durch irgendeinen Punkt und diese Kurven K die bezüglichen F, so werden diese sich nach einer K schneiden. Der ideale Punkt, den das erst angenommene Bündel lieferte, stimmt also mit dem idealen Punkte, den ein beliebiges anderes Bündel ergibt, überein.

Es ist hiernach auch ersichtlich, wie der ideale Punkt der gegebenen F, der hierdurch definiert ist, nicht bloß als dieser F angehörig, sondern als *idealer Raumpunkt* gedacht werden muß. Damit ist dann alles Material gegeben, um die projektivische Geometrie auch des Raumes zu entwickeln, und es ist der Beweis des oben aufgestellten Hauptsatzes:

> *daß für das bez. Flächen- und Kurvensystem die projektivische Geometrie gilt*

geleistet.

§ 7.

Einführung der Doppelverhältnisse und homogenen Koordinaten.

In diesem Paragraphen mag noch kurz angegeben werden, wie man an den bisher auseinandergesetzten synthetischen Aufbau der projektivischen Geometrie die analytische Behandlung derselben zu knüpfen hat. Es enthält dieser Paragraph also nichts mehr, was sich spezifisch auf das System der K und F bezieht; und er soll hier nur eine Stelle finden, weil die betreffenden Überlegungen, die man wesentlich alle den Staudtschen *Beiträgen zur Geometrie der Lage* entnehmen kann, nur zu wenig bekannt zu sein scheinen.

Die Definition der Projektivität zweier Grundgebilde erster Stufe ergibt, daß zwischen je vier Elementen eines solchen Gebildes eine konstante Beziehung obwaltet. Drei Elemente sind noch voneinander unabhängig; die Beziehung zwischen vier Elementen kann man daher unter dem Bilde einer reellen *Zahl* auffassen[28]). Man bezeichne drei Elemente A, B, C als Grundelemente des Gebildes, auf die übrigen Elemente D des unbegrenzt gedachten Gebildes verteile man nach einem willkürlichen Gesetze die reellen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$, so ist jeder Kombination $ABCD$ eine Zahl zugeordnet, welche sie charakterisiert; man hat einen Maßstab, um die Beziehung $ABCD$ zu messen. Hat man bei *einem* Grundgebilde erster Stufe diese Bestimmung getroffen, so überträgt sie sich durch Projektion auf alle anderen.

[28]) Hier kehrt unter einer etwas anderen Form das Axiom des § 5 wieder.

Man wird darnach streben, diese willkürliche Skala durch eine gesetzmäßig erzeugte zu ersetzen, und dies hat Staudt in den Paragraphen 19, 20 seiner Beiträge zur Geometrie der Lage geleistet. Er ordnet dort den Beziehungen $ABCD$, oder, wie er sagt, den *Würfen* $ABCD$ dieselben Zahlen zu, welche man ihnen in der auf metrischen Definitionen fußenden gewöhnlichen Behandlungsweise beilegt, wo sie als *Doppelverhältnisse* aufgefaßt werden[29]). Es genügt zu diesem Zwecke, die Würfe $ABCA$, $ABCB$, $ABCC$ bez. durch 0, 1, ∞ zu bezeichnen und dann eine Operation anzugeben, vermöge deren man zwei Würfe $ABCD$ und $ABCD'$ addiert. Dabei wird der harmonische Wurf gleich -1, und es finden Relationen statt, wie

$$(ABCD)\cdot(ADBC) = 1 \text{ usw.}$$

Von den Doppelverhältnissen steige man zu den homogenen Koordinaten auf, die nichts sind als die relativen Werte gewisser Doppelverhältnisse. Es handelt sich dann besonders darum, einzusehen, daß durch eine lineare Gleichung zwischen den homogenen Koordinaten in der Ebene eine Gerade, im Raume eine Ebene dargestellt wird. Diese Aufgabe hat Fiedler neuerdings in sehr einfacher und übersichtlicher Weise erledigt, indem er von vornherein neben den homogenen Punktkoordinaten auch die homogenen Linienkoordinaten, bez. Ebenenkoordinaten einführte[30]). Die lineolineare Gleichung zwischen den Koordinaten vereinigt gelegener Punkte und Geraden (Ebenen) ist nur der Ausdruck für gewisse Beziehungen, die zwischen den in der Figur (die durch Hinzufügen eines Koordinaten-Dreiecks bez. -Tetraeders entsteht) auftretenden Doppelverhältnissen stattfinden[31]).

Die hiermit angedeuteten Überlegungen kann man alle, statt für das System der Geraden und Ebenen, für das System der K und F entwickeln, da für das letztere ebenso die projektivische Geometrie gilt. Und damit ist also die zweite Form erwiesen, welche wir in § 2 unserem Satze erteilt hatten, die wir noch einmal wiederholen:

Man kann den Punkten des ursprünglich gegebenen begrenzten Raumes in der Weise Zahlen zuordnen, daß die Flächen F (die Kurven K) durch lineare Gleichungen dargestellt werden.

[29]) Dasselbe kann man durch die von Möbius in seinem baryzentrischen Kalkul vorgetragene Theorie der geometrischen Netze erreichen.

[30]) Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich. XV, 2. (1871). — Die darstellende Geometrie. Leipzig. 1871. — Bei Fiedler sind die Würfe als Doppelverhältnisse definiert, es ist das aber für seine weiteren Auseinandersetzungen ohne prinzipielle Bedeutung, da er nur solche Relationen zwischen Würfen benutzt, welche man, nach der im Texte gemachten Andeutung, auch bei Staudt begründet findet.

[31]) Vgl. hierzu auch Hamiltons Elements of Quaternious. S. 24–32.

Als Folgerungen, die sich von selbst aufdrängen, seien erwähnt, daß man nun in bezug auf die Flächen F von algebraischen Gebilden, von imaginären Elementen, von kollinearen und dualistischen Transformationen reden kann.

§ 8.

Analytischer Beweis des Hauptsatzes.

Es wurde bereits darauf hingewiesen, wie sich der in § 2 aufgestellte Hauptsatz viel einfacher und ohne Zuhilfenahme besonderer Axiome beweisen läßt, wenn man die Voraussetzung macht, daß es gestattet sei, *den Punktraum unter dem Bilde einer dreifach ausgedehnten Zahlenmannigfaltigkeit aufzufassen*. Ein an diese Voraussetzung anknüpfender Beweis enthält die Erweiterung unseres Satzes auf Zahlenmannigfaltigkeiten von beliebig vielen Dimensionen in sich; zugleich läßt er übersehen, warum für zwei Dimensionen, wie in § 2 hervorgehoben wurde, ein entsprechender Satz noch nicht gilt.

Den Vorteil, den man durch die Annahme, man könne den Punktraum als eine Zahlenmannigfaltigkeit auffassen, in den Beweis des Satzes einführt, ist der, daß man nun über den Begriff des Unendlich-Kleinen verfügt. Für die Fortschreitungsrichtungen von einem Punkte aus gilt bei beliebiger Koordinatenbestimmung die projektivische Geometrie in demselben Sinne, wie für die Geraden eines Strahlenbündels[32]). Hat man aber ein System von Flächen F und Kurven K, wie es in dem Satze des § 2 vorausgesetzt wird, so bezeichnet jede der von einem Punkte aus möglichen Fortschreitungsrichtungen eine der durch den Punkt hindurchgehenden K. *Für das Bündel der durch einen Punkt gehenden K, und, vermöge dualistischer Übertragung, das Bündel der durch einen Punkt gehenden F gilt also ohne weiteres die projektivische Geometrie.* Wir haben also von vornherein den Standpunkt gewonnen, der sich bei der rein geometrischen Untersuchung erst in § 6 ergab, noch mehr: es ist auch von vornherein wenigstens für das Bündel von K und F die projektivische Koordinatenbestimmung gegeben, die bei rein geometrischer Betrachtung erst durch besondere Operationen in § 7 entworfen werden mußte.

Von der Geometrie im Bündel von F oder K steigt man ähnlich, wie in § 6 geschildert wurde, zur Geometrie auf den F und zur Geometrie im Raume auf. Durch eine beliebige F, — sie heiße F' — werden je zwei Bündel von F aufeinander projektivisch bezogen. Denn die Bündel schneiden die F' laut Voraussetzung in dem nämlichen Kurvensysteme K. Dabei überträgt sich von dem einen Bündel so gut wie vom anderen auf die F' die Vierseitskonstruktion; die beiden Bündel, und also überhaupt alle vorhandenen Bündel sind hiernach durch die F' aufeinander projektivisch bezogen, w. z. b. Da aber projektivische Beziehung innerhalb eines Bündels bei Anwendung der projektivischen Koordinaten durch lineare Gleichungen bezeichnet wird, so ist ersichtlich, daß man die F' durch lineare Gleichungen zwischen den für zwei Bündel geltenden projektivischen Koordinaten darstellen kann usw.

[32]) [Bei der Durchführung dieser Andeutungen wären vor allem die hier zur Verwendung kommenden Begriffe so zu präzisieren, daß der Forderung der Differenzierbarkeit, die implizite vorausgesetzt wird, Rechnung getragen wird.]

Betrachtungen derselben Art kann man fü Mannigfaltigkeiten von beliebig vielen Dimensionen anstellen; ist aber die Zahl der Dimensionen auf 2 gesunken, so haben die Betrachtungen nicht mehr denselben Erfolg. Es sei eine Fläche und auf einem Teile derselben ein Kurvensystem K gegeben, von der Eigenschaft, daß durch je zwei Punkte des Flächenteils eine und nur eine K geht. Die Fläche, oder vielmehr ihre Punkte sollen unter dem Bilde einer zweifach ausgedehnten Zahlenmannigfaltigkeit gefaßt werden können. Dann gilt für die Fortschreitungsrichtungen von einem Punkte aus die projektivische Geometrie, d. h. vier Fortschreitungsrichtungen haben ein bestimmtes Doppelverhältnis, welches bei keiner stetigen Verzerrung der Fläche geändert wird. Es überträgt sich diese Beziehung auf das durch den Punkt gehende Büschel von Kurven K. Man schneide dasselbe durch eine ihm nicht angehörige Kurve K' und ziehe nach den Schnittpunkten die einem zweiten Büschel angehörigen K. Jetzt sind die beiden Büschel durch die K' auch eindeutig aufeinander bezogen, aber es ist gar kein Grund vorhanden, warum diese Beziehung eine projektivische sein soll, warum z. B. vier harmonischen Kurven des einen Büschels vier harmonische des andern entsprechen sollen. Denn ein Analogon zu der Vierseitskonstruktion, die sich im Raume übertrug, existiert nicht mehr, weil eine Dimension zu wenig vorhanden ist.

Göttingen, 8. Juni 1872.

XIX. Nachtrag zu dem „zweiten Aufsatz über Nicht-Euklidische Geometrie".

[Math. Annalen, Bd. 7 (1874).]

In dem in der Überschrift genannten Aufsatze behandelte ich neben anderen Fragen, zu denen die neueren Untersuchungen über Nicht-Euklidische Geometrie Anlaß geben, insbesondere auch die, ob v. Staudts nur auf die Betrachtung sogenannter Lagenverhältnisse gegründeter Aufbau der projektivischen Geometrie vom Parallelenaxiome unabhängig gemacht werden könne. Ich hatte dabei Gelegenheit (vgl. daselbst § 5 des zweiten Teiles) eine (auch sonst bemerkte) Lücke in v. Staudts Betrachtungen zur Sprache zu bringen, die freilich keine nähere Beziehung zu der Frage nach dem Einflusse des Parallelenaxioms besitzt. Es handelt sich nämlich um den Nachweis, daß eine projektivische Beziehung zweier Grundgebilde erster Stufe vollkommen festgelegt ist, sowie man drei Paare entsprechender Elemente kennt. Nach der bei v. Staudt eingeführten Definition der projektivischen Beziehung sind die unbegrenzt vielen Elemente, welche man auf den beiden Grundgebilden, bez. aus den drei gegebenen durch wiederholte Konstruktion des vierten harmonischen Elementes ableiten kann, ohne weiteres als entsprechend gesetzt. Von Staudt unternimmt es daher zu zeigen, daß diese unendlich vielen Elemente das Grundgebilde völlig überdecken und ihr Entsprechen deshalb das Entsprechen aller Elemente nach sich zieht. Dies Verfahren impliziert bereits eine Voraussetzung, die im folgenden (§ 3) noch weiter gekennzeichnet werden soll, nämlich die: daß es gestattet sei, aus dem Verhalten der jedenfalls diskreten Reihe der harmonischen Elemente auf das Verhalten des ganzen kontinuierlichen Gebietes zu schließen, dem sie angehören. Aber die Lücke in v. Staudts Beweisgang, von der in meinem Aufsatze gehandelt wurde, betrifft den ersten Teil des von ihm eingeschlagenen Weges. Um zu zeigen, daß die harmonischen Elemente das Grundgebilde völlig überdecken, d. h. *daß in jedem gegebenen Segmente des Grundgebildes Elemente liegen, welche man, von drei beliebig gegebenen Elementen ausgehend, durch fortgesetzte Konstruktion des vierten harmonischen Elementes wirklich erreichen kann,*

macht v. Staudt einfach darauf aufmerksam, daß die Reihe der harmonischen Elemente nicht plötzlich abbrechen kann. Aber es ist dadurch die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, daß diese Reihe, obgleich unbegrenzt, doch in gewisse Segmente des Grundgebildes nicht eindringt, und der Beweis, der zu erbringen war, ist also noch unvollständig.

Dem gegenüber glaubte ich in dem genannten „zweiten Aufsatze über Nicht-Euklidische Geometrie"[1]) ausdrücklich folgende zwei Voraussetzungen einführen zu sollen, die freilich dort, wo überhaupt die ganze Frage mehr beiläufig berührt wird, nicht mit der Bestimmtheit bezeichnet und auseinandergehalten sind, wie es hier geschehen soll. Ich verlangte zunächst:

Wenn auf einem Gebilde erster Stufe eine unendliche Reihe von Elementen gegeben ist, die in ein Segment des Gebildes nicht eindringt, so soll es gestattet sein, von einem Grenzelemente, dem die Reihe zustrebt, als einem völlig bestimmten Elemente zu sprechen.

Sodann aber insonderheit mit Bezug auf die Reihe der harmonischen Elemente:

Sollten in der Reihe der harmonischen Elemente solche Grenzelemente auftreten[2]), *so dürfen sie der Reihe zugezählt werden.*

Daß man unter Annahme dieser Voraussetzungen durch geeignete Fortsetzung der Reihe der harmonischen Elemente in jedes Segment hineingelangen kann, beweist man genau so, wie v. Staudt die Unmöglichkeit eines plötzlichen Abbrechens der Reihe zeigt. Es genügt nämlich, daran zu erinnern, daß das zu drei getrennten Elementen harmonische vierte Element mit keinem der drei Elemente zusammenfällt, und, je nach der Anordnung, die man den drei Elementen erteilen mag, einem jeden der drei Segmente angehört, in welche das Grundgebilde durch die drei Elemente geteilt wird.

Aber andererseits ist auch die oben bezeichnete zweite Frage bereits erledigt, die sich darauf bezieht, ob man aus dem Entsprechen der harmonischen Elemente auf das Entsprechen der übrigen Elemente schließen kann. Man wird nämlich auf Grund unserer ersten Voraussetzung jedes Element als Grenzelement einer unendlichen Reihe harmonischer Elemente

[1]) In ganz ähnlicher Weise berührte ich diese Frage bereits in einer Mitteilung an die Göttinger Societät, vgl. Göttinger Nachrichten, 1871. [S. Abh. XV dieser Ausgabe.]

[2]) Ob solche Elemente wirklich auftreten oder nicht, hängt von der Art und Weise ab, vermöge deren man die harmonischen Elemente fortsetzt, was auf sehr mannigfache Weise geschehen kann, weil immer drei beliebige Elemente unter den schon konstruierten zur weiteren Konstruktion verwandt werden können. Im Texte soll nicht gezeigt werden, daß solche Elemente überhaupt nicht auftreten, wenn man die Reihe der harmonischen Elemente in bestimmter Weise unendlich fortsetzt, sondern nur, daß sie jedesmal wieder überschritten werden können, wenn man die Art der Fortsetzung ändert, und daß sie also für die Gesamtheit der harmonischen Elemente keine Grenze konstituieren.

auffassen können[3]), und, gemäß der zweiten Voraussetzung, demjenigen Elemente entsprechend setzen, welches auf dem anderen Grundgebilde durch den nämlichen Grenzprozeß definiert wird.

Nach Veröffentlichung meines Aufsatzes erhielt ich eben mit Bezug auf diese Überlegungen Zuschriften von den Herren G. Cantor, Lüroth und Zeuthen, und ich verdanke es hauptsächlich der Korrespondenz mit diesen Herren, wenn ich in der gegenwärtigen Mitteilung in der Lage bin, den Gegenstand, um den es sich handelt, sehr viel deutlicher zu bezeichnen, als ich es damals getan hatte. Insbesondere haben mir die Herren Lüroth und Zeuthen unabhängig voneinander einen Beweis mitgeteilt, vermöge dessen es gelingt, auch ohne Einführung der zweiten oben genannten Voraussetzung zu beweisen, daß man mit der Reihe der harmonischen Elemente in jedes Segment des Grundgebildes eindringen kann. Es benutzt dieser Beweis den (schon in der Fußnote [2]) hervorgehobenen) Umstand, daß die Reihe der harmonischen Elemente, weil immer drei beliebige der bereits konstruierten zur Konstruktion verwandt werden dürfen, in sehr mannigfacher Weise fortgesetzt werden kann. Ich werde weiter unten (§ 2) diesen Beweis, durch dessen Mitteilung der gegenwärtige Nachtrag zu meinem früheren Aufsatze wesentlich veranlaßt ist, in Herrn Zeuthens Darstellung[4]) geben. Durch ihn wird also die zweite oben aufgestellte Voraussetzung zunächst überflüssig; sie tritt erst wieder ein, wenn es sich darum handelt, aus dem Entsprechen der konstruierten harmonischen Elemente auf das Entsprechen aller Elemente zu schließen. Sie kann dann, worauf mich besonders Herr Lüroth aufmerksam gemacht hat, durch verschiedene äquivalente ersetzt werden. Der dritte Paragraph des Folgenden mag diesen Betrachtungen gewidmet sein. Ich wende mich zunächst dazu, die erste oben eingeführte Voraussetzung noch näher zu bezeichnen und ihren Zusammenhang mit ähnlichen Voraussetzungen, die in der gewöhnlichen (metrischen) Geometrie nötig sind, darzulegen.

§ 1.

Von der Stetigkeit der Gebilde in der projektivischen Geometrie.

Was man in der gewöhnlichen Geometrie meint, wenn man sagt, irgendein Gebilde erster Stufe, also etwa eine Punktreihe, sei *stetig*, ist neuerdings von verschiedenen Seiten her mit besonderer Schärfe auseinander

[3]) Dies sollte eigentlich explizite bewiesen werden. Ich glaube die betreffenden Überlegungen hier aber um so mehr unterdrücken zu können, als das Operieren mit Würfen, das zu diesem Zwecke systematisch würde untersucht werden müssen, von Herrn Lüroth neuerdings eine gründliche Darstellung erfahren hat (Göttinger Nachrichten, Nov. 1873).

[4]) Herr Lüroth hatte bei seinen Überlegungen im wesentlichen dieselben Momente benutzt.

gesetzt worden[5]). Man legt durch die Forderung der Stetigkeit dem betreffenden Gebilde eben dieselbe Eigenschaft bei, die durch unsere erste Voraussetzung (welche sich in ganz ähnlicher Form in den Schriften von G. Cantor und Dedekind findet[6]) formuliert ist. Der Unterschied ist nur der, daß wir diese Voraussetzung ausdrücklich auch in die projektivische Geometrie einführen. Wir können also auch folgendermaßen sagen:

Die in der gewöhnlichen Geometrie vorausgesetzte Stetigkeit der Gebilde erster Stufe soll auch in der projektivischen Geometrie zugrunde gelegt werden.

Es bringt das mit sich oder ist geradezu gleichbedeutend damit, daß in der projektivischen Geometrie, wie in der gewöhnlichen, das analytische Gegenbild eines Gebildes erster Stufe die einfach unendliche Zahlenreihe ist. Auch in der projektivischen Geometrie können also Segmente eines Gebildes erster Stufe *gemessen* werden, nur daß nicht, wie in der gewöhnlichen Geometrie, eine Maßbestimmung vor allen anderen als besonders naturgemäß ausgezeichnet wird.

In dem letzteren Umstande liegt scheinbar eine gewisse Schwierigkeit hinsichtlich der Einführung der Zahlen in die projektivische Geometrie, insofern man nämlich von vornherein nur dann von zwei Segmenten sagen kann: das eine sei kleiner als das andere, wenn das eine ganz in dem anderen enthalten ist. Aber bei der Feststellung des Grenzbegriffs kommen eben nur solche Segmente in Vergleich, die in dieser Relation stehen, daß das eine ein Stück des anderen ist.

Eine entsprechende Voraussetzung der Stetigkeit, wie sie nunmehr für Gebilde erster Stufe eingeführt wurde, wird in der gewöhnlichen wie in der projektivischen Geometrie zu machen sein, wenn es sich um Gebilde höherer Stufe handelt. Doch braucht das hier wohl nicht näher entwickelt zu werden. Auch braucht hier nicht auf die Frage eingegangen zu werden, ob und wie weit wir zu diesen Voraussetzungen[7]) axiomatischen Charakters durch unsere räumliche Anschauung gezwungen sind.

§ 2.

Der Lüroth-Zeuthensche Beweis.

Ich erlaube mir weiterhin den Lüroth-Zeuthenschen Beweis mit Zeuthens Worten wiederzugeben, und bemerke hinsichtlich der beigesetzten Zeichnungen nur, daß dieselben allein die Aufeinanderfolge der in

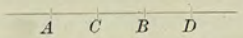
[5]) Vgl. Heine, Die Elemente der Funktionenlehre, Borchardts Journal, Bd. 74 (1872); G. Cantor, über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen, Math. Annalen, Bd. 5 (1842); sowie besonders Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen (Braunschweig 1872).

[6]) Ich bin kurz vor dem Erscheinen dieser Schriften von Herrn Weierstraß auf diese Voraussetzung als eine in der gewöhnlichen Geometrie notwendige aufmerksam gemacht worden.

[7]) Herr Cantor und Dedekind bezeichnen das Postulat der Stetigkeit der Gebilde erster Stufe auch ausdrücklich als ein *Axiom*.

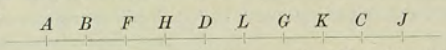
Betracht kommenden Punkte veranschaulichen sollen. Es kommt in der Tat beim Beweise nur auf diese Aufeinanderfolge an, womit eine Verallgemeinerung angedeutet sein mag, die man diesen Betrachtungen zuteil werden lassen kann. Herr Zeuthen schreibt:

»Si AB harm. CD, c'est à dire, si A et B divisent harmoniquement CD,



A et B restant fixes, C et D ne pourront se mouvoir que dans des sens inverses entre eux: mais si A et C restent fixes, B et D ne pourront se mouvoir que dans le même sens. Il s'agit de démontrer *qu'il n'existe pas dans une série fondamentale complète*[8]) *des segments ou des angles où l'on ne puisse entrer par des constructions succesives du quatrième point harmonique, les trois premiers éléments étant donnés.*«

»Considérons comme v. Staudt une droite complète (dont les deux bouts sont liés l'un à l'autre par un point à l'infini) et désignons par $AB, CD, \ldots$ les segments qui se trouvent à droite (par exemple) du premier point $A, C, \ldots$, sans demander s'ils contiennent le point à l'infini ou non. Essayons d'attribuer à la droite un segment FG, qui ne contienne aucun point du système déterminé par les constructions successives du quatrième point harmonique, et supposons qu'on ait donné à ce segment l'extension la plus grande possible[9]). Alors, si F n'est pas lui-même un point du système, tout segment extérieur à FG et limité par F, quelque petit qu'il soit, contiendra des points du système, et de même pour le point G.



Soit A un point quelconque du système et soient H et J les points satisfaisant aux conditions

$$(1) \qquad AH \text{ harm. } FG,$$

$$(2) \qquad AG \text{ harm. } FJ.$$

En désignant par B un nouveau point du système placé sur le segment AF convenablement près de F, on peut obtenir que le point K déterminé par

$$(3) \qquad AH \text{ harm. } BK$$

se trouve sur le segment GJ si près de G que le segment KJ contient un point du système. (Car au cas contraire ou pourrait, en laissant A et H rester fixes, rapprocher K de G jusqu'à ce que non seulement K a

8) „Unbegrenztes Grundgebilde erster Stufe", vgl. Math. Annalen, Bd. 6, S. 137. [S. Abh. XVIII dieser Ausgabe, S. 335.]

9) Damit dies in allen Fällen möglich sei, wird man die in § 1 besprochene Voraussetzung der Stetigkeit voraufschicken müssen.

passé un point du système, mais aussi B, qui se meut dans le sens inverse, a gagné de nouveau un point du système.) Désignons par C un point du système qui se trouve sur KJ. Alors, comme le point L déterminé par

$$(4) \qquad AL \text{ harm. } BJ$$

se trouve sur le segment HG (voir (3) et (2)), le point D déterminé par

$$(5) \qquad AD \text{ harm. } BC,$$

se trouvant sur le segment HL (voir (3) et (4)), se trouve aussi sur le segment FG. Or A, B, C étant des points du système, D en est aussi un. Donc etc. . . . —«

»Si F est un point du système on peut y placer le point B, et si en même temps G appartient au système (supposition de v. Staudt), on peut y placer le point C.«

§ 3.

Von der Stetigkeit der projektivischen Zuordnung.

Wenn es sich um eine systematische Darstellung der Grundlagen der projektivischen Geometrie handelt, wird man an die erste Voraussetzung des § 1 zunächst den Lüroth-Zeuthenschen Beweis anschließen und erst dann die in der Einleitung an zweiter Stelle eingeführte Voraussetzung folgen lassen. Dieselbe ist übrigens auch dadurch mit der ersteren ungleichwertig, daß sie keinen axiomatischen Charakter besitzt, vielmehr als ein Zusatz zu *Staudts Definition* der Projektivität aufgefaßt werden muß.[10])

Daß ein solcher Zusatz in der Tat notwendig ist, daß man also aus dem Entsprechen der harmonischen Elemente noch nicht auf das Entsprechen aller Elemente schließen darf, mag man sich an der folgenden, analog gebildeten Aufgabe überlegen, bei der, entsprechend ihrer rein analytischen Fassung, eine Beurteilung leichter scheint: Eine Funktion sei für alle rationalen Werte ihres Argumentes gegeben, für die irrationalen aber nicht, welche Werte wird sie für die letzteren annehmen? Man kann diese Frage nicht nur nicht beantworten, wenn nichts weiteres über die Funktion bekannt ist, sondern man kann nicht einmal behaupten, daß die Funktion für irrationale Werte des Arguments existiert.

Die Forderung, wie sie durch unsere zweite Voraussetzung ausgesprochen worden ist, kann prägnanter als die Forderung der *Stetigkeit* der projektivischen *Beziehung* bezeichnet werden. Sie verlangt, daß einem Elemente, das in einer kleinsten Strecke zwischen zwei Elementen liegt, deren entsprechende Elemente bekannt sind, ein Element zugeordnet sein

10) [Vgl. jedoch die Erläuterungen in der folgenden Abhandlung XX.]

soll, das eben zwischen diesen letzteren liegt. Mit Beziehung auf die Staudtsche Terminologie und unter besonderer Beachtung der projektivischen Beziehung kann man daher auch so sagen: *Vier Elementen des einen Gebildes, die in einem Sinne liegen, sollen vier Elemente des anderen entsprechen, die ebenfalls in einem Sinne liegen.*

Bei Gebilden mit mehr Dimensionen wird man bei Definition der projektivischen Beziehung in ganz entsprechender Weise die Stetigkeit dieser Beziehung zu verlangen haben, wie es hier für Gebilde erster Stufe geschah. Andererseits sei auch ausdrücklich hervorgehoben, daß in allen Fällen, in denen die projektivische Beziehung durch einmalige oder wiederholte Projektion gewonnen wird, diese Stetigkeit der Beziehung von vornherein gegeben ist.

Erlangen, im Januar 1874.

XX. Über die geometrische Definition der Projektivität auf den Grundgebilden erster Stufe.

[Math. Annalen, Bd. 17 (1880).]

In der nachstehenden Notiz komme ich auf einen Gegenstand zurück, den ich vor mehreren Jahren gelegentlich meiner Untersuchungen über *Nicht-Euklidische* Geometrie in Diskussion gezogen hatte; ich meine v. Staudts Definition der Projektivität auf Grundgebilden erster Stufe.[1]) Ich hatte damals auf eine Lücke in v. Staudts Darstellung aufmerksam gemacht, die in der Tat vorhanden ist, hatte aber, um sie zu beseitigen, zu einer überflüssigen Ergänzung der Definition meine Zuflucht genommen. Eine Korrespondenz mit den Herren Lüroth und Zeuthen belehrte mich in der Tat bald, daß eine Beschränkung meiner Zusätze möglich war. Indem ich meine neue hierauf gegründete Anschauung in einer ausführlicheren Publikation[2]) darlegte, glaubte ich inzwischen doch noch immer in einem Punkte an einer Vervollständigung der v. Staudtschen Definition festhalten zu sollen. Erst neuerdings bin ich durch Herrn Darboux[3]) darauf aufmerksam gemacht worden, daß auch noch diese Ergänzung überflüssig ist. Ich bin Herrn Darboux hierfür um so mehr verpflichtet, als meine bez. Darstellung in einige neuere geometrische Publikationen ungeändert übergegangen ist und also allgemein verbreitet zu werden droht.

Die Frage, um welche es sich handelt, kann folgendermaßen bezeichnet werden. Bekanntlich definiert v. Staudt zwei Grundgebilde erster Stufe als projektivisch, wenn sie derart aufeinander bezogen sind, daß je vier harmonischen Elementen des einen vier harmonische Elemente des anderen entsprechen. (Hiermit ist eo ipso ausgesprochen, wie ich schon hier ausdrücklich bemerken will, da später gerade auf diesen Umstand Gewicht zu legen ist: daß *jedem* Elemente des einen Gebildes ein Element des zweiten entspricht.) Es handelt sich nun um den Nachweis, daß die so erklärte Zuordnung völlig definirt ist, wenn man drei Paare zugeordneter Elemente kennt. Zu dem Zwecke beweise man zunächst nach Lüroth und Zeuthen (im Anschlusse an v. Staudts ursprünglichen Gedankengang), daß man, von drei Elementen ausgehend, durch immer wiederholte Konstruktion eines vierten harmonischen Elementes das ganze Gebilde in der Weise mit Elementen überdecken kann, daß in jedem noch

[1]) Vgl. Math. Annalen Bd. 6, S. 132, Note. [S. Abh. XVIII dieser Ausgabe, S. 330.]

[2]) Math. Annalen, Bd. 7, S. 531—537. [S. Abh. XIX dieser Ausgabe.]

[3]) Herr Darboux hatte inzwischen die Güte, mir eine ausführlichere Darlegung seiner Auffassung dieser Theorie zur Verfügung zu stellen, die ich hier nachfolgend [in den Math. Ann., Bd. 17] zum Abdruck bringe. Die doppelte Besprechung desselben Gegenstandes wird durch seine Wichtigkeit gerechtfertigt erscheinen.

so kleinen vorgegebenen Segmente mindestens ein konstruiertes Element liegt. Ich will die Gesamtheit der so konstruierbaren Elemente die *rationalen* nennen. Dann ist es an sich deutlich, daß den rationalen Elementen des einen Gebildes die rationalen Elemente des anderen unzweideutig entsprechen müssen (sofern man, wie vorausgesetzt wird, bei der beiderseitigen Konstruktion von drei zugeordneten Elementen ausging). Aber es fragt sich, ob durch das Entsprechen der rationalen Elemente das Entsprechen der *irrationalen* Elemente mit gesetzt ist. Das irrationale Element kann definiert werden durch eine unendliche (gesetzmäßige) Aufeinanderfolge rationaler Elemente, deren *Grenze* es ist. Und nun war mein Zusatz zu v. Staudts Definition, an welchem ich auch in meiner zweiten Darstellung festhielt, der, daß man aus dem Entsprechen der unendlich vielen Elemente zweier derartiger Reihen rationaler Elemente auf das Entsprechen der beiderseitigen Grenzelemente solle schließen dürfen. Ich hatte dem auch die andere Formulierung erteilt: daß vier Elementen des einen Gebildes, welche eine „Folge" bilden, auch wenn irrationale Elemente in Betracht kommen, allemal solche vier Elemente des anderen Gebildes entsprechen sollen, welche wieder eine Folge bilden. — An dieser Stelle greift jetzt Herrn Darbouxs Bemerkung ein. Was ich ausdrücklich verlangte ist bereits eine notwendige Folge der v. Staudtschen Definition. Denn nehmen wir an, daß vier Elementen des ersten Gebildes, welche eine Folge bilden, auf dem anderen Gebilde solche vier Elemente entsprächen, die es nicht tun. Dann könnte man die ersten vier so in zwei Paare teilen, daß die beiden Paare ein gemeinsames harmonisches Paar besitzen, während die entsprechenden zwei Paare von Elementen des anderen Gebildes *kein* gemeinsames harmonisches Paar haben. Den beiden Elementen des „harmonischen" Paares auf dem ersten Gebilde könnten also überhaupt keine Elemente auf dem zweiten Gebilde entsprechen. Und das widerstreitet v. Staudts ursprünglicher Definition, die, wie ich schon oben hervorhob, ausdrücklich voraussetzt, daß jedem Elemente des einen ein Element des anderen Gebildes entsprechen solle. Unsere Voraussetzung war also unzulässig: was zu beweisen war.

Man sieht zugleich den Punkt, in welchem ich irrte. Einseitig mit v. Staudts *Erzeugung* der projektivischen Beziehung beschäftigt, verlor ich den *Wortlaut* seiner *Definition* aus den Augen. Ich suchte das Element zu *konstruieren*, welches, auf dem zweiten Gebilde, einem irrationalen Elemente des ersten Gebildes entspricht, und ich vergaß, daß es sich zunächst nur um die eindeutige Bestimmtheit dieses Elementes handelt und daß es also genügt, *indirekte* Beweisgründe heranzuziehen.

München, im April 1880.

XXI. Zur Nicht-Euklidischen Geometrie.

[Math. Annalen, Bd. 37 (1890).]

Eine Vorlesung über Nicht-Euklidische Geometrie, die ich die letzten beiden Semester hindurch gehalten habe, gab mir die willkommene Gelegenheit, auf jene Gedankenreihen zurückzugreifen, denen ich in verschiedenen Arbeiten aus den Jahren 1871—73 Ausdruck gegeben habe[1]). Indem ich die neuere Literatur des Gegenstandes verglich, bemerkte ich, daß die fundamentalen Auffassungen, von denen ich damals ausging, immer nur erst teilweises Verständnis gefunden haben, und daß gewisse damit zusammenhängende Fragestellungen, über welche ich mir seit lange bestimmte Ansichten gebildet habe, noch gar nicht behandelt sind. Mittlerweile erfahre ich, daß eine zusammenhängende Darstellung der Theorie, von einem Standpunkte aus, der von dem meinigen jedenfalls nicht sehr verschieden ist, demnächst von Herrn Lindemann in dem zweiten Bande von Clebschs Vorlesungen über Geometrie[2]) publiziert werden wird. Um so lieber kann ich mich nachstehend auf die Besprechung solcher Punkte beschränken, in denen ich Neues zu bieten habe, oder deren Darlegung in einer besonderen Form mir erwünscht erscheint. In I reproduziere ich zunächst gewisse Ideen, die Clifford im Jahre 1873 darlegte, die aber bisher nur wenig bekannt geworden sind, trotz des großen Interesses,

[1]) Es sind dies insbesondere:

Zwei Arbeiten „über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie" in den Bänden 4 und 6 der Math. Annalen (1871, 1872) [Abh. XVI und XVIII dieser Ausgabe],

meine Programmschrift „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen (Erlangen 1872, bei A. Deichert; dieselbe ist erst vor kurzem, mit Zusätzen und Verbesserungen von meiner Seite versehen, durch Herrn Gino Fano in Bd. 17 der Annali di Matematica (1890) in italienischer Übersetzung neu publiziert worden [s. Abh. XXVII dieser Ausgabe]),

ein Aufsatz: „Über den allgemeinen Funktionsbegriff und dessen Darstellung durch eine willkürliche Kurve" in den Berichten der Erlanger physikalisch-medizinischen Gesellschaft von 1873 (wiederabgedruckt in Bd. 22 der Math. Annalen). [S. Bd. 2 dieser Ausgabe.]

[2]) „Vorlesungen über Geometrie unter besonderer Benutzung der Vorträge von A. Clebsch, bearbeitet von F. Lindemann", II, 1. Leipzig, B. G. Teubner, 1891. Siehe insbesondere die dritte Abteilung: Die Grundbegriffe der projektivischen und metrischen Geometrie.

welches sich an dieselben knüpft[3]). Dieselben geben mir den Anlaß, in II die Frage der „Nicht-Euklidischen Raumformen“, über welche Herr Killing vor einigen Jahren ein eigenes Werk publizierte[4]), aufs neue aufzunehmen: mein Resultat ist, daß eine Reihe solcher „Raumformen“ existiert, welche bisher noch nicht die verdiente Beachtung gefunden haben. Eben in diesem Nachweise, sowie in den verschiedenartigen Bemerkungen, die ich mit demselben weiterhin verknüpfe, dürfte die Hauptbedeutung meiner diesmaligen Darlegungen enthalten sein. In III entwickele ich eine besonders einfache Art, auf Grund rein projektiver Betrachtungen die analytische Geometrie einzuführen. Im Prinzip kommt dieselbe selbstverständlich auf die betreffenden Ideen v. Staudts (oder auch von Moebius) zurück, aber sie ist wesentlich anschaulicher, als die mir sonst bekannten Darstellungen der Theorie, und dürfte also an ihrem Teile die Schwierigkeiten vermindern, die immer noch bei verschiedenen Mathematikern meinen früheren hierauf bezüglichen Ausführungen entgegenzustehen scheinen[5]). In IV endlich diskutiere ich allgemeinere Fragen: ich erläutere die prinzipielle Bedeutung derjenigen Auffassungsweise der Nicht-Euklidischen Geometrie, die von der projektiven Geometrie beginnt, und nehme ausführlicher, als ich früher tat, Stellung zum Problem der geometrischen Axiome.

I.

Über Cliffords Ideen von 1873.

Gleich nach Veröffentlichung meiner ersten Abhandlung zur Nicht-Euklidischen Geometrie hat sich Clifford mit der ihm eigentümlichen Unmittelbarkeit geometrischer Intuition auf das eifrigste den damit ge-

[3]) Bisher sind diese Fragen am ausführlichsten von Sir R. S. Ball behandelt. Vgl. insbesondere dessen neueste Abhandlung „On the theory of the Content“ in den Transactions der R. Irish Academy, Bd. 29 (1889), deren bezüglicher Inhalt in das Schlußkapitel von Gravelius' „Theoretischer Mechanik starrer Systeme“ (Berlin 1889) aufgenommen ist. Über Cliffords bez. Originalmitteilungen vgl. weiter unten im Texte.

[4]) Leipzig, bei Teubner 1885.

[5]) So äußert sich z. B. Herr Ball in der Einleitung zu seiner oben genannten Abhandlung:

„In that theory (the Non-Euclidian Geometry) it seems as if we try to replace our ordinary notion of distance between two points by the logarithm of a certain anharmonic ratio. But this ratio itself involves the notion of distance measured in the ordinary way. How then can we supersede the old notion of distance by the Non-Euclidian notion, inasmuch as the very definition of the latter involves the former“?

Und Cayley selbst äußert sich auf Seite 605 des zweiten Bandes seiner Collected Papers (Cambridge 1889), indem er v. Staudts Einführung der Zahlen bespricht:

„It must however be admitted that, in applying this theory of v. Staudt's to the theory of distance, there is at least the appearance of arguing in a circle“.

[Vgl. hierzu das oben auf S. 241 Gesagte. Wenn man sich an den äußeren Wortlaut der v. Staudtschen Darstellung hält, sind danach die Skrupel von Ball und Cayley wohl begreiflich.]

gebenen Fragestellungen zugewandt. Durchdrungen von der besonderen Symmetrie und Eleganz der *elliptischen* Geometrie, suchte er deren Eigenart nach geometrischer und mechanischer Seite hin in besonders einfacher Weise zu formulieren. Die Verhandlungen der Londoner Mathematischen Gesellschaft enthalten hierüber nur zwei vorläufige Mitteilungen; es sind dies:

1. *Preliminary sketch of biquaternions* (Bd. 4, 1873),
2. *On the free motion under no forces of a rigid system in an n-fold homaloid* (Bd. 7, 1876),

die in Cliffords gesammelten Abhandlungen (Mathematical Papers, London, Macmillan 1882) unter Nr. XX und XXVI abgedruckt sind. Am letztgenannten Orte folgen dann aber noch unter Nr. XLI, XLII, XLIV drei weitere hierher gehörige Aufsätze:

1. *Motion of a solid in elliptic space* (aus dem Jahre 1874),
2. *Further Note on Biquaternions* (von 1876),
3. *On the Theory of screws in a space of constant positive curvature* (ebenfalls von 1876).

Ich kann auf die zahlreichen, interessanten Ideen, welche Clifford in diesen Arbeiten darlegt, hier leider nur sehr unvollständig eingehen. In der Tat möchte ich mich hier auf eine einzelne Stelle der „preliminary sketch of biquaternions“ beschränken, wo Clifford in einer neuen, sogleich darzulegenden Weise *parallele* Linien des elliptischen Raumes definiert und daran folgende Bemerkung knüpft, die ich wörtlich reproduziere (vgl. Ges. Werke, S. 193 oben):

„There are many points of analogy between the *parallels* here defined and those of parabolic geometry. Thus, if a line meets two parallel lines, it makes equal angles with them; and a series of parallel lines meeting a given line constitute a ruled surface of zero curvature. *The geometry of that surface is the same as that of a finite parallelogramm whose opposite sides are regarded as identical.*“

Eben die Verhältnisse auf der letztgenannten Fläche erschienen Clifford besonders bemerkenswert: auf der Versammlung der British Association for the Advancement of Science vom Jahre 1873, die in Bradford stattfand, hat er eigens über dieselbe vorgetragen und mir, wie Sir R. S. Ball und anderen Mathematikern, die damals anwesend waren, wiederholt deren Eigenschaften persönlich erläutert. In den bez. Reports ist nur der Titel des Cliffordschen Vortrags wiedergegeben[6]), um so wichtiger ist es mir, hier nachträglich einiges davon zur Geltung zu bringen. Ich beginne damit, einige zugehörige analytisch-geometrische Formeln in

[6]) On a surface of zero curvature and finite extent.

derjenigen Weise zu entwickeln, die ich wiederholt in meinen Vorlesungen befolgte[7]): wie Clifford selbst die bez. Resultate abgeleitet hat, vermag ich im einzelnen nicht zu sagen.

Wir betrachten zunächst die gewöhnliche Interpretation von $x+iy$ auf der Einheitskugel. Bei derselben haben bekanntlich zwei *diametrale* Punkte Argumente folgender Form:

$$(1) \qquad re^{i\varphi}, \quad -\frac{1}{r}e^{i\varphi}$$

(ich werde zwei solche Argumente späterhin kurzweg „diametral" nennen). Wir betrachten ferner lineare Substitutionen von $\lambda = x + iy$:

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta},$$

bei denen zwei diametrale Elemente festbleiben, die sich also geometrisch als eine Drehung der Kugel um einen ihrer Durchmesser darstellen. Wie anderweitig bekannt und beispielsweise auf S. 33, 34 meiner „Vorlesungen über das Ikosaeder" (Leipzig, 1883, B. G. Teubner) ausgeführt ist, kann man einer solchen Substitution folgende Gestalt geben:

$$(2) \qquad \lambda' = \frac{(d+ic)\lambda-(b-ia)}{(b+ia)\lambda+(d-ic)},$$

unter a, b, c, d reelle Größen verstanden. Dabei ist, wenn $\xi\eta\zeta$ die rechtwinkligen Koordinaten eines beliebigen der zwei Kugelpunkte sind, welche bei der bez. Drehung festbleiben, wenn ferner φ den Winkel bezeichnet, durch welchen um diesen Punkt gedreht wird:

$$(3) \qquad a = \varrho\xi\cdot\sin\frac{\varphi}{2}, \quad b = \varrho\eta\cdot\sin\frac{\varphi}{2}, \quad c = \varrho\zeta\cdot\sin\frac{\varphi}{2}, \quad d = \varrho\cdot\cos\frac{\varphi}{2},$$

unter ϱ die Quadratwurzel $\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ verstanden. Aus Gründen, die ich S. 35, 36 der genannten Vorlesungen auseinandersetzte, nenne ich Substitutionen von der Form (2) solche vom *Quaternionentypus*.

Sei jetzt eine beliebige Fläche zweiten Grades gegeben. Wir betrachten diejenigen Kollineationen des Raumes, welche nicht nur die Fläche als solche in sich überführen, sondern auch jedes der beiden Systeme auf ihr verlaufender gerader Linien, — diejenigen Kollineationen also, bei denen die Nicht-Euklidische Maßbestimmung unverändert bleibt, die man auf die F_2 gründen kann, und die man also als zugehörige Nicht-Euklidische Bewegungen bezeichnen wird. Mögen wir die geradlinigen Erzeugenden erster Art der Fläche durch einen Parameter λ, diejenigen zweiter Art durch einen Parameter μ in üblicher Weise festlegen. Die allgemeine Kollineation der in Rede stehenden Art wird dann bekanntlich in der

[7]) Vgl. z. B. die Darlegungen in meiner Arbeit: „Über binäre Formen mit linearen Transformationen in sich". Math. Annalen, Bd. 9, 1875 [Bd. 2 dieser Ausgabe] (insbes. S. 188, 189 daselbst).

Weise zu geben sein, daß man für λ und μ irgend zwei lineare Substitutionen anschreibt:

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta}, \qquad \mu' = \frac{\alpha'\mu+\beta'}{\gamma'\mu+\delta'}$$

(vgl. z. B. Ikosaeder S. 179 ff.). Dabei treten dann von selbst diejenigen zwei Arten von Kollineationen der F_2 in sich besonders hervor, auf welche hier die Aufmerksamkeit gelenkt werden soll. Es sind dies erstens diejenigen, bei denen μ ungeändert bleibt:

$$(4) \qquad \lambda' = \frac{\alpha\lambda+\beta}{\gamma\lambda+\delta}, \quad \mu' = \mu,$$

zweitens die anderen, bei denen λ festgehalten wird:

$$(4^0) \qquad \lambda' = \lambda, \quad \mu' = \frac{\alpha'\mu+\beta'}{\gamma'\mu+\delta'}.$$

Ich werde die durch (4) gegebenen Kollineationen *Schiebungen der ersten Art* nennen, die durch (4^0) gegebenen *Schiebungen der zweiten Art* (Clifford gebraucht statt „Schiebung" das Wort „Vektorbewegung" oder auch wohl nur „Vektor"). Bei einer Schiebung erster Art bleiben, allgemein zu reden, zwei Erzeugende erster Art der Fläche punktweise fest und *es schreitet also jeder Raumpunkt auf derjenigen geraden Linie fort, die durch ihn so gelegt werden kann, daß sie diese beiden Erzeugenden erster Art trifft*, d. h. also auf der durch ihn gehenden geraden Linie derjenigen linearen Kongruenz, deren Leitlinien eben jene zwei Erzeugenden sind. Bei einer Schiebung zweiter Art tritt natürlich entsprechendes Verhalten gegenüber zwei Linien der zweiten Art ein. Jede Schiebung der einen Art ist mit jeder Schiebung der anderen Art vertauschbar (keineswegs aber mit jeder Schiebung derselben Art). Die allgemeine uns interessierende Kollineation unserer F_2 in sich kann nur in einer Weise in die Aufeinanderfolge einer Schiebung der ersten Art und einer Schiebung der zweiten Art aufgelöst werden.

Wir spezialisieren jetzt unsere Fläche zweiten Grades dahin, daß sie eine „reelle, nullteilige" Fläche sei, d. h. eine Fläche mit reeller Gleichung aber ohne reellen Punkt[8]). Die sämtlichen Erzeugenden einer solchen Fläche sind natürlich imaginär, aber es zeigt sich, daß das einzelne System dieser Erzeugenden reell ist, indem es zu jeder imaginären Linie, welche es umfaßt, die konjugiert imaginäre Linie hinzu enthält. Solche zwei

[8]) Die hier im Texte gebrauchte Ausdrucksweise scheint mir bequem, insofern ich das Attribut „imaginär" am liebsten nur einer Fläche beilege, deren Gleichung komplexe Koeffizienten besitzt. Um bei den „reellen" Flächen zweiter Ordnung eine Bezeichnung zu haben, die von der Inbetrachtnahme der unendlich fernen Ebene unabhängig ist, unterscheide ich neben den „nullteiligen" reellen Flächen „ovale" und „ringförmige".

konjugiert imaginäre Linien wählen wir jetzt als Direktrizen einer zugehörigen Schiebung. Offenbar wird letztere reell, und wir finden so, zu unserer Fläche gehörig, *dreifach unendlich viele reelle Schiebungen der einen wie der anderen Art, durch deren Kombination die Gesamtheit der zugehörigen reellen Nicht-Euklidischen Bewegungen entsteht.*

Wir wollen das Gesagte hier analytisch bestätigen und zugleich für die in Rede stehenden reellen Schiebungen explizite Formeln aufstellen. Der Bequemlichkeit halber sei unsere Fläche durch folgende Gleichung gegeben:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0, \tag{5}$$

die wir zwecks Darstellung der zugehörigen Erzeugenden in nachstehender Weise spalten:

$$(x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) + (x_3 + ix_4)(x_3 - ix_4) = 0.$$

Wir schreiben dann etwa:

$$\left\{\begin{aligned} \lambda &= -\frac{x_1 + ix_2}{x_3 + ix_4} = \frac{x_3 - ix_4}{x_1 - ix_2}, \\ \mu &= \frac{x_1 + ix_2}{x_3 - ix_4} = -\frac{x_3 + ix_4}{x_1 - ix_2} \end{aligned}\right. \tag{6}$$

und haben also z. B. für eine Erzeugende erster Art, indem wir noch $re^{i\varphi}$ für λ setzen, die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} (x_1 + ix_2) &= -re^{i\varphi}(x_3 + ix_4), \\ re^{i\varphi}(x_1 - ix_2) &= (x_3 - ix_4). \end{aligned} \tag{7}$$

Indem wir hier i durch $-i$ ersetzen, erhalten wir für die konjugiert imaginäre Gerade:

$$\begin{aligned} (x_1 - ix_2) &= -re^{-i\varphi}(x_3 - ix_4), \\ re^{-i\varphi}(x_1 + ix_2) &= (x_3 + ix_4). \end{aligned}$$

Aber dieses Gleichungspaar können wir auch so ordnen:

$$\begin{aligned} (x_1 + ix_2) &= \frac{1}{r} e^{i\varphi}(x_3 + ix_4), \\ -\frac{1}{r} e^{i\varphi}(x_1 - ix_2) &= (x_3 - ix_4), \end{aligned}$$

und haben damit einen Spezialfall der Gleichungen (7) selbst, wo das $re^{i\varphi}$ durch $-\frac{1}{r}e^{i\varphi}$ ersetzt ist. *Die zu (7) konjugiert imaginäre Linie ist also in der Tat selbst eine Erzeugende der ersten Art.* Aber zugleich erfahren wir: *Konjugiert imaginäre Erzeugende erhalten bei uns diametrale Parameter.* Hierauf und auf Formel (2) ruht jetzt die Darstellung der reellen Schiebungen. Die betreffende Rechnung verläuft folgendermaßen:

Wir haben zunächst aus (6):

$$x_1 + ix_2 : x_1 - ix_2 : x_3 + ix_4 : x_3 - ix_4 = \lambda\mu : 1 : -\mu : \lambda, \tag{8}$$

oder, wie wir unter Einführung eines Proportionalitätsfaktors ϱ schreiben:

$$\begin{aligned} \varrho x_1 &= \lambda\mu + 1, \\ \varrho x_2 &= i(-\lambda\mu + 1), \\ \varrho x_3 &= \lambda - \mu, \\ \varrho x_4 &= i(\lambda + \mu). \end{aligned}$$

Hier tragen wir nun für λ zunächst allgemein ein:

$$\lambda' = \frac{\alpha\lambda + \beta}{\gamma\lambda + \delta},$$

während μ unverändert bleiben soll. Wir bekommen dann nach gehöriger Modifikation des Proportionalitätsfaktors ϱ:

$$\begin{aligned} \varrho' x_1' &= (\alpha\lambda + \beta)\mu + (\gamma\lambda + \delta), \\ \varrho' x_2 &= -i(\alpha\lambda + \beta)\mu + i(\gamma\lambda + \delta), \\ \varrho' x_3' &= (\alpha\lambda + \beta) - (\gamma\lambda + \delta)\mu, \\ \varrho' x_4' &= i(\alpha\lambda + \beta) + i(\gamma\lambda + \delta)\mu. \end{aligned}$$

Ferner tragen wir jetzt für $\lambda\mu$, λ, μ, 1 die ihnen proportionalen Werte aus (8) ein, wobei ϱ' in ϱ'' übergehen mag. Wir erhalten so zur Darstellung der zu (5) gehörigen Schiebung erster Art:

$$\begin{aligned} \varrho'' x_1' &= \alpha(x_1 + ix_2) + \delta(x_1 - ix_2) - \beta(x_3 + ix_4) + \gamma(x_3 - ix_4), \\ \varrho'' x_2' &= -i\alpha(x_1 + ix_2) + i\delta(x_1 - ix_2) + i\beta(x_3 + ix_4) + i\gamma(x_3 - ix_4), \\ \varrho'' x_3' &= -\lambda(x_1 + ix_2) + \beta(x_1 - ix_2) + \delta(x_3 + ix_4) + \alpha(x_3 - ix_4), \\ \varrho'' x_4' &= i\gamma(x_1 + ix_2) + i\beta(x_1 - ix_2) - i\delta(x_3 + ix_4) + i\alpha(x_3 - ix_4), \end{aligned}$$

oder, anders geordnet:

$$\left\{\begin{aligned} \varrho'' x_1' &= (+\alpha + \delta)x_1 + i(\alpha - \delta)x_2 + (-\beta + \gamma)x_3 - i(+\beta + \gamma)x_4, \\ \varrho'' x_2 &= i(-\alpha + \delta)x_1 + (\alpha + \delta)x_2 + i(+\beta + \gamma)x_3 + (-\beta + \gamma)x_4, \\ \varrho'' x_3' &= (+\beta - \gamma)x_1 - i(\beta + \gamma)x_2 + (+\alpha + \delta)x_3 + i(-\alpha + \delta)x_4, \\ \varrho'' x_4' &= i(+\beta + \gamma)x_1 + (\beta - \gamma)x_2 + i(+\alpha - \delta)x_3 + (+\alpha + \delta)x_4. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

Aber wir wünschen eine analytische Darstellung insbesondere der *reellen* Schiebungen der ersten Art. Wir substituieren daher aus den Formeln (2):

$$\alpha = d + ic, \quad \beta = -b + ia, \quad \gamma = b + ia, \quad \delta = d - ic.$$

Gleichzeitig wollen wir den in (9) auftretenden Proportionalitätsfaktor ϱ'' ebenso wie auf der rechten Seite den Faktor 2 der Einfachheit halber weglassen. *Wir erhalten so die übersichtlichen Formeln:*

$$\left\{\begin{aligned} x_1' &= dx_1 - cx_2 + bx_3 + ax_4, \\ x_2' &= cx_1 + dx_2 - ax_3 + bx_4, \\ x_3' &= -bx_1 + ax_2 + dx_3 + cx_4, \\ x_4' &= -ax_1 - bx_2 - cx_3 + dx_4, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

die wir auch so ordnen können:

$$(11)\qquad \begin{cases} x_4' = dx_4 - ax_1 - bx_2 - cx_3, \\ x_1' = ax_4 + dx_1 - cx_2 + bx_3, \\ x_2' = bx_4 + dx_2 - ax_3 + cx_1, \\ x_3' = cx_4 + dx_3 - bx_1 + ax_2. \end{cases}$$

Hier liegt die Beziehung zur Quaternionentheorie auf der Hand. Wir sagen sofort: *Bezeichnet q die Quaternion:*

$$q = d + ai + bj + ck,$$

so ist unsere reelle Schiebung erster Art durch die Formel gegeben:

$$(12)\qquad (x_4 + ix_1' + jx_2' + kx_3') = q \cdot (x_4 + ix_1 + jx_2 + kx_3).$$

Genau so findet man für eine Schiebung zweiter Art:

$$(13)\qquad (x_4' + ix_1' + jx_2 + kx_3') = (x_4 + ix_1 + jx_2 + kx_3) \cdot q',$$

unter q' irgendeine Quaternion $d' + ia' + jb' + kc'$ verstanden. *Für die allgemeine reelle lineare Transformation unserer F_2 in sich aber kommt die schöne Formel:*

$$(14)\qquad (x_4' + ix_1' + jx_2' + kx_3') = q \cdot (x_4 + ix_1 + jx_2 + kx_3) \cdot q'.$$

Diese Formel (14), welche das Resultat unserer Überlegungen in knapper Form zusammenfaßt, ist schon vor langer Zeit von Cayley gegeben worden (vgl. Recherches ultérieures sur les déterminants gauches, Crelles Journal, Bd. 50, 1855, oder auch Werke, Bd. II, S. 214), und stimmt natürlich mit den entsprechenden Formeln überein, welche von Clifford, bez. Sir Robert Ball entwickelt werden.

Es handelt sich nunmehr um die geometrische Deutung der durch (12) dargestellten Schiebung der ersten Art. Zu dem Zwecke führen wir jetzt die zu (5) gehörige Nicht-Euklidische (elliptische) Maßbestimmung ein und wählen der Einfachheit halber die bei letzterer auftretende, noch willkürliche multiplikative Konstante so, daß das Krümmungsmaß gleich 1 wird. Wir definieren dementsprechend als Nicht-Euklidische Entfernung zweier Punkte x, x' den Ausdruck

$$(15)\qquad E = \arccos \frac{x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3' + x_4x_4'}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2} \cdot \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2}}$$

und als Winkel zweier Ebenen u, u' durchaus analog:

$$(16)\qquad W = \arccos \frac{u_1u_1' + u_2u_2' + u_3u_3' + u_4u_4'}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + u_4^2} \cdot \sqrt{u_1'^2 + u_2'^2 + u_3'^2 + v_4'^2}}.$$

Es ist wohl überflüssig, daß ich die Formeln (10) oder (12) auch noch für Ebenenkoordinaten anschreibe. Übrigens denken wir uns in alle diese Formeln jetzt für a, b, c, d die Werte (3) eingetragen. Wir haben dann

sofort aus (15), (16): *Bei einer Schiebung von der Amplitude φ rückt jeder Punkt des Raumes auf der durch ihn hindurchgehenden Kongruenzlinie um das Stück $\frac{\varphi}{2}$ fort; ebenso dreht sich jede Ebene um die in ihr liegende Kongruenzlinie um den Winkel $\frac{\varphi}{2}$.* Die einzelne Schiebung ist also eine Schraubenbewegung des Raumes, bei welcher unendlich viele Schraubenachsen existieren: die Linien der zugehörigen linearen Kongruenz. Dabei unterscheiden sich, wie leicht zu sehen, die Schiebungen erster und zweiter Art durch den *Sinn* der jeweiligen Schraubenbewegung: bezeichnen wir irgendeine Schiebung erster Art als eine Schiebung *rechts herum*, so sind alle Schiebungen erster Art Schiebungen rechts herum, alle Schiebungen zweiter Art Schiebungen links herum. Die zugehörigen Kongruenzen sind eben selbst rechts herum gewunden, bez. links herum gewunden.

Mit den so gegebenen Sätzen (die ich nicht weiter ins einzelne ausführe) ist nun die Grundlage für Cliffords *neue Parallelentheorie* gegeben. Was parallele Linien im parabolischen (Euklidischen) Raume sind, steht fest: bei der Definition paralleler Linien des Nicht-Euklidischen Raumes werden wir zunächst nur insoweit eingeschränkt sein, als wir darauf achten müssen, daß die Definition in die gewöhnliche Euklidische übergeht, sobald der Nicht-Euklidische Raum in einen Euklidischen ausartet. Dieser Bedingung genügt man selbstverständlich durch die gewöhnliche Festsetzung, welche solche Linien des Nicht-Euklidischen Raumes parallel nennt, die sich in einem unendlich fernen Punkte (einem Punkte der Fundamentalfläche zweiten Grades) schneiden. Aber die so definierten Parallelen haben, wie Clifford hervorhebt, fast alle die eleganten Eigenschaften verloren, die den Euklidischen Parallelen zukommen. Diese Eigenschaften beruhen, nach Clifford, wesentlich darauf, daß Euklidische Parallelen vermöge derselben Raumbewegung in sich selbst verschoben werden können. Aber die gleiche Eigenschaft haben im Nicht-Euklidischen Raume, wie wir sahen, die Linien der gerade besprochenen Kongruenzen (der einen wie der anderen Art). Ein Bündel Euklidischer Parallelen kann geradezu als Ausartung einer derartigen Kongruenz angesehen werden. Daher der Vorschlag: *als Nicht-Euklidische Parallelen solche (windschiefe) gerade Linien zu bezeichnen, welche der gleichen Kongruenz (der einen oder anderen Art) angehören, d. h. welche dieselben beiden imaginären Erzeugenden der ersten oder zweiten Art unserer Fundamentalfläche treffen.* Die so definierten (Cliffordschen) Parallelen sind imaginär, wenn die gewöhnlichen Nicht-Euklidischen Parallelen reell sind, nämlich im hyperbolischen Raume, dafür sind sie auf Grund der vorausgeschickten Entwicklungen reell gerade da, wo es die gewöhnlichen Parallelen nicht sind, nämlich im elliptischen Raume. Sie zerfallen dabei ersichtlich in

Parallele der einen oder der anderen Art, d. h. in *rechtsgewundene* und in *linksgewundene* Parallelen.[9])

Es ist hier nicht meine Absicht, noch ausführlich die Zweckmäßigkeit der Cliffordschen Definition darzutun. Vielmehr wende ich mich gleich zur Theorie der besonderen Flächen zweiten Grades, von denen im obigen Zitate die Rede war. *Es handelt sich um die ringförmigen Flächen zweiten Grades (Regelflächen), welche mit der Fundamentalfläche* (5) *ein geradliniges Vierseit gemein haben.* Die Erzeugenden erster Art dieser Fläche, ebenso wie ihre Erzeugenden zweiter Art, sind im Cliffordschen Sinne unter sich parallel; die einen rechts-parallel, die andern links-parallel. Infolgedessen kann die Fläche in unserem elliptischen Raume auf zwei Weisen in sich verschoben werden, einmal so, daß die Erzeugenden der einen Art die Bahnkurven abgeben, während die der zweiten Art untereinander vertauscht werden, das andere Mal umgekehrt. Wir schließen, daß alle Erzeugenden erster Art mit den sie treffenden Erzeugenden zweiter Art je denselben Winkel einschließen (den wir ϑ nennen wollen) und daß die Stücke, welche auf zwei Erzeugenden der einen Art von zwei Erzeugenden der anderen Art ausgeschnitten werden, gleich lang sind. Offenbar können wir die Figur, welche auf der Fläche von solchen zweimal zwei Erzeugendenstücken umgrenzt wird, ein *Parallelogramm* nennen; denn sie hat, obgleich nicht eben, mit dem Parallelogramm der Euklidischen Ebene die wesentlichen Eigenschaften gemein. Gleichzeitig erkennen wir in der Fläche, eben wegen der Verschiebungen, die sie in sich zuläßt, eine *Fläche konstanter Krümmung*. Aber die zweierlei Schiebungen sind, wie wir wissen, miteinander vertauschbar. Hieraus allein folgt bereits, wie Clifford hervorhob, *daß das Krümmungsmaß der Fläche gleich Null ist.*

Alles dieses sind besonders elegante Eigenschaften der betrachteten Fläche (die im elliptischen Raume in mancher Hinsicht dieselbe Rolle spielt wie im gewöhnlichen, parabolischen Raume die Ebene). Aus ihnen folgt, worauf Clifford vor allen Dingen die Aufmerksamkeit richten wollte: *Die Gesamtfläche hat einen endlichen Flächeninhalt.* In der Tat kann man sie ja in unendlich viele, unendlich kleine Parallelogramme von der Winkelöffnung ϑ zerschnitten denken, deren Summation sofort gelingt, und als Gesamtinhalt der Fläche, indem die Gesamtlänge der Erzeugenden der einen wie der anderen Art $= \pi$ ist, $\pi^2 \cdot \cos\vartheta$ ergibt. — Dieses Resultat ist darum so bemerkenswert, weil es unseren gewöhnlichen Vorstellungen von den Eigenschaften einer unbegrenzten Mannigfaltigkeit verschwindenden Krümmungsmaßes widerstreitet. Man glaubt (oder glaubte) allgemein, daß eine solche Mannigfaltigkeit, gleich der Euklidischen Ebene, *unendliche* Ausdehnung besitzen müsse; die Cliffordsche Fläche (so will ich die in Rede stehende Fläche zweiten Grades fortan nennen) belehrt uns, daß dies keineswegs notwendig der Fall zu sein braucht. Es hängt dies offenbar mit dem Umstande zusammen, daß die Cliffordsche Fläche als ringförmige Fläche zweiten Grades mehrfachen Zusammenhang besitzt. So sehen wir denn jetzt ein allgemeines Problem vor Augen, mit dem wir uns bald ausführlich beschäftigen wollen, das Problem: *alle Zusammenhangsarten anzugeben, welche bei geschlossenen Mannigfaltigkeiten irgendwelchen konstanten Krümmungsmaßes überhaupt auftreten können.*[10])

[9]) [Angaben späterer Untersuchungen findet man in den Artikeln der Math. Enz. von M. Zacharias (III. AB. 9) und H. Rothe (III. AB. 11).]

II.

Von den verschiedenen (Euklidischen oder Nicht-Euklidischen) Raumformen.

Ehe ich das bezeichnete Problem in seiner Allgemeinheit in Angriff nehme, sei es mir gestattet, die Aufmerksamkeit auf einen besonderen dabei in Betracht kommenden Punkt zurückzulenken, der in meinen ersten Abhandlungen zur Nicht-Euklidischen Geometrie an zwei Stellen besprochen ist (Bd. 4 der Math. Annalen [Abh. XVI dieser Ausgabe, S. 285]; Bd. 6 [Abh. XVIII dieser Ausgabe S. 324]). Indem ich damals die projektive Geometrie als Grundlage der Nicht-Euklidischen Geometrie voranstellte, verursachte die Einordnung des Euklidischen Raumes und des sogenannten Gaußschen Raumes (des allseitig unendlich ausgedehnten Raumes konstanter negativer Krümmung) keinerlei Schwierigkeit: dieselben entsprechen direkt den beiden Fällen der von mir so bezeichneten *parabolischen*, bez. *hyperbolischen* Geometrie. Anders beim Raume konstanter positiver Krümmung (dem sogenannten Riemannschen Raume). Wie Riemann selbst sich die hier in Betracht kommenden Verhältnisse innerhalb dieses Raumes gedacht hat, ist nach den kurzen Andeutungen, welche er hierüber gibt[11]), nicht ganz klar; jedenfalls aber haben Beltrami und die sämtlichen an ihn anknüpfenden Mathematiker die Geometrie des genannten Raumes schlechtweg mit derjenigen der Kugel parallelisiert und daraus

[10]) [Es ist mir gelegentlich die Frage gestellt worden, wie denn die Cliffordsche Fläche aussieht? Nicht anders, als jedes beliebige einschalige Hyperboloid. Nicht das „Aussehen“ der Fläche ist abgeändert, sondern nur eine besondere Verabredung getroffen, wie auf ihr gemessen werden soll (nämlich unter Zugrundelegung irgendeiner nullteiligen Fläche zweiten Grades, die mit dem vorgelegten Hyperboloid nur imaginäre Erzeugende gemein hat). K.]

[11]) Vgl. *„Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“*, insbesondere den Satz, der in den Ges. Werken [1. Auflage] auf S. 266 unten abgedruckt ist. — Ich halte es selbstverständlich für wahrscheinlich, daß Riemann dort an den sphärischen Raum gedacht hat, aber seine Worte passen auch, ohne unrichtig zu sein, auf den elliptischen Raum.

geschlossen, daß die Punkte eines solchen Raumes, gleich den Gegenpunkten der Kugel, paarweise zusammengehören, in der Art, daß alle geodätischen Linien, welche durch den einen der beiden Punkte hindurchgehen, auch durch den anderen laufen. Ich hatte dem gegenüber darauf aufmerksam zu machen [Abh. XVI, l. c.], daß die Kugel nicht der einfachste Typus einer zweidimensionalen, geschlossenen Mannigfaltigkeit konstanter positiver Krümmung ist, daß dieser vielmehr durch das vom Mittelpunkte der Kugel auslaufende Strahlenbündel geliefert wird (dessen Strahlen den Kugelpunkten ein-zweideutig entsprechen). Die *elliptische* Geometrie, wie ich sie verstehe, deckt sich also nicht mit der sonst diskutierten *sphärischen* Geometrie[12]), sondern ist einfacher. In der elliptischen Geometrie ist die Gruppierung der geraden Linien und Ebenen des Raumes genau dieselbe wie in der projektiven Geometrie: zwei Gerade schneiden sich, wenn überhaupt, nur einmal. Die komplizierteren Verhältnisse des sphärischen Raumes entstehen erst, wenn man den linearen elliptischen Raum durch Projektion auf ein Gebilde zweiten Grades überträgt. —

Es ist mir kein Zweifel, und ich habe mich darüber bereits in Bd. 6 der Math. Ann. [Abh. XVIII] l. c. mit aller Deutlichkeit geäußert, daß ich mit den so bezeichneten Auseinandersetzungen einen wirklichen Irrtum der früheren Darstellungen aufgedeckt habe. Meine Anschauungen vom elliptischen Raume sind dann später in anderer Weise unabhängig von Herrn Newcomb entwickelt worden[13]). Indem ich mir vorbehalte, sogleich noch auf die ausführlichen hier anschließenden Untersuchungen des Herrn Killing einzugehen[14]), möchte ich hier vorab die Frage aufwerfen, weshalb man zur klaren Erfassung des elliptischen Raumes erst so spät gekommen ist, und die dazu führenden Überlegungen selbst heute immer noch nicht allgemein bekannt scheinen[15]). Der Unterschied des sphärischen und des elliptischen Raumes ruht natürlich wieder in deren Zusammenhangsverhältnissen, und der „Zusammenhang" des elliptischen Raumes hat etwas Ungewöhnliches. Bleiben wir der Einfachheit halber, weil die Sache da am kürzesten bezeichnet werden kann, bei zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten. Es handelt sich da um den Unterschied der gewöhnlichen *einfachen* Flächen und der von Moebius

[12]) Ich werde die beiden Namen „elliptisch" und „sphärisch" in dem hier hervortretenden Sinne auch in der Folge auseinanderhalten.

[13]) *Elementary theorems relating to the geometry of a space of three dimensions and of uniform positive curvature in the fourth dimension.* Bd. 83 des Journals für Mathematik, 1877.

[14]) *Über zwei Raumformen mit konstanter positiver Krümmung*, Journal, Bd. 86, 1879, sowie in dem 1885 bei Teubner erschienenen Werke (auf welches schon oben Bezug genommen wurde): *Die Nicht-Euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung.*

[15]) Vgl. z. B. Poincaré im Bulletin de la Société Mathématique de France, Bd. 15 (1887), S. 203 ff.

entdeckten ***Doppelflächen***, bei denen man durch kontinuierliches Fortschreiten über die Fläche hin von einer Seite auf die andere gelangen kann[16]). Die Existenz dieser Doppelflächen widerstreitet unserer Gewöhnung, welche einseitig von solchen Flächen abgezogen ist, die einen Körper begrenzen und eben darum notwendig einfach sind. Dies ist die ganze hier vorliegende Schwierigkeit. In der Tat: die elliptische Ebene verhält sich wie die Ebene der projektiven Geometrie und diese ist, wie ich schon vor langer Zeit an Bemerkungen von Schläfli anknüpfend auseinandersetzte[17]), eine Doppelfläche. Die elliptische Geometrie ist einfach deshalb so lange unbeachtet geblieben, weil der Begriff der Doppelfläche den Geometern nicht geläufig war, oder, wenn sie ihn in der projektiven Geometrie gebrauchten, nicht als solcher zum Bewußtsein gekommen war.

Nun einige Bemerkungen zu den Entwicklungen des Herrn Killing. Herr Killing hat nämlich den Gedanken verfolgt (dem gewiß beigestimmt werden kann), daß der sphärische Raum auch neben dem elliptischen Raume noch ein besonderes Interesse behält. Als einen wirklichen Fortschritt betrachte ich den Killingschen Beweis, daß bei den von ihm festgehaltenen Hypothesen (welche ich übrigens sogleich noch einer näheren Kritik unterwerfen werde) als Raumformen konstanten positiven Krümmungsmaßes keine anderen möglich sind, als eben der elliptische und der sphärische Raum (Journal für Math., Bd. 89, l. c.). Clifford und ich sind an diesem Satze vorbeigeführt worden, weil wir unsere Aufmerksamkeit, unserer damaligen, wesentlich analytischen Auffassung entsprechend, von vornherein auch auf komplexe Werte der Koordinaten gerichtet hatten. Die Abbildung des elliptischen Strahlenbündels auf eine um seinen Mittelpunkt herumgelegte Kugel erschien mir daher (Math. Annalen, Bd. 4 [Abh. XVI dieser Ausgabe], l. c.) nur als spezieller Fall der n-deutigen Abbildung desselben auf irgendwelche Fläche n-ter Ordnung; Clifford stellt in seiner oben besprochenen Arbeit (Preliminary sketch of biquaternions, Werke, S. 189) dem „linearen" elliptischen Raume ausdrücklich höhere „algebraische" Räume entgegen. Diese algebraischen Räume werden natürlich „Verzweigungselemente" enthalten, d. h. Punkte, welche mit den sonstigen Punkten des Raumes nicht gleichberechtigt sind (in meinem Beispiele sind dies diejenigen Punkte der F_n, in denen Strahlen des elliptischen Strahlenbündels berühren). Auch im

[16]) Vgl. die Mitteilungen von Herrn Reinhardt in Bd. 2 von Moebius' gesammelten Werken (Leipzig 1886), S. 519 ff. — Wegen der allgemeinen Theorie dieser Zusammenhangsfragen siehe Dyck in Bd. 32 der Math. Annalen, S. 472 ff. (*Beiträge zur Analysis situs*). — Vgl. übrigens auch die durchaus zutreffenden Äußerungen von Herrn Newcomb in Nr. XIII seiner zitierten Abhandlung. [Wie Staeckel in den Math. Ann., Bd. 59, bemerkt hat, ist die Existenz von Doppelflächen zuerst von Listing 1858 veröffentlicht worden.]

[17]) Math. Annalen, Bd. 7, S. 550 (1874). [Siehe Bd. 2 dieser Ausgabe.]

Falle des sphärischen Raumes sind Verzweigungselemente, algebraisch zu reden, vorhanden; nur sind dieselben alle imaginär und *man kann also von ihnen abstrahieren, indem man sich auf die Betrachtung reeller Elemente beschränkt.* Und nun verstehe ich Herrn Killings Resultat dahin, daß es neben dem eigentlichen elliptischen Raume keinen anderen *reellen* algebraischen Raum konstanten, positiven Krümmungsmaßes gibt, der frei von Verzweigungselementen wäre, als eben den sphärischen Raum. Es ist dies im Sinne der Analysis situs zu verstehen, welche solche geometrische Gebilde als gleichwertig erachtet, welche durch stetige Deformation ineinander übergeführt werden können[18]). Wir sagen also vielleicht besser, *daß ein reeller Raum konstanten positiven Krümmungsmaßes, der keine Verzweigungselemente enthält, eindeutig entweder auf den elliptischen Raum oder den sphärischen Raum muß bezogen werden können.* — Erscheint so das Hauptresultat des Herrn Killing mit meinen Anschauungen sehr wohl vereinbar, so kann ich demselben in einer anderen Hinsicht nicht zustimmen:

Herr Killing bezeichnet den elliptischen Raum als *Polarform* des sphärischen (oder, wie er sagt, des Riemannschen Raumes). Anlaß dazu ist wohl gewesen, daß im elliptischen Raume, der oben mitgeteilten Formel (15) entsprechend, die Gesamtlänge einer geraden Linie ebenso gleich π ist, wie die Winkelsumme im Ebenenbüschel des sphärischen Raumes. Aber die Winkelsumme im Ebenenbüschel des elliptischen Raumes ist doch auch gleich π, und nicht etwa gleich 2π, wie es die Gesamtlänge der geraden Linie des sphärischen Raumes ist. Der elliptische Raum ist eben sich selbst durchaus dualistsch, er ist seine eigene Polarform. Herrn Killings Benennung ist also unzutreffend. Nichts hindert, sich die wirkliche Polarform des Riemannschen Raumes auszudenken. Aber das wird so kompliziert und fremdartig, daß es keinen Zweck hat, hier näher darauf einzugehen.

Beiläufig will ich noch auf einen anderen Unterschied des sphärischen und des elliptischen Raumes aufmerksam machen, der nicht ohne Interesse ist und noch nicht bemerkt zu sein scheint. Bekanntlich ist durch Herrn Schering die *Theorie des Potentials* auf beliebige Nicht-Euklidische Räume ausgedehnt worden[19]). Setzen wir das Krümmungsmaß des sphärischen

[18]) So erscheint also z. B. ein in sich geschlossener ovaler Flächenteil irgendeiner Fläche höherer Ordnung als gleichwertig mit der Kugel, und es ist mit dem Satze des Textes nicht im Widerspruch, wenn man gegebenenfalls einen solchen Flächenteil ebensowohl zwei-eindeutig den reellen Strahlen eines Strahlenbündels zuordnen kann, wie die Kugel selbst.

[19]) Göttinger Nachrichten 1870, S. 311—321: *Die Schwerkraft im Gaußischen Raume,* ebenda 1873, S. 149 ff.: *Die Schwerkraft in mehrfach ausgedehnten Gaußischen und Riemannschen Räumen.* Vgl. hierzu auch Killing in Bd. 98 des Journals für Mathematik (1884): *Die Mechanik in den Nicht-Euklidischen Raumformen* (vgl. insbesondere S. 24—29 daselbst). — Der „Riemannsche Raum" Scherings ist wieder unser sphärischer Raum.

Raumes, um mit unseren früheren Formeln in Übereinstimmung zu sein, gleich Eins, so wird ihm zufolge das Elementarpotential zweier Massenpunkte a, b, im Falle drei Dimensionen in Betracht kommen (eine Annahme, auf die wir uns hier beschränken wollen):

$$V = \operatorname{cotg} r_{ab}. \tag{17}$$

Sei jetzt a' der sphärische Gegenpunkt von a. Rückt b an a heran, so wird $\operatorname{cotg} r_{ab}$ positiv unendlich, rückt es an a', so negativ unendlich. Wir haben also eine Elementarwirkung, bei welcher jedesmal gleichzeitig mit einer anziehenden Masse in a eine ebenso stark abstoßende Masse in a' gesetzt ist. Diese Mitwirkung des Gegenpunktes a' läßt sich auch nicht entbehren. Man sieht dies am besten, wenn man das gesuchte Elementarpotential V als Geschwindigkeitspotential einer Flüssigkeitsbewegung deutet: indem der sphärische Raum endlich ist, muß bei ihm, sobald eine Quelle gegeben ist, aus welcher Flüssigkeit ausströmt, notwendig eine andere Stelle gegeben sein, in der Flüssigkeit verschwindet. — Meine Bemerkung ist nun, daß die hiermit skizzierte Theorie notwendig an der Annahme des sphärischen Raumes haftet und im elliptischen Raume ihre Bedeutung verliert. In der Tat kann Formel (17) für den elliptischen Raum kein eigentliches Potential vorstellen. Denn da a und a' im elliptischen Raume koinzidieren, ist die durch (17) vorgestellte Funktion des Punktes b im elliptischen Raume nur bis auf das Vorzeichen bestimmt: der Punkt b soll also nach Formel (17) seitens eines und desselben Punktes a gleichzeitig angezogen und abgestoßen werden, oder auch a soll gleichzeitig Quelle und Verschwindungstselle einer Flüssigkeitsbewegung sein. Eine solche Vieldeutigkeit ist augenscheinlich mit der Idee einer Elementarwirkung unverträglich[20]).

[20]) Ich würde im Texte auch noch gern auf die Betrachtungen eingegangen sein, welche Herr v. Helmholtz in seinem bekannten Vortrage: *Über den Ursprung und die Bedeutung der geometrischen Axiome* (1870, abgedruckt in Heft 3 der populären wissenschaftlichen Vorträge, Braunschweig 1876) über das Sehen in Nicht-Euklidischen Räumen entwickelt. Inzwischen finde ich es schwer, dieselben im einzelnen zu verstehen. Indem wir hier bei Aufstellung der hyperbolischen, der elliptischen, der parabolischen Raumform gleichförmig von der projektiven Geometrie ausgehen, ist für uns von vornherein gegeben, daß allemal die Gesetze der Perspektive dieselben sein müssen. Ersetzen wir hinterher den elliptischen Raum durch den sphärischen, so kommt eine bestimmte Komplikation durch das Auftreten der Gegenpunkte hinzu. Von dieser Komplikation ist aber bei Herrn v. Helmholtz, trotzdem er sich übrigens genau an die Beltramischen Entwicklungen anschließt, nirgends die Rede; vielmehr paßt das, was a. a. O. S. 47 gesagt wird, ohne weiteres auf die Verhältnisse des elliptischen Raumes, ohne darum für den sphärischen Raum unrichtig zu sein. (Es heißt dort z. B.: Den seltsamsten Teil des Anblicks der sphärischen Welt würde aber unser eigener Hinterkopf bilden, in dem alle unsere Gesichtslinien wieder zusammenlaufen würden, soweit sie zwischen anderen Gegenständen frei durchgehen können, usw. —)

Gehen wir nun zu der allgemeinen Fragestellung über, die wir zum Schlusse von Nr. I formulierten. Auch hier werde ich mit einer kritischen Bemerkung beginnen. In der Tat hat sich ja Herr Killing an den genannten Orten dieselbe Aufgabe gestellt, die uns hier beschäftigen soll, nämlich die, alle Nicht-Euklidischen (oder auch Euklidischen) Raumformen aufzuzählen. Wir sahen bereits, daß in dieser Hinsicht der elliptische und der sphärische Raum bei ihm fortgesetzt nebeneinander betrachtet werden. Dagegen fehlt bei ihm die Raumform verschwindender Krümmung, die wir in Nr. I kennen lernten: die Cliffordsche Fläche. Auch hat, soviel ich weiß, bislang keiner der anderen zahlreichen Mathematiker, die über Räume verschwindender Krümmung geschrieben haben, der durch die Cliffordsche Fläche realisierten Möglichkeit gedacht. Es ist also, ohne daß man es merkte, immer eine willkürliche Voraussetzung eingeführt worden, die das Resultat der Überlegung unnötig einschränkte. Ich werde versuchen, diese Voraussetzung hier zu bezeichnen. Sei es dabei wieder, der größeren Bestimmtheit des Ausdrucks halber, gestattet, nur von zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten zu reden. Hat eine solche Mannigfaltigkeit, wie wir voraussetzen, konstante Krümmung und ist sie zugleich unbegrenzt, so kann jeder einfach berandete, einfach zusammenhängende Teil derselben auf ihr auf dreifach unendlich viele Weisen verschoben werden (ohne je an eine Hemmung zu stoßen). *Aber darum ist keineswegs nötig* (was bei den Killingschen Raumformen zutrifft), *daß sich die Mannigfaltigkeit als Ganzes auf dreifach unendlich viele Weisen in sich verschieben läßt.* Man vergleiche in dieser Hinsicht die Eigenschaften der Cliffordschen Fläche. Dieselbe gestattet allerdings zweifach unendlich viele Bewegungen in sich selbst, entsprechend den einfach unendlich vielen Schiebungen der einen wie der anderen Art, durch welche sie in sich übergeht: bei diesen zweifach unendlich vielen Bewegungen bleibt kein Punkt der Fläche fest. Aber nun versuche man etwa, die Cliffordsche Fläche unter Festhaltung eines ihrer Punkte, gleich einer Euklidischen Ebene, um diesen Punkt in sich selbst zu drehen. So wird man sofort bemerken, daß dies nicht möglich ist. In der Tat haben die von einem Punkte der Fläche unter verschiedenen Azimuthen auslaufenden geodätischen Linien derselben ganz verschiedene Länge: die beiden durch den Punkt hindurchgehenden geradlinigen Erzeugenden der Fläche haben, wie wir wissen, die Gesamtlänge π, aber in ihrer unmittelbaren Nähe können geodätische Linien der Fläche gefunden werden (wir werden dies sogleich noch explizit zeigen), die unbegrenzt oft über die Fläche hinlaufen, ohne sich zu schließen, und also unendliche Länge haben. Die hiermit formulierten Bemerkungen sind, denke ich, entscheidend: *Man hat, indem man das Problem der Raumformen behandelte, bislang die berechtigte Forderung freier Beweglichkeit einfach*

zusammenhängender Raumstücke durch die weitergehende Annahme ersetzt, die Räume als Ganzes seien in sich frei beweglich.

Clifford selbst hat bereits (an der oben zitierten Stelle) angedeutet, wie man sich am leichtesten Einsicht in die speziellen Zusammenhangsverhältnisse seiner Fläche verschafft. Man denke sich nämlich die Fläche längs zweier von einem Punkte derselben anlaufender Erzeugender derselben aufgeschnitten, wodurch sie einfach berandet und einfach zusammenhängend wird. Die so geschnittene Fläche können wir dann offenbar unter Aufrechterhaltung ihrer Maßverhältnisse auf ein Stück der Euklidischen Ebene abbilden (auf ein Stück der Euklidischen Ebene *abwickeln*, um diesen sonst in der Flächentheorie üblichen Ausdruck anwenden); nämlich auf *einen Rhombus von der Winkelöffnung ϑ und der Seitenlänge π* (Fig. 1), *wobei die gegenüberstehenden Seiten dieses Rhombus so zueinander gehören, wie sie durch eine Parallelverschiebung der Ebene auseinander hervorgehen* (was durch die Doppelpfeile der Figur angedeutet sein soll).

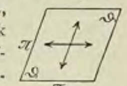


Fig. 1.

An dieser Figur studieren wir nun mit Leichtigkeit die einzelnen Fragen, die uns interessieren; z. B. den Verlauf einer geodätischen Linie über die Cliffordsche Fläche hin. Noch bequemer wird dies übrigens, wenn wir Fig. 1 vermöge der zugehörigen Parallelverschiebungen (welche die einzelne Kante je in die gegenüberliegende überführen) vervielfältigen und uns so eine Zerlegung der Ebene in ein Rhombennetz verschaffen, wie es durch Figur 2 vorgestellt wird. Offenbar gibt uns diese neue Figur ein Bild davon, wie sich die Abwicklung unserer Euklidischen Ebene über die Cliffordsche Fläche hin gestaltet: so wie in der Figur unendlich viele Rhomben nebeneinanderliegen, so wird die Cliffordsche Fläche bei der genannten Abwicklung mit unendlich vielen Blättern überdeckt, welche glatt ineinander übergehen, ohne irgendwelche Verzweigungspunkte darzubieten. — Wollen wir also den Verlauf einer geodätischen Linie auf der Fläche verfolgen, so haben wir nur zuzusehen, wie unser Rhombennetz von einer geraden Linie der Ebene durchzogen wird. Ich betrachte z. B. die gerade Linie AB der vorstehenden Figur, die von einem Eckpunkte (A) auslaufend vier Rhomben durchsetzt, ehe sie wieder in einen Eckpunkt (B) einmündet, von dem aus sie sich dann genau so weiter erstreckt, wie ursprünglich vom Punkte A aus. Offenbar ist es nur nötig, dieses begrenzte Stück AB auf die Cliffordsche Fläche zu übertragen. Und dies

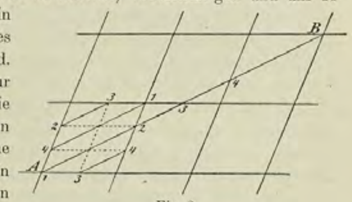


Fig. 2.

gelingt am leichtesten, indem wir die vier Stücke, mit denen AB die vier Rhomben durchsetzt, durch geeignete Parallelverschiebung sämtlich in den ursprünglichen Rhombus zurückverlegen. Es entsteht so ein gebrochener Linienzug:

$$1\,2,\quad 2\,3,\quad 3\,4,\quad 4\,1,$$

dessen Übertragung auf die Cliffordsche Fläche uns keine Schwierigkeit mehr macht. — Insbesondere können wir so ohne weiteres eine geodätische Linie finden, welche unendlich oft über die Cliffordsche Fläche hinläuft, ohne sich zu schließen. Wir werden einfach in Figur 2 eine gerade Linie ziehen, welche von A auslaufend keinen weiteren Eckpunkt der Figur mehr trifft. — Wir gedenken endlich eines letzten Mittels, um die in Frage kommenden Beziehungen noch lebhafter zu erfassen. Dasselbe besteht darin, daß wir den Rhombus 1 zu einer *Ringfläche* zusammenbiegen, daß die zusammengehörigen Stellen gegenüberliegender Kanten zur Deckung kommen. Zu dem Zwecke müssen wir uns natürlich, da es sich um keine kongruente Abwickelung handelt, den Rhombus aus einer dehnbaren Membran gebildet denken. *Auf die so entstehende Ringfläche ist dann die Cliffordsche Fläche stetig eindeutig bezogen,* und wir können an ihr in einfachster Weise die sämtlichen Zusammenhangsfragen, insbesondere den Verlauf unserer geodätischen Linien verfolgen. —

Ich habe die verschiedenen Abbildungen der Cliffordschen Fläche hier so ausführlich besprochen, weil uns jetzt die dabei zugrunde liegende geometrische Denkweise zur allgemeinen Erledigung des vorgelegten Problems der Euklidischen und Nicht-Euklidischen Raumformen dienen soll. Ich beschränke mich dabei vorab auf zwei Dimensionen.

Was die zweidimensionalen Euklidischen Raumformen angeht, so ist sofort ersichtlich, daß uns eine solche gegeben sein wird, auch wenn wir nicht, wie in Figur 1, von einem Rhombus, sondern von einem beliebigen Parallelogramm der Euklidischen Ebene ausgehen, dessen Ränder wir durch geeignete Parallelverschiebung zusammengeordnet denken. Wir können dieses Parallelogramm sogar zu einem Parallelstreif ausarten lassen:

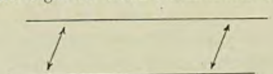


Fig. 3.

der dann, bei der Zusammenbiegung, nicht eine Ringfläche, sondern eine Zylinderfläche ergibt (auf die wir ihn sogar kongruent abgewickelt denken können). Wir haben so zwei neue zweidimensionale Euklidische Raumformen, die übrigens gleich der Cliffordschen Mannigfaltigkeit (die sie als besonderen Fall einschließen) durch *einseitige* Flächen versinnlicht

werden. Wir können noch eine dritte Raumform zufügen, die unter dem Bilde einer *Doppelfläche*[21]) erscheint. In der Tat habe ich an einem anderen Orte[22]) ausführlich gezeigt, daß man eine Ringfläche in der Art stetig deformieren kann, daß sie schließlich eine Doppelfläche beiderseitig überzieht; indem wir bei diesem Deformationsprozesse die Ringfläche fortgesetzt in geeigneter Weise als Trägerin einer Euklidischen Maßbestimmung ansehen, wird schließlich die Doppelfläche zu einer solchen und repräsentiert dann, sobald wir zwischen ihren beiden Seiten nicht weiter unterscheiden, eine neue Euklidische Raumform. *Hiermit aber haben wir, sage ich, die Gesamtheit der in Betracht kommenden zweidimensionalen Nicht-Euklidischen Raumformen erschöpft.*

Der Beweis ist nicht einfach und kann hier nur in allgemeinen Zügen angedeutet werden:

Jedenfalls können wir uns zuvörderst auf die Aufzählung einseitiger Mannigfaltigkeiten der gewollten Art beschränken: denn etwaige Doppelflächen können wir immer auf einseitige Flächen reduzieren, indem wir uns dieselben doppelt überdeckt denken und dadurch zwischen ihren beiden Flächenseiten unterscheiden[23]). Ist erst die Aufzählung der einseitigen Flächen beendet, werden wir nachträglich überlegen, ob wir dieselben zu Doppelflächen zusammenbiegen können, und auf wie viel verschiedene Weisen dies möglich sein mag.

Sei also eine einseitige zweidimensionale Euklidische Mannigfaltigkeit zu suchen. Wir denken uns dieselbe durch stetig gekrümmte Schnitte, die vielleicht aus dem Unendlich-Weiten[24]) kommen und sich im Endlichen jedenfalls nur in einem Punkte schneiden sollen, in einen einfach zusammenhängenden Bereich verwandelt und diesen, wie wir es soeben im Beispiele taten, in die Euklidische Ebene abgewickelt. In letzterer entsteht dann ein Polygon, welches offenbar die doppelte Eigenschaft hat:

daß seine Seiten paarweise miteinander durch Euklidische Bewegungen zur Deckung gebracht werden können,

und daß die Summe seiner im Endlichen gelegenen Winkel (welche zusammengenommen die Umgebung jener einen Stelle ausmachen, in welcher sich die auf der ursprünglichen Mannigfaltigkeit anzubringenden Schnitte eventuell kreuzen sollten) *gleich* 2π *ist.*

[21]) [In der heute zumeist gebräuchlichen Terminologie werden, wie zur Vermeidung von Mißverständnissen bemerkt werden mag, die hier als einseitige bezeichneten Flächen als *zweiseitige* bezeichnet und Doppelflächen als *einseitige*.]

[22]) In meiner Schrift: *Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale* (Leipzig 1882, S. 80 unten).

[23]) Eben dadurch entsteht in einfachster Weise (um hier darauf zurückzugreifen) aus dem elliptischen der sphärische Raum.

[24]) D. h. aus dem Unendlich-Weiten der für die Fläche geltenden Maßbestimmung.

Es wird darauf ankommen, alle solche Polygone der Euklidischen Ebene aufzuzählen. Und da zeigt sich denn, daß es keine anderen Polygone dieser Art gibt, als das Parallelogramm, bzw. den Parallelstreif, oder doch, daß alle anderen krummlinigen Polygone der gesuchten Art, die man konstruieren mag, durch geeignete Verschiebung der auf der anfänglichen Mannigfaltigkeit zu konstruierenden Schnittlinien auf Parallelogramm oder Parallelstreif zurückgebracht werden können.

Endlich ist zu zeigen, daß man von den so gewonnenen einseitigen Euklidischen Mannigfaltigkeiten auf keine andere Weise zu Doppelmannigfaltigkeiten übergehen kann, als auf die soeben andeutungsweise erwähnte. —

Wir haben jetzt die gleichen Untersuchungen für Mannigfaltigkeiten positiver, bzw. negativer konstanter Krümmung durchzuführen. Wir werden dies tun, indem wir auf der Kugel und in der hyperbolischen Ebene geeignete Polygone konstruieren, bei denen wir dann noch hinterher untersuchen, ob wir sie etwa zu Doppelflächen zusammenbiegen können. Das Resultat ist im Falle der Kugel äußerst einfach, indem wir nämlich bei ihr überhaupt keine Polygone finden, die unseren Bedingungen genügen, was zur Folge hat, *daß Kugel und elliptische Ebene die einzigen hier in Betracht kommenden Mannigfaltigkeiten positiver Krümmung bleiben.* Ganz anders im Falle des negativen Krümmungsmaßes. Hier handelt es sich, was die Konstruktion geeigneter Polygone angeht, um eine ausgedehnte Theorie, welche aber — selbstverständlich unter anderen Gesichtspunkten und sogar mit einer Allgemeinheit, die wir nicht brauchen, — von anderer Seite, nämlich seitens der *modernen Funktionentheorie* [in der Theorie der automorphen Funktionen], fertig behandelt vorliegt. Ich denke hier zunächst an die *Fundamentalpolygone*, welche Herr Poincaré konstruiert, um die sämtlichen eindeutigen Funktionen einer komplexen Veränderlichen zu finden, *die durch reelle lineare Transformationen in sich übergehen*[25]. Die größere Allgemeinheit der Poincaréschen Konstruktion liegt darin, daß bei ihr die Winkelbestimmung minder eng gefaßt ist als bei uns. Aber auch wenn wir unsere beschränktere Fassung einführen, erhalten wir immer noch für jedes Geschlecht p unendlich viele zugehörige Polygone. *Alle diese Polygone definieren uns neue Raumformen konstanten negativen Krümmungsmaßes ohne singuläre Punkte.* In meiner soeben zitierten Schrift über Riemanns Theorie usw. sind denn auch (S. 81 daselbst) hinreichende Andeutungen darüber gegeben, wie man die so erhaltenen einseitigen Raumformen gegebenenfalls zu Doppelmannigfaltigkeiten zusammenbiegen kann.

Dies also ist die Antwort, welche wir auf unsere Frage nach den verschiedenen Raumformen im Falle zweier Dimensionen zu erteilen haben.

[25]) Vgl. etwa Acta Mathematica I (1882): *Mémoire sur les groupes fuchsiens.*

Analoge Überlegungen werden wir für dreidimensionale Räume durchführen, indem wir geeignete Polyeder konstruieren. Wir werden da im parabolischen Raume das Parallelepiped usw. in Betracht zu ziehen haben, im hyperbolischen Falle aber die Polyeder, welche Herr Poincaré in Band 3 der Acta Mathematica untersucht[26]). Ich verzichte darauf, dies hier ins einzelne auszuführen, weil dies außerordentlich viel Raum erfordern würde[27]). Immer würde ich wünschen, daß die Fragestellung von anderer Seite aufgenommen wird. In der Tat ist dieselbe ja für die Raumlehre, sofern wir diese mit der Forderung freier Beweglichkeit starrer Körper beginnen wollen, fundamental.

Letztere Forderung ist bekanntlich seinerzeit von Herrn v. Helmholtz vorangestellt worden[28]). Um hier alle Bemerkungen zusammen zu haben, die ich über das solchergestalt zu gründende System der Geometrie zu machen habe, gedenke ich anhangsweise noch der Helmholtzschen Forderung der *Monodromie* des Raumes. Dieses neue Postulat verlangt zunächst, daß überhaupt volle Umdrehung um eine Achse möglich sein soll; es werden dadurch z. B. die Räume mit indefinitem Bogenelemente ausgeschlossen. Dieser Teil des Postulates ist gewiß gerechtfertigt und soll hier unerörtert bleiben. Aber Herr v. Helmholtz gibt seinem Postulate eine weitergehende Bedeutung, indem er der Möglichkeit gedenkt, daß bei voller Umdrehung des Raumes um eine Achse sich die Abstände der Punkte von der Achse vielleicht nicht ungeändert reproduzieren. In der Tat hat Herr v. Helmholtz *für den Fall zweier Variabelen* am Schlusse seiner Mitteilung in den Göttinger Nachrichten eine mit drei Parametern ausgestattete Transformationsgruppe angegeben, welche übrigens alle Eigenschaften einer (Euklidischen oder Nicht-Euklidischen) Bewegungsgruppe hat, aber die hiermit bezeichnete Möglichkeit realisiert. Wir sehen dies sofort, indem wir uns die Transformationen der Gruppe etwa folgendermaßen anschreiben:

$$(x' + iy') = e^{(m+in)\varphi} \cdot (x + iy) + a + ib.$$

Hier sind φ, a, b die drei Parameter, m und n aber bedeuten zwei *nicht verschwindende* Konstante. *Die Forderung der Monodromie läuft nun insbesondere auch darauf hinaus, derartige Gruppen auszuschließen.* Dem-

[26]) *Mémoire sur les groupes kleinéens* (1883). [Ausgeführt in Bd. I der Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen von Fricke-Klein.]

[27]) Was den Begriff der Doppelmannigfaltigkeit im Falle dreier Dimensionen angeht, so vgl. die bereits zitierte Abhandlung von Herrn Dyck in Bd. 32 der Math. Annalen.

[28]) *Über die tatsächlichen Grundlagen der Geometrie*, Bd. 4 d. Verh. d. naturhistorisch-medizinischen Vereins zu Heidelberg, 1886; *Über die Tatsachen, die der Geometrie zu Grunde liegen*, Göttinger Nachrichten 1868. [Helmholtz, Gesammelte Abhandlungen, Bd. II, S. 610—618].

gegenüber muß konstatiert werden, *daß Gruppen der gewollten Eigenschaft überhaupt nur bei zwei Dimensionen existieren* (so daß also für Räume von drei und mehr Dimensionen die Forderung der Monodromie in ihrem zweiten, hier allein in Diskussion stehenden Teile gegenstandslos ist). Einen ausführlichen Beweis hierfür gibt Herr Lie in den Leipziger Berichten von 1886[29]). Ich meinerseits möchte hier auf eine einfache Überlegung aufmerksam machen, aus welcher das Gleiche ohne alle Rechnung folgt. Die Sache ist, daß bei drei und mehr Dimensionen *positive* und *negative* Drehung um eine Achse notwendig *gleichberechtigte* Operationen sind. Denn man kann in einem solchen mehrdimensionalen Raume die Achse, um welche gedreht wird, unter Festhaltung eines ihrer Punkte selber drehen, bis sie in umgekehrter Richtung in ihre ursprüngliche Lage hineinfällt: dann hat sich Drehung rechts herum von selbst in Drehung links herum verwandelt. Würden nun etwa bei Drehung rechts herum die Abstände der Raumpunkte von der Achse vergrößert, so müßte dies auch bei Drehung links herum, d. h. bei der inversen Operation, der Fall sein, was ein Widerspruch ist[30]).

[29]) Bemerkungen zu v. Helmholtz' Arbeit über die Tatsachen, welche der Geometrie zugrunde liegen.

[30]) [Die Darlegungen des Textes bedürfen der Erläuterung, bzw. Berichtigung, wie ich sie ausführlich in meiner unter XXVIII besprochenen autographierten Vorlesung: Einleitung in die höhere Geometrie, II, ausgearbeitet von Fr. Schilling, 1893, auf S. 215—244 gegeben habe; siehe auch den hierauf bezüglichen Satz in genannter Besprechung S. 502 der vorliegenden Ausgabe,

Der Gegensatz von Helmholtz und Lie und meine dementsprechende im Texte dargelegte Auffassungsweise kann nach meinem heutigen Standpunkt etwa folgendermaßen bezeichnet werden:

Helmholtz geht bei seinen Untersuchungen von der erkenntnistheoretischen Frage aus, wie die Grundsätze der Geometrie tatsächlich zustande kommen. Indem er die freie Beweglichkeit starrer Figuren anschauungsmäßig an die Spitze stellte, kam ihm kein Zweifel, daß diese auch für die unmittelbare Umgebung des einzelnen Punktes gelten müsse. Dementsprechend schreibt er für die entsprechende Transformation der von einem Punkte auslaufenden Differentiale erster Ordnung von vornherein eine dreigliedrige lineare Gruppe vor. Hieran habe ich mich im Texte (bzw. in meiner Vorlesung von 1889—90) angeschlossen. Helmholtz ist denn auch, als ich ihm gelegentlich (1893) von meinen Überlegungen betr. die Überflüssigkeit des Monodromieaxioms erzählte, damit sehr zufrieden gewesen (siehe Königsbergers Helmholtzbiographie, Bd. 3, S. 81).

Lie umgekehrt knüpft an den Wortlaut der Axiome an, wie ihn Helmholtz in einer im Texte genannten Note in den Göttinger Nachrichten formuliert hat, und hat sich dementsprechend mit der Möglichkeit auseinanderzusetzen, daß die 6gliedrige Gruppe der Bewegungen bei festgehaltenem Punkte vielleicht nur insofern dreigliedrig ist, als man die Transformationen der Differentiale höherer Ordnung mit in Betracht zieht.

Selbstverständlich sind dies für die rein mathematische Fragestellung wesentliche Untersuchungen, und es ist ein Fehler gewesen, daß ich in meiner Vorlesung von 1889—90, bzw. im vorliegenden Aufsatze darüber weggegangen bin. Zur Entschuldigung kann ich nur anführen, daß damals nur die vorläufigen Angaben von Lie in den sächsischen Berichten von 1886 vorlagen, nicht aber die Ausführungen ebendort von 1890. Das Merkwürdige dabei bleibt, daß ich Lie, wie er 1886 selbst angibt, meinerseits erst darauf aufmerksam gemacht habe, daß es sich bei Helmholtz im Grunde um eine gruppentheoretische Frage handele, die er behandeln müsse (wobei ich auch gleich die Vermutung ausgesprochen hatte, daß das Axiom betr. die Monodromie überflüssig sein dürfte). K.]

III.

Von der rein projektiven Begründung der analytischen Geometrie.

Meine Entwicklungen in Band 4 und 6 der Math. Annalen [Abh. XVI und XVIII dieser Ausgabe], denen zufolge die projektive Geometrie auch in ihrer analytischen Form vor Entscheidung über die Frage des Parallelenaxioms soll aufgestellt werden können, ruhen wesentlich auf dem Nachweise v. Staudts, daß man den Zahlbegriff in die Geometrie auf Grund bloßer projektiver Konstruktionen einführen kann, ohne irgend von Maß und Messen zu sprechen. Trotzdem hierüber in den letzten 20 Jahren vieles von verschiedenen Seiten geschrieben ist, scheinen doch noch immer besondere Schwierigkeiten dem Verständnisse entgegenzustehen, wie ich schon in der Einleitung bemerkte. Vielleicht liegt dies an der *Unanschaulichkeit* des ursprünglichen v. Staudtschen Verfahrens, bei welchem abstrakte Definitionen vorangestellt werden und dem Leser selbst überlassen bleibt, wie er eine Übersicht der schließlich nötig werdenden Operationen gewinnen will. Diese Unanschaulichkeit liegt aber, hier wie in anderen Teilen der Geometrie, keineswegs im Wesen der Sache. Vielmehr gelingt es, wie ich hier zeigen möchte, an einer einzigen einfachen Figur gleichzeitig die Einführung der Zahlen und die Grundsätze, nach welchen mit denselben zu operieren ist, deutlich zu machen.

Es wird gut sein, die so bezeichnete Aufgabe von vorneherein nach verschiedenen Seiten zu umgrenzen. Zielpunkt ist uns der allgemeine Nachweis, daß man durch bestimmte projektive Konstruktion auf jedem Grundgebilde erster Stufe (also, um uns auf die Ebene zu beschränken, auf jedem Strahlbüschel und auf jeder geraden Punktreihe der Ebene) *eine Werteverteilung x derart angeben kann, daß zwischen den x, x' zweier Grundgebilde, die projektiv aufeinander bezogen sind, eine lineare Relation $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ statt hat.* Nun wird aber die beabsichtigte Skalenkonstruktion sich wegen ihres projektiven Charakters von einem ersten Grundgebilde sofort auf jedes andere, mit ihm projektiv verbundene übertragen. Daher können wir den beabsichtigten Nachweis auf die Betrachtung eines einzigen Grundgebildes einschränken, in der Weise, daß wir zeigen: *Wie immer wir auf einem solchen Grundgebilde zwei projektive Skalen x, x' konstruieren mögen, immer stehen dieselben in linearer Abhängigkeit.* Aber auch diesen Ansatz werden wir noch modifizieren. Ein einfacher Überschlag wird uns lehren, daß bei der von uns auszuführenden Skalenkonstruktion drei willkürliche Konstante benutzt werden. Ebenso viele wesentliche Konstante sind in der Formel $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ enthalten. Wir können daher unsere Forderung umkehren und den Nachweis verlangen, *daß wir zu jeder Werteverteilung x, die wir auf einem festen Grundgebilde erster Stufe durch unsere projektive Konstruktion gewinnen mögen, durch Veränderung der Grundelemente unter Wiederholung unserer Konstruktion eine Werteverteilung x' hinzu konstruieren können, die zu ihr in irgendwelcher vorgegebener linearer Abhängigkeit $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ steht.*

Dieser letzte Beweis soll nun wirklich erbracht werden, indem wir als festes Grundgebilde ein *Strahlbüschel* der Ebene nehmen (was den Vorteil bietet, daß uns unabhängig von der Ansicht, die wir uns vom Parallelenaxiom bilden mögen, alle seine Elemente zugänglich sind). Dabei wird es sich, was die Konstruktion irgendwelcher Skala x angeht, selbstverständlicherweise nur darum handeln können: jedem *rationalen* Werte von x ein Element unseres Grundgebildes zuzuweisen, wobei wir den Nachweis verlangen, daß die so entstehenden „rationalen" Elemente des Gebildes auf diesem nach der Größe des zugehörigen x geordnet sind und in ihrer Gesamtheit das Gebilde „überall dicht" überdecken. Aber auch die Forderung, die wir betreffs der Formel $x' = \frac{\alpha x + \beta}{\gamma x + \delta}$ stellten, werden wir entsprechend einschränken. Wir werden dieselbe nämlich ausschließlich unter der Voraussetzung behandeln, daß die α, β, γ, δ *kommensurabel* sind; wir geben dem Ausdruck, indem wir statt der allgemeinen Formel lieber gleich die folgende hinschreiben:

$$x' = \frac{ax + b}{cx + d},$$

in welcher a, b, c, d *ganze Zahlen* bedeuten sollen. Die Determinante $(ad - bc)$, die selbstverständlich nicht verschwinden soll, setzen wir weiterhin $= p$. — Die so umgrenzten Konstruktionen und Beweise werden dann so durchzuführen sein, daß wir immer wieder *den v. Staudtschen Satz von der Vierseitskonstruktion* gebrauchen, durch den wir irgend drei in bestimmter Reihenfolge genommenen Elementen unseres Grundgebildes jeweils ein viertes, welches wir das *harmonische* Element nennen, zuordnen können.

Die Figur, die ich mir jetzt konstruiert denke, ist die projektive Verallgemeinerung des gewöhnlichen Parallelogramm-Netzes (Fig. 4). Die betreffende Verallgemeinerung bietet sich unmittelbar, sobald man bemerkt, daß von den in der Figur markierten Punkten

$$\ldots a_{-2},\ a_{-1},\ 0,\ a_{+1},\ a_{+2},\ \ldots$$

je drei aufeinanderfolgende zu dem unendlich fernen Elemente A, von den ebenfalls angegebenen Punkten

$$\ldots b_{-2},\ b_{-1},\ 0,\ b_{+1},\ b_{+2},\ \ldots$$

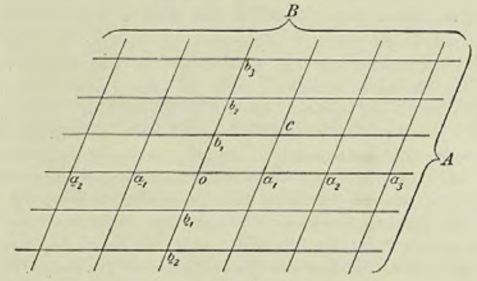


Fig. 4.

je drei aufeinanderfolgende zu dem unendlich fernen Elemente B harmonisch sind. Statt längerer Erläuterung schalte ich hier das Beispiel einer so verallgemeinerten Figur ein:

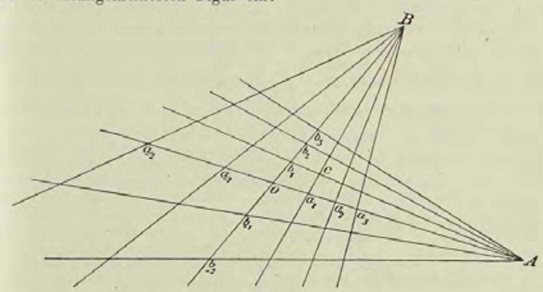


Fig. 5.

Offenbar können wir bei ihrer Konstruktion vier Punkte, z. B. 0, a_{+1}, b_{+1}, c, beliebig annehmen; alle weiteren Punkte sind dann eindeutig bestimmt. Wir nennen jetzt den Punkt, in welchem sich die Strahlen Ba_m, Ab_n kreuzen, den Punkt (m, n); m und n sind dabei irgend zwei (positive oder negative) ganze Zahlen. Man sieht dann in Fig. 4 durch elementargeometrische Überlegungen:

Sind m, n; m', n'; ϱ irgendwelche ganze Zahlen, so liegen die Punkte (m, n), (m', n'), $(m + \varrho(m' - m), n + \varrho(n' - n))$ auf gerader Linie.

Eben denselben Satz werden wir bei Figur 5 durch wiederholte Anwendung des Satzes vom Vierseit beweisen können.

Hiermit haben wir nun alle Hilfsmittel, um für das von 0 auslaufende Strahlbüschel der Fig. 5 alle von uns postulierten Entwicklungen zu machen. Offenbar liegen je zwei Punkte (m, n) und $(\varrho m, \varrho n)$ mit 0 auf gerader Linie. *Eben dieser Linie als einem Elemente des von 0 auslaufenden Strahlbüschels legen wir jetzt den Zahlenwert $x = m/n$ bei.* Wir erhalten so für jeden rationalen Wert von x einen Strahl, und daß diese „rationalen" Strahlen im Büschel ebenso auf einander folgen, wie die der Größe nach geordneten zugehörigen x, ferner daß sie das Büschel „überall dicht" überdecken, dürfte durch den bloßen Anblick unserer Figur deutlich sein. Nicht minder ist auf Grund einfacher projektiver Überlegungen klar, daß die so gewonnene Werteverteilung x von drei willkürlichen Parametern abhängt, daß sie nämlich völlig festgelegt ist, wenn wir die drei Strahlen OA, OB, OC, die beliebig ausgewählt werden dürfen, in bestimmter Weise angenommen haben. Wir können also gleich zum zweiten Teile unserer Entwicklung übergehen. Wir verlangten zu zeigen, daß wir zur ersten Skala x für die Strahlen unseres Büschels, unter Festhaltung der einmal gewählten Konstruktionsweise, eine neue Skala x' hinzukonstruieren können, die mit ihr durch irgendwelche Formel $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$ verbunden ist (unter a, b, c, d ganze Zahlen von nicht verschwindender Determinante verstanden, die wir gleich p setzten).

Dieser Nachweis ist nun in speziellen Fällen, die ich hier vorab bespreche, wenn nämlich eine der folgenden drei Formeln vorgelegt ist:

$$x' = \frac{1}{x}, \quad x' = \frac{x}{p}, \quad x' = x + 1$$

durch bloßen Anblick der Figur 5 zu erbringen (man orientiere sich vielleicht vorab jedesmal an der Figur 4, die unseren Gewöhnungen besser entgegenkommt). Wollen wir z. B. $x' = \frac{1}{x}$ konstruieren, werden wir Fig. 5 als solche ganz unverändert lassen und nur die ihr beigesetzten Buchstabenreihen a, b vertauschen. Wollen wir $x' = \frac{x}{p}$ haben, so werden wir die Punke b und die Linie Ab der Figur ungeändert lassen, dagegen von den Punkten a (und also den Linien Ba) nur diese beibehalten:

$$\ldots a_{-2p}, \; a_{-p}, \; O, \; a_{+p}, \; a_{+2p}, \; \ldots$$

und sie mit

$$\ldots a'_{-2}, \; a'_{-1}, \; O, \; a'_{+1}, \; a'_{+2}, \; \ldots$$

bezeichnen. Nicht minder konstruieren wir die Skala $x' = x + 1$ durch eine Figur der von uns betrachteten Art, deren Lage gegen Fig. 5 ohne weiteres ersichtlich sein dürfte.

Und nun ist das Schöne, *daß, aus arithmetischen Gründen, mit diesen speziellen Fällen der allgemeine von uns zu erbringende Nachweis bereits von selbst mit erledigt ist.* In der Tat ist es ein bekanntes Theorem der Arithmetik (welches z. B. in der Theorie der Transformation der elliptischen Funktionen immerzu benutzt wird[31]), daß man jede Substitution:

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}$$

aus den speziellen Substitutionen:

$$x' = \frac{1}{x}, \quad x' = \frac{x}{p}, \quad x' = x + 1$$

durch eine *endliche* Zahl von Wiederholungen, bez. Kombinationen erzeugen kann. Jeder einzelne dieser Schritte bedeutet aber die Ersetzung der ursprünglichen Figur 5 durch eine neue derselben Art; dieselbe Bedeutung hat also die allgemeine Formel $x' = \frac{ax+b}{cx+d}$, was zu beweisen war.[32])

[31]) Vgl. z. B. Dedekind im 83. Bande des Journals für Mathematik, S. 287 ff.

[32]) [Eine projektive Skala kann man nach den Grundsätzen der projektiven Geometrie insbesondere auch auf einem Kegelschnitt konstruieren. Bezeichnet man drei beliebige Punkte des Kegelschnitts mit 0, 1, ∞, so werden die entsprechenden harmonischen Punkte 2, -1, $1/2$ in der Weise zu konstruieren sein, daß man den Kegelschnitt mit den Geraden schneidet, welche 0, 1, ∞ beziehungsweise mit den Polen der Linien 1∞, $\infty 0$, $0\,1$ verbinden. Übrigens treffen sich diese Verbindungsgeraden nach dem Satz von Brianchon in einem gemeinsamen Punkte. Und so weiter fort. — Dieses Verfahren gibt zu einer besonders plastischen Figur Anlaß, wenn man die genannten Geraden, soweit sie das Innere des Kegelschnitts durchsetzen, wirklich hinzeichnet. Im Inneren der Kegelschnitte findet sich dann eine Zahl aneinander grenzender Dreiecksflächen und der unendliche Prozeß der immer wiederholten Konstruktion eines vierten harmonischen Punktes findet ein übersichtliches Fortführungsgesetz, indem man an die bereits gewonnenen Dreiecksflächen immer wieder neue anfügt. Man sehe die Figur 6 (die ich von 1877 an in Vorlesungen wiederholt zur Sprache brachte):

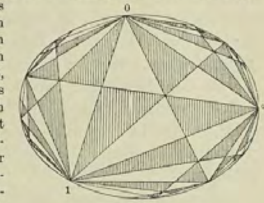


Fig. 6.

Es ist dies dieselbe Figur, welche die eigentliche Grundlage der Theorie der elliptischen Modulfunktionen ist und für funktionentheoretische wie zahlentheoretische Zwecke gleich unentbehrlich scheint. Man vergleiche meine von Fricke bearbeiteten Vorlesungen über elliptische Modulfunktionen I, S. 239—242 oder auch unsere Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen I, S. 75, oder endlich die Ausführungen in meinen autographierten Vorlesungen über Zahlentheorie I,

IV.

Von der prinzipiellen Bedeutung der projektiven Geometrie, nebst allgemeinen Bemerkungen über die geometrischen Axiome.

In meinen Abhandlungen in Bd. 4 und 6 der Math. Ann. [Abh. XVI und XVIII dieser Ausgabe] habe ich nirgends die Frage berührt, in welchem Sinne es psychologisch berechtigt erscheint, die projektive Geometrie vor der Geometrie des Maßes zu entwerfen und geradezu als Grundlage der letzteren zu betrachten. Hierauf dürfte etwa folgendes zu antworten sein:

Wir können zwischen *mechanischen* und *optischen* Eigenschaften des Raumes unterscheiden. Erstere finden in der freien Beweglichkeit starrer Körper ihren mathematischen Ausdruck, letztere in der Gruppierung der den Raum durchziehenden geraden Linien (der Lichtstrahlen, oder der vom Auge ausgehenden Visierlinien). Es handelt sich nun hier nicht um die Frage, wie überhaupt unsere Raumvorstellung entsteht (oder im Laufe der Generationen entstanden ist): Niemand wird wohl zweifeln, daß mechanische und optische Erfahrungen dabei zusammenwirken oder zusammengewirkt haben. Vielmehr handelt es sich darum, ob man beim methodischen Aufbau der Raumwissenschaft die Eigenschaften der einen oder der anderen Art voranstellen soll. Durch Herrn v. Helmholtz sind, wie wir ausführlich besprachen, die mechanischen Eigenschaften bevorzugt worden: meine Arbeiten zeigen, daß man ebensowohl mit den optischen Eigenschaften beginnen kann. Beiderlei Entwicklungen können nebeneinander bestehen; eine jede von ihnen hat ihre besonderen Vorzüge. Wenn es für den Anfänger faßlicher sein mag, mit den starren Körpern und ihrer Kongruenz zu beginnen, so gibt uns die projektive Methode bessere Übersicht. Ich möchte, um dies zu belegen, geradezu auf die Entwickelungen der Nr. II zurückverweisen. Alle die Unterscheidungen, die ich dort bespreche: zwischen dem elliptischen und sphärischen Raume und den anderen Raumformen, ergeben sich bei Zugrundelegung der projektiven Anschauung wie von selbst, während es eines hohen Maßes von Abstraktion bedürfen möchte, um auf dem anderen Wege zu denselben zu gelangen. —

Zum Schlusse noch einige Worte über das Wesen der geometrischen Axiome überhaupt. In der *mathematischen* Literatur zum mindesten

S. 134—237. In den elliptischen Modulfunktionen knüpfe ich an diese Figur insbesondere folgende Bemerkung: „Im Herbst 1873 hatte ich mit dem verstorbenen Clifford eine lebhafte Unterhaltung darüber, daß man es als eine Aufgabe der modernen Mathematik bezeichnen müsse, die uns überkommenen, getrennt nebeneinander stehenden mathematischen Disziplinen in lebendige Wechselwirkung zu setzen; wir kamen überein, daß dies für synthetische Geometrie und Zahlentheorie am schwierigsten sein möchte. *Die vorstehende Figur stellt diese Verbindung her.*" K.]

scheint mir betreffs derselben fast allgemein eine Ansicht verbreitet[33]), die von derjenigen abweicht, die ich für richtig halte, und von der ich in meinen früheren hierher gehörigen Arbeiten Gebrauch gemacht habe, ohne mir des Widerspruchs gegen andere Meinungen deutlich bewußt zu sein. Die betreffende Ansicht geht dahin, daß die Axiome die „Tatsachen" der räumlichen Anschauung formulieren, und zwar so vollständig formulieren, daß es bei geometrischen Betrachtungen unnötig sein soll, auf die Anschauung als solche zu rekurrieren, es vielmehr genügt, sich auf die Axiome zu berufen. Ich möchte zunächst jedenfalls den zweiten Teil dieses Satzes bestreiten. Eine geometrische Betrachtung rein logisch zu führen, ohne mir die Figur, auf welche dieselbe Bezug nimmt, fortgesetzt vor Augen zu halten, ist jedenfalls mir unmöglich. Man verweist in dieser Hinsicht ja wohl auf das Verfahren der analytischen Geometrie. Aber eine bloß rechnende analytische Geometrie, die von den Figuren abstrahiert, kann ich ebensowenig als eigentliche Geometrie gelten lassen, wie gewisse Zweige der sogenannten synthetischen Geometrie, die sich nur dadurch von analytischer Geometrie unterscheiden, daß an Stelle der algebraischen Formelsprache eine andere gesetzt ist. — Doch nun zum ersten Teile des Satzes! In meinem Aufsatze über den allgemeinen Funktionsbegriff, den ich in der Einleitung zitierte, habe ich ausführlich auseinandergesetzt (und hierin stimme ich mit Herrn Pasch überein), daß ich die räumliche Anschauung als *etwas wesentlich Ungenaues* ansehe, — mag nun von der abstrakten Anschauung die Rede sein, wie sie uns durch Gewöhnung geläufig geworden ist, oder von der konkreten Anschauung, die bei empirischen Beobachtungen zur Geltung kommt. Das Axiom ist mir nun *die Forderung*, vermöge deren ich in die ungenaue Anschauung *genaue Aussagen hineinlege*. Eine geometrische Betrachtung aber denke ich mir so, daß wir die Figur, um die es sich handelt, als solche unablässig vor Augen behalten, und uns dann in jedem Augenblicke, in dem es sich um scharfe Beweisführung handelt, auf die Axiome als festes logisches Substrat zurückbeziehen. — Der *Inhalt der Axiome* erscheint bei dieser Auffassung so weit willkürlich, als mit der Ungenauigkeit unserer Raumanschauung verträglich ist. Eben hierin, aber auch nur

[33]) Ich möchte hier insbesondere auf die *Vorlesungen über neuere Geometrie* von M. Pasch verweisen (Leipzig, 1882), insofern die Grundanschauungen, von denen Herr Pasch ausgeht, mit meinen eigenen sehr gut übereinstimmen, abgesehen eben von der im Texte näher zu erläuternden Differenz hinsichtlich der Bedeutung der Axiome. [Diese Differenz ist keine prinzipielle. Pasch will ausdrücken, daß jeder vorliegende mathematische Beweis sich in eine Reihe nur auf die Axiome gestützter logischer Schlüsse zerlegen lassen muß. Ich dagegen denke an die Auffindung der Beweise, bez. der zu beweisenden Theoreme, also an die Arbeitsweise des *schaffenden* Mathematikers. In einem gewissen Maße auch des *lernenden* Mathematikers, denn das Erfassen der Theoreme und Beweise ist mehr oder minder ein Nachschaffen. K.]

hierin, ruht für mich die Berechtigung der Nicht-Euklidischen Geometrie (unter Nicht-Euklidischer Geometrie die reale Disziplin und nicht bloß die abstrakten mathematischen Betrachtungen verstanden, zu denen dieselbe Anlaß gegeben hat). Übrigens ist es von diesem Standpunkte aus selbstverständlich, daß wir unter gleichberechtigten Systemen von Axiomen jeweils das einfachste bevorzugen und eben darum zumeist mit der Euklidischen Geometrie operieren, welche für die gewöhnlichen Fragestellungen die einfacheren Aussagen liefert. — Was aber die *Entstehung der Axiome* angeht, so weiß ich darüber nichts weiter zu sagen, als daß wir die zu ihnen führende Abstraktion hier wie in anderen Gebieten unwillkürlich vollziehen. Das, was in der Anschauung oder im Experimente nur approximativ gegeben ist, das formulieren wir in exakter Weise, weil wir anderenfalls damit nichts anzufangen wissen. — Hiermit ist denn auch die Stellung gegeben, die ich zur Theorie des *Irrationalen* einnehme. Sicher liegt die *Veranlassung* zur Bildung der Irrationalzahlen in der scheinbaren Stetigkeit der Raumanschauung. Ich kann aber, da ich der Raumanschauung keine Genauigkeit beilege, ihr auch nicht die *Existenz* des Irrationalen entnehmen wollen. Vielmehr ist mir die Theorie des Irrationalen etwas, was in rein arithmetischer Weise zu begründen oder zu umgrenzen ist, und was wir dann, dank den Axiomen, in die Geometrie hineintragen, um auch in ihr diejenige Schärfe der Distinktionen zu erreichen, die die Vorbedingung der mathematischen Behandlung ist.

Göttingen, den 20. August 1890.

[Die Vorlesung von 1889—90, an die sich dieser Aufsatz wesentlich anschließt, ist seinerzeit in der Ausarbeitung von Fr. Schilling autographisch vervielfältigt worden und eröffnet damit die Reihe meiner Autographien über verschiedene Gegenstände der höheren Mathematik (später im Kommissionsverlag bei B. G. Teubner). In einem ersten Referate über diese Autographien (Math. Ann., Bd. 45, 1894) äußere ich mich hierzu zu Anfang folgendermaßen:

„Es ist nun schon eine längere Reihe von Jahren, daß ich mir eine besondere Vorlesungspraxis ausgebildet habe. Von dem Wunsche ausgehend, meine wissenschaftlichen Anschauungen möglichst allseitig auszugestalten, habe ich mit dem Gegenstande meiner Vorlesungen fast fortwährend gewechselt. Dies gab Schwierigkeiten fast noch mehr für meine Zuhörer als für mich selbst. Ich begann daher, meine jedesmaligen Vorträge ausarbeiten zu lassen und diese Ausarbeitungen den Studierenden im Lesezimmer des Seminars zur Verfügung zu stellen. Diese Methode hat sich im Laufe der Jahre naturgemäß weiterentwickelt. Es erschien wünschenswert, daß die Studierenden nicht zu viele Zeit auf das Nachschreiben der Vorlesungshefte verwenden sollten, während ich andererseits das Bedürfnis empfand, auch früheren Schülern oder befreundeten Gelehrten von dem Inhalte meiner jedesmaligen Vorlesungen Mitteilungen zu machen. Ich ging also dazu über, die Ausarbeitungen autographisch zu vervielfältigen. Diese autographierten Hefte haben gegen meinen ursprünglichen Wunsch allmählich immer mehr eine Verbreitung auch in weiteren Kreisen gefunden. In demselben Maße habe ich mehr und mehr danach gestrebt, denselben einen allgemein

gültigen Inhalt zu geben. Ich habe eine Zeitlang gehofft, ich werde Hilfskräfte finden, um die so entstehenden Darstellungen verschiedener Gebiete einer Überarbeitung zu unterziehen und dann in Buchform zu veröffentlichen. Die Herausgabe meiner Vorlesungen über elliptische Modulfunktionen durch Herrn Fricke bot hierfür ein glänzendes Beispiel; ich kann in diesem Zusammenhange ferner das Werk von Pockels (Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, Leipzig 1891) sowie ein demnächst erscheinendes Buch von Bôcher (Über die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie) anführen. Aber eine solche Bearbeitung kostet außerordentlich viele Zeit und es geht dabei auch der Charakter der Unmittelbarkeit, den die Vorlesungen besitzen, verloren, — ganz abgesehen davon, daß es kaum möglich sein dürfte, immer wieder einen geeigneten Bearbeiter zu finden. So sei denn der weitere Schritt gewagt, meine neueren autographierten Hefte, so wie sie sind, hier in den Annalen zu besprechen und dadurch dem allgemeinen mathematischen Publikum vorzulegen. Meine Absicht ist geradezu die, dem gegenwärtigen ersten Artikel in Zukunft eine Reihe weiterer Mitteilungen folgen zu lassen, in dem Maße wie fernere Vorlesungshefte hinzukommen.

Ich bin mir ja der Verantwortung dieses Schrittes sehr bewußt. Die autographierten Hefte sind als Wiedergabe wirklich gehaltener Vorlesungen durch die mannigfachsten Zufälligkeiten bedingt: einzelnes ist breit ausgeführt, während anderes, gleich wichtige fehlt. Und mehr als das: sie enthalten der vorläufigen Formulierungen und Urteile eine Menge, die bei nochmaliger Durcharbeitung vermutlich nicht würden bestehen bleiben können. Ich mochte dieselben nicht einfach wegstreichen, weil ich glaube, daß die Wirkung meiner Darstellung gerade in ihrem subjektiven Charakter beruhen wird. Möge man die Versicherung hinnehmen, daß ich an solchen Stellen einzig um den Fortschritt der Wissenschaft bemüht bin und daß ich andererseits sehr bereit sein werde, Berichtigungen entgegenzunehmen und bei späterer Gelegenheit zur Geltung zu bringen.“ K.]