F. Klein

FELIX KLEIN
GESAMMELTE MATHEMATISCHE ABHANDLUNGEN

ERSTER BAND

LINIENGEOMETRIE
GRUNDLEGUNG DER GEOMETRIE
ZUM ERLANGER PROGRAMM

HERAUSGEGEBEN
VON
R. FRICKE UND A. OSTROWSKI
(VON F. KLEIN MIT ERGÄNZENDEN ZUSÄTZEN VERSEHEN)

MIT EINEM BILDNIS

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1921

F. Klein

FELIX KLEIN
GESAMMELTE MATHEMATISCHE ABHANDLUNGEN

ERSTER BAND

LINIENGEOMETRIE
GRUNDLEGUNG DER GEOMETRIE
ZUM ERLANGER PROGRAMM

HERAUSGEGEBEN
VON
R. FRICKE UND A. OSTROWSKI
(VON F. KLEIN MIT ERGÄNZENDEN ZUSÄTZEN VERSEHEN)

MIT EINEM BILDNIS

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1921

VORWORT.

Die umfassende Wirksamkeit, welche Felix Klein in den vielseitigen Richtungen seiner Betätigung ausgeübt hat, wurzelt in dem engeren Gebiete seiner rein mathematischen Forschungen und in der wichtigen Stellung, welche die Ergebnisse dieser Forschungen, sowie ihre Grundauffassung und Methodik in der neueren Gesamtentwicklung der mathematischen Wissenschaft einnehmen. Bereits in den ersten Schöpfungen Kleins war der Weg vorgezeichnet, dessen folgerechte Weiterbildung zu seiner mathematischen Denkweise hinführte. Im Laufe der Jahrzehnte hat Klein seine Auffassung und Methodik in fast allen Einzeldisziplinen der Mathematik zur glänzenden Durchführung gebracht und so eine Entwicklung geschaffen, die mit außerordentlicher Fruchtbarkeit überall eine Fülle neuer Gesichtspunkte und Probleme schuf, und deren früheste Periode jetzt eben im Laufe des letzten Jahrzehntes in die Entwicklung der mathematischen Physik in so überraschender Weise klärend und grundlegend eingriff.

Kleins mathematische Auffassungen entstammen der geometrischen Denkweise. Die neueste Mathematik wird demgegenüber von den Begriffen der Zahl und der Menge beherrscht. Doch wieviel ärmer wäre diese mehr kritische als produktive Periode unserer Wissenschaft, hätte sie nicht zuvor von den der Geometrie entstammenden Auffassungen jene mächtigen Impulse erlebt, welche nicht nur in der Geometrie selbst, sondern auch in der Algebra, Gruppentheorie und vor allem in der Funktionentheorie die wahren und wertvollen Gegenstände und Probleme auch für die spätere mehr kritische Bearbeitung ans Licht brachte!

Die Vielseitigkeit der Forschungen Kleins brachte ihn in unmittelbare Berührung und persönliche Fühlung mit einer sehr großen Anzahl deutscher und ausländischer Gelehrter Für die Weiterführung seiner Ideen trat eine stattliche Reihe von Mitarbeitern und Schülern ein. Seit lange war demnach im Kreise der Freunde und Schüler Kleins der Wunsch rege geworden, die wissenschaftlichen Werke Kleins in einer einheitlichen Gesamtausgabe vereinigt zu sehen. Die Feier des goldenen Doktorjubiläums Kleins am 12. Dezember 1918 gab den willkommenen Anlaß, zur Schaffung einer solchen Ausgabe den ersten Schritt zu unternehmen. Den Text der Urkunde, die dem Jubilar zu diesem Zwecke am genannten Tage überreicht wurde, bringen wir unten zum Abdruck.

Die Unterzeichneten haben es sich zu einer besonderen Ehre angerechnet, an ihrem Teile Herrn Geheimrat Klein bei der Herausgabe seiner gesammelten mathematischen Abhandlungen behilflich sein zu dürfen. Die Ausgabe ist auf drei ungefähr gleich starke Bände berechnet, an welche sich noch ein kurzer Registerband anschließt. Gleich mit Beginn der geschäftlichen Verhandlungen über Druck und Verlag der Neuausgabe hat Klein in eingehenden Besprechungen mit Ostrowski die Vorbereitungen zum Drucke insbesondere des ersten Bandes begonnen. In Verbindung hiermit hat Klein über seine zunächst in Betracht kommenden Arbeiten vor einem kleinen Kreise von Zuhörern Vorträge gehalten, aus denen dann wesentlich die Vorbemerkungen und Zusätze entstanden sind, die unserer Neuausgabe ihren besonderen Wert verleihen. Eine Eigenart der Kleinschen Produktion ist es, daß er immer mit Freunden und Schülern arbeitete. Dementsprecheud berichten die genannten Bemerkungen wesentlich über die Art der Entstehung der einzelnen Abhandlungen.

Längere Überlegungen Kleins mit Ostrowski haben die Anordnung der Abhandlungen ergeben, welche für den ersten Band durchgeführt und für die folgenden Bände wenigstens im allgemeinen festgelegt ist. Wir haben die auf den zweiten und dritten Band bezüglichen Einzelangaben, weil sie noch nicht bindend sein können, im Einverständnis mit der Verlagsbuchhandlung nur auf den Umschlag des gegenwärtigen Bandes gesetzt. Es ist eine Mischung von sachlicher Anordnung mit chronologischen Gesichtspunkten befolgt. Hierdurch gelang es, jedem der drei ersten Bände einen geschlossenen Charakter zu erteilen.

Erschöpft ist die Summe der auf Klein zurückgehenden Fortschritte durch unsere Ausgabe allerdings noch nicht. Manche seiner Ideen und Resultate finden sich nämlich nur in den Veröffentlichungen seiner Mitarbeiter eingestreut, und es erscheint ganz unmöglich, sie systematisch herauszulösen und zu sammeln, weil sie mit den jeweiligen Gedankengängen der anderen organisch verknüpft sind. Auf Beziehungen dieser Art konnte demnach nur gelegentlich hingewiesen werden.

Der vorliegende erste Band enthält insbesondere die Mehrzahl der rein geometrischen Arbeiten Kleins, mit Ausnahme derjenigen über Realitätsverhältnisse algebraischer Gebilde und Analysis situs, die für den zweiten Band zurückgestellt wurden. Demnach umfaßt der erste Band den Hauptteil der Abhandlungen Kleins aus seiner ersten Schaffensperiode (1868—1872), zusammen mit den Weiterbildungen, welche die damals entstandenen Grundanschauungen im Laufe der Zeit gefunden haben. Im vorliegenden Bande fanden auch die letzten Aufsätze ihren Platz, mit denen Klein an seine Jugendarbeiten anknüpfend zur modernen Relativitätstheorie der Physiker Stellung nehmen konnte.

Der Text der Abhandlungen ist vor dem Druck durchgesehen und an einzelnen Stellen sind kleine Verbesserungen angebracht worden. Da manche der Abhandlungen bereits an verschiedenen Stellen abgedruckt und dabei auch wiederholt kleine Änderungen im Texte vorgenommen sind, würde ein pedantisches Eingehen auf alle Einzelheiten im Sinne einer textkritischen Ausgabe die Darstellung gelegentlich recht unübersichtlich gemacht haben. Es wurde daher der Mittelweg gewählt, nur die von irgendwelchem Gesichtspunkte aus wichtigen Änderungen, sowie die Zusätze und Fußnoten, die sich vom übrigen Text abheben, besonders zu bezeichnen, indem sie in eckige Klammern gesetzt wurden. Indessen ist selbstverständlich z. B. alles, was von irgendwelcher Bedeutung für etwaige Prioritätsfragen sein konnte, aufs sorgfältigste hervorgehoben worden. Größere Zusätze und zusammenfassende Vorbemerkungen sind teils an den Anfang, teils an den Schluß der einzelnen Abhandlungen, teils endlich in die Einleitungen zu den drei Hauptabschnitten dieses Bandes gesetzt. —

Mit verbindlichem Dank haben wir der freundlichen Hilfe zu gedenken, die uns mehrere Fachgenossen bei der Herausgabe zuteil werden ließen. Herr A. Schönflies hat einen großen Teil der Korrekturen des vorliegenden Bandes durchgesehen und seine Bemerkungen sind uns von großem Nutzen gewesen. Herr H. Vermeil hat sämtliche Korrekturen und Revisionen des Textes mit großer Sorgfalt gelesen. Außerdem hat er an der Vorbereitung der die Relativitätstheorie betreffenden Abhandlungen zum Wiederabdruck wesentlichen Anteil. Bei einzelnen Teilen des Bandes haben uns die Herren L. Bieberbach und F. Engel und Frl. E. Noether bei der Korrektur unterstützt. Ebenso möchten wir an dieser Stelle den Herren M. Noether und F. Engel für die freundliche Erlaubnis zur Benutzung der Sonderabzüge einiger älterer Arbeiten Kleins danken, ganz besonders aber der Firma B. G. Teubner, die einige ältere Bände der Mathematischen Annalen der Druckerei zur Verfügung gestellt hat.

Die Verlagsfirma Julius Springer hat bei der Drucklegung des ersten Bandes allen unseren Wünschen und Vorschlägen in entgegenkommender Weise entsprochen, aber, was mehr ist, sie hat es in einer schweren Zeit, in der der Herstellung eines größeren der reinen Wissenschaft gewidmeten Werkes fast unüberwindliche Schwierigkeiten entgegenstehen, gewagt, den vorliegenden Band herzustellen und in Verlag zu nehmen. Die Firma Julius Springer hat hierdurch nicht nur den aufrichtigen Dank der Nächstbeteiligten erworben, sondern dem Ansehen und der Wirkung deutscher Wissenschaft einen unschätzbaren Dienst geleistet.

Braunschweig und Göttingen, im Oktober 1920.

Die Herausgeber.

HERRN
GEHEIMEN REGIERUNGSRAT
DR. PHIL. ET ING.

FELIX KLEIN

ORDENTLICHEM PROFESSOR
DER MATHEMATIK AN DER
GEORG AUGUST UNIVERSITÄT
GÖTTINGEN

ZUM 10. DEZEMBER 1918
DEM TAGE SEINES
GOLDENEN DOKTORJUBILÄUMS

Hochverehrter Herr Geheimrat!

Am 12. Dezember 1918 sind fünfzig Jahre verflossen, seit Sie damals neunzehnjährig, von der philosophischen Fakultät der Universität Bonn auf Grund Ihrer Dissertation „Über die Transformation der allgemeinen Gleichung zweiten Grades zwischen Linienkoordinaten auf eine kanonische Form" zum Doktor promoviert wurden. Den Tag Ihres goldenen Doktorjubiläums haben Ihre unterzeichneten mathematischen Freunde und Verehrer als eine willkommene Gelegenheit ergriffen, Ihnen Gruß und Glückwunsch zu entbieten und zugleich freudig Bekenntnis davon abzulegen, was Sie während des verflossenen halben Jahrhunderts der Wissenschaft und Ihren Freunden und Schülern gewesen sind. Bereits kurze Zeit nach dem Erscheinen Ihrer Dissertation haben Sie die Geometrie um eine Reihe wertvoller Untersuchungen bereichert, haben Sie zusammen mit Lie Ihre ersten gruppentheoretischen Entwicklungen ausgeführt. Im Anfang der siebziger Jahre erfolgten Ihre tiefen Untersuchungen über Nicht-Euklidische Geometrie, und bei Antritt Ihrer Erlanger Professur übergaben Sie Ihr bahnbrechendes Erlanger Programm der Öffentlichkeit. Was zum wesentlichen Charakter der glänzenden Reihe Ihrer weiterfolgenden Untersuchungen wurde, trat schon hier hervor: die Durchdringung und gegenseitige Belebung der verschiedenen mathematischen Disziplinen, der geniale Blick für ihre inneren Zusammenhänge. Zur schönsten Blüte erwuchs diese Ihnen ganz eigentümliche Denkweise mathematischer Forschung in Ihrer bewunderungswürdigen Arbeit über die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Funktionen, die stets als ein Juwel mathematischer Forschung verehrt werden wird. Aber auch in der reichen Fülle Ihrer weiteren Arbeiten, die sich namentlich auf die naturwissenschaftlichen Anwendungen der Mathematik beziehen, sehen wir überall die Vorzüge Ihrer Denkweise sich glänzend bewähren.

Aber nicht nur den bahnbrechenden Forscher sehen wir in Ihnen, der unserer Wissenschaft neue Wege erschlossen hat, wir verehren in Ihnen zugleich den unermüdlichen Freund und Helfer, der dem gleichstrebenden Forscher durch schriftlichen und mündlichen Ausspruch stets freigebig von dem Reichtum seiner Ideen spendete. Wir verehren in Ihnen den geistreichen Lehrer, der es verstand, unserer Wissenschaft eine große Anzahl von Schülern zu gewinnen, die begeistert die belebende Zauberkraft Ihres Vortrages empfanden. So wollen wir an Ihrem heutigen Jubeltage Ihnen, dem bahnbrechenden Forscher, dem hilfsbereiten Führer, dem geistvollen Lehrer unsere Verehrung und Dankbarkeit darbringen.

Zugleich aber wollen wir eine Bitte aussprechen. Um die wertvollen Errungenschaften Ihrer Lebensarbeit noch zugänglicher und wirkungsvoller zu gestalten, besteht der lebhafte Wunsch, Sie möchten den Entschluß fassen, eine einheitliche Ausgabe Ihrer gesammelten Werke zu veranstalten. Bei dem großen Reichtume und Umfange Ihrer gesamten Tätigkeit verkennen wir nicht die riesige Arbeit, die eine Verwirklichung dieses

Wunsches in sich schließen würde. Aber vielleicht besteht doch einige Hoffnung, daß vorerst eine Ausgabe Ihrer gesammelten wissenschaftlichen Abhandlungen und Noten der Verwirklichung entgegengeführt werden könnte. Ihrer Forschertätigkeit, deren Jugendkraft wir noch jüngst zu bewundern Gelegenheit hatten, wird ja eine zurückschauende Arbeit wenig behagen. Darum nahen wir Ihnen heute noch mit einer letzten Bitte, nämlich freundlichst die Verfügung über eine Stiftung annehmen zu wollen, die den ausdrücklichen Zweck hat, nach Ihrem Ermessen alles Dienliche zur Vorbereitung und Durchführung einer Ausgabe Ihrer gesammelten Abhandlungen zu ermöglichen und zu befördern. Sehen Sie, hochverehrter Herr Geheimrat, in unserer Bitte die Lebhaftigkeit unseres Wunsches, daß Ihre Schöpfungen, die uns zu einer so reichen Quelle der Belehrung und des Genusses geworden sind, in dem Gesamtrahmen der mathematischen Literatur auch äußerlich die ihnen gebührende Stellung gewinnen, daß sie künftigen Generationen leichter zugänglich werden und damit die ihnen innewohnende Kraft und Wirksamkeit für die fernere Fortentwicklung unserer Wissenschaft noch sicherer zur Geltung bringen.

*

INHALTSVERZEICHNIS DES ERSTEN BANDES[1]).

Zur Liniengeometrie.

Zur Grundlegung der Geometrie.

[1]) Wo zwei Jahreszahlen beigesetzt sind, bezieht sich die eine auf die Datierung der Arbeit, die andere auf die des betreffenden Zeitschriftbandes.

Zum Erlanger Programm.

Zur Liniengeometrie.

Zur Dissertation.

Vielleicht darf ich einige Bemerkungen über die Entstehung meiner Dissertation vorausschicken. — Ich war seit Ostern 1866 Assistent bei Plücker bis zu seinem Tode am 22. Mai 1868. Plücker beschäftigte sich damals neben seiner Vorlesung über Experimentalphysik mit der Ausarbeitung seiner „Neuen Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement" (Leipzig, B. G. Teubner, Teil I 1868, Teil II 1869). Ich hatte nicht nur bei der Vorlesung zu helfen, sondern auch bei der Vorbereitung und Redaktion des genannten Werkes. Einiges hierüber wird noch in Bd. II dieser Ausgabe meiner Abhandlungen anzugeben sein. Als Plücker starb, war im wesentlichen nur erst die erste Hälfte des Werkes im Druck vollendet, die dann nach dem Wunsche der Verlagsbuchhandlung von Clebsch herausgegeben wurde. Ich kam so mit Clebsch in persönliche Verbindung, der mich insbesondere auf die Arbeiten von Battaglini aufmerksam machte. Battaglini hatte nicht nur die Theorie der Komplexe ersten Grades, sondern auch die der Komplexe zweiten Grades bereits in Angriff genommen (s. bes. Atti della R. Accademia di Napoli, III, 1866). Es wurde mir nicht ganz leicht, von den mehr elementaren Methoden der Plückerschen Darstellung zu dem konsequenten Verfahren der projektiven Koordinaten überzugehen, wie es von Battaglini gehandhabt wurde. Das Studium der Lehrbücher von Salmon-Fiedler und mancher Originalabhandlung half mir über diese Schwierigkeit weg. Ich bemerkte dann aber bald, daß die von Battaglini zugrunde gelegte kanonische Form der Komplexe zweiten Grades nicht die allgemeine sein konnte[1]. Damit hatte ich das Thema, aus dem ich hoffte, eine Dissertation gestalten zu können, nämlich die Herstellung einer wirklich allgemeinen kanonischen Form. Die simultane Reduktion zweier quadratischer Formen von beliebig vielen Variabeln auf Aggregate bloß quadratischer Glieder, — das verallgemeinerte Hauptachsenproblem — war mir natürlich bekannt. Aber es hat lange gedauert, bis ich sie, wie in der Dissertation geschieht, als *Durch-*

[1]) Vgl. die erste der a. S. 49 abgedruckten Doktorthesen. — Battaglini setzt (wenn ich die Bezeichnungen meiner Dissertation gebrauchen darf) Ω und P von vornherein in der kanonischen Form an

$$\Omega = \sum a_\varkappa p_\varkappa^2, \qquad P = \sum p_\varkappa p_{\varkappa+3}.$$

Da man auf das einzelne Koordinatenstystem 15 Konstante zu rechnen hat, die sechs Größen $a_\varkappa$ aber nur ihren Verhältnissen nach in Betracht kommen, so hat man scheinbar 20 Konstante zur Verfügung, so daß der von 19 Konstanten abhängige allgemeine Komplex zweiten Grades jedenfalls umfaßt zu werden scheint. Aber die vorausgesetzte Gleichungsform bleibt, wie ich bemerkte, ungeändert, wenn man unter Einführung dreier beliebiger Größen λ, μ, ν für die $p_\varkappa$ folgende andere Variable setzt:

$$p_1' = \lambda p_1, \quad p_4' = \frac{1}{\lambda} p_4; \quad p_2' = \mu p_2, \quad p_5' = \frac{1}{\mu} p_5; \quad p_3' = \nu p_3, \quad p_6' = \frac{1}{\nu} p_6.$$

Sie enthält also in Wirklichkeit nur 17 wesentliche Konstante.

gangspunkt benutzte, ich habe zunächst immer wieder versucht, nach *Analogie* des Hauptachsenproblems einen Ansatz zu finden, bei welchem die Form $P = \sum p_\varkappa p_{\varkappa+3}$ auch zwischendurch ihre ursprüngliche Gestalt behielt. Nachdem ich im September 1868 (gelegentlich eines Aufenthalts in meiner Vaterstadt Düsseldorf) den richtigen Gedanken gefaßt hatte, habe ich ihn rasch ausgearbeitet und meinem verehrten Lehrer Lipschitz, der mich zu examinieren hatte, vorgelegt. Ich hatte dabei, wie es damals bei geometrischen Untersuchungen üblich war, nur erst den einfachsten (freilich auch interessantesten) Fall berücksichtigt, wo die Determinante von $\Omega + \lambda P$, gleich Null gesetzt, für λ sechs verschiedene Wurzeln ergibt. Dementgegen verlangte Lipschitz, daß ich alle anderen, mehr speziellen Fälle, mit berücksichtigen solle, und gab mir zugleich die Korrekturbogen der eben noch im Druck befindlichen Arbeit von Weierstraß: Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen (Monatsberichte der Berliner Akademie vom Mai 1868), in der die für diesen Zweck erforderliche Theorie der „Elementarteiler" zum ersten Male in voller Allgemeinheit entwickelt ist. Es wurde mir nicht schwer, diese Theorie in wenigen Tagen einzuarbeiten, womit meine Dissertation die Form erhielt, in der sie jetzt vorliegt. Ich bin dabei, wie ich im Hinblick auf meine späteren Untersuchungen hervorheben möchte, gleich in zweierlei Richtung über die Weierstraßschen Entwickelungen hinausgegangen, indem ich einmal darlegte, welche Möglichkeiten hinsichtlich der *Realität* der Transformation jeweils vorliegen (natürlich vorausgesetzt, daß Ω von Haus aus reelle Koeffizienten hat), andererseits aber untersuchte, *wie viele Parameter* bei der Transformation jeweils verfügbar bleiben (welche kontinuierliche Gruppe linearer Transformationen die einzelne kanonische Form in sich selbst überführt).

Es hat übrigens immer meiner Denkweise entsprochen, die besonderen Fälle, wo die Wurzeln der determinierenden Gleichung $|\Omega + \lambda P| = 0$ nicht sämtlich voneinander verschieden sind, als Ausartungen aufzufassen; ich habe das sehr viel später einmal in einer Vorlesung für den Fall von fünf Variablen auseinandergesetzt, worüber das Buch von Bôcher über die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie (B. G. Teubner, 1894), S. 56, 57 zu vergleichen ist. Dies schließt nicht aus, daß eine genaue Untersuchung der Spezialfälle mir wünschenswert schien. So ist 1873, als ich schon in Erlangen war, die Dissertation von A. Weiler entstanden (Math. Ann. Bd. 7), an die sich dann in bekannter Weise die Arbeiten von Segre und Loria und anderen Forschern angeschlossen haben. Siehe, was insbesondere Liniengeometrie und die von mir untersuchten Konfigurationen angeht, die bezüglichen Referate von Zindler und Steinitz in Bd. III der Mathematischen Enzyklopädie. K.

I. Über die Transformation der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades zwischen Linien-Koordinaten auf eine kanonische Form.

[Inauguraldissertation, Bonn 1868. Wiederabgedruckt mit kleinen Änderungen und Zusätzen in den Math. Ann., Bd. 23 (1884).]

Ueber

die Transformation

der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades
zwischen Linien-Coordinaten

auf eine canonische Form.

Inauguraldissertation,

zur Erlangung der Doctorwürde bei der philosophischen
Facultät zu Bonn eingereicht

und am 12. December 1868 mit Thesen vertheidigt

von

Felix Klein.

Namen der Opponenten:

Emil Budde, Dr. phil.
Ernst Sagorski, cand. phil.
Johannes Seeger, Dd. phil.

Bonn.

Druck von Carl Georgi.

Seinem unvergesslichen Lehrer

Julius Pluecker

in dankbarer Erinnerung

der Verfasser.

Ein Linienkomplex des n-ten Grades umfaßt eine dreifach unendliche Anzahl gerader Linien, welche im Raume in einer solchen Art verteilt sind, daß diejenigen geraden Linien, welche durch einen festen Punkt gehen, einen Kegel der n-ten Ordnung bilden, oder, was dasselbe sagt, daß diejenigen geraden Linien, welche in einer festen Ebene liegen, eine Kurve der n-ten Klasse umhüllen.

Seine analytische Darstellung findet ein derartiges Gebilde durch die von Plücker in die Wissenschaft eingeführten Koordinaten der geraden Linie im Raume[1]). Nach Plücker erhält die gerade Linie sechs homogene Koordinaten, welche eine Bedingungsgleichung zweiten Grades erfüllen. Vermöge derselben wird die gerade Linie mit Bezug auf ein Koordinatentetraeder bestimmt. Eine homogene Gleichung des n-ten Grades zwischen diesen Koordinaten stellt einen Komplex des n-ten Grades dar.

In dem Folgenden ist es unsere Absicht, die Gleichung des zweiten Grades zwischen Linienkoordinaten, einer Verwandlung des Koordinatentetraeders entsprechend, auf eine kanonische Form zu transformieren. Wir geben zunächst die allgemeinen Formeln, welche bei einer derartigen Transformation überhaupt in Anwendung kommen. Auf Grund derselben behandelt sich das Problem algebraisch als die simultane lineare Transformation der Komplexgleichung auf eine kanonische Gestalt und der Bedingungsgleichung des zweiten Grades, welcher die Linienkoordinaten genügen müssen, in sich selbst. Bei der Durchführung dieser Transformation gelangen wir insbesondere zu einer Einteilung der Komplexe zweiten Grades in unterschiedene Arten.

---

[1]) Proceedings of the Royal Soc. 1865; Phil. Transactions 1865, p. 725, übersetzt in Liouv. Journal, 2. Série, t. XI; Les Mondes, par Moigno, 1867, p. 79; Annali di matematica, Ser. II, t. 1 [siehe den Wiederabdruck in den Gesammelten Abhandlungen von J. Plücker, Bd. I, herausgegeben von A. Schoenfließ]; Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement, erste Abteilung, Leipzig 1868, bei B. G. Teubner.

I.

Über Linienkoordinaten im allgemeinen.

1. Wenn wir die homogenen Koordinaten zweier, beliebig auf einer gegebenen geraden Linie angenommener Punkte bezüglich mit

$$x_1, x_2, x_3, x_4$$

und

$$y_1, y_2, y_3, y_4$$

bezeichnen, so erhält die gegebene gerade Linie, welche geometrisch als Verbindungslinie der beiden Punkte (x) und (y) bestimmt ist, *die folgenden sechs, ebenfalls homogenen Koordinaten:*

$$(1)\qquad \begin{cases} p_1 = x_1 y_2 - x_2 y_1, & p_4 = x_3 y_4 - x_4 y_3, \\ p_2 = x_1 y_3 - x_3 y_1, & p_5 = x_4 y_2 - x_2 y_4, \\ p_3 = x_1 y_4 - x_4 y_1, & p_6 = x_2 y_3 - x_3 y_2. \end{cases}$$

Es sind dies die aus den Elementen

$$\begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{matrix}$$

gebildeten sechs Determinanten zweiten Grades, mit einem derartigen Zeichen genommen, daß eine Vertikalreihe der Elemente (in unserer Annahme die erste) ausgezeichnet auftritt.

Zufolge der Determinantenform behalten die sechs gewählten Koordinaten dieselben relativen Werte, wenn wir an die Stelle der angenommenen beiden Punkte (x) und (y) irgend zwei andere Punkte der gegebenen geraden Linie setzen. Denn die Koordinaten eines beliebigen solchen Punktes lassen sich auf die Form bringen:

$$\lambda x_1 + \mu y_1, \ldots, \lambda x_4 + \mu y_4,$$

wo λ, μ näher zu bestimmende Konstanten bezeichnen, und die Substitution solcher Größen an Stelle der x und y in die für die Koordinaten p gegebenen Ausdrücke liefert, wie sich sofort ergibt, Multipla der für die p ursprünglich erhaltenen Werte.

Die sechs Koordinaten p befriedigen identisch die folgende Relation des zweiten Grades:

$$P \equiv p_1 p_4 + p_2 p_5 + p_3 p_6 = 0,$$

welche wir auch so schreiben können:

$$\sum_{\varkappa} p_\varkappa \cdot p_{\varkappa+3} = 0,$$

indem wir den Index $\varkappa$ von 1 bis 3, oder auch von 1 bis 6 laufen lassen,

und dabei unter $\varkappa + 3$ diejenige Zahl verstehen, welche in der kontinuierlichen Reihenfolge:

$$1, 2, \ldots, 5, 6, 1, 2, \ldots$$

die $(\varkappa + 3)$. Stelle einnimmt.

Vermöge dieser Relation, welcher die *sechs* homogenen Koordinaten p genügen, vertreten dieselben die zu der Bestimmung einer geraden Linie notwendigen *vier* Konstanten.

Für die Gleichungen derjenigen vier Ebenen (Projektionsebenen), welche sich durch die vermöge der beiden Punkte (x) und (y) bestimmte gerade Linie und bezüglich die vier Eckpunkte des Koordinatentetraeders hindurchlegen lassen, erhalten wir die folgenden:

$$(2)\qquad \begin{cases} p_4 z_2 + p_5 z_3 + p_6 z_4 = 0, \\ p_4 z_1 - p_3 z_3 + p_2 z_4 = 0, \\ p_5 z_1 + p_3 z_2 - p_1 z_4 = 0, \\ p_6 z_1 - p_2 z_2 + p_1 z_3 = 0, \end{cases}$$

wo wir mit $z_1, \ldots, z_4$ laufende Punktkoordinaten bezeichnen. Es sind somit die Koordinaten p die in die Gleichungen der vier Projektionsebenen eingehenden Konstanten. Die Gleichung:

$$P = 0$$

drückt aus, daß sich die fraglichen vier Ebenen nach derselben geraden Linie schneiden. Sie ist also nicht nur die *notwendige*, sondern auch die *hinreichende* Bedingung, damit sechs beliebig ausgewählte Größen:

$$p_1, p_2, \ldots, p_6$$

als Linienkoordinaten betrachtet werden können. Die geometrische Konstruktion der durch sie bestimmten geraden Linie wird durch zwei beliebige unabhängige der Ebenen (2) vermittelt.

Der Koordinatenbestimmung (1) liegt das Prinzip zugrunde, die in die Gleichungen der geraden Linie in Punktkoordinaten (2) eingehenden Konstanten als Bestimmungsstücke derselben zu betrachten, und dieselben durch die Koordinaten einer Anzahl von Punkten der geraden Linie darzustellen, welche erforderlich und hinreichend ist, um die letztere geometrisch zu definieren.

2. In dem Vorstehenden haben wir die gerade Linie durch zwei ihrer Punkte bestimmt. Wir betrachten in dieser Bestimmungsweise die gerade Linie als einen Ort von Punkten, als einen *Strahl*. Auf vollständig entsprechende Weise können wir die gerade Linie durch zwei ihrer Ebenen bestimmen und betrachten sie dann als von Ebenen umhüllt, als eine *Achse*[2]).

[2]) Vgl. Plückers „Neue Geometrie", S. 2.

Zwei beliebige Ebenen (t) und (u) der gegebenen geraden Linie seien durch die Koordinaten bestimmt:

$$t_1,\quad t_2,\quad t_3,\quad t_4$$

und

$$u_1,\quad u_2,\quad u_3,\quad u_4.$$

Dann erhalten wir, ganz dem Früheren entsprechend, als *Koordinaten der gegebenen geraden Linie die folgenden sechs Ausdrücke:*

$$(3)\qquad \begin{cases} q_1 = t_1 u_2 - t_2 u_1, & q_4 = t_3 u_4 - t_4 u_3, \\ q_2 = t_1 u_3 - t_3 u_1, & q_5 = t_4 u_2 - t_2 u_4, \\ q_3 = t_1 u_4 - t_4 u_1, & q_6 = t_2 u_3 - t_3 u_2, \end{cases}$$

welche die folgende Gleichung:

$$Q \equiv \sum_{\varkappa} q_{\varkappa} \cdot q_{\varkappa+3} = 0$$

identisch befriedigen. Den vier Gleichungen (2) entsprechend erhalten wir für die Durchschnittspunkte der durch die Ebenen (t) und (u) bestimmten geraden Linie mit den vier Seitenflächen des Tetraeders die folgenden vier Gleichungen:

$$(4)\qquad \begin{cases} q_4 v_2 + q_5 v_3 + q_6 v_4 = 0, \\ q_4 v_1 - q_3 v_3 + q_2 v_4 = 0, \\ q_5 v_1 + q_3 v_2 - q_1 v_4 = 0, \\ q_6 v_1 - q_2 v_2 + q_1 v_3 = 0, \end{cases}$$

wo $v_1, \ldots, v_4$ laufende Ebenenkoordinaten bedeuten.

Wenn sich die Strahlenkoordinaten p und die Achsenkoordinaten q auf *dieselbe* gerade Linie beziehen, so hat man zwischen denselben die folgenden Proportionen:

$$(5)\qquad \frac{p_1}{q_4} = \frac{p_2}{q_5} = \frac{p_3}{q_6} = \frac{p_4}{q_1} = \frac{p_5}{q_2} = \frac{p_6}{q_3}.$$

Die Richtigkeit dieser Beziehungen ergibt sich sofort, wenn wir die Größen q aus den Koordinaten zweier Ebenen (2), oder die Größen p aus den Koordinaten zweier Punkte (4) bilden.

Die Koordinaten p sind also von den Koordinaten q nur durch die Anordnung verschieden. Ihrer doppelten geometrischen Bedeutung entsprechend, wird die gerade Linie durch dieselben sechs Größen dargestellt. Es ist das kein geringer Vorteil der Plückerschen Koordinatenwahl.

3. Wir wollen die vier Eckpunkte des Koordinatentetraeders mit

$$O_1,\ O_2,\ O_3,\ O_4$$

und die vier gegenüberstehenden Seitenflächen desselben mit

$$E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4$$

bezeichnen. Dann sind die sechs Kanten des Tetraeders durch die folgenden Verbindungen der Zeichen O bzw. E bestimmt:

$$\begin{matrix} O_1 O_2, & O_1 O_3, & O_1 O_4, & O_3 O_4, & O_4 O_2, & O_2 O_3, \\ E_3 E_4, & E_4 E_2, & E_2 E_3, & E_1 E_2, & E_1 E_3, & E_1 E_4. \end{matrix}$$

Von den *sechs* Koordinaten einer Kante des Koordinatentetraeders verschwinden fünf, und nur die sechste behält einen endlichen Wert. Es ergibt sich das sofort, wenn wir in die Ausdrücke (1) oder (3) die Koordinaten zweier Eckpunkte bzw. zweier Seitenflächen des Tetraeders substituieren. Wir wollen, in der vorstehenden Reihenfolge, die Kanten des Koordinatentetraeders mit

$$P_1,\ P_2,\ P_3,\ P_4,\ P_5,\ P_6$$

oder mit

$$Q_4,\ Q_5,\ Q_6,\ Q_1,\ Q_2,\ Q_3$$

bezeichnen. Dann verschwinden für eine beliebig ausgewählte Kante $(P_{\varkappa} \equiv Q_{\varkappa+3})$ alle Koordinaten bis auf diejenige, welche wir mit $p_{\varkappa} \equiv q_{\varkappa+3}$ bezeichnet haben.

Die Gruppierung der Tetraederkanten unter sich ist dadurch bestimmt, daß sich $P_1, P_2, P_3\ (Q_4, Q_5, Q_6)$ in einem Punkte schneiden, während $P_4, P_5, P_6\ (Q_1, Q_2, Q_3)$ in einer Ebene liegen.

Der Kürze wegen werden wir in dem Folgenden nur von der independenten Darstellung der Linienkoordinaten durch Punktkoordinaten Gebrauch machen, und die jedesmal vollständig analogen (reziproken) Entwicklungen, welche sich an die Darstellung derselben durch Ebenenkoordinaten anknüpfen, nicht immer wieder ausdrücklich hervorheben. Wir bedienen uns daher in der Folge auch nur der Bezeichnung p für Linienkoordinaten, wenn auch die Beibehaltung der Koordinaten q neben den Koordinaten p manche Formeln übersichtlicher zu schreiben erlaubt.

4. Damit sich zwei gegebene gerade Linien (p) und (p') *schneiden*, müssen ihre Koordinaten die folgende Gleichung befriedigen:

$$(6)\qquad \sum_{\varkappa} p_{\varkappa} \cdot p'_{\varkappa+3} = 0.$$

Denn es seien die beiden geraden Linien (p) und (p') bezüglich durch die beiden Punkte (a), (b) und (c), (d) bestimmt. Wenn wir dann in die vorstehende Gleichung für die Koordinaten p, p' ihre Werte aus (1) in den Koordinaten dieser Punkte einsetzen, so erhalten wir:

$$\sum \pm a_1 b_2 c_3 d_4 = 0.$$

Das Verschwinden dieser Determinante ist die Bedingung dafür, daß die vier Punkte (a), (b), (c), (d) in einer Ebene liegen; und also schneiden sich die beiden geraden Linien (a, b) und (c, d)[3].

[3]) Vgl. den Aufsatz von Lüroth: Zur Theorie der windschiefen Flächen, Crelles Journal, Bd. 67 (1867), S. 130.

Wenn wir in der Gleichung (6):

$$\sum_{\varkappa} p_{\varkappa} \cdot p'_{\varkappa+3} = 0$$

die $p'_{\varkappa+3}$ als fest, die $p_{\varkappa}$ als veränderlich betrachten, so stellt sie die Gesamtheit aller derjenigen geraden Linien dar, welche die feste gerade Linie (p') schneiden. Insbesondere also genügen der Gleichung:

$$p_{\varkappa+3} = 0$$

die Koordinaten aller derjenigen geraden Linien, welche die Tetraederkante $P_{\varkappa}$ schneiden. Wenn für die Kante $P_{\varkappa}$ selbst alle Koordinaten bis auf die eine, $p_{\varkappa}$, verschwinden, so ist damit ausgedrückt, daß sie alle Tetraederkanten bis auf die ihr gegenüberliegende schneidet.

Wenn drei gerade Linien (p), (p'), (p'') einander gegenseitig schneiden, so besteht zwischen den Koordinaten je zweier derselben eine Gleichung von der Form (6). Dabei gehen die drei geraden Linien entweder durch einen Punkt oder liegen in einer Ebene. Das Kriterium für den ersten oder zweiten Fall bildet das Verschwinden des zweiten oder ersten Faktors des unter der gemachten Annahme immer verschwindenden Produktes:

$$\sum \pm p_1 p'_2 p''_3 \cdot \sum \pm p_4 p'_5 p''_6,$$

und der ähnlich gebildeten Produkte, welche sich aus dem Vorstehenden durch Vertauschung von jedesmal zwei der Indizes 1, 2, 3 mit den entsprechenden 4, 5, 6 ergeben.

Den Beweis liefert die Betrachtung der Gleichungen (2) und (4). Wenn sich drei Linien in einem Punkte schneiden, so haben diejenigen drei Ebenen, welche sich durch einen Eckpunkt des Koordinatentetraeders und jedesmal eine der gegebenen geraden Linien hindurchlegen lassen, eine gerade Linie gemein, und umgekehrt, wenn drei Linien in einer Ebene liegen, so sind diejenigen drei Punkte, in welchen eine Seitenfläche des Koordinatentetraeders von den gegebenen geraden Linien geschnitten wird, in gerader Linie.

5. Wir können den sechs Variabeln p, immer unter der Voraussetzung, daß die Bedingungsgleichung

$$\sum_{\varkappa} p_{\varkappa} \cdot p_{\varkappa+3} = 0$$

erfüllt sei, *imaginäre Werte* erteilen. Sei also:

$$p_{\varkappa} = p'_{\varkappa} + i p''_{\varkappa}.$$

Wir betrachten die Größen $p_{\varkappa}$ als *die Koordinaten einer imaginären geraden Linie.* Diese rein formelle Definition führt zu der folgenden geometrischen. Nach der Gleichung (6) der 4. Nummer wird die gegebene imaginäre gerade Linie, sowie die konjugiert imaginäre von allen reellen geraden Linien geschnitten, deren Koordinaten die folgenden beiden linearen Bedingungsgleichungen befriedigen:

$$\sum_{\varkappa} p'_{\varkappa} \cdot p_{\varkappa+3} = 0, \qquad \sum_{\varkappa} p''_{\varkappa} \cdot p_{\varkappa+3} = 0.$$

Durch vier beliebige unter den Linien, deren Koordinaten diesen beiden Gleichungen genügen[4]), sind die beiden Gleichungen, oder vielmehr ist die von denselben gebildete zweigliedrige Gruppe:

$$\sum_{\varkappa} (\lambda p'_{\varkappa} + \mu p''_{\varkappa})\, p_{\varkappa+3} = 0$$

bestimmt (außer, wenn die angenommenen vier geraden Linien derselben Erzeugung eines Hyperboloids angehören). Eine imaginäre gerade Linie und ihre konjugierte sind somit geometrisch *als die beiden geradlinigen Transversalen vier reeller gerader Linien gegeben.*

Es stimmt das mit der Definition, welche die neuere synthetische Geometrie für die imaginäre gerade Linie im Raume aufstellt, überein.

Im allgemeinen besitzt eine imaginäre gerade Linie keinen reellen Punkt und keine reelle Ebene. Nur wenn sich die gegebene imaginäre gerade Linie und ihre konjugierte schneiden, ist beiden ein reeller Punkt und eine reelle Ebene gemeinsam. Die imaginäre gerade Linie wird dann von allen reellen Linien geschnitten, welche durch diesen Punkt gehen, bezüglich in dieser Ebene liegen. Sie ist nicht mehr durch vier ihrer reellen geradlinigen Transversalen bestimmt. Man definiere sie geometrisch durch den reellen Punkt, die reelle Ebene und einen von dem reellen Punkte ausgehenden Kegel der zweiten Ordnung, oder eine in der reellen Ebene liegende Kurve der zweiten Klasse.

II.

Transformation der Linienkoordinaten, entsprechend einer Verwandlung des Koordinatentetraeders.

6. In dem Folgenden stellen wir zunächst diejenigen Transformationsformeln für Linienkoordinaten auf, welche einer Verwandlung des Koordinatentetraeders, oder, was dasselbe sagt, der linearen Transformation von Punkt- oder Ebenenkoordinaten entsprechen[5]).

[4]) Das System solcher geraden Linien findet man insbesondere betrachtet in dem Aufsatze von O. Hermes: Über Strahlensysteme der ersten Ordnung und der ersten Klasse. Crelles Journal, Bd. 67 (1867), S. 153.

[5]) Man vergleiche die beiden Aufsätze von Battaglini:

Intorno ai sistemi di rette di primo ordine; Rendiconti della R. Accademia di Napoli, Giugno 1866;

Diese Transformationsformeln werden *linear*. Sie würden ihren linearen Charakter verlieren, wenn statt der sechs homogenen Koordinaten, welche eine Bedingungsgleichung befriedigen, deren nur fünf unabhängige genommen worden wären, wie sie zur Bestimmung einer geraden Linie ausreichen. — Wir gelangen im folgenden zu dem Resultate, *daß die in Rede stehenden linearen Substitutionen die allgemeinen sind, durch welche der Ausdruck:*

$$P \equiv \sum_{\varkappa} p_{\varkappa} \cdot p_{\varkappa+3}$$

in ein Multiplum seiner selbst übergeführt wird.

Der vorstehende Satz bedarf noch der folgenden Bestimmung. Es sei eine lineare Substitution gegeben, welche den Ausdruck P in ein Multiplum seiner selbst überführt. Unter den sechs neuen Veränderlichen können wir diejenige frei auswählen, welcher wir den Namen p_1 geben wollen. Dann ist die Veränderliche p_4 zugleich mit bestimmt. Wir können ferner p_2 ohne weiteres unter den noch übrigen vier Veränderlichen annehmen; dann ist p_5 gegeben. Welche von den zwei noch übrigen Variabeln p_3 und welche p_6 zu nennen sei, bleibt aber nicht mehr willkürlich. Denn diejenige Kante des neuen Tetraeders, auf welche sich das neue p_3 bezieht, schneidet die beiden Kanten, welche den neuen p_1 und p_2 entsprechen, in einem Punkte und ist also eindeutig bestimmt. (Nr. 3). Nur unter der Voraussetzung, daß p_3 demgemäß ausgewählt sei, gelten die Ausdrücke der Linienkoordinaten in den Koordinaten zweier Punkte, bzw. zweier Ebenen, wie sie unter (1) und (3) gegeben worden sind.

Es sei nun, unter $x_{\varkappa}$, $y_{\varkappa}$ Punktkoordinaten verstanden,

$$(7) \qquad \begin{cases} x_{\varkappa} = \sum_{\varkappa} \alpha_{\varkappa,\lambda} \cdot x'_{\lambda}, \\ y_{\varkappa} = \sum_{\varkappa} \alpha_{\varkappa,\lambda} \cdot y'_{\lambda}, \end{cases}$$

eine allgemeine lineare Substitution, wie sie einer beliebigen Verwandlung des Koordinatentetraeders entspricht. Die Substitutionskoeffizienten $\alpha_{\varkappa,\lambda}$ stellen dabei die Koordinaten der Seitenflächen des früheren Tetraeders mit Bezug auf das neue dar; wie sich ergibt, wenn wir $x_{\varkappa}$ ($y_{\varkappa}$) verschwinden lassen.

Durch Einsetzen dieser Werte für $x_{\varkappa}$, $y_{\varkappa}$ in die durch (1) gegebenen Ausdrücke für die Linienkoordinaten p erhalten wir die gesuchten Formeln. Die in dieselben eingehenden Substitutionskoeffizienten erhalten die Determinantenform:

$$\alpha_{\varkappa,\mu} \cdot \alpha_{\lambda,\nu} - \alpha_{\varkappa,\nu} \cdot \alpha_{\lambda,\mu}$$

Intorno ai sistemi di rette di secondo grado; Atti della R. Accademia di Napoli, 3, 1866.

Beide Aufsätze finden sich wieder abgedruckt: Giornale di Matematiche, Napoli, Bd. 6, 7 (1868, 1869).

und stellen also, geometrisch gedeutet, die *Koordinaten der Kanten des früheren Tetraeders mit Bezug auf das neue* dar, in einer solchen Größe genommen, wie sich dieselben unter Zugrundelegung der Formeln (3) aus den Koordinaten $\alpha_{\varkappa,\lambda}$ der Seitenflächen des früheren Tetraeders mit Bezug auf das neue ergeben. Indem wir dieselben mit $a_{\varkappa,\lambda}$ bezeichnen, je nachdem sie zu einer Kante $P_{\varkappa}$ gehören und unter den Koordinaten dieser Kante, wenn wir dieselben in der unter (1) festgesetzten Reihenfolge schreiben, die λ-te Stelle einnehmen, werden die gesuchten Transformationsformeln:

$$(8) \qquad p_{\varkappa} = \sum_{\lambda} a_{\varkappa+3,\lambda+3} \cdot p'_{\lambda}.$$

Denn verlangen wir, daß $p_{\varkappa}$ verschwinde, das heißt, daß die gerade Linie (p, p') die Kante $P_{\varkappa+3}$ schneide, so ist dafür, nach der vierten Nummer, das Verschwinden des Ausdrucks:

$$\sum_{\lambda} a_{\varkappa+3,\lambda+3} \cdot p'_{\lambda}$$

die Bedingung.

7. Durch die Substitution (8) wird der Ausdruck:

$$P \equiv \sum_{\varkappa} p_{\varkappa} \cdot p_{\varkappa+3}$$

in ein Multiplum des entsprechenden:

$$P' \equiv \sum_{\varkappa} p'_{\varkappa} \cdot p'_{\varkappa+3}$$

übergeführt. Wenn wir den ersten Ausdruck aus (8) bilden und mit dem zweiten vergleichen, so erhalten wir eine Reihe von Relationen für die Koeffizienten a, welcher dieselben, vermöge ihrer Darstellung durch die Koeffizienten α, identisch genügen.

Die wirkliche Entwicklung des Ausdruckes P nach den p' liefert in diesen Variabeln ein Polynom des zweiten Grades mit 21 Gliedern. Die Koeffizienten von 18 dieser Glieder müssen verschwinden, die der übrigen drei unter sich gleich werden. Die 36 Größen a sind somit 20 Bedingungen unterworfen und deshalb durch die 16 Größen α independent darstellbar. Nach diesen Zahlenverhältnissen kommt es auf dasselbe hinaus, ob wir den Ausdruck der Linienkoordinaten durch Punkt- (oder Ebenen-) Koordinaten zugrunde legen und diese letzteren linear transformieren, oder ob wir die Linienkoordinaten selbst unmittelbar linear transformieren und bedingen, daß dabei der Ausdruck:

$$P \equiv \sum_{\varkappa} p_{\varkappa} \cdot p_{\varkappa+3}$$

in ein Vielfaches seiner selbst übergehe. Die volle Bestätigung dieser Aussage finden wir in der geometrischen Deutung der Bedingungen, welchen die Substitutionskoeffizienten a zufolge der letzten Beschränkung unterworfen sind. Nur in der Benennung der neuen Veränderlichen muß, nach der vorigen Nummer, eine feste Regel beobachtet werden.

8. Sei also:

$$p_\varkappa = \sum_\lambda b_{\varkappa+3,\lambda+3} \cdot p'_\lambda \tag{9}$$

eine lineare Substitution, durch welche der Ausdruck:

$$P \equiv \sum_\varkappa p_\varkappa \cdot p_{\varkappa+3}$$

in ein Multiplum seiner selbst übergeführt wird. Dann gelten für die Koeffizienten b zunächst die folgenden Relationen:

$$\sum_\varkappa b_{\varkappa+3,\lambda} \cdot b_{\varkappa,\lambda+\mu} = 0 \quad (\mu = 1, 2, 4, 5, 6), \tag{10}$$

$$\sum_\varkappa b_{\varkappa+3,\lambda} \cdot b_{\varkappa,\lambda+3} = d, \tag{11}$$

wo d eine willkürlich zu bestimmende Konstante bezeichnet.

Zufolge der Beziehungen (10) verschwinden die folgenden beiden Produkte:

$$\sum \pm b_{11} b_{22} b_{33} \cdot \sum \pm b_{41} b_{52} b_{63}$$

und

$$\sum \pm b_{14} b_{25} b_{36} \cdot \sum \pm b_{44} b_{55} b_{66}.$$

Denn die Entwicklung dieser Produkte nach dem Multiplikationstheorem der Determinanten liefert eine neue dreigliedrige Determinante, für deren Elemente $(\varkappa, \lambda)$ das Gesetz gilt:

$$(\varkappa, \lambda) + (\lambda, \varkappa) = 0.$$

Wir fügen nun den Bedingungen (10) und (11) die weitere hinzu, daß die beiden vorstehenden Produkte darum verschwinden, weil die beiden Faktoren:

$$\sum \pm b_{41} b_{52} b_{63}, \qquad \sum \pm b_{14} b_{25} b_{36}$$

gleich Null sind. Und dementsprechend sollen die ähnlich gebildeten Determinanten verschwinden, welche sich aus den vorstehenden durch Vertauschung von jedesmal zwei der ersten oder zweiten Indizes 1, 2, 3 mit den entsprechenden 4, 5, 6 ergeben. Diese Bedingungen beschränken durchaus nicht die relative Größe der Koeffizienten b, sondern nur die Willkürlichkeit in deren Reihenfolge.

Die Auflösung der Substitutionen (9) wird unter Zuziehung der Bedingungsgleichungen (10) die folgende:

$$\sum_\varkappa b_{\varkappa,\lambda+3} \cdot b_{\varkappa+3,\lambda} \cdot p'_\lambda = \sum_\varkappa b_{\varkappa,\lambda} \cdot p_\varkappa, \tag{12}$$

oder, unter Berücksichtigung der Gleichungen (11):

$$d \cdot p'_\lambda = \sum_\varkappa b_{\varkappa,\lambda} \cdot p_\varkappa. \tag{13}$$

Indem wir von (13) zu (9) zurückgehen, ergeben sich, den Formeln (10) entsprechend, die folgenden:

$$\sum_\lambda b_{\varkappa,\lambda+3} \cdot b_{\varkappa+\mu,\lambda} = 0 \quad (\mu = 1, 2, 4, 5, 6). \tag{14}$$

Wenn wir die Substitutionsdeterminante $\sum \pm b_{1,1} b_{2,2} \dots b_{6,6}$ mit D, die einem beliebigen Elemente $b_{\varkappa,\lambda}$ zugehörige Unterdeterminante derselben, wie überhaupt im folgenden die Unterdeterminanten, durch die beiden Indizes $\varkappa, \lambda$ $(D_{\varkappa,\lambda})$ bezeichnen und dabei das Vorzeichen richtig bestimmen: $((-1)^{(\varkappa+\lambda)})$, so folgt aus den Auflösungen (12) der Gleichungen (9):

$$D_{\varkappa,\lambda+3} \cdot \sum_\mu b_{\mu,\lambda+3} \cdot b_{\mu+3,\lambda} = b_{\varkappa+3,\lambda} \cdot D.$$

Diese Formel bleibt für jeden Index $\varkappa$ und jeden Index λ gültig. Es findet sich also, bis auf einen Faktor:

$$D = \prod_{(\lambda=1,2,3)} \sum_\varkappa b_{\varkappa+3,\lambda} \cdot b_{\varkappa,\lambda+3}, \tag{15}$$

oder, infolge von (11):

$$D = d^3 \text{ [6]}. \tag{16}$$

Aus den Gleichungen (10) folgt, daß die Vertikalreihen der Substitutionskoeffizienten (9) die Linienkoordinaten der Kanten eines neuen Tetraeders mit Bezug auf das frühere darstellen. Denn diese Gleichung sagt aus, einmal, wenn wir $\mu = 6$ setzen, daß die Koeffizienten einer Vertikalreihe der Substitutionen (9) die Bedeutung von Linienkoordinaten haben, dann den vier anderen Werten von μ entsprechend, daß eine jede der durch die Substitutionskoeffizienten bestimmten sechs Linien vier der fünf übrigen schneidet, daß also die sechs dargestellten geraden Linien ein Tetraeder bilden.

Wir wollen die sechs Kanten dieses Tetraeders, den Koordinaten $b_{\varkappa,\lambda}$ entsprechend, mit P'_λ bezeichnen. Dann sagen die Bedingungen, welche wir den Gleichungen (10) und (11) über die Reihenfolge der Koeffizienten $b_{\varkappa,\lambda}$ hinzugefügt haben, nichts anderes aus, als daß sich die drei Kanten P'_1, P'_2, P'_3 in einem Punkte schneiden und die drei Kanten P'_4, P'_5, P'_6 in einer Ebene liegen. Ausgeschlossen ist durch jene Bedingungen (falls die Substitutions-

[6] [Die drei im Original auf Gleichung (16) folgenden Zeilen sind hier weggelassen, da der in ihnen enthaltene Nachweis, daß das Vorzeichen in (16) richtig gewählt ist, nicht bindend war. Die Tatsache selbst ergibt sich aus den an die Formel (18) geknüpften Überlegungen. K.]

determinante $\sum \pm b_{1,1} \ldots b_{6,6}$ nicht verschwindet), daß P_1', P_2', P_3' in einer Ebene enthalten sind und P_4', P_5', P_6' durch einen Punkt gehen. Im Verein mit diesen Bedingungen besagen die drei Gleichungen (11), daß die Verhältnisse der Koordinaten dieser sechs geraden Linien unter sich in einer solchen Größe gewählt seien, wie sie sich aus den Koordinaten der vier Eckpunkte (Seitenflächen) des von ihnen gebildeten Tetraeders unter Zugrundelegung der Formeln (1), (3) ergeben.

Damit ist der vollständige Nachweis geführt, daß die gewählte Transformation der Verwandlung des gegebenen Koordinatentetraeders in ein anderes entspricht.

9. Wir denken uns die Substitutionskoeffizienten b independent durch die Koeffizienten β einer derselben Koordinatenverwandlung entsprechenden linearen Transformation von Punktkoordinaten:

$$x_\varkappa = \sum_\lambda \beta_{\varkappa,\lambda} x_\lambda' \tag{17}$$

dargestellt. Dann erhalten wir die folgende Relation:

$$d = \sum \pm \beta_{1,1} \ldots \beta_{4,4}. \tag{18}$$

Von der Richtigkeit derselben überzeugen wir uns einmal durch direkte Ausrechnung, indem wir von einer der Formeln (11) ausgehen, dann aber auch durch die Bemerkung, daß die Determinante D, als gebildet aus den zweiten Unterdeterminanten der viergliedrigen Determinante $\sum \pm \beta_{1,1} \ldots \beta_{4,4}$ gleich ist der dritten Potenz dieser Determinante[7]).

Die Konstante d kann jeden positiven oder negativen Wert annehmen, nur darf sie nicht verschwinden. Denn dann würden sich, infolge der Gleichungen (11), die gegenüberliegenden Kanten des neuen Tetraeders schneiden und damit die Koordinatenbestimmung unmöglich werden. Dem entspräche, daß die vier Eckpunkte oder die vier Seitenflächen des Tetraeders zusammenfielen, was seinen Ausdruck in dem Verschwinden der Determinante $\sum \pm \beta_{1,1} \ldots \beta_{4,4}$ findet.

In dem Folgenden nehmen wir die Konstante d gleich der positiven Einheit an, so daß also durch die lineare Substitution, in welche dann nur noch 15 unabhängige Koeffizienten eingehen, der Ausdruck P in sich selbst übergeführt wird.

Der Übergang von der Substitution (9) zu der Substitution (17) gestaltet sich folgendermaßen. Wir können uns drei Horizontal- und

[7]) [Beweist man die Formel (18) auf dem zuerst angegebenen Wege, so ergibt die Umkehrung der darauf folgenden Überlegung die Formel (16) mit der richtigen Vorzeichenbestimmung. K.]

drei Vertikalreihen der Koeffizienten b in einer solchen Weise auswählen, daß, wenn wir uns in b die Größen β eingeführt denken und wir mit λ einen laufenden Index, mit $\varkappa, \mu$ zwei in jedem einzelnen Falle bestimmte Indizes bezeichnen, weder Glieder von der Form $\beta_{\varkappa,\lambda}$ noch von der Form $\beta_{\lambda,\mu}$ vorkommen. Die Determinante aus den so gewählten Koeffizienten b ist dann aus den Unterdeterminanten der Determinante $d_{\varkappa,\mu}$ zusammengesetzt und hat folglich den absoluten Wert $d_{\varkappa,\mu}^2$. Die so bestimmten Determinanten $d_{\varkappa,\mu}$ sind gerade diejenigen Koeffizienten, welche in die Auflösungen der Gleichungen (17) eingehen.

10. Die Aufgabe, einen gegebenen Ausdruck in Linienkoordinaten durch eine lineare Substitution auf eine bestimmte Gestalt zu transformieren, kann zu imaginären Substitutionskoeffizienten und damit zu Tetraedern mit imaginären Kanten führen. Wir mögen ein solches Tetraeder einfach *ein imaginäres Tetraeder* nennen.

Im allgemeinen gehört zu einem imaginären Tetraeder ein konjugiertes. Dann werden beide Tetraeder immer gemeinsam auftreten.

Insbesondere aber können die imaginären Kanten desselben imaginären Tetraeders einander konjugiert sein. Wenn dann sämtliche Seitenflächen (Eckpunkte) imaginär sind, so besitzt das Tetraeder zwei reelle, sich nicht schneidende Kanten, während die vier übrigen Kanten weder einen reellen Punkt noch eine reelle Ebene enthalten und die gegenüberstehenden paarweise konjugiert sind.

Sind dagegen nur zwei Seitenflächen (Eckpunkte) imaginär, so sind, wie im vorhergehenden Falle, nur zwei gegenüberstehende Kanten reell; aber längs der einen schneiden sich zwei reelle Ebenen des Tetraeders, auf der anderen liegen, als Durchschnittspunkte mit diesen Seitenflächen, zwei reelle Eckpunkte desselben. Die übrigen vier Kanten des Tetraeders sind paarweise konjugiert. Je zwei konjugierte verlaufen innerhalb einer der reellen Seitenflächen und schneiden sich in derselben in dem entsprechenden reellen Eckpunkte. Solche zwei imaginäre gerade Linien sind von der am Schlusse der fünften Nummer betrachteten Art.

Wenn also die imaginären Kanten eines Tetraeders konjugiert sind, sind immer zwei gegenüberstehende reell, und wir haben es mit einem Tetraeder der einen oder anderen Art zu tun, je nachdem von den vier übrigen Kanten sich die konjugierten schneiden oder nicht. — Tetraeder von der einen wie von der andern Art können isoliert auftreten, insofern sie sich selbst konjugiert sind.

Auch solche imaginäre Tetraeder, die nicht in sich konjugiert sind, können zwei reelle, einander gegenüberstehende Kanten besitzen. Dann sind dieselben dem gegebenen und dem konjugierten Tetraeder gemeinsam.

III.
Über Linienkomplexe im allgemeinen.

11. Eine homogene Gleichung zwischen Linienkoordinaten bestimmt ein dreifach unendliches System von geraden Linien. Solch ein Gebilde heißt, nach Plücker, ein *Linienkomplex*. Indem wir in die Gleichung eines Komplexes des n-ten Grades für die Linienkoordinaten die Ausdrücke (1) oder (3) einsetzen, erhalten wir die folgenden beiden, unter sich identischen, geometrischen Definitionen eines solchen Komplexes[8]):

In einem Komplexe des n-ten Grades bilden diejenigen geraden Linien, welche durch einen festen Punkt gehen, einen Kegel der n-ten Ordnung.

In einem Komplexe des n-ten Grades bilden diejenigen geraden Linien, welche in einer festen Ebene liegen, eine Kurve der n-ten Klasse.

Ist also insbesondere der Komplex linear, so entspricht jedem Punkte eine Ebene, die durch ihn hindurch geht, jeder Ebene ein Punkt, der in ihr liegt. Einen derartigen Komplex bildet die Gesamtheit aller geraden Linien, welche eine gegebene gerade Linie schneiden (Nr. 4).

Als ausgezeichneter Fall der Komplexe des $n(n-1)$-ten Grades kann die Gesamtheit der Tangenten einer Fläche der n-ten Ordnung oder Klasse angesehen werden. Wenn sich die Fläche dahin partikularisiert, daß sie in eine abwickelbare Fläche mit zugehöriger Rückkehrkante ausartet, so umfaßt der Komplex alle diejenigen geraden Linien, welche die erste berühren oder die zweite schneiden.

12. Die allgemeine Gleichung des n-ten Grades umfaßt $(n+5)_5$ verschiedene Glieder. Allein der Komplex hängt, sobald $n > 1$, von einer geringeren als der um 1 verminderten Anzahl unabhängiger Konstanten ab, indem es freisteht, aus seiner Gleichung eine Reihe von Gliedern vermöge der Relation:

$$P \equiv \sum_{\varkappa} p_\varkappa \cdot p_{\varkappa+3} = 0$$

zu entfernen. Wir können, ohne den gegebenen Komplex zu ändern, zu seiner Gleichung P, mit einer beliebigen Funktion des $(n-2)$-ten Grades multipliziert, addieren. Eine derartige Funktion enthält $(n+3)_5$ unbestimmte Konstanten. Eine gleiche Anzahl von Konstanten dürfen wir also auch in der Gleichung des Komplexes beliebig annehmen.

Die Erniedrigung in der Anzahl der unabhängigen Konstanten fällt fort, sobald wir die Gleichung des Komplexes nicht in den sechs Koordinaten $p_\varkappa$, sondern in $6n$ Koordinaten

$$p'_\varkappa,\ p''_\varkappa,\ \ldots,\ p^{(n)}_\varkappa$$

8) Plücker: „Neue Geometrie", Nr. 19.

n-fach linear schreiben. Denn der Ausdruck P schreibt sich bilinear:

$$\sum_{\varkappa} p'_\varkappa \cdot p''_{\varkappa+3}$$

und ist dann, außer wenn die beiden geraden Linien (p') und (p'') sich schneiden, nicht mehr gleich Null, so daß er nicht mehr ohne weiteres der Gleichung des gegebenen Komplexes zugefügt werden kann.

Nach dem Vorstehenden hängt *ein Komplex des zweiten Grades* nicht von $21 - 1 = 20$, sondern nur von 19 unabhängigen Konstanten ab. Dagegen gibt es eine einfach unendliche Schar zugehöriger Polarsysteme (bilinearer Formen), deren jedes durch 20 Konstanten bestimmt wird. In einem solchen Polarsysteme entspricht einer beliebig angenommenen geraden Linie ein linearer Komplex[9]). Diejenigen Linien, welche sich selbst entsprechen, sind in allen Polarsystemen dieselben: die Linien des zugehörigen Komplexes zweiten Grades.

Es ist die Theorie der Komplexe durchaus analog der Theorie der Kurven, welche auf einer Fläche der zweiten Ordnung liegen, oder der Theorie der abwickelbaren Flächen, welche eine Fläche der zweiten Klasse umhüllen. Die *einzelne* Fläche, welche durch ihren Durchschnitt mit der gegebenen Fläche der zweiten Ordnung eine Kurve bestimmt, kommt bei der Diskussion dieser Durchschnittskurve gar nicht in Betracht, sondern nur die durch sie und die gegebene Fläche der zweiten Ordnung bestimmte Schar. Dagegen ist in einem Punkte der gegebenen Fläche zweiten Grades in bezug auf die fragliche Durchschnittskurve ein anderes auf dieser Fläche liegendes Gebilde zugeordnet, je nach der Wahl der zweiten die Kurve bestimmenden Fläche.

Diejenigen geraden Linien, welche zwei Komplexen gemeinsam sind, bilden eine *Kongruenz*. Die Kongruenz heißt vom Grade mn, wenn die beiden sie bestimmenden Komplexe bezüglich vom Grade m und n sind. Alle Linien einer linearen Kongruenz schneiden zwei feste gerade Linien, die reell oder imaginär sein können: die *Direktrizen* der Kongruenz.

Diejenigen geraden Linien, welche drei Komplexen, die bezüglich vom Grade m, n, p sind, zugleich angehören, bilden eine *Linienfläche* (windschiefe Fläche) von der Ordnung und Klasse $2mnp$. Insbesondere bestimmen drei lineare Komplexe eine Fläche des zweiten Grades durch die Linien der einen Erzeugung derselben[10]).

9) Plücker, a. a. O. — Es ist hier nicht der Ort, die im Texte angedeutete Reziprozität zwischen geraden Linien und Komplexen des ersten Grades, die, bei konsequenter Behandlungsweise, dazu führt, den Komplexen ersten Grades sechs homogene, unabhängige Koordinaten zu erteilen, weiter zu verfolgen. (Plückers „Neue Geometrie", Nr. 25). Die gerade Linie erscheint in dieser Auffassungsweise als ein linearer Komplex, dessen Koordinaten die Gleichung: $P = 0$ befriedigen (Nr. 4).

10) Vgl. Plückers Neue Geometrie, a. a. O.

IV.

Transformation der Gleichung des zweiten Grades zwischen Linienkoordinaten auf eine kanonische Form.

13. Es sei

$$\Omega = 0 \tag{19}$$

die allgemeine Gleichung der Komplexe des zweiten Grades;

$$P = 0$$

bezeichne die Bedingung

$$\sum_{\varkappa} p_{\varkappa} \cdot p_{\varkappa+3} = 0.$$

Unsere Aufgabe ist, ein Tetraeder zu bestimmen, welches zu dem Komplex (19) in einer ausgezeichneten Beziehung steht, und die Form anzugeben, welche die Gleichung des Komplexes annimmt, wenn derselbe auf dieses Tetraeder als Koordinatentetraeder bezogen wird.

Diese Aufgabe behandelt sich algebraisch als die lineare simultane Transformation der Form P in sich selbst und der Form Ω auf eine kanonische Gestalt. Wir definieren dabei die kanonische Gestalt der Form Ω als die einfachste, auf welche sich dieselbe durch eine derartige Transformation umformen läßt. Es wird in der Auswahl dieser kanonischen Gestalt immer eine gewisse Willkür herrschen, und der Weg, auf welchem wir in der Folge zu einer solchen gelangen, ist kein notwendiger, sondern ein nach Belieben ausgewählter. — Die algebraische Fassung dieses Problems ist insofern allgemeiner als die geometrische, als in derselben P und Ω als individuelle Formen auftreten, während bei der geometrischen Untersuchung neben P nur die zweigliedrige Gruppe

$$\Omega + \lambda P,$$

wo λ eine willkürliche Konstante bedeutet, in Betracht kommt[11]).

Indem wir bei der linearen Transformation der Form P in sich selbst noch über 15 willkürliche Konstanten verfügen können, wird die kanonische Gestalt der Form Ω noch sechs Konstanten enthalten. Wenn wir durch eine derselben durchdividieren und den Ausdruck P, mit einer geeigneten Konstante multipliziert, hinzuaddieren, können wir noch zwei Konstanten aus derselben fortschaffen. Die kanonische Form der Komplexgleichung enthält somit nur noch vier wesentliche Konstante.

Es erfordert eine Partikularisation des Komplexes, wenn in seiner Gleichung weniger als vier Konstanten vorkommen sollen, oder wenn es

[11]) Die algebraische Behandlungsweise knüpft sich an die oben erwähnte Erweiterung der geometrischen Deutung von sechs Veränderlichen. Einer Verwandlung des Koordinatentetraeders entsprechend, transformieren sich die Koordinaten eines Komplexes ersten Grades linear in einer solchen Weise, daß der Ausdruck P, der nicht verschwindet, in sich selbst übergeht.

möglich sein soll, denselben auf unendlichfach verschiedene Weise auf dieselbe Form mit vier Konstanten zu transformieren.

Wir beginnen, im Anschluß an die neueste Arbeit von Weierstraß über die quadratischen Formen[12]), mit einer eigentümlichen Umgestaltung der beiden Formen P und Ω, welche in unserem Falle *immer* anwendbar ist. Dieselbe schließt als besonderen Fall die Transformation der beiden Formen P und Ω auf solche zwei in sich, die nur die Quadrate der Variabeln enthalten, eine Transformation, die bekanntlich nicht in allen Fällen möglich ist.

Durch die in Rede stehende Umgestaltung werden P und Ω in zwei neue Formen P' und Ω' übergeführt. Wir gehen sodann durch eine einfache lineare Substitution von P' zu P zurück und transformieren dadurch Ω' in eine neue Form Ω'', welche wir als *kanonische* bezeichnen. Wir gelangen so, durch Benutzung der in der angeführten Abhandlung gewonnenen Ergebnisse, auf dem kürzesten Wege zur Aufstellung der jedem Falle entsprechenden kanonischen Form und damit zur Einteilung der Komplexe des zweiten Grades.

Wir wiederholen zunächst die Ergebnisse, zu denen Weierstraß in dem oben zitierten Aufsatze gelangt, in einer Form, wie sie dem hier vorliegenden Falle entspricht. Weierstraß betrachtet die simultane Transformation zweier beliebig gegebener quadratischer (oder bilinearer) Formen, und muß, dem Falle entsprechend, daß die Determinante einer jeden der beiden Formen verschwindet, besondere Vorsichtsmaßregeln treffen. In unserem Falle ist die eine Form, P, gegeben und hat die nicht verschwindende Determinante (-1).

14. Es mögen

$$\Phi, \Psi$$

zwei quadratische Formen derselben n Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bezeichnen. Wir machen die Voraussetzung, daß die Determinante von Φ nicht verschwindet. Dann ist die Determinante der Form

$$s\Phi + \Psi,$$

die wir kurz mit S bezeichnen wollen, eine ganze Funktion des n-ten Grades von s, und kann immer als Produkt von n Faktoren, die lineare Funktionen von s sind, dargestellt werden.

Es sei, unter der Voraussetzung, daß der Koeffizient der höchsten in S enthaltenen Potenz von s der Einheit gleich, oder daß er als konstanter Faktor aus dem Produkt jener n linearen Faktoren herausge-

[12]) Zur Theorie der quadratischen und bilinearen Formen; Monatsberichte d. Berl. Akad., Mai, 1868, S. 310–338 (Werke, Bd. II). Vgl. einen früheren Aufsatz über denselben Gegenstand, Monatsberichte, 1858, S. 207–220 (Werke, Bd. I).

zogen sei, $(s-c)$ irgendeiner dieser Faktoren. Mit l bezeichnen wir den Exponenten der höchsten in S aufgehenden Potenz desselben. Ferner bedeute $l^{(\varkappa)}$ den Exponenten der höchsten Potenz von $(s-c)$, durch welche *alle* aus den Elementen von S gebildeten partiellen Determinanten $(n-\varkappa)$-ter Ordnung teilbar sind. Dann gelten, wie Weierstraß zeigt, die folgenden Ungleichheiten:

$$l > l' > l'' > \ldots > l^{(\nu-1)} > 0,$$
$$l^{(\varkappa-1)} - l^{(\varkappa)} \geqq l^{(\varkappa)} - l^{(\varkappa+1)}.$$

Setzt man daher:

$$e = l - l',\ e' = l' - l'', \ldots, e^{(\nu-1)} = l^{(\nu-1)},$$

so sind $e, e', \ldots, e^{(\nu-1)}$ positive Zahlen, welche nach ihrer Größe geordnet sind, so daß:

$$e^{(\varkappa)} \geqq e^{(\varkappa+1)}.$$

Jeder einzelne der so definierten ν Faktoren von $(s-c)^l$:

$$(s-c)^e, (s-c)^{e'}, \ldots, (s-c)^{e(\nu-1)}$$

heiße *ein Elementarteiler der Determinante* S[13]). Wir nennen einen Elementarteiler, je nach dem Grade e der höchsten in ihm enthaltenen Potenz von s, von der e-ten Ordnung.

Es gilt zunächst der allgemeine Satz, daß wie auch die beiden Formen Φ, Ψ durch lineare Substitution in andere Formen Φ', Ψ' transformiert werden mögen, die zugehörigen Elementarteiler dieselben bleiben. Und umgekehrt, wenn zwei Formenpaare, Φ, Ψ und Φ', Ψ', dieselben Elementarteiler besitzen, so lassen sie sich durch eine lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante ineinander überführen[14]).

Wir bezeichnen nun durch $S^{(\varkappa)}$ diejenige Unterdeterminante der Determinante S, welche aus derselben durch Weglassung der $\varkappa$ ersten Horizontal- und Vertikalreihen entsteht. Ferner bedeute

$$(-1)^{\alpha+\beta} S_{\alpha\beta}^{(\varkappa)}$$

unter der Voraussetzung, daß α, β beide größer als $\varkappa$ sind, die Determinante $(n-\varkappa-1)$-ter Ordnung, deren Elementensystem aus dem von $S^{(\varkappa)}$ durch Weglassung der $(\alpha-\varkappa)$-ten Horizontal- und der $(\beta-\varkappa)$-ten Vertikalreihe hervorgeht, — werde aber gleich Null gesetzt, wenn eine der beiden Zahlen $\alpha, \beta \leqq \varkappa$ ist.

[13]) Die Elementarteiler, zu welchen die beiden Formen $\Phi, \lambda\Phi + \Psi$ führen, sind von den Elementarteilern, die zu den Formen Φ, Ψ zugehören, nur dadurch verschieden, daß s in denselben durch $s+\lambda$ ersetzt ist.

[14]) [Wir bemerken, daß dieser Satz nur dann allgemein gilt, wenn man auch solche lineare Substitutionen zuläßt, deren Substitutionskoeffizienten imaginäre, nicht notwendig paarweise konjugierte Werte besitzen.]

Die Funktionen:

$$S, S', S'', \ldots$$

sind bezüglich durch

$$(s-c)^l, (s-c)^{l'}, (s-c)^{l''}, \ldots$$

teilbar. Wir nehmen an, daß in keiner dieser Funktionen eine höhere Potenz von $(s-c)$ als die angegebene als Faktor enthalten sei. Sollte dieses doch der Fall sein, so sei in der Reihe der Funktionen:

$$S, S', S'', \ldots$$

$S^{(\nu)}$ die erste, welche eine höhere Potenz von $(s-c)$ als die $l^{(\nu)}$-te enthält. Dann können wir vorab eine lineare Transformation von der Gestalt:

$$\bar{x}_\nu = x_\nu + h_{\nu+1} x_{\nu+1} + \ldots + h_n x_n,$$
$$\bar{x}_\alpha = x_\alpha, \quad \text{wenn} \quad \alpha \gtrless \nu,$$

eintreten lassen und über die Konstanten $h_{\nu+1}, \ldots, h_n$ derart verfügen, daß das neue $\bar{S}^{(\nu)}$ nur noch die $l^{(\nu)}$-te Potenz von $(s-c)$ enthält[15]). Indem die vorstehende Substitution die Determinante $(+1)$ hat, sind bei ihr die Funktionen:

$$S, S', S'', \ldots, S^{(\nu-1)}$$

ungeändert geblieben. Wir können also, in der angegebenen Weise fortfahrend, es immer dahin bringen, daß von den Determinanten $S^{(\varkappa)}$ keine eine höhere Potenz von $(s-c)$ enthält, als die $l^{(\varkappa)}$-te.

Diese Hilfstransformation vorausgesetzt, sei:

$$(20) \qquad \begin{cases} X = S_{11}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_1} + S_{12}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_2} + \ldots + S_{1n}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_n}, \\ X' = \qquad\qquad S'_{22}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_2} + \ldots + S'_{2n}\dfrac{\partial\Phi}{\partial x_n}, \\ X'' = \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Ferner bezeichne e_λ in der Reihe der zu dem Teiler $(s-c)$ gehörigen Zahlen e die $\varkappa$-te. Wir mögen zugleich c_λ statt c schreiben, so daß dieselbe Wurzel c der Gleichung $S=0$, den verschiedenen ihr zugehörigen Elementarteilern entsprechend, verschiedene Indizes bekommt. Man entwickle sodann die Funktionen:

$$\frac{X^{(\varkappa-1)}}{\sqrt{S^{(\varkappa-1)} \cdot S^{(\varkappa)}}}$$

[15]) [An dieser Stelle enthält die ursprüngliche Weierstraßsche Abhandlung, über die hier referiert wird, eine Lücke. Der betreffende Hilfssatz ist erst von G. Frobenius (Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1894, Sitzung v. 18. Januar) bewiesen worden. Vgl. auch K. Weierstraß' Werke, Bd. II, S. 31).]

nach aufsteigenden Potenzen von $(s - c_\lambda)$. Die Entwicklung beginnt mit der Potenz $-\frac{e_\lambda}{2}$ von $(s - c_\lambda)$ und hat die Gestalt:

$$\sum X_{\lambda,\mu} \cdot (s - c_\lambda)^{\mu - \frac{e_\lambda}{2}}.$$
$$\mu = 0, 1, \ldots, \infty.$$

Dabei ist:

$$X_{\lambda\mu} = \frac{1}{\sqrt{C_\lambda}}\left(C_{\varkappa\lambda\mu}\frac{\partial\Phi}{\partial x_\varkappa} + \ldots + C_{n\lambda\mu}\frac{\partial\Phi}{\partial x_n}\right), \tag{21}$$

wo C_λ und sämtliche Koeffizienten der Größen $\frac{\partial\Phi}{\partial x}$ ganze Funktionen von c_λ und den Koeffizienten der Formen Φ, Ψ sind.

Der Koeffizient C_λ, auf dessen Vorzeichen in dem Falle Gewicht zu legen ist, daß c_λ eine reelle Größe ist, schreibt sich entwickelt:

$$C_\lambda = \left\{\frac{(s - c_\lambda)^{2 l_\lambda^{(\varkappa)} + e_\lambda}}{S^{(\varkappa-1)} \cdot S^{(\varkappa)}}\right\}_{s = c_\lambda}, \tag{22}$$

wo $l_\lambda^{(\varkappa)}$ die früher $l^{(\varkappa)}$ gegebene Bedeutung hat, und der Index λ nur auf die Zusammengehörigkeit mit e_λ, c_λ hinweist.

Man bezeichne nun, wenn e eine beliebige ganze Zahl bedeutet:

$$\sum X_{\lambda\mu} \cdot X_{\lambda\nu} \quad \text{mit} \quad (X_\lambda X_\lambda)_e,$$
$$(\mu + \nu = e - 1).$$

Dann erhält man die folgenden Umformungen:

$$\left\{\begin{aligned} \Phi &= \sum_\lambda (X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda}, \\ \Psi &= \sum_\lambda c_\lambda (X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda} + (X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda - 1}, \end{aligned}\right. \tag{23}$$

wo die Summation sich über die den verschiedenen Elementarteilern entsprechenden λ zu erstrecken hat und $(X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda - 1}$ gleich Null zu setzen ist, wenn e_λ den Wert 1 hat.

Dies sind die fraglichen Umgestaltungen der Formen Φ, Ψ. Es läßt sich nachweisen, daß die neuen n Variabeln:

$$\begin{array}{l} X_{1,0},\ X_{1,1}, \ldots, X_{1,e_1-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ X_{\lambda,0},\ X_{\lambda,1}, \ldots, X_{\lambda,e_\lambda-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

durch welche Φ und Ψ vorstehend ausgedrückt sind, aus den Variabeln X (20) und damit aus den ursprünglichen Variabeln x durch eine Substitution hergeleitet worden sind, deren Determinante nicht verschwindet.

Einem gegebenen Systeme von Elementarteilern entsprechend können wir, nach den Formeln (23), ohne weiteres ein System zweier Formen hinschreiben. Sind insbesondere alle Elementarteiler von der ersten Ordnung, so stellen sich Φ und Ψ dar durch die Quadrate der neuen Variabeln.

15. Ehe wir zur Anwendung der vorstehenden Umgestaltung auf die beiden uns gegebenen Formen P, Ω übergehen, mögen wir untersuchen, inwieweit sich die unter (21) eingeführten Variabeln $X_{\lambda,\mu}$ durch andere, gleichberechtigte, ersetzen lassen, in denen sich Φ und Ψ ebenfalls unter der Form (23) darstellen.

Von den Elementarteilern der Determinante S seien μ_ν mal ν einander gleich. Dann ist es möglich, eine lineare Substitution anzugeben, welche

$$\sum_\nu \mu_\nu \cdot \frac{\nu(\nu-1)}{1 \cdot 2}$$

willkürliche Konstante enthält und die Eigenschaft besitzt, Φ *und* Ψ *in der unter* (23) *gegebenen Gestalt in sich selbst zu transformieren.*

Es seien nämlich ν unter sich gleiche Elementarteiler der e-ten Ordnung gegeben, und es sei zunächst $e > 1$. Wir bezeichnen die Teiler der Reihe nach mit den Indizes $1, 2, \ldots, \nu$, allgemein durch den Index α. Einem jeden dieser Elementarteiler entspricht, in der unter (23) gegebenen Darstellung der Formen Φ und Ψ, in Φ eine Funktion der e Variabeln:

$$X_{\alpha,0},\ X_{\alpha,1}, \ldots, X_{\alpha,e_\alpha-1},$$

die wir mit $(X_\alpha X_\alpha)_{e_\alpha}$ bezeichnet haben, und in Ψ dieselbe Funktion derselben e Variabeln, multipliziert mit einer von dem Index α unabhängigen Konstanten, vermehrt um eine Funktion, $[(X_\alpha X_\alpha)_{e_\alpha-1}]$, allein der $(e - 1)$ Variabeln:

$$X_{\alpha,0},\ X_{\alpha,1}, \ldots, X_{\alpha,e_\alpha-2}.$$

Die Variabeln $X_{\alpha,e_\alpha-1}$ kommen nur in der ersten Funktion und in derselben, gemäß der Bedeutung des Symbols $(X_\alpha X_\alpha)_{e_\alpha}$, nur in der Verbindung:

$$2 X_{\alpha,0} X_{\alpha,e_\alpha-1},$$

in Φ und Ψ also nur in dem folgenden Ausdruck vor:

$$2 X_{1,0} \cdot X_{1,e_1-1} + 2 X_{2,0} \cdot X_{2,e_2-1} + \ldots + 2 X_{\nu,0} \cdot X_{\nu,e_\nu-1}.$$

Die Form von Φ und Ψ bleibt also ungeändert, wenn wir die Variabeln $X_{\alpha,e_\alpha-1}$ durch eine folgende lineare Substitution:

$X_{\alpha,e_\alpha-1} = X_{\alpha,e_\alpha-1}$, vermehrt um eine lineare Funktion von $X_{1,0}, \ldots, X_{\nu,0}$,

transformieren und dabei bedingen, daß durch diese Substitution der Ausdruck

$$X_{1,0} \cdot X_{1,e_1-1} + X_{2,0} \cdot X_{2,e_2-1} + \ldots + X_{\nu,0} \cdot X_{\nu,e_\nu-1}$$

in sich selbst übergehe. Bei einer derartigen Substitution haben wir über ν^2 Konstante zu verfügen und $\frac{\nu(\nu+1)}{1\cdot 2}$ Bedingungen zu befriedigen. Es bleiben also noch

$$\nu^2 - \frac{\nu(\nu+1)}{1\cdot 2} = \frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2}$$

Konstanten willkürlich.

Die gleiche Zahl ergibt sich, wenn wir $e = 1$ annehmen. Denn dann ist die Funktion:

$$X_{1,0}^2 + X_{2,0}^2 + \ldots + X_{\nu,0}^2$$

in sich selbst zu transformieren.

Auf diese Weise können wir mit jedem in der Reihe der Elementarteiler der Determinante S enthaltenen System gleicher Teiler verfahren und erhalten so die oben angegebene Zahl:

$$\sum_{\nu} \mu_\nu \cdot \frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2}.$$

Es bezeichnet diese Zahl den Wert, den das den Formen (23) zugrunde gelegte System von Variabeln für diese Formen besitzt.

16.[16]) Eine weitere Untersuchung knüpft sich an das Vorzeichen der durch die Gleichung (22) bestimmten Konstante C_λ.

Man teilt bekanntlich die quadratischen Formen von n Variabeln mit nicht verschwindender Determinante in Klassen ein, je nach dem Überschuß, den die Anzahl der positiven Quadrate über die Anzahl der negativen Quadrate ergibt, wenn man die gegebene Form durch irgendeine *reelle* lineare Substitution mit nicht verschwindender Determinante auf eine Form transformiert, die nur die Quadrate der Variabeln enthält. Es bezeichne m den Überschuß, welcher zu der gegebenen Funktion Φ gehört. Dann gilt der folgende Satz, unabhängig von der Wahl der Form Ψ:

Wenn man die Konstanten C_λ, welche zu reellen Elementarteilern einer ungeraden Ordnung gehören, nach ihrem Vorzeichen in zwei Gruppen teilt, *so enthält die Gruppe der positiven C_λ m Glieder mehr als die der negativen.*

Und daraus folgt der Satz, daß die Determinante S, unabhängig von der Wahl der Form Ψ, *mindestens m reelle Elementarteiler ungerader Ordnung besitzen muß.*

Wenn $(s - c_\lambda)^{e_\lambda}$ einen reellen Elementarteiler und ε_λ die positive oder negative Einheit bezeichnet, je nachdem C_λ positiv oder negativ ist, wollen wir (mit Weierstraß)

$$X_{\lambda\mu} = +\sqrt{\varepsilon_\lambda} \cdot \mathfrak{X}_{\lambda\mu}$$

[16]) [Die meisten Betrachtungen, soweit sie Realitätsverhältnisse betreffen, setzen Linienkomplexe $\Omega = 0$ mit reellem Ω voraus.]

und also:

$$(X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda} = \varepsilon_\lambda (\mathfrak{X}_\lambda \mathfrak{X}_\lambda)_{e_\lambda}$$

setzen. Dann sind die $\mathfrak{X}_{\lambda\mu}$ lineare Funktionen der ursprünglichen Veränderlichen x mit *reellen* Koeffizienten. Ist dagegen $(s - c_\lambda)^{e_\lambda}$ ein imaginärer Elementarteiler, so findet sich ein zweiter, ihm konjugierter, $(s - c_{\lambda'})^{e_{\lambda'}}$, wo $e_\lambda = e_{\lambda'}$. Indem wir dann den Wurzelgrößen $\sqrt{C_\lambda}$, $\sqrt{C_{\lambda'}}$ konjugierte Werte erteilen und

$$X_{\lambda\mu} = \mathfrak{X}_{\lambda\mu} + i\mathfrak{X}'_{\lambda\mu},$$
$$X_{\lambda'\mu} = \mathfrak{X}_{\lambda\mu} - i\mathfrak{X}'_{\lambda\mu}$$

setzen, werden $\mathfrak{X}_{\lambda\mu}$, $\mathfrak{X}'_{\lambda\mu}$ lineare Funktionen der Variabeln x ebenfalls mit reellen Koeffizienten; und man hat:

$$(X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda} + (X_{\lambda'} X_{\lambda'})_{e_{\lambda'}} = 2(\mathfrak{X}_\lambda \mathfrak{X}_\lambda)_{e_\lambda} - 2(\mathfrak{X}'_\lambda \mathfrak{X}'_\lambda)_{e_{\lambda'}}.$$

Nach diesen Substitutionen ist Φ dargestellt durch n reelle Variabeln Wir haben Φ jetzt durch irgendeine reelle Substitution auf die Quadrate n neuer Veränderlicher zu transformieren. Dann muß der Überschuß der positiven über die Anzahl der negativen Quadrate m betragen.

Je zwei konjugiert imaginäre Elementarteiler liefern offenbar keinen Beitrag zu diesem Überschusse m. Denn $(\mathfrak{X}_\lambda \mathfrak{X}_\lambda)_{e_\lambda}$ liefert ebenso viele Quadrate des einen Zeichens, wie $(\mathfrak{X}'_\lambda \mathfrak{X}'_\lambda)_{e_{\lambda'}}$.

Der einem ungeraden reellen Elementarteiler entsprechende Ausdruck liefert den Überschuß eines Quadrates mit dem Zeichen ε_λ. Denn der entsprechende Ausdruck $(\mathfrak{X}_\lambda \mathfrak{X}_\lambda)_{e_\lambda}$ enthält ein Quadrat und $\frac{e_\lambda - 1}{2}$ Produkte von jedesmal zwei Variabeln. Solch' ein Produkt vertritt ein positives und ein negatives Quadrat.

Ist dagegen der reelle Elementarteiler von einer geraden Ordnung, so umfaßt der Ausdruck $(\mathfrak{X}_\lambda \mathfrak{X}_\lambda)_{e_\lambda}$ nur Produkte der Variabeln zu zwei und liefert somit eine gleiche Anzahl positiver und negativer Quadrate.

Damit sind die vorstehenden beiden Sätze bewiesen. Umgekehrt ist aus den Formeln (23) klar, daß man, bei gegebenem Φ, einem beliebigen Systeme von Elementarteilern entsprechend, eine Form Ψ mit reellen Koeffizienten bestimmen kann, sobald unter den Quadraten, welche in der Darstellung (23) von Φ den ungeraden reellen Teilern entsprechen, m positive mehr als negative angenommen werden. Denn man denke sich Φ durch irgendeine reelle lineare Substitution auf eine Form transformiert, welche nur die Quadrate der Variabeln enthält. Es lassen sich dann, unter der gemachten Voraussetzung, immer lineare Substitutionen angeben, welche Φ von dieser Form zu der unter (23) gegebenen überführen, wobei die neuen

Variabeln entweder sich reell durch die früheren ausdrücken oder paarweise imaginär konjugiert sind, je nach der Art des Elementarteilers, welchem sie entsprechen. Es genügt dann in (23) Ψ mit solchen Koeffizienten zu versehen, wie sie den verschiedenen Elementarteilern zugehören. Dann führt die Rücksubstitution zu einer Form Ψ in den ursprünglichen Variabeln mit reellen Koeffizienten. Es gibt das das Mittel, bei gegebenem Φ ohne weiteres alle Fälle hinzuschreiben, welche bei der Transformation der Formen Φ, Ψ auf die Gestalt (23) auftreten können.

17. Wir kehren zu den uns gegebenen Formen P und Ω zurück. Indem wir P als Form mit nicht verschwindender Determinante an die Stelle von Φ, Ω an die von Ψ treten lassen, erhalten wir aus (23) die folgende Darstellung der Formen P und Ω:

$$(24)\qquad \begin{cases} P = \sum\limits_{\lambda} (X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda}, \\ \Omega = \sum\limits_{\lambda} c_\lambda (X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda} + (X_\lambda X_\lambda)_{e_\lambda - 1}. \end{cases}$$

Die neuen Variabeln bestimmen sich, wie in dem allgemeinen Falle, durch die Formeln (20), (21), (22). Es ist in denselben die Zahl n der Variabeln überall durch 6 zu ersetzen. Wir bemerken nur, daß diese Formeln sich bei der gegebenen Form von P dadurch vereinfachen, daß an die Stellen der Größen $\frac{\partial \Phi}{\partial x}$ die Variabeln x selbst, nur in veränderter Reihenfolge, treten.

Auch die Erörterungen der 15. Nummer über die Multiplizität der Transformation auf die Form (23) behalten ihre Gültigkeit. Wir mögen deswegen die Bezeichnung μ_ν der Anzahl der Systeme von ν Elementarteilern, die unter sich gleich sind, beibehalten.

Die in der 16. Nummer gegebenen Sätze über die Anzahl der in der Darstellung (23) der Form Φ enthaltenen positiven und negativen reellen Quadrate modifizieren sich, der besonderen Gestalt von P entsprechend, folgendermaßen.

Wenn wir die Form P durch irgendeine reelle Substitution mit nicht verschwindender Determinante auf eine Form transformieren, die nur die Quadrate der Variabeln enthält, so finden sich unter diesen Quadraten *gleich viele* positive und negative. Die Zahl m also, welche in dem allgemeinen Falle den Überschuß der positiven über die negativen Quadrate angab, wird in dem Falle der Form P gleich Null.

Es werden sich also in der Darstellung (24) der Form P immer *eine gleiche Anzahl positiver und negativer reeller Quadrate vorfinden.* Wir mögen diese Anzahl mit σ bezeichnen. Dann ist 2σ die Zahl der reellen

Elementarteiler einer ungeraden Ordnung. — In dem allgemeinen Falle der Form Φ sind wenigstens m solcher Elementarteiler vorhanden, während die Zahl der reellen Elementarteiler einer geraden Ordnung willkürlich ist. Umgekehrt läßt sich die Form Ψ so wählen, daß überhaupt nur m reelle Elementarteiler, und zwar ungerader Ordnung, vorhanden sind. Weil m für die Form P den Wert Null hat, können also, je nach Wahl der Form Ω, *beliebig viele Paare der Elementarteiler der Determinante der Form* $sP + \Omega$ *imaginär werden.* — Die Anzahl der Elementarteiler einer ungeraden Ordnung mögen wir in der Folge mit 2ϱ bezeichnen.

Das Vorstehende liefert das vollständige Material zu einer *Einteilung der Komplexe des zweiten Grades.* Nach der Ordnung der Ω zugehörigen Elementarteiler bestimmt sich die Gestalt der Formen (24). Indem wir die Zahlen zusammenstellen, welche die Ordnungen der einzelnen Elementarteiler angeben, erhalten wir in dem folgenden Schema eine Einteilung sämtlicher Komplexe zweiten Grades in *elf* unterschiedene Arten:

	Ordnung der Elementarteiler.
I	1, 1, 1, 1, 1, 1,
II	1, 1, 1, 1, 2,
III	1, 1, 1, 3,
IV	1, 1, 2, 2,
V	1, 1, 4,
VI	1, 2, 3,
VII	2, 2, 2,
VIII	1, 5,
IX	2, 4,
X	3, 3,
XI	6.

Es bezeichnet die Zahl 11 die Anzahl der Möglichkeiten der Zerlegung der Zahl der Veränderlichen, 6, in Summanden.

Weitere Einteilungsgründe gibt die Zahl der gleichen und die Zahl der imaginären Elementarteiler; dann das Vorzeichen der reellen Elementarteilern in der Darstellung (24) von P entsprechenden Glieder. — Wir unterlassen es, die verschiedenen Fälle, welche sonach stattfinden können, einzeln aufzuzählen, oder nachzuweisen, wie sich dieselben kontinuierlich als Übergangsfälle zwischen extremen Gliedern aneinander reihen lassen.

18. Wir wollen die unter (24) gegebene Gestalt der Form P noch folgendermaßen transformieren. Alle diejenigen Glieder, welche imaginären Elementarteilern entsprechen, lassen wir unverändert. Dagegen führen wir statt der Variabeln $X_{\lambda,0}, \ldots, X_{\lambda, e_\lambda - 1}$, welche einem rellen Elementarteiler zugehören, je nach dem Vorzeichen der Konstante C_λ (22), neue Variabeln ein. In

dem Falle, daß C_λ positiv ist, behalten wir die ursprünglichen Veränderlichen bei. In dem entgegengesetzten Falle setzen wir:

$$X_{\lambda\beta} = \pm i\mathfrak{X}_{\lambda\beta},$$

und bestimmen dabei das Vorzeichen der Quadratwurzel in einer solchen Weise, daß ein jedes der doppelten Produkte $2X_{\lambda,\beta}\cdot X_{\lambda,e_\lambda-\beta-1}$ als $2\mathfrak{X}_{\lambda,\beta}\cdot\mathfrak{X}_{\lambda,e_\lambda-\beta-1}$ mit dem positiven Vorzeichen in die neue Darstellung der Form P eingeht.

Dann ist die Form P dargestellt durch die Quadrate von 2ϱ Variabeln, unter denen sich 2σ reelle finden, und $(3-\varrho)$ doppelte Produkte von jedesmal 2 der übrigen $6-2\varrho$ Veränderlichen. Dabei haben diejenigen doppelten Produkte, in welche reelle Variabeln eingehen, das positive Vorzeichen. Von dieser Darstellung der Form P müssen wir durch eine neue lineare Substitution zu der ursprünglich gegebenen Gestalt:

$$\sum_\varkappa p_\varkappa\cdot p_{\varkappa+3},$$

in welcher nur doppelte Produkte von jedesmal zwei der sechs Veränderlichen vorkommen, die alle das positive Vorzeichen haben, zurückgehen.

Zu diesem Zwecke werden wir diejenigen $6-2\varrho$ Variabeln, die in der gegebenen Darstellung der Form bereits zu doppelten Produkten von je zwei verbunden sind, ohne weiteres beibehalten. Dagegen werden wir die 2ϱ Quadrate in ϱ Gruppen von jedesmal 2 einteilen und jede einzelne Gruppe in das doppelte Produkt zweier neuer Variabeln auflösen. Wir zerlegen so

$$Y_\alpha^2 + Y_\beta^2,$$

wo Y_α^2, Y_β^2 zwei derartige Quadrate bedeuten, in das Produkt der beiden linearen Faktoren:

$$\lambda\cdot\frac{Y_\alpha + iY_\beta}{\sqrt{2}}, \qquad \frac{\sqrt{2}}{\lambda}(Y_\alpha - iY_\beta),$$

wo λ eine noch willkürliche Konstante bedeutet. Sind Y_α, Y_β nicht einander konjugiert imaginär, so ist es vorteilhaft, λ einfach der positiven Einheit gleichzusetzen. Im entgegengesetzten Falle wählen wir λ gleich $1-i$ und erhalten dadurch neue Veränderliche, die sich aus den reellen und imaginären Bestandteilen der Y_α, Y_β bzw. als Summe und Differenz zusammensetzen.

Die Art und Weise der Einteilung der 2ϱ Quadrate in ϱ Gruppen von 2 ist eine willkürliche. Solange die Elementarteiler, welche den einzelnen Quadraten entsprechen, sämtlich verschieden sind, hat jedes System neuer Variabeln, welches durch eine beliebige Gruppierung der 2ϱ Quadrate gewonnen wird, eine gleiche Berechtigung. Wir haben dann die Wahl zwischen

$$(2\varrho-1)(2\varrho-3)\ldots$$

verschiedenen Systemen. Denn dieses ist die Anzahl der Möglichkeiten einer verschiedenen Gruppierung von 2ϱ Elementen zu 2. Diese Zahl nimmt für die in der vorigen Nummer aufgezählten elf Fälle bezüglich die folgenden Werte an:

$$15,\ 3,\ 3,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1.$$

Anders ist es, wenn sich unter den Elementarteilern, welche den 2ϱ Quadraten zugehören, gleiche befinden. Wir werden sodann immer solche Quadrate zunächst zu zwei gruppieren, welche gleichen Elementarteilern entsprechen. Und mit dem Reste der Quadrate, welcher bei dieser Operation zurückbleibt, werden wir in derselben Weise vorgehen, wie eben mit den überhaupt vorhandenen 2ϱ Quadraten.

In der 15. Nummer haben wir mit μ_ν diejenige Zahl bezeichnet, welche angibt, wie oft sich unter den Elementarteilern ν gleiche befinden. Dementsprechend bezeichnen wir mit $\mu'_{2\nu}$, bezüglich $\mu'_{2\nu+1}$ diejenigen Zahlen, welche ausdrücken, wie oft sich 2ν, bezüglich $2\nu+1$ gleiche unter den Elementarteilern einer ungeraden Ordnung befinden. Endlich führen wir die Bezeichnung μ''_ν für die Summe $\mu'_{2\nu}+\mu'_{2\nu+1}$ ein.

Eine jede Abteilung von 2ν zusammengehörigen (gleichen Elementarteilern entsprechenden) Quadraten liefert

$$(2\nu-1)(2\nu-3)\ldots$$

verschiedene Systeme neuer Variabeln.

Aus jeder Abteilung von $2\nu+1$ zusammengehörigen Quadraten müssen wir zunächst beliebig ein Quadrat aussondern, was auf $(2\nu+1)$-fache Weise geschehen kann, und haben dann die übrigen 2ν zu 2 zu kombinieren. Wir erhalten also die Zahl:

$$(2\nu+1)(2\nu-1)(2\nu-3)\ldots.$$

So bleiben schließlich noch $\sum\mu'_{2\nu+1}$ Einzelquadrate übrig. Dieselben lassen

$$\left(\sum\mu'_{2\nu+1}-1\right)\left(\sum\mu'_{2\nu+1}-3\right)\ldots$$

verschiedene Gruppierungen zu.

Als Totalanzahl der Systeme gleichberechtigter Variabeln erhalten wir somit das Produkt:

$$R = \left(\sum\mu'_{2\nu+1}-1\right)\left(\sum\mu'_{2\nu+1}-3\right)\ldots$$
$$\cdot\prod_\nu(2\nu+1)^{\mu'_{2\nu+1}}\cdot[(2\nu-1)(2\nu-3)\ldots]^{\mu''_\nu}.$$

In diesem allgemeinen Ausdrucke ist der oben abgeleitete:

$$(2\varrho-1)(2\varrho-3)\ldots$$

als besonderer Fall enthalten.

Den so bestimmten sechs neuen Veränderlichen geben wir, indem P durch ihre Einführung seine frühere Gestalt wieder angenommen hat, *die Bedeutung von Linienkoordinaten.* Durch Substitution derselben in die Form Ω (24) geht dieselbe in eine neue Form über, *welche wir als kanonische bezeichnen.* Dieselbe erhält, je nach Zahl und Ordnung der Elementarteiler, eine verschiedene Gestalt. Wir unterlassen es, dieselbe den vorstehend unterschiedenen elf Arten von Komplexen entsprechend hinzuschreiben. Wenn unter den Elementarteilern ungerader Ordnung gleiche auftreten, erhalten einige der in die zugehörige kanonische Form eingehenden Konstanten den Wert Null.

19. Die Transformation der Form Ω auf die kanonische Gestalt ist eine *mehrdeutige.* Die in der vorigen Nummer gegebene Zahl R bestimmt den Grad dieser Mehrdeutigkeit. Wir untersuchen jetzt, inwieweit sich unter diesen verschiedenen Transformationen solche finden, die zu *reellen* neuen Variabeln führen.

Dazu ist zunächst die Bedingung zu erfüllen, daß sich unter den mehrfachen Wurzeln der Gleichung in s, welche ausdrückt, daß die Determinante S der Form $sP + \Omega$ verschwindet (Nr. 13), keine imaginären finden. Denn solchen Wurzeln entspricht entweder eine Reihe gleicher Elementarteiler, oder, wenn dieses nicht der Fall ist, zum mindesten ein Elementarteiler von einer höheren als der ersten Ordnung. In beiden Fällen erhalten wir unter den kanonischen Variabeln imaginäre. Weiter verlangt die Annahme, daß ein System reeller kanonischer Variabeln möglich sei, die Bedingung, daß unter den 2ν, bezüglich $2\nu+1$ Quadraten, die zu gleichen Elementarteilern gehören, ν positive und ν negative vorkommen. Wenn diese Bedingung durchgängig für Werte von ν, die größer als 0 sind, erfüllt ist und wir nur Quadrate von entgegengesetztem Zeichen zu zwei kombinieren, finden sich, nach den Erörterungen der 17. Nummer, unter den schließlich übrigbleibenden Einzelquadraten gleichviele positive und negative. — Wir erhalten unter den vorstehenden Voraussetzungen die folgende Anzahl reeller Transformationen. Eine jede Gruppe von 2ν, bezüglich $2\nu+1$ zusammengehörigen Quadraten gibt $\nu!$, bezüglich $(\nu+1)!$ verschiedene Systeme neuer reeller Variabeln. Denn aus der Anzahl der $2\nu+1$ Quadrate muß ein Quadrat ausgesondert werden, welches ein derartiges Vorzeichen hat, wie außer ihm noch ν andere. Es ist das auf $(\nu+1)$-fache Weise möglich. Und dann sind ν positive Elemente mit ν negativen so zu 2 zu kombinieren, daß jede Gruppe ein positives und ein negatives Element enthält. Solcher Kombinationen gibt es $\nu!$. Schließlich sind noch $\sum \mu'_{2\nu+1}$ Einzelquadrate zu gruppieren. Wir haben oben angenommen, daß die Anzahl aller reeller Quadrate in der Darstellung von

Φ 2σ betrage. Nun haben wir schon über $2\sum \nu\cdot\mu''_\nu$ reelle Quadrate verfügt. Es bleiben also unter den Einzelquadraten noch

$$2\left(\sigma - \sum \nu\cdot\mu''_\nu\right)$$

reelle übrig. Indem wir sodann die konjugiert imaginären unter den Einzelquadraten zusammen nehmen, und unter den reellen Quadraten jedesmal ein positives mit einem negativen verbinden, erhalten wir $\left(\sigma - \sum \nu\cdot\mu''_\nu\right)!$ Systeme reeller Variabeln. Eine reelle Transformation der gegebenen Form Ω auf die kanonische Form ist demnach auf R'-fache Weise möglich, wo R' das folgende Produkt bezeichnet:

$$R' = \left(\sigma - \sum \nu\cdot\mu''_\nu\right)! . \prod_\nu (\nu+1)^{\mu'_{2\nu+1}} . (\nu!)^{\mu''_\nu} .$$

Sind insbesondere alle Elementarteiler verschieden, so ist diese Zahl gleich $\sigma!$. Beispielsweise können in dem oben mit I bezeichneten Falle

0, 2, 4, 6

der Elementarteiler imaginär werden, und danach sind von den 15 verschiedenen Systemen linearer Substitutionen, welche Ω unter der Voraussetzung verschiedener Teiler in diesem Falle auf die kanonische Form transformieren, bezüglich

6, 2, 1, 1

reell.

Auch in solchen Fällen, in denen alle Systeme kanonischer Variabeln imaginär ausfallen, ist es selbstverständlich möglich, Ω durch eine reelle Substitution auf eine einfache Form zu transformieren, etwa indem wir die reellen und imaginären Teile der in Rede stehenden imaginären Variabeln als neue Veränderliche betrachten; aber wir dürfen eine solche Form nicht als kanonische bezeichnen, weil sie nach einem anderen Modus als demjenigen, der in allen übrigen Fällen angewandt ist, aus der Darstellung (24) der Form Ω sich ableitet.

25. Wenn wir zusammenfassen, sind wir zu dem folgenden Resultate gelangt:

Es sei ein Komplex des zweiten Grades gegeben:

$$\Omega = 0,$$

und es bezeichne:

$$P = 0$$

die Bedingungsgleichung zweiten Grades, welcher die Linienkoordinaten genügen müssen.

Es sei ferner $(s - c_\lambda)^{e_\lambda}$ *ein beliebiger Elementarteiler der Determinante* *der Form* $sP+\Omega$, *und es bedeute* μ_ν *die Zahl, welche angibt, wie oft sich unter den Elementarteilern* ν *gleiche befinden.* $\mu'_{2\nu}$ *und* $\mu'_{2\nu+1}$ *mögen diejenigen Zahlen bezeichnen, welche ausdrücken, wie oft unter den Elementarteilern ungerader Ordnung bezüglich* 2ν *und* $2\nu+1$ *gleiche vorkommen,* μ''_ν *bedeute die Summe* $\mu'_{2\nu}+\mu'_{2\nu+1}$. *Endlich sei* 2σ *die Anzahl der reellen unter den Elementarteilern einer ungeraden Ordnung.*

Dann lassen sich P *und* Ω *durch eine Substitution mit nicht verschwindender Determinante, welche noch*

$$\sum_\nu \mu_\nu \cdot \frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2}$$

willkürliche Konstanten enthält, simultan auf die folgende Gestalt transformieren:

$$P=\sum_\lambda \sum_{(\mu+\nu=e_\lambda-1)} X_{\lambda\mu}\cdot X_{\lambda\nu},$$

$$\Omega=\sum_\lambda \left\{ c_\lambda \sum_{(\mu+\nu=e_\lambda-1)} X_{\lambda\mu}\cdot X_{\lambda\nu} + \sum_{(\mu+\nu=e_\lambda-2)} X_{\lambda\mu}\cdot X_{\lambda\nu} \right\},$$

wo $X_{\lambda,0},\ldots,X_{\lambda,e_\lambda-1}$ *die neuen Variabeln bedeuten, und die Summe*

$$\sum_{(\mu+\nu=e_\lambda-2)} X_{\lambda\mu}\cdot X_{\lambda\nu}$$

gleich Null zu setzen ist, wenn e_λ *den Wert der Einheit hat.*

Von dieser Darstellung der Form Ω *können wir durch*

$$R=\left(\sum\mu'_{2\nu+1}-1\right)\left(\sum\mu'_{2\nu+1}-3\right)\ldots$$
$$\cdot\prod_\nu (2\nu+1)^{\mu''_{2\nu+1}}\cdot[(2\nu-1)(2\nu-3)\ldots]^{\mu''_\nu}$$

verschiedene Systeme linearer Substitutionen mit nicht verschwindender Determinante zu der kanonischen Gestalt derselben übergehen. Im günstigen Falle läßt sich das System der neuen Variabeln auf

$$R'=\left[\sigma-\sum\nu\cdot\mu''_\nu\right]!\,.\prod_\nu(\nu+1)^{\mu'_{2\nu+1}}\cdot(\nu!)^{\mu''_\nu}$$

-fach verschiedene Weise so auswählen, daß die Transformation eine reelle wird. Dazu ist erforderlich, einmal, daß sich unter den Wurzeln der gleich Null gesetzten Determinante von $sP+\Omega$ *keine mehrfachen imaginären finden; dann, daß die Anzahl reeller positiver Quadrate, welche zu gleichen Elementarteilern in der vorhin gegebenen Form von* P *gehören, von der Anzahl der reellen negativen höchstens um 1 verschieden sei.*

V.

Geometrische Deutung der Transformation auf die kanonische Form, insbesondere in dem Falle, daß alle Elementarteiler linear und verschieden sind.

21. Die Koeffizienten der Substitution, durch welche Ω auf die kanonische Gestalt transformiert wird, geben, nach der 8. Nummer, unmittelbar die Kanten des ausgezeichneten Koordinatentetraeders, mit Bezug auf welches sich die Gleichung des Komplexes unter kanonischer Form schreibt. Den verschiedenen Substitutionen entsprechend, erhalten wir eine

$$\sum_\nu \mu_\nu\cdot\frac{\nu(\nu-1)}{1\cdot 2}\cdot\text{fach}$$

unendliche Schar von jedesmal R Koordinatentetraedern, unter welchen R' reelle vorkommen. Diese Tetraeder stehen sämtlich in derselben ausgezeichneten Beziehung zum Komplex.

Wir verstehen dabei unter einer einfach, zweifach, ... m-fach unendlichen Schar von Koordinatentetraedern die Gesamtheit aller derjenigen, welche Kanten besitzen, deren Koordinaten sich aus den Koordinaten der Kanten eines derselben unter Zuhilfenahme von $1, 2, \ldots, m$ willkürlichen Konstanten ableiten lassen. Wenn wir also, unter $P_\varkappa$, $P_{\varkappa+3}$ zwei gegenüberstehende Kanten des Koordinatentetraeders verstanden, die Transformation:

$$p_\varkappa=\lambda p'_\varkappa, \qquad p'_{\varkappa+3}=\lambda p_{\varkappa+3}$$

anwenden, durch welche die Kanten selbst und damit das Tetraeder nicht verändert werden und nur der dem Koordinatensystem zugrunde gelegte Maßstab ein anderer wird, so müssen wir konsequenterweise, den verschiedenen Werten der willkürlichen Konstante λ entsprechend, von einer einfach unendlichen Schar von Tetraedern sprechen.

22. Wir beschränken uns in dem Folgenden auf die geometrische Diskussion des gewonnenen Resultates allein in dem Falle, daß alle Elementarteiler linear und verschieden sind. In diesem Falle sind P und Ω unter (24) durch die folgenden Formen dargestellt:

$$(25)\qquad \begin{cases} P=\sum_\lambda X_\lambda^2, \\ \Omega=\sum_\lambda c_\lambda X_\lambda^2, \end{cases}$$

wo die Summation von 1 bis 6 zu gehen hat, und $c_1, \ldots, c_6$ voneinander verschiedene Größen bedeuten. Auf 15 verschiedene Arten können wir Ω, von dieser Darstellung ausgehend, auf die kanonische Form transformieren. Je nachdem

$$0,\ 2,\ 4,\ 6$$

der Elementarteiler imaginär sind, sind von den 15 ausgezeichneten Tetraedern bezüglich

$$6,\ 2,\ 1,\ 1$$

reell. *Mit Bezug auf ein beliebiges dieser letzten Tetraeder schreibt sich die Form Ω unter der folgenden Gestalt:*

$$\begin{aligned}(26)\qquad \Omega = {} & A_{1,4}(p_1^2 \pm p_4^2) + 2B_{1,4}p_1p_4 \\ & + A_{2,5}(p_2^2 \pm p_5^2) + 2B_{2,5}p_2p_5 \\ & + A_{3,6}(p_3^2 \pm p_6^2) + 2B_{3,6}p_3p_6,\end{aligned}$$

wo $p_1, \ldots, p_6$ die neuen reellen Variabeln und A die Koeffizienten der einen, B die der anderen Gruppe bezeichnen (Nr. 12). Von den drei unbestimmt gebliebenen Vorzeichen ist einem jeden Paare imaginärer Elementarteiler entsprechend eins negativ zu wählen.

Dies ist in dem Falle linearer und verschiedener Elementarteiler die kanonische Gestalt der Form Ω, deren Ableitung unsere Aufgabe war.

23. Es beschäftigt uns zunächst die Gruppierung der 15 ausgezeichneten Tetraeder unter sich. Wir mögen dieselben kurz als die *Fundamentaltetraeder* des Komplexes bezeichnen.

Zwei gegenüberstehende Kanten eines der 15 Fundamentaltetraeder sind ihm mit zwei anderen gemeinsam. Denn wenn wir von den sechs Quadraten, durch welche P unter (25) dargestellt wird, zwei beliebige auswählen, so lassen sich die vier übrigen noch dreimal in zwei Gruppen von zwei teilen. Das System der 15 Fundamentaltetraeder umfaßt sonach 30 Kanten. Die 60 Seitenflächen derselben schneiden sich zu 6 nach diesen Kanten, und die 60 Eckpunkte derselben sind ebenfalls zu 6 auf dieselben verteilt. Es schneidet also eine jede der 30 Kanten 12 der übrigen. Dieselben 12 Kanten werden von einer zweiten Kante geschnitten, die zu der ersten in einer ausschließlichen Beziehung steht. Danach sondern sich die 30 Kanten in 15 Gruppen von 2, die zusammengehören.

Die in (25) eingehenden Variabeln X_λ stellen, einzeln gleich Null gesetzt, lineare Komplexe dar. Wenn wir zwei derselben, X_1, X_2, beliebig auswählen, so stellen die beiden Gleichungen:

$$X_1 + iX_2 = 0, \qquad X_1 - iX_2 = 0$$

zwei zusammengehörige der 30 Kanten der Fundamentaltetraeder dar. Alle geraden Linien, welche die eine und die andere dieser beiden Kanten schneiden, befriedigen die vorstehenden beiden Gleichungen und gehören somit den beiden Komplexen X_1, X_2 an. Es sind also die in Rede stehenden beiden Kanten die Direktrizen der von den beiden Komplexen X_1, X_2 gebildeten Kongruenz (Nr. 12). Es gibt das die geometrische Deutung der Variabeln X_λ aus dem System der Fundamentaltetraeder.

Drei unter den Komplexen X_λ, etwa X_1, X_2, X_3, bestimmen eine Fläche des zweiten Grades (Hyperboloid) als windschiefe Fläche (Nr. 12). Dieser Fläche gehören, als Direktrizen der Kongruenzen je zweier der drei Komplexe[17]), die folgenden sechs aus dem System der Kanten der Fundamentaltetraeder als Linien einer Erzeugung derselben an:

$$\begin{array}{lll} X_1 + iX_2 = 0, & X_2 + iX_3 = 0, & X_3 + iX_1 = 0, \\ X_1 - iX_2 = 0, & X_2 - iX_3 = 0, & X_3 - iX_1 = 0. \end{array}$$

Und weil die 30 fraglichen Kanten zu Tetraedern gruppiert sind, sind die folgenden sechs Kanten:

$$\begin{array}{lll} X_4 + iX_5 = 0, & X_5 + iX_6 = 0, & X_6 + iX_4 = 0, \\ X_4 - iX_5 = 0, & X_5 - iX_6 = 0, & X_6 - iX_4 = 0 \end{array}$$

Linien der anderen Erzeugung.

Die sechs Symbole X_λ lassen sich auf $\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3} = 20$-fache Weise zu drei kombinieren. Die 30 Kanten der Fundamentaltetraeder sondern sich also in 20 Gruppen von jedesmal 6, die paarweise zusammengehören. Die sechs Kanten einer Gruppe sind Linien derselben Erzeugung einer Fläche des zweiten Grades, die sechs Kanten der zugehörigen Gruppe Linien der anderen Erzeugung derselben Fläche. Das System der 30 Kanten steht also zu 10 verschiedenen Flächen zweiten Grades, von denen sich jedesmal vier nach einer Kante schneiden, in einer ausgezeichneten Beziehung.

24. Wenn sämtliche Elementarteiler reell sind, werden sechs der 15 Fundamentaltetraeder reell. Die übrigen neun Tetraeder sind von der Art, daß sie zwei reelle, gegenüberstehende Kanten besitzen, und von den übrigen Kanten die gegenüberstehenden konjugiert sind. Zwei zusammengehörige reelle Kanten sind zwei reellen und einem imaginären Tetraeder gemeinsam. Von den 30 Kanten der 15 Tetraeder sind also 18 reell und die 12 anderen imaginär, so zwar, daß die konjugiert imaginären zusammengehören.

Wenn zwei der sechs Elementarteiler imaginär sind, so sind nur zwei der 15 Tetraeder reell. Eins ist, wie die neun Tetraeder in dem vorigen Falle, in sich konjugiert. Die übrigen 12 imaginären Tetraeder sind einander paarweise konjugiert. Von den 30 Kanten werden nur zehn reell, die übrigen 20 imaginär. Von diesen 20 Kanten sind zweimal zwei Kanten konjugiert und zugleich zusammengehörig, während sich die übrigen 16 Kanten in zwei Gruppen teilen, welche konjugiert sind, und deren jede acht solche Kanten enthält, die paarweise zusammengehören.

In dem dritten und vierten Falle endlich, daß vier oder sechs der

[17]) Vgl. Plückers „Neue Geometrie", Nr. 101.

Elementarteiler imaginär werden, ist nur eins der 15 Tetraeder reell. Von den 30 Kanten sind sechs reell, die übrigen 24 imaginär. Sie teilen sich in zwei einander konjugierte Gruppen, deren jede 12 solche Kanten umfaßt, welche paarweise zusammengehören. Unter den imaginären Fundamentaltetraedern kommt keins mit nur zwei imaginären Eckpunkten vor. (Nr. 10.)

In dem Falle, daß sechs der 15 Fundamentaltetraeder reell sind, gelangen wir von einem der reellen Tetraeder zu einem zweiten, und zwar zu demjenigen, welches mit dem angenommenen die beiden Kanten P_3, P_6 gemein hat, wenn wir setzen:

$$p_1 + p_4 = x_1, \qquad p_2 + p_5 = x_2,$$
$$p_1 - p_4 = ix_4, \qquad p_2 - p_5 = ix_5,$$

und

$$x_1 - ix_5 = 2p_1', \qquad x_2 + ix_4 = 2p_2',$$
$$x_1 + ix_5 = 2p_4', \qquad x_2 - ix_4 = 2p_5'.$$

Es kommt dies auf die direkte Transformation hinaus:

$$\begin{aligned} 2p_1' &= p_1 + p_4 - p_2 + p_5, \\ 2p_4' &= p_1 + p_4 + p_2 - p_5, \\ 2p_2' &= p_1 - p_4 + p_2 + p_5, \\ 2p_5' &= -p_1 + p_4 + p_2 + p_5, \\ 2p_3' &= 2p_3, \\ 2p_6' &= 2p_6, \end{aligned}$$

und dieser entspricht die folgende Transformation der Punktkoordinaten $(z_1, \ldots, z_4)$:

$$\sqrt{2}z_1' = z_1 + z_4, \qquad \sqrt{2}z_2' = z_2 - z_3,$$
$$\sqrt{2}z_4' = -z_1 + z_4, \qquad \sqrt{2}z_3' = z_2 + z_3.$$

Indem wir auch in dem Falle imaginärer Tetraeder ganz dieselben Umformungen anwenden können, erhalten wir den Satz, daß die vier Seitenebenen zweier Fundamentaltetraeder, welche sich nach einer Kante schneiden, so wie die vier Eckpunkte, welche auf einer Kante liegen, einander harmonisch konjugiert sind.

25. Wir gehen dazu über, die geometrische Bedeutung der Gleichungsform (26) zu untersuchen. Wir nehmen dabei der Einfachheit wegen an, daß alle Elementarteiler reell sind, daß also in (26) nur positive Zeichen vorkommen.

Es sei eine Linie des Komplexes bekannt, deren Koordinaten sind:

$$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6.$$

Dann gehören demselben Komplexe eine Reihe anderer gerader Linien an, deren Koordinaten durch dieselben sechs Größen, zunächst nur in anderer

Reihenfolge, gegeben werden. Wir können p_1 mit p_4, p_2 mit p_5, und p_3 mit p_6 vertauschen. So erhalten wir sieben neue gerade Linien, welche ebenfalls Linien des Komplexes sind:

$$p_4, p_2, p_3, p_1, p_5, p_6,$$
$$p_1, p_5, p_6, p_4, p_2, p_3,$$
$$p_4, p_5, p_6, p_1, p_2, p_3,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

Wir erhalten weitere Linien des Komplexes, wenn wir die Vorzeichen von p_1 und p_4, von p_2 und p_5, von p_3 und p_6 ändern. So bekommen wir, einer jeden der vorstehenden acht Linien entsprechend, drei neue, die ebenfalls dem Komplexe angehören. Im ganzen also sind, wenn *eine* Linie gegeben ist, damit 32 bestimmt.

Diese Zahl leitet sich, wie folgt, unmittelbar ab. An die Stelle von $+p_1$ kann $+p_4$, $-p_1$, $-p_4$ treten; ebenso an die von $+p_2$ und $+p_3$ bezüglich $+p_5$, $-p_2$, $-p_5$ und $+p_6$, $-p_3$, $-p_6$. Wir erhalten also

$$4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$$

Kombinationen und dementsprechend $\frac{64}{2} = 32$ gerade Linien, weil ein Wechsel der Vorzeichen aller Koordinaten die durch dieselbe dargestellte gerade Linie nicht ändert.

Die Beziehung zwischen diesen 32 geraden Linien ist eine gegenseitige. Sie läßt sich geometrisch durch diejenigen zehn Flächen des zweiten Grades vermitteln, deren jede 12 Kanten des Systems der 30 Kanten der Fundamentaltetraeder enthält (Nr. 23). Eine beliebige dieser Flächen ist mit Bezug auf ein passend gewähltes Fundamentaltetraeder dargestellt durch die Gleichung:

$$z_1 z_2 + z_3 z_4 = 0,$$

wo $z_1, \ldots, z_4$ Punktkoordinaten bedeuten mögen. Dann entspricht der willkürlich angenommenen geraden Linie mit den Koordinaten:

$$p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$$

in bezug auf diese Fläche eine zweite als Polare, deren Koordinaten sind:

$$p_4, p_2, -p_3, p_1, p_5, -p_6;$$

und dies ist eine der vorstehend aufgeführten 32 geraden Linien. So liefert jede dieser 32 Linien in bezug auf jede der zehn Flächen eine gerade Linie als Polare, welche selbst in der Reihe der 32 Linien enthalten ist.

Wir können sagen, *daß mit Bezug auf jede dieser zehn Flächen zweiten Grades der gegebene Komplex sich selbst reziprok ist*, das heißt: einer jeden Linie des Komplexes entspricht in Beziehung auf jede dieser

Flächen eine andere Linie desselben als Polare, oder mit andern Worten: dem von Komplexlinien, die durch einen festen Punkt gehen, gebildeten Kegel entspricht mit Bezug auf jede der vorstehend genannten Flächen eine ebene Kurve, die selbst wieder von Linien des Komplexes umhüllt wird.

Die Bestimmung dieser zehn Flächen ist unabhängig von den in die Gleichung (26) eingehenden Konstanten.

26. Die Gleichungsform (26) gibt eine geometrische Konstruktion der Komplexe des zweiten Grades. Wir können zunächst diese Form auf die folgende Gestalt bringen:

$$2P_1P_4 + 2P_2P_5 + 2P_3P_6 = 0, \tag{27}$$

wo $P_1, \ldots, P_6$ lineare Komplexe bezeichnen. Wir brauchen zu diesem Zwecke nur jedesmal das Aggregat der Glieder:

$$A_{\varkappa,\varkappa+3}(p_\varkappa^2 + p_{\varkappa+3}^2) + 2B_{\varkappa,\varkappa+3}\,p_\varkappa \cdot p_{\varkappa+3}$$

in das Produkt der beiden Linearfaktoren:

$$2(\alpha p_\varkappa + \beta p_{\varkappa+3})\cdot(\beta p_\varkappa + \alpha p_{\varkappa+3})$$

aufzulösen, wo α, β sich durch die Gleichungen bestimmen:

$$2\alpha\beta = A_{\varkappa,\varkappa+3}, \qquad \alpha^2 + \beta^2 = B_{\varkappa,\varkappa+3}.$$

Die Komplexe $P_1, \ldots, P_6$ lassen sich vermöge des Koordinatentetraeders und jedesmal einer ihnen angehörigen geraden Linie, oder allgemeiner, durch fünf ihrer Linien linear konstruieren[18]).

Man bestimme die sechs Ebenen, welche einem beliebigen Punkte des Raumes in bezug auf diese sechs linearen Komplexe entsprechen. Wir mögen diese Ebenen ebenfalls mit dem Symbole $P_1, \ldots, P_6$ bezeichnen. Dann lassen sich diejenigen beiden Kanten, nach welchen der Kegel zweiter Ordnung, welcher von den Linien des gesuchten Komplexes in dem angenommenen Punkte gebildet wird, eine beliebige dieser Ebenen, etwa P_1, schneidet, als Durchschnitt dieser Ebene mit dem Kegel:

$$P_2P_5 + P_3P_6 = 0,$$

welcher durch zwei projektivische Ebenenbüschel, etwa:

$$P_2 + \lambda P_6, \qquad P_3 - \lambda P_5,$$

gegeben ist, konstruieren. Eine dreimalige Wiederholung dieser Konstruktion liefert sechs Kanten des fraglichen Komplexkegels. Fünf derselben reichen hin, um denselben zu bestimmen.

27. Wir mögen zum Schlusse die Art der ausgezeichneten Beziehung untersuchen, in welcher die Fundamentaltetraeder zu dem Komplexe stehen.

[18]) Plückers „Neue Geometrie“, Nr. 29.

Einer beliebigen geraden Linie ist, mit Bezug auf einen Komplex des zweiten Grades, nach Plücker, eine zweite als Polare zugeordnet[19]). Dieselbe steht zu der ersten in der doppelten Beziehung, daß sie einmal der geometrische Ort ist für die Pole der ersten geraden Linie mit Bezug auf alle Kurven, die in den durch sie hindurchgelegten Ebenen von Linien des Komplexes umhüllt werden; dann, daß sie umhüllt wird von den Polarebenen der ersten geraden Linie mit Bezug auf alle Kegel, die in den Punkten derselben von Linien des Komplexes gebildet werden. Dieses Verhältnis zwischen den beiden Linien ist indes kein gegenseitiges. Zu der zweiten Linie gehört eine dritte, usf. Abgesehen von den Linien des Komplexes, die sich selbst konjugiert sind, wird es nur eine endliche Anzahl von geraden Linien geben, die selbst wieder die Polaren ihrer Polaren sind.

Wenn wir in der Gleichung (26) beliebig solche drei Koordinaten verschwinden lassen, welche sich auf drei, sich in einem Punkte schneidende oder in einer Ebene liegende Kanten des Fundamentaltetraeders beziehen, so erhalten wir zur Darstellung des von dem Eckpunkte ausgehenden Kegels, bezüglich der in der Seitenfläche liegenden Kurve eine Gleichung, die nur die Quadrate der übrigen drei Variabeln enthält. Kegel und Kurve sind also bezüglich auf ein in bezug auf dieselben sich selbst konjugiertes Dreikant und Dreieck bezogen. Daraus folgt, daß die im Komplexe einer beliebigen Kante eines Fundamentaltetraeders zugeordnete Polare die gegenüberstehende Kante desselben Fundamentaltetraeders ist, daß also die Fundamentaltetraeder in einer solchen Weise ausgewählt sind, *daß je zwei gegenüberstehende Kanten derselben gegenseitig mit Bezug auf den Komplex konjugiert sind.*

28. Nun läßt sich zeigen, daß außer den 30 Kanten der 15 Fundamentaltetraeder keinen anderen Linien mehr die Eigenschaft zukommt, sich gegenseitig in bezug auf den gegebenen Komplex zu entsprechen.

Denn es seien zwei derartige Linien gegeben. Wir wählen sie zu gegenüberstehenden Kanten eines Koordinatentetraeders und beziehen den Komplex auf dasselbe. Dann fehlen in seiner Gleichung, wenn wir die beiden gegebenen Kanten mit P_1 und P_4 bezeichnen, die acht Glieder mit den doppelten Produkten:

$$p_1p_2,\ p_1p_3,\ p_1p_5,\ p_1p_6,$$
$$p_4p_2,\ p_4p_3,\ p_4p_5,\ p_4p_6,$$

[19]) Plückers „Neue Geometrie“, Nr. 170. — Das Verhältnis einer geraden Linie zu ihrer Polaren läßt sich auch mit Hilfe der in der 12. Nummer erwähnten einfach unendlichen Schar linearer Polarsysteme darstellen, welche der angenommenen geraden Linie in bezug auf den gegebenen Komplex des zweiten Grades entsprechen. Die angenommene gerade Linie und ihre Polare sind die Direktrizen der durch die *eingliedrige* Gruppe der linearen Polarkomplexe bestimmten Kongruenz. (Plücker, a. a. O.)

und es treten also p_1 und p_4 nur in der Verbindung:

$$a_{11} p_1^2 + 2 a_{14} p_1 p_4 + a_{44} p_4^2$$

auf. Wenn wir also die beiden Formen:

$$P = \sum_{\varkappa} p_{\varkappa} \cdot p_{\varkappa+3}$$

und

$$\Omega(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6),$$

wie wir statt Ω schreiben wollen, den Gleichungen (25) entsprechend, auf zwei Formen transformieren, die nur die Quadrate der Variabeln enthalten, so wird es gestattet sein, diese Transformation mit den beiden Formenpaaren:

$$2 p_1 p_4 \text{ und } a_{11} p_1^2 + 2 a_{14} p_1 p_4 + a_{44} p_4^2$$

und

$$2 p_2 p_5 + 2 p_3 p_6 \text{ und } \Omega(0, p_2, p_3, 0, p_5, p_6)$$

einzeln vorzunehmen. Damit ist der Beweis geführt, daß die Kanten P_1, P_4 des angenommenen Koordinatentetraeders zu dem System der 30 Kanten der Fundamentaltetraeder gehören. Und somit haben wir den Satz:

Es sei ein Komplex gegeben, dessen zugehörige Elementarteiler sämtlich linear und voneinander verschieden sind. Dann gibt es 30 gerade Linien, welche einander mit Bezug auf den Komplex gegenseitig konjugiert sind. Je nachdem von den linearen Elementarteilern 0, oder 2, oder mehr imaginär ausfallen, sind von diesen 30 geraden Linien bezüglich 18, oder 10, oder 6 reell.

Thesen.

1. Diejenige kanonische Gleichungsform, welche Battaglini seiner Arbeit über Komplexe des zweiten Grades zugrunde legt:

$$\sum_{\varkappa} a_{\varkappa} p_{\varkappa}^2 = 0,$$

ist nicht die allgemeine.

2. Die Anwendung, welche Cauchy von den in seiner méthode générale, propre à fournir les équations de conditions rélatives aux limites des corps [Comptes rendus, VIII (vgl. Cauchys Werke (1) IV, p. 193 ff.)] entwickelten Prinzipien auf lineare Differentialgleichungen einer beliebigen Ordnung gibt (ibid.), scheint nicht über alle Bedenken erhaben.

3. Bei Erklärung der Lichtphänomene kann die Annahme eines Lichtäthers nicht umgangen werden.

4. Positive und negative Elektrizität sind nicht als entgegengesetzt gleich zu betrachten.

5. Es ist wünschenswert, daß neben der Euklidischen Methode neuere Methoden der Geometrie in den Unterricht auf Gymnasien eingeführt werden.

Zu den folgenden liniengeometrischen Arbeiten.

Den Abdruck der folgenden liniengeometrischen Arbeiten möchte ich mit einigen autobiographischen Notizen einleiten:

1. Von Neujahr 1869 bis Mitte August war ich bei Clebsch in Göttingen, zunächst um Teil II der Plückerschen „Neuen Geometrie" fertigzustellen, was bis zum 25. Mai gelang. Gleichzeitig entstanden die weiteren liniengeometrischen Arbeiten, die nachstehend unter II und III abgedruckt sind. Beim Vergleich mit der Dissertation wird man den anregenden Einfluß erkennen, den die Göttinger Umgebung auf mich ausgeübt hat. Ich wähle diesen etwas unbestimmten Ausdruck, weil neben Clebsch selbst die vorab noch kleine Zahl von Spezialschülern, die er um sich versammelt hatte, regsten Einfluß auf mich gewann. Clebsch selbst hatte uns damals vor allen Dingen die von ihm entdeckte rationale Abbildung der niedersten algebraischen Flächen auf die Ebene vorgetragen und insbesondere Nöther die prinzipielle Weiterführung dieser Untersuchungen und ihre Erweiterung auf mehrdimensionale Gebilde übertragen. Die weiter unten unter IV und V abgedruckten Notizen sind ein Beleg dafür, wie weit ich selbst, allerdings mehr beiläufig, an diesen Arbeiten teilnahm. — Im übrigen ist die damalige Anregung durch Clebsch für mich von viel durchschlagenderer Bedeutung gewesen, als in diesen Einzelangaben hervortritt. Ich war nach Göttingen durchaus mit der Absicht gekommen, mich nach Vollendung der Plücker-Ausgabe wieder physikalischen Studien zuzuwenden. Diese Absicht schob ich nun zurück und habe nach verschiedenen späteren Ansätzen — die ersten Vorlesungen, die ich 1871—72 hielt, bezogen sich noch in der Hauptsache auf physikalische Fragen — schließlich ganz darauf verzichten müssen.

2. Von Ende August 1869 bis Mitte März 1870 bin ich in Berlin gewesen.

Ich darf zunächst des engen Verkehrs mit meinem Düsseldorfer Freunde A. Wenker gedenken, der damals in den astronomischen Werkstätten von Pistor und Martins arbeitete[1]). Wir haben zusammen die vier Modelle zur Theorie der Linienkomplexe zweiten Grades hergestellt, von denen in Bd. II dieser Ausgabe die Rede sein soll.

Das wichtigste Ereignis meiner Berliner Zeit aber war jedenfalls, daß ich Ende Oktober im dortigen mathematischen Verein mit dem Norweger S. Lie bekannt wurde. Wir hatten von verschiedenen Ausgangspunkten aus schließlich über dieselben oder doch nahe verwandte Fragen gearbeitet. So waren wir denn bald in regstem Gedankenaustausch fast täglich zusammen und schlossen uns um so näher aneinander an, als wir für unsere geometrischen Interessen in unserer nächsten Umgebung zunächst nur wenig Interesse fanden.

Dies will nicht sagen, daß ich nicht auch von anderen Altersgenossen mannigfache Anregung erfuhr. So habe ich damals durch L. Kiepert Weierstraß' Theorie der elliptischen Funktionen kennen gelernt, von O. Stolz aber erfuhr ich zum ersten Male von Nicht-Euklidischer Geometrie und erfasste damals gleich den Gedanken, daß diese mit Cayleys allgemeiner projektiver Maßbestimmung auf das engste zusammenhängen müsse. Vorlesungen habe ich in Berlin kaum gehört. Um so

[1]) Wenker ist leider während des Krieges 1870/71 am Typhus gestorben.

eifriger beteiligte ich mich an dem von Kummer und Weierstraß geleiteten mathematischen Seminar, wo ich in der Kummerschen Abteilung zahlreiche Vorträge über Liniengeometrie hielt. Es ist mir noch heute unverständlich, warum sich zu den nahe verwandten Kummerschen Untersuchungen über algebraische Strahlensysteme, so genau ich die Kummerschen Veröffentlichungen studierte, keine lebendige Beziehung entwickelt hat. Bei Weierstraß habe ich in dem Schlußseminar, Mitte März 1870, über Cayleysche Maßbestimmung vorgetragen und geradezu mit der Frage geschlossen, ob hier nicht eine Beziehung zur Nicht-Euklidischen Geometrie vorliege. Weierstraß lehnte dies ab, indem er die Entfernung zweier Punkte als notwendigen Ausgangspunkt für die Grundlegung der Geometrie erklärte und dementsprechend die Gerade als kürzeste Verbindungslinie definiert wissen wollte.

3. Von Ende April 1870 bis zum Ausbruch des deutsch-französischen Krieges, Mitte Juli, war ich mit Lie zusammen in Paris. Wir wohnten Zimmer an Zimmer und haben neue wissenschaftliche Anregung wieder wesentlich in persönlichem Verkehr gesucht, insbesondere mit jüngeren Mathematikern. Einen großen Eindruck machte mir Camille Jordan, dessen traité des substitutions et des équations algébriques eben erschienen war und uns ein Buch mit sieben Siegeln erschien. Den nächsten Verkehr aber hatten wir mit G. Darboux. Die damals neuen Untersuchungen der Franzosen über metrische Geometrie (Geometrie der reziproken Radien, beständige Benutzung des Kugelkreises) waren uns in Deutschland noch unbekannt geblieben; jetzt ergab sich, daß sie auf das innigste mit unseren eigenen liniengeometrischen Arbeiten verwandt waren. Insbesondere hatte Darboux für seine konfokalen Zykliden Untersuchungen mit fünf Veränderlichen angestellt, die das genaue Gegenstück meiner vorherigen Verwendung der sechs linearen Fundamentalkomplexe in der Theorie der Komplexe zweiten Grades waren (vgl. die folgende Abhandlung II). Für Lie kamen vielleicht noch mehr die Untersuchungen der Franzosen über die geometrische Theorie der Differentialgleichungen in Betracht; aus der Verschmelzung der beiden Ideenkreise ist dann seine Entdeckung der Beziehung zwischen Haupttangentenkurven und Krümmungskurven erwachsen, die weiter unten wiederholt zur Sprache kommt.

Der Krieg hat, so tief er in die Erlebnisse eines jeden von uns eingriff, doch lange nicht so störend auf unsere wissenschaftlichen Beziehungen gewirkt, wie man heutzutage voraussetzen möchte. Ich hatte mich wegen der Mobilmachung in meine Heimat begeben, bin aber, nachdem ich für militäruntauglich erklärt wurde, erst gegen Mitte August in das Bonner Nothelferkorps eingetreten. Bis dahin hatte ich mit Lie, der solange noch in Paris geblieben war, ungestört mathematisch korrespondieren können. Die nächsten 4 Monate sind dann für jeden von uns mit mannigfachen Erlebnissen ausgefüllt, deren Erzählung aber, so interessant sie sein möchte, nicht hierher gehört. Ich habe, vom 1. Oktober beginnend, lange Wochen typhuskrank in meiner Vaterstadt Düsseldorf gelegen. Um Mitte Dezember besuchte mich Lie dort auf seiner Rückreise nach Norwegen, und wir haben damals die gemeinsame Note über die Haupttangentenkurven der Kummerschen Fläche fertiggestellt, die weiterhin unter VI abgedruckt ist. Als aber Paris Ende Januar 1871 gefallen war, hat sich sofort wieder ein lebhafter Briefwechsel mit Darboux entwickelt.

4. Von Neujahr 1871 bis Ende September 1872 hat dann mein zweiter Göttinger Aufenthalt gedauert. Ich habe mich am 7. Januar 1871 habilitiert. Meine produktiven Arbeiten, die fortgesetzt durch fast tägliches Zusammensein mit Clebsch belebt wurden, galten zunächst einer ausführlicheren Darstellung der Ideen, die ich im Verkehr mit Lie gewonnen hatte. Ein reger Briefwechsel hielt dabei unsere persönliche Beziehung lebendig. Man vergleiche neben den nachstehend abgedruckten Abhandlungen über liniengeometrische Themata (VI—IX) insbesondere auch XXV und XXVI. Ich erhielt dann einen neuen wesentlichen Impuls dadurch, daß O. Stolz für das Sommersemester 1871 nach Göttingen kam. Die Ideen über den Zusammenhang der Nicht-Euklidischen Geometrie mit der Cayleyschen Maßbestimmung, die sich seit meiner Berliner Zeit bereits einigermaßen weitergebildet hatten, traten

in den Vordergrund, und es gelang mir, Stolz nicht nur von ihrer Richtigkeit zu überzeugen, sondern auf Grund der Ansätze v. Staudts zu einer unabhängigen projektiven Begründung der Gesamttheorie vorzudringen. Stolz war alle die Zeit nicht nur mein strenger Kritiker, sondern auch mein literarischer Anhalt. Er hatte Lobatschewsky, Joh. Bolyai und v. Staudt genau studiert, wozu ich mich nie habe zwingen können, und stand mir bei allen meinen Fragen Rede und Antwort.

Mein Interesse war schon von meiner Bonner Zeit her darauf gerichtet, im Widerstreite der sich befehdenden mathematischen Schulen das gegenseitige Verhältnis der nebeneinander herlaufenden, äußerlich einander unähnlicher und doch ihrem Wesen nach verwandter Arbeitsrichtungen zu verstehen und ihre Gegensätze durch eine einheitliche Gesamtauffassung zu umspannen. Innerhalb der Geometrie gab es in dieser Hinsicht noch viel für mich zu tun. Ich habe im Herbst 1871 insbesondere daran gearbeitet, die konsequente projektive Denkweise, wie ich sie bei Salmon-Fiedler kennen gelernt habe und Clebsch sie glänzend vertrat, wie sie sich dann wieder in der Nicht-Euklidischen Geometrie bewährt hatte, mit den Entwicklungen von Möbius' baryzentrischem Kalkul und den Grundanschauungen von Hamiltons Quaternionen in klare gegenseitige Beziehung zu setzen. So ist im November 1871 der Grundgedanke meines im Oktober 1872 ausgearbeiteten Erlanger Programms (XXVII) entstanden. Ich habe ihn zuerst in meiner zweiten Abhandlung über Nicht-Euklidische Geometrie (XVIII) zur Darstellung gebracht, die infolge äußerer Druckschwierigkeiten erst nach dem Erlanger Programm erschien. Es ist dort noch, je nach der Gruppe, welche man bei der Behandlungsweise der Geometrie zugrunde legen will, von verschiedenen „geometrischen Methoden" die Rede, eine Ausdrucksweise, die ich später auf Anraten von Lie fallen gelassen habe.

5. Die nachstehend unter XII, XIII abgedruckten Abhandlungen gehören einer wesentlich späteren Zeit an (1885/86). Sie sind hier angeschlossen, weil auch bei ihnen das liniengeometrische Interesse voransteht. Daß die Theorie der Kummerschen Fläche, insofern letztere Singularitätenfläche von einfach unendlich vielen Komplexen zweiten Grades ist, mit derjenigen der hyperelliptischen Funktionen $p = 2$ auf das innigste zusammenhängen muß, findet sich schon am Schlusse von IX (1871) ausgesprochen. Ich habe dann später, als ich in München war, meinem damaligen Schüler Rohn vorgeschlagen, diesen Zusammenhang weiter zu verfolgen. Seine Dissertation (1878) gab eine Menge der merkwürdigsten Resultate, die dadurch an Aktualität gewannen, daß eben 1877—78 die Beziehung der Kummerschen Fläche zu den genannten hyperelliptischen Funktionen von Cayley, Borchardt und Weber von ganz anderem Ausgangspunkte aus bemerkt wurde. Es folgt 1879 die Habilitationsschrift von Rohn (Math. Ann., Bd. 15), deren Ergebnisse ich dann meinerseits 1885, als ich begann, mich ausführlicher mit den hyperelliptischen und Abelschen Funktionen zu beschäftigen, für meine Seminarvorträge durcharbeitete und durch möglichst unmittelbare (von Zwischenrechnungen befreite) Schlüsse zu beweisen suchte. Dies der Ursprung der Arbeiten XII, XIII.

Bei ihnen wird das Zusammengehen algebraischer Beziehungen geometrischer Gebilde mit den Ideenbildungen von Galois als wesentlich bekannt vorausgesetzt; es ist dies eine Sache, der ich in der Zwischenzeit viel Nachdenken gewidmet hatte und die in meinen Arbeiten über algebraische Gleichungen, welche erst im II. Bande dieser Abhandlungen abgedruckt werden sollen, zur vollen Geltung kommt. K.

II. Zur Theorie der Linienkomplexe des ersten und zweiten Grades[1]).

[Math. Annalen, Bd. 2 (1870).]

Als *Koordinaten der geraden Linie im Raume* betrachtet man die relativen Werte der aus den Koordinaten zweier Punkte oder zweier Ebenen gebildeten sechs zweigliedrigen Determinanten. Zwischen denselben besteht identisch eine Relation zweiten Grades:

$$R = 0.$$

Indem sechs beliebig ausgewählte Größen, welche diese Gleichung befriedigen, als Koordinaten einer geraden Linie angesehen werden können, ist es gestattet, von der Entstehungsweise der Linienkoordinaten aus den Koordinaten zweier Punkte oder Ebenen abzusehen, und die Linienkoordinaten als selbständige homogene Veränderliche zu betrachten, welche einer Gleichung zweiten Grades zu genügen haben.

Eine weitere Gleichung zweiten Grades zwischen denselben:

$$\Omega = 0$$

bestimmt *einen Linienkomplex des zweiten Grades.*

Es liegt nahe, die beiden Gleichungen R und Ω durch eine lineare Substitution in solche zwei zu verwandeln, welche nur noch die Quadrate der Veränderlichen enthalten. Eine derartige Umformung ist bekanntlich immer und in einziger Weise möglich, vorausgesetzt, daß die Wurzelwerte, welche die gleich Null gesetzte Determinante der Form $\Omega + \lambda P$ für λ ergibt, sämtlich voneinander verschieden sind[2]). *Im folgenden soll der geometrische Sinn dieser Transformation erörtert werden.* Indem wir solche Komplexe zweiten Grades, bei welchen die in Rede stehende Umformung

[1]) Im Auszuge bereits mitgeteilt in den Göttinger Nachrichten, 1869, Sitzung vom 9. Juni, S. 258.

[2]) In meiner Inaugural-Dissertation: *Über die Transformation der allgemeinen Gleichung zweiten Grades zwischen Linienkoordinaten auf eine kanonische Form,* *Bonn*, 1868 (Abhandlung I dieser Ausgabe) habe ich die algebraische Durchführung dieser Transformation behandelt. Ich habe dort zugleich die im Texte ausgeschlossenen Fälle von Komplexen zweiten Grades mit in Betracht gezogen und die ihnen entsprechenden kanonischen Gleichungsformen aufgestellt.

nicht möglich ist, von der Betrachtung ausschließen, denken wir uns die beiden Formen R und Ω von vornherein in der vereinfachten Gestalt gegeben.

Es sei gleich hervorgehoben, daß diese Gleichungsform nicht nur für die Komplexe zweiten Grades als solche, sondern auch für die mit diesen Komplexen in enger Beziehung stehenden *Flächen vierter Ordnung und vierter Klasse mit 16 Doppelebenen und 16 Doppelpunkten* von Wichtigkeit ist.

Die statt der ursprünglichen Linienkoordinaten eingeführten neuen Veränderlichen stellen, gleich Null gesetzt, lineare Komplexe dar, welche in ausgezeichneter Weise zueinander gruppiert sind. In bezug auf dieselben ordnen sich die geraden Linien des Raumes zu Systemen von 32, die Ebenen und Punkte desselben zu Systemen von 16 Ebenen und 16 Punkten zusammen. Die Beziehung der 16 Ebenen und 16 Punkte eines solchen Systems zueinander ist dieselbe, wie die der 16 Doppelebenen und 16 Doppelpunkte jener Flächen vierter Ordnung und vierter Klasse.

Die fundamentale Bedeutung dieser linearen Komplexe für den Komplex zweiten Grades ist die, daß für alle Elemente, welche einander durch die linearen Komplexe zugeordnet werden, die Beziehung zu dem Komplexe zweiten Grades dieselbe ist. Ein Gleiches, wie für den Komplex zweiten Grades, gilt für die durch denselben bestimmte Fläche der vierten Ordnung und vierten Klasse. Es folgt hieraus eine Reihe von Theoremen sowohl für jene Komplexe als für diese Flächen.

Die algebraische Darstellung der bei diesen geometrischen Betrachtungen auftretenden Gebilde gestaltet sich sehr einfach. Insbesondere stellt sich die Schar von Komplexen zweiten Grades, welche zu derselben Fläche vierter Ordnung und vierter Klasse gehören, auf dieselbe Art durch einen willkürlichen Parameter dar, wie ein System konfokaler Kurven oder Flächen zweiten Grades.

Es sei noch bemerkt, daß wir von zwei einander reziprok entgegengesetzten Sätzen meistens nur den einen aufgenommen haben, ohne ausdrücklich auf den anderen hinzuweisen.

I.

Vorbereitende Betrachtungen.

1. Die Koordinaten zweier Punkte einer geraden Linie seien durch:

$$x_1, x_2, x_3, x_4,$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4,$$

die Koordinaten zweier Ebenen derselben geraden Linie durch:

$$u_1, u_2, u_3, u_4,$$
$$v_1, v_2, v_3, v_4$$

bezeichnet. Als Koordinaten der geraden Linie sind dann die Determinanten:

$$p_{ik} = x_i y_k - y_i x_k,$$

oder die Determinanten:

$$q_{ik} = u_i v_k - v_i u_k$$

zu betrachten. Dabei ist:

$$p_{ik} + p_{ki} = 0, \qquad q_{ik} + q_{ki} = 0.$$

Nach Plücker nennt man die Koordinaten p_{ik} *Strahlenkoordinaten*, die Koordinaten q_{ik} *Achsenkoordinaten*.

Unter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Zahlen 1, 2, 3, 4 in beliebiger Reihenfolge verstanden, hat man die folgenden Identitäten:

$$P \equiv p_{\alpha\beta} p_{\gamma\delta} + p_{\alpha\gamma} p_{\delta\beta} + p_{\alpha\delta} p_{\beta\gamma} = 0,$$
$$Q \equiv q_{\alpha\beta} q_{\gamma\delta} + q_{\alpha\gamma} q_{\delta\beta} + q_{\alpha\delta} q_{\beta\gamma} = 0,$$

die gemeinsam durch das Symbol:

$$R = 0$$

bezeichnet sein mögen.

In dieser Bezeichnung ist:

$$\varrho p_{ik} = \frac{\partial Q}{\partial q_{ik}}, \qquad q_{ik} = \varrho \frac{\partial P}{\partial p_{ik}},$$

wo ϱ einen Proportionalitätsfaktor bedeutet.

Eine gerade Linie, deren Koordinaten $p_{ik}^{(a)}, q_{ik}^{(a)}$ sind, werde im folgenden durch $(r^{(a)})$ bezeichnet. Statt $p_{ik}^{(a)}, q_{ik}^{(a)}$ werde in solchen Fällen, in welchen die Unterscheidung zwischen Strahlen- und Achsenkoordinaten unnötig ist, $r_{ik}^{(a)}$ geschrieben.

2. Diese Bezeichnungsweise vorausgesetzt, schreibt sich die Bedingung dafür, daß zwei gerade Linien (r), (r') sich schneiden, unter den folgenden gleichbedeutenden Formen:

$$\sum p_{ik} \frac{\partial P'}{\partial p'_{ik}} = 0, \qquad \sum p'_{ik} \frac{\partial P}{\partial p_{ik}} = 0,$$
$$\sum q_{ik} \frac{\partial Q'}{\partial q'_{ik}} = 0, \qquad \sum q'_{ik} \frac{\partial Q}{\partial q_{ik}} = 0,$$
$$\sum p_{ik}\, q'_{ik} = 0, \qquad \sum p'_{ik}\, q_{ik} = 0.$$

Drei gerade Linien (r), (r'), (r''), die sich gegenseitig schneiden, haben entweder einen Punkt oder eine Ebene gemeinsam. Je nachdem das eine oder das andere stattfindet, verschwindet der zweite oder der erste Faktor der vier Produkte:

$$\sum \pm p_{\alpha\beta} p'_{\alpha\gamma} p''_{\alpha\delta} \cdot \sum \pm p_{\gamma\delta} p'_{\delta\beta} p''_{\beta\gamma},$$

die sich auch unter einer der folgenden Formen darstellen lassen:

$$\sum \pm p_{\alpha\beta}\, p'_{\alpha\gamma}\, p''_{\alpha\delta} \cdot \sum \pm q_{\alpha\beta}\, q'_{\alpha\gamma}\, q''_{\alpha\delta},$$
$$\sum \pm q_{\gamma\delta}\, q'_{\delta\beta}\, q''_{\beta\gamma} \cdot \sum \pm q_{\alpha\beta}\, q'_{\alpha\gamma}\, q''_{\alpha\delta},$$
$$\sum \pm q_{\gamma\delta}\, q'_{\delta\beta}\, q''_{\beta\gamma} \cdot \sum \pm p_{\gamma\delta}\, p'_{\delta\beta}\, p''_{\beta\gamma}.$$

Sind (r), (r'), (r'') gerade Linien, welche innerhalb derselben Ebene durch einen Punkt hindurchgehen, so verschwinden sämtliche aus den Koordinaten derselben gebildete dreigliedrige Determinanten, und man kann setzen:

$$r_{ik} = \lambda r'_{ik} + \mu r''_{ik}.$$

Es seien (r'), (r''), (r''') gerade Linien, welche in einer Ebene liegen oder durch einen Punkt hindurchgehen. Dann sind die Koordinaten einer beliebigen geraden Linie (r), welche in derselben Ebene liegt, bezüglich durch denselben Punkt hindurchgeht, darstellbar durch

$$r_{ik} = \lambda r'_{ik} + \mu r''_{ik} + \nu r'''_{ik}.$$

3. Wenn in den Ausdruck R an Stelle der Koordinaten einer geraden Linie die in die Gleichung eines Komplexes ersten Grades eingehenden Konstanten gesetzt werden, entsteht ein im allgemeinen nicht verschwindender Ausdruck, welcher *die Invariante des Komplexes* genannt werden mag. Das Verschwinden derselben sagt aus, daß der Komplex die Gesamtheit aller geraden Linien umfaßt, welche eine feste gerade Linie schneiden, deren Koordinaten die Konstanten des Komplexes sind, daß der Komplex ein sogenannter *spezieller* Komplex ist.

Als *simultane Invariante zweier linearer Komplexe* sei der Ausdruck bezeichnet, welcher entsteht, wenn man in den bilinear geschriebenen Ausdruck R die Konstanten zweier linearer Komplexe einträgt.

Das Verschwinden der simultanen Invariante zweier Komplexe drückt eine Beziehung zwischen denselben aus, welche als *Involution* bezeichnet werden mag.

Sind beide lineare Komplexe spezielle, so ist das Verschwinden der simultanen Invariante die Bedingung dafür, daß sich die durch dieselben dargestellten geraden Linien schneiden. Ist nur einer der beiden Komplexe ein spezieller, so sagt das Verschwinden der simultanen Invariante aus, daß die durch denselben dargestellte gerade Linie dem anderen Komplexe angehört.

In dem Folgenden sei angenommen, daß keiner der zu betrachtenden Komplexe ein spezieller sei.

Alle geraden Linien, welche zwei linearen Komplexen gemeinschaftlich angehören, schneiden zwei feste gerade Linien, *die Direktrizen der durch die beiden Komplexe bestimmten Kongruenz*. Liegen die beiden Komplexe

in Involution, so sind diejenigen beiden Punkte, welche in ihnen einer beliebigen Ebene entsprechen, harmonisch zu denjenigen beiden Punkten, in welchen die Ebene von den beiden Direktrizen geschnitten wird. Läßt man eine Ebene sich um eine beiden Komplexen gemeinsame gerade Linie drehen, so sind die Punktepaare, welche der Ebene in ihren verschiedenen Lagen entsprechen, auf dieser geraden Linie in Involution. Einem jedem der beiden Punkte, welche durch die beiden Komplexe in einer beliebigen Ebene bestimmt werden, entspricht in denselben noch eine zweite Ebene. Diese Ebene ist für beide Punkte dieselbe.

Die Ebenen und Punkte des Raumes ordnen sich mit Bezug auf zwei lineare Komplexe, welche in Involution liegen, in Gruppen von zwei Ebenen und zwei auf der Durchschnittslinie derselben liegenden Punkten.

Mit Bezug auf drei gegenseitig in Involution liegende lineare Komplexe ordnen sich die Ebenen und Punkte des Raumes zu Tetraedern zusammen, welche sich in bezug auf die durch die drei linearen Komplexe bestimmte Fläche zweiten Grades konjugiert sind. Die drei Punkte, welche einer Seitenfläche eines solchen Tetraeders in den drei Komplexen entsprechen, sind die drei in derselben liegenden Eckpunkte des Tetraeders; umgekehrt sind die drei Ebenen, welche einem Eckpunkte entsprechen, die drei durch denselben hindurchgehenden Seitenflächen.

4. Die Linienkoordinaten r_{ik} stellen die mit gewissen (nicht vollständig willkürlichen) Konstanten multiplizierten Momente der zu bestimmenden geraden Linie mit Bezug auf die sechs Kanten des Koordinatentetraeders dar. Wir fragen nach der Bedeutung einer allgemeinen linearen Transformation der Linienkoordinaten.

Die Einführung linearer Funktionen der Linienkoordinaten an Stelle dieser Koordinaten kommt darauf hinaus, als Bestimmungsstücke der geraden Linie die mit willkürlichen Konstanten multiplizierten Momente derselben in bezug auf die sechs gegebene lineare Komplexe zu betrachten.[3])

Wenn man die durch eine lineare Substitution eingeführten neuen Veränderlichen in die zwischen den ursprünglichen Linienkoordinaten bestehende Identität einführt, erhält man einen Ausdruck des zweiten Grades in diesen Veränderlichen, der wieder mit R bezeichnet sein mag, dessen Verschwinden die notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, daß sechs, sonst beliebig gegebene Werte der Veränderlichen auf eine gerade Linie bezogen werden können.

Dieser Ausdruck R hat ganz dieselbe Bedeutung, wie der aus den früheren Koordinaten gebildete. So wie sich früher Strahlen- und Achsen-

[3]) [Die Formulierung des Textes ist bei diesem Wiederabdruck etwas abgeändert worden, entsprechend den am Anfang der nächstfolgenden Abhandlung III zugefügten Bemerkungen, auf die hier verwiesen sei. K.]

koordinaten entsprachen, entsprechen sich jetzt die neuen Koordinaten und die nach denselben genommenen partiellen Differentialquotienten von R.

Die Form von R gibt sofort Aufschluß über die Art und die gegenseitige Lage der für die Koordinatenbestimmung zugrunde gelegten Komplexe.

Insbesondere ist klar, daß, wenn R, wie es bei den ursprünglichen Koordinaten der Fall war, nur drei Glieder enthält, die neuen Veränderlichen wiederum die Momente der zu bestimmenden geraden Linie in bezug auf die Kanten eines Tetraeders sind.

II.

Das System der sechs Fundamentalkomplexe.

5. Die eingehends erwähnte Normal-Gleichungsform für Komplexe des zweiten Grades führt zur Untersuchung solcher linearer Funktionen der Linienkoordinaten, in welchen sich die Bedingungsgleichung $R = 0$ als Summe der mit passenden Konstanten multiplizierten Quadrate schreibt. Gleich Null gesetzt, stellen dieselben sechs lineare Komplexe dar, welche *die sechs Fundamentalkomplexe* genannt werden sollen.

Dieselben seien durch:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_4 = 0, \quad x_5 = 0, \quad x_6 = 0$$

bezeichnet und die Symbole x gleich mit solchen Konstanten multipliziert gedacht, daß sich die Bedingungsgleichung unter der folgenden Form schreibt:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0. \tag{1}$$

Das System dieser Veränderlichen hängt von 15 Konstanten ab.

Die Invariante eines linearen Komplexes:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_6 x_6 = 0$$

ist in demselben dargestellt durch:

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_6^2,$$

und die simultane Invariante zweier linearer Komplexe:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_6 x_6 = 0,$$
$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_6 x_6 = 0,$$

durch:

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_6 b_6.$$

Es folgt hieraus zunächst, daß die Multipla der x so gewählt sind, daß die Invarianten sämtlicher Fundamentalkomplexe der positiven Einheit gleich werden. Ferner folgt, daß die simultane Invariante zweier beliebiger Fundamentalkomplexe verschwindet.

Je zwei der sechs Fundamentalkomplexe liegen in Involution.

Die Bedingungsgleichung:

$$R = 0,$$

wie sie zwischen den ursprünglichen Linienkoordinaten stattfand, umfaßte die drei Produkte von jedesmal zwei der paarweise gruppierten sechs Veränderlichen. Wenn dieselbe also durch eine *reelle* lineare Substitution in der Art transformiert wird, daß sie nur die Quadrate der Variabeln enthält, so müssen sich unter diesen Quadraten gleich viele positive und negative finden. Indem ferner die Summe der Quadrate zweier konjugiert imaginärer Ausdrücke gleichwertig ist der Summe eines positiven und eines negativen reellen Quadrates, ergibt sich das Folgende[4]):

Es kann eine beliebige (gerade) Anzahl der sechs Fundamentalkomplexe imaginär sein.

Die Symbole x, welche reellen Fundamentalkomplexen entsprechen, sind so gewählt, daß die Hälfte von ihnen reelle, die andere Hälfte rein imaginäre Koeffizienten enthält.

Und hieraus:

Die reellen Fundamentalkomplexe sondern sich in zwei gleich zahlreiche Gruppen. Die Komplexe der einen Gruppe sind rechts-, die der anderen sind linksgewunden[5]).

Die sechs Fundamentalkomplexe mögen im folgenden einfach durch die Zahlen $1, 2, \ldots, 6$ bezeichnet sein, und es bleibe unberücksichtigt, ob sich unter denselben imaginäre finden oder nicht.

6. Die Direktrizen der Kongruenz der beiden Fundamentalkomplexe $(1, 2)$ haben offenbar als Koordinaten:

$$\varrho x_1 = 1, \quad \varrho x_2 = \pm i, \quad \varrho x_3 = 0, \quad \varrho x_4 = 0, \quad \varrho x_5 = 0, \quad \varrho x_6 = 0.$$

Die Direktrizen der Kongruenz zweier Fundamentalkomplexe gehören den übrigen vier Fundamentalkomplexen an.

Die Gesamtheit der geraden Linien, welche eine beliebige der beiden Direktrizen schneiden, ist dargestellt durch:

$$x_1^2 + x_2^2 = 0,$$

oder, was dasselbe ist, durch:

$$x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0.$$

Die sechs Fundamentalkomplexe bestimmen $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ lineare Kongruenzen, deren 30 Direktrizen dementsprechend in ausgezeichneter Weise gruppiert sind. Indem die Direktrizen der Kongruenz $(1, 2)$ den Kom-

[4]) [In der Darstellung des Textes ist nicht hinreichend klar zum Ausdruck gekommen, daß nur solche lineare Substitutionen betrachtet werden, bei denen unter den neu eingeführten Ausdrücken die konjugiert komplexen zu gleicher Zeit vorkommen.]

[5]) Plücker, Neue Geometrie. Nr. 47.

plexen 3, 4, 5, 6 angehören, werden sie von den 12 Direktrizen der $\frac{4\cdot 3}{2} = 6$ durch dieselben bestimmten Kongruenzen geschnitten.

Je zwei zusammengehörige der 30 Direktrizen werden von 12 der übrigen geschnitten.

Von den Direktrizen einer der drei Kongruenzen (1, 2), (3, 4), (5, 6) schneidet jede die Direktrizen der anderen beiden Kongruenzen.

Die Direktrizen solcher drei Kongruenzen, welche zusammen von sämtlichen sechs Fundamentalkomplexen abhängen, bilden die Kanten eines Tetraeders.

Hiermit in Übereinstimmung schreibt sich die Bedingungsgleichung

$$R = 0$$

in den folgenden Veränderlichen:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + ix_2, & y_3 &= x_3 + ix_4, & y_5 &= x_5 + ix_6, \\ y_2 &= x_1 - ix_2, & y_4 &= x_3 - ix_4, & y_6 &= x_5 - ix_6, \end{aligned}$$

welche, gleich Null gesetzt, die betreffenden Direktrizen darstellen, in der für die Kanten eines Tetraeders charakteristischen Form:

$$y_1 y_2 + y_3 y_4 + y_5 y_6 = 0.$$

Die Gesamtheit der geraden Linien, welche in einer Seitenfläche des Tetraeders liegen oder durch einen Eckpunkt desselben gehen, ist dargestellt durch:

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= 0, \\ x_3^2 + x_4^2 &= 0, \\ x_5^2 + x_6^2 &= 0. \end{aligned}$$

Indem sich sechs Elemente auf 15 verschiedene Weisen in drei Gruppen von zwei teilen lassen, bilden die 30 Direktrizen die Kanten von 15 Tetraedern. Diese Tetraeder mögen *die Fundamentaltetraeder* heißen. Die Eckpunkte und Seitenflächen dieser Tetraeder sind sämtlich verschieden.

Je zwei zusammengehörige Direktrizen gehören als gegenüberstehende Kanten dreien der Fundamentaltetraeder an. Die zwölf Direktrizen, welche die angenommenen beiden schneiden, sind die noch übrigen $3 \cdot 4$ Kanten dieser Tetraeder. Diese drei Tetraeder bestimmen auf jeder der beiden Direktrizen sechs paarweise zusammengehörige Punkte. Indem die Fundamentalkomplexe gegenseitig in Involution liegen, sind zwei beliebige der drei Paare gegeneinander harmonisch. Ein Gleiches gilt für die sechs Seitenflächen der Tetraeder, die sich nach einer beliebigen der beiden Direktrizen schneiden[6].

[6]) Es geht hieraus hervor, daß die drei Tetraeder, welche zwei gegenüberstehende Kanten gemein haben, nie zugleich reell sein können. Bezüglich der Realität der hier vorkommenden Gebilde ist überhaupt das Folgende zu bemerken. Die sechs

Mit Bezug auf ein beliebiges der 15 Fundamentaltetraeder teilen sich die vierzehn übrigen in zwei Gruppen von sechs und acht. Die Tetraeder der ersten Gruppe haben mit dem gegebenen zwei gegenüberstehende Kanten gemein, die der zweiten Gruppe nicht.

7. Die sechs Direktrizen (1, 2), (3, 4), (5, 6), welche ein Tetraeder bilden, haben die folgenden Koordinaten:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
(1, 2)	I	1	i	0	0	0	0
	II	1	$-i$	0	0	0	0
(3, 4)	III	0	0	1	i	0	0
	IV	0	0	1	$-i$	0	0
(5, 6)	V	0	0	0	0	1	i
	VI	0	0	0	0	1	$-i$.

Welche von drei sich schneidenden dieser Direktrizen einen Punkt, welche eine Ebene gemeinschaftlich haben, kann nur dann entschieden werden, wenn der explizite Ausdruck der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_6$ in den ursprünglichen Linienkoordinaten gegeben ist. Es mögen I, III, V durch einen Eckpunkt des Tetraeders gehen, dann liegen II, IV, VI in der gegenüberstehenden Seitenfläche. Ob drei sich gegenseitig schneidende gerade Linien (x, x', x'') einen Punkt oder eine Ebene gemeinschaftlich haben, bestimmt sich dann, gemäß dem Obigen, danach, ob der erste oder der zweite der folgenden beiden Ausdrücke verschwindet:

$$\begin{vmatrix} x_1 + ix_2 & x_3 + ix_4 & x_5 + ix_6 \\ x_1' + ix_2' & x_3' + ix_4' & x_5' + ix_6' \\ x_1'' + ix_2'' & x_3'' + ix_4'' & x_5'' + ix_6'' \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} x_1 - ix_2 & x_3 - ix_4 & x_5 - ix_6 \\ x_1' - ix_2' & x_3' - ix_4' & x_5' - ix_6' \\ x_1'' - ix_2'' & x_3'' - ix_4'' & x_5'' - ix_6'' \end{vmatrix}.$$

Es ist dabei gestattet, das Vorzeichen von i in zwei beliebigen Vertikalreihen gleichzeitig zu ändern.

Ähnliche Kriterien erhält man in bezug auf jedes der vierzehn übrigen Fundamentaltetraeder.

8. Durch einen jeden der 60 Eckpunkte der 15 Fundamentaltetraeder gehen außer den drei zugehörigen noch weitere 12 der 60 Seitenflächen, die in drei Gruppen von je vier gesondert sind, welche sich bezüglich nach

Fundamentalkomplexe sind entweder alle reell, oder es sind zwei, oder vier, oder alle imaginär. Diesen Annahmen entsprechend sind

18, 10, 6, 6

der 30 Direktrizen und

6, 2, 1, 1

der 15 Fundamentaltetraeder reell.

einer der drei durch den Eckpunkt hindurchgehenden Direktrizen schneiden. Eine jede derselben schneidet eine der drei zu dem Eckpunkte zugehörigen Seitenflächen in einer neuen geraden Linie. Der Punkt, in welchem dieselbe der dritten in dieser Seitenfläche liegenden Direktrix begegnet, ist einer der 59 weiteren Eckpunkte.

Eine derartige Linie ist die folgende:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline 0 & 0 & 1 & i & 1 & i \end{array}:$$

Dieselbe ist die Verbindungslinie der beiden Eckpunkte:

$$(x_1 + ix_2,\quad x_3 + ix_4,\quad x_5 + ix_6),$$
$$(x_1 - ix_2,\quad x_3 + ix_6,\quad x_5 + ix_4),$$

und die Durchschnittslinie der beiden Seitenebenen:

$$(x_1 - ix_2,\quad x_3 + ix_4,\quad x_5 + ix_6),$$
$$(x_1 + ix_2,\quad x_3 + ix_6,\quad x_5 + ix_4).$$

Solcher geraden Linien gehen durch den angenommenen Eckpunkt zwölf. Es gibt ihrer im ganzen

$$\frac{12 \cdot 60}{2} = 360.$$

Die 12 Seitenflächen, welche außer den drei zugehörigen durch einen Eckpunkt hindurchgehen und die in drei Büschel von vier verteilt sind, schneiden sich zu je drei nach 16 weiteren Linien, deren jede außer dem angenommenen Eckpunkte zwei weitere enthält. In der Tat, die gerade Linie:

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \hline 1 & i & 1 & i & 1 & i \end{array}$$

enthält die drei Eckpunkte:

$$(x_1 + ix_2,\quad x_3 + ix_4,\quad x_5 + ix_6),$$
$$(x_1 + ix_4,\quad x_3 + ix_6,\quad x_5 + ix_2),$$
$$(x_1 + ix_6,\quad x_3 + ix_2,\quad x_5 + ix_4),$$

und liegt in den drei Seitenflächen:

$$(x_1 + ix_2,\quad x_3 + ix_6,\quad x_5 + ix_4),$$
$$(x_1 + ix_4,\quad x_3 + ix_2,\quad x_5 + ix_6),$$
$$(x_1 + ix_6,\quad x_3 + ix_4,\quad x_5 + ix_2).$$

Solcher gerader Linien gibt es $\frac{16 \cdot 60}{3} = 320$.

In den vorstehenden Betrachtungen können überall die Worte Eckpunkt und Seitenfläche vertauscht werden.

Die 30 Direktrizen der 15 durch die 6 Fundamentalkomplexe bestimmten Kongruenzen sind die Kanten von 15 (Fundamental-) Tetraedern.

Durch jeden der 60 Eckpunkte der Fundamentaltetraeder gehen 15 Seitenflächen; in jeder der 60 Seitenflächen liegen 15 Eckpunkte.

Es gibt 360 gerade Linien, welche je zwei der 60 Eckpunkte der Fundamentaltetraeder enthalten. Dieselben geraden Linien bilden den Durchschnitt von je zwei der 60 Seitenflächen.

Es gibt 320 gerade Linien, auf welchen je drei der 60 Eckpunkte der Fundamentaltetraeder liegen. Nach denselben geraden Linien schneiden sich je drei der 60 Seitenflächen.

Die 30 Direktrizen der 15 durch die sechs Fundamentalkomplexe bestimmten Kongruenzen enthalten je sechs der 60 Eckpunkte und sind der Durchschnitt von je sechs der 60 Seitenflächen.

Die sechs Eckpunkte, sowie die sechs Seitenflächen gehören paarweise zusammen. Je zwei Paare sind zueinander harmonisch.

9. Je drei der Fundamentalkomplexe, beispielsweise 1, 2, 3, bestimmen eine Fläche des zweiten Grades vermöge der Linien ihrer einen Erzeugung. Die Direktrizen der Kongruenzen (2, 3), (3, 1), (1, 2) sind Linien zweiter Erzeugung. Indem diese Direktrizen den Komplexen 4, 5, 6 angehören, ist klar, daß die Komplexe 4, 5, 6 dieselbe Fläche zweiten Grades vermöge der Linien ihrer anderen Erzeugung bestimmen.

Die sechs Komplexe lassen sich auf $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{2} = 10$-fache Weise in zwei Gruppen von drei teilen. *Je zwei zusammengehörige Gruppen bestimmen dieselbe Fläche des zweiten Grades vermöge ihrer verschiedenen Erzeugungen.*

Die zehn so definierten Flächen mögen die zehn *Fundamentalflächen* heißen.

Je zwei zusammengehörige der 30 Direktrizen gehören vier der Fundamentalflächen als Erzeugende an. So liegt das Direktrizenpaar (1, 2) auf den Flächen (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6). In bezug auf die übrigen sechs Fundamentalflächen sind die Direktrizen (1, 2) einander konjugierte Polaren.

In bezug auf eins der Fundamentaltetraeder teilen sich die Fundamentalflächen in zwei Gruppen. Die sechs Flächen der einen Gruppe enthalten je vier der sechs Tetraederkanten, in bezug auf die Flächen der anderen Gruppe ist das Tetraeder sich selbst konjugiert.

Um eine der Fundamentalflächen, etwa $(1, 2, 3) \equiv (4, 5, 6)$, darzustellen, diene die Bedingung, welche ausspricht, daß eine gerade Linie die Fläche berührt, mit anderen Worten, die Komplexgleichung der Fläche[7]).

[7]) Sind f_1, f_2, f_3 drei lineare Komplexe, A_{11}, A_{22}, A_{33} ihre Invarianten, A_{12} usf. ihre simultanen Invarianten, so ist die Komplexgleichung des durch sie bestimmten Hyperboloids:

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & f_1 & f_2 & f_3 \\ f_1 & A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ f_2 & A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ f_3 & A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix}.$$

Dieselbe wird:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

oder, was offenbar dasselbe ist:

$$x_4^2 + x_5^2 + x_6^2 = 0.$$

10. In bezug auf die sechs Fundamentalkomplexe *gruppieren sich die geraden Linien des Raumes und die Ebenen und Punkte desselben zu in sich geschlossenen Systemen*, ähnlich wie dies mit den Ebenen und Punkten bei zwei oder drei in Involution liegenden Komplexen der Fall war.

Sei zunächst eine gerade Linie gegeben, deren Koordinaten sind:

$$a_1, a_2, \ldots, a_6.$$

So ist:

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_6^2 = 0.$$

Indem diese Relation bei willkürlicher Annahme der Vorzeichen der Koordinaten erfüllt bleibt, erhält man einer jeden der $2^5 = 32$ Zeichenkombinationen:

$$\pm a_1, \pm a_2, \ldots, \pm a_6$$

entsprechend eine gerade Linie. Die Beziehung der 32 geraden Linien zueinander ist offenbar eine gegenseitige.

Mit Bezug auf die sechs Fundamentalkomplexe gruppieren sich die geraden Linien des Raumes zu 32 zusammen.

Indem man sich aus dem Schema:

$$\left|\begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ \pm a_1 & \pm a_2 & \pm a_3 & \pm a_4 & \pm a_5 & \pm a_6 \end{array}\right|$$

die zweigliedrigen Determinanten gebildet und dieselben gleich Null gesetzt denkt, übersieht man sofort, daß von den 32 Linien

$2 \cdot 15$ mal 16 einem Komplexe,
$4 \cdot 20$ mal 8 einer Kongruenz,
$8 \cdot 15$ mal 4 einer Fläche zweiten Grades

angehören, wobei jede der 32 Linien auf 15 der Komplexe, auf 20 der Kongruenzen und auf 15 der Flächen zweiten Grades liegt.

Die 32 Linien teilen sich in zwei Gruppen von 16, je nachdem von ihren Koordinaten eine gerade oder eine ungerade Anzahl ein gleiches Zeichen besitzt. Wenn von einer geraden Linie einer der beiden Gruppen eine ebene Kurve erzeugt wird, geschieht ein Gleiches mit den übrigen 15 Linien derselben Gruppe; die 16 Linien der anderen Gruppe erzeugen Kegelflächen.

Gegen eine beliebige Linie der einen Gruppe sondern sich die der anderen Gruppe in solche, welche ihre konjugierten Polaren in bezug auf die sechs Fundamentalkomplexe, und in solche, welche ihre konjugierten

Polaren in bezug auf die zehn Fundamentalflächen sind. Die Koordinaten der ersteren sechs unterscheiden sich von den Koordinaten der angenommenen geraden Linie durch einen Zeichenwechsel; die der letzteren zehn durch drei.

Die Gleichung des 32. Grades, durch welche ein derartiges System von geraden Linien, wie das hier betrachtete, bestimmt wird, verlangt, nachdem die sechs Fundamentalkomplexe durch eine Gleichung des sechsten Grades gefunden worden sind, nur noch die Auflösung von Gleichungen des zweiten Grades.

Das System der 32 zusammengehörigen geraden Linien vereinfacht sich, sobald eine oder mehrere der Koordinaten a gleich Null sind. Insbesondere entsprechen sich diejenigen geraden Linien, welche zwei zusammengehörige der 30 Direktrizen schneiden, zu 8, diejenigen, welche Erzeugende einer der zehn Fundamentalflächen sind, zu 4, endlich die 30 Direktrizen selbst zu 2.

11. Sei die Gleichung der Projektion des in einer beliebig angenommenen Ebene dem Komplexe

$$x_k = 0$$

entsprechenden Punktes auf eine der Koordinatenebenen:

$$a_k u + b_k v + c_k w = 0.$$

Dann verschwindet, zufolge der Bedingungsgleichung:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_6^2 = 0$$

der Ausdruck

$$\sum_{1 \ldots 6} (a_k u + b_k v + c_k w)^2$$

identisch. Es verschwindet also auch die folgende Determinante:

$$\left|\begin{array}{cccccc} a_1^2 & b_1^2 & c_1^2 & b_1 c_1 & c_1 a_1 & a_1 b_1 \\ a_2^2 & b_2^2 & c_2^2 & b_2 c_2 & c_2 a_2 & a_2 b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_6^2 & b_6^2 & c_6^2 & b_6 c_6 & c_6 a_6 & a_6 b_6 \end{array}\right|,$$

was aussagt, daß die sechs Punkte $1, 2, \ldots, 6$ auf einem Kegelschnitt liegen.

Die sechs Punkte, welche einer beliebigen Ebene in den sechs Fundamentalkomplexen entsprechen, liegen auf einer Kurve der zweiten Ordnung.

Die sechs Ebenen, welche einem beliebigen Punkte in den sechs Fundamentalkomplexen entsprechen, umhüllen einen Kegel der zweiten Klasse.

Wenn die beliebig angenommene Ebene durch einen der 60 Eckpunkte der 15 Fundamentaltetraeder hindurchgeht, so wird das von den sechs, den Fundamentalkomplexen entsprechenden Punkten gebildete Sechseck ein Brianchonsches. Der Tetraedereckpunkt wird der Brianchonsche Punkt. Das Sechseck erhält zwei, bez. drei in gerader Linie liegende Brianchonsche Punkte, wenn die beliebig angenommene Ebene eine der 360, bez. der 320 zu dem System der Fundamentaltetraeder gehörigen geraden Linien enthält. Die Zahl der Brianchonschen Punkte wird vier, wenn die Ebene durch eine der 360 geraden Linien und eine dieselbe schneidende der 320 geraden Linien hindurchgelegt ist.

Wenn die beliebig anzunehmende Ebene eine der zehn Fundamentalflächen berührt, so liegen die sechs den Fundamentalkomplexen entsprechenden Punkte zu drei auf zwei geraden Linien: den beiden Erzeugenden der Fundamentalfläche, welche die Ebene enthält. Ist die Ebene durch eine der 30 Direktrizen hindurchgelegt, so rücken von den sechs Punkten vier auf die Direktrix, die anderen zwei fallen in den Durchschnittspunkt mit der zugehörigen Direktrix. Fällt endlich die Ebene mit einer der Seitenflächen der Fundamentaltetraeder zusammen, so rücken die sechs Punkte paarweise in die drei zusammengehörigen Tetraedereckpunkte.

12. Die sechs Punkte, welche einer gegebenen Ebene in den sechs Fundamentalkomplexen entsprechen, seien mit:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6$$

bezeichnet. Einem jeden dieser Punkte entsprechen außer der gegebenen fünf weitere Ebenen. Es gibt das, insofern die Ebene, welche 1 in x_1 entspricht, mit der Ebene zusammenfällt, die zu 2 in x_1 gehört, im ganzen 15 neue Ebenen, welche die gegebene nach den 15 Verbindungslinien der sechs Punkte unter sich schneiden. Die drei Ebenen $(2, 3)$, $(3, 1)$, $(1, 2)$ schneiden sich (vgl. Nr. 3) in dem Pole der gegebenen Ebene mit Bezug auf die Fundamentalfläche $(1, 2, 3)$. Indem diese Fläche mit der Fläche $(4, 5, 6)$ identisch ist, schneiden sich die Ebenen $(5, 6)$, $(6, 4)$, $(4, 5)$ in demselben Punkte. Die sechs Ebenen, welche diesem Punkte in den sechs Fundamentalkomplexen

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6$$

entsprechen, fallen mit den Ebenen:

$$(2, 3),\ (3, 1),\ (1, 2),\ (5, 6),\ (6, 4),\ (4, 5)$$

zusammen, welche in der Tat, wie dies aus der Betrachtung des Sechsecks 123456 hervorgeht, einen Kegel der zweiten Klasse umhüllen.

Mit Bezug auf die Fundamentalkomplexe gruppieren sich die Ebenen und Punkte des Raumes zu in sich geschlossenen Systemen von 16 Ebenen und 16 Punkten. In jeder der 16 Ebenen liegen sechs der 16 Punkte, durch jeden der 16 Punkte gehen sechs der 16 Ebenen. Die sechs Punkte in einer Ebene liegen auf einer Kurve der zweiten Ordnung, die sechs Ebenen durch einen Punkt umhüllen einen Kegel der zweiten Klasse.

Wenn eine der 16 Ebenen gegeben ist, findet man die 16 Punkte, indem man die ihr in den sechs Fundamentalkomplexen entsprechenden Punkte und die ihr in bezug auf die zehn Fundamentalflächen konjugierten Pole konstruiert.

Von der hier betrachteten Art ist das System der 16 Doppelebenen und 16 Doppelpunkte der Flächen vierter Ordnung und vierter Klasse, die Herr Kummer untersucht hat[*]).

Wenn eine von 32 in bezug auf die Fundamentalkomplexe zusammengehörigen geraden Linien in einer der 16 Ebenen eines solchen Systems liegt, so verteilen sich die 15 Linien derselben Gruppe auf die 15 weiteren Ebenen und die 16 Linien der anderen Gruppe auf die 16 Punkte. Berührt insbesondere die angenommene gerade Linie den in der betreffenden Ebene liegenden Kegelschnitt, so findet dasselbe bei den 15 Linien derselben Gruppe statt, und die 16 Linien der anderen Gruppe sind Seiten der von den 16 Punkten ausgehenden Kegel.

Die 32 zusammengehörigen Linien sind durch die Vorzeichen ihrer Koordinaten unterschieden. Es gibt diese Bemerkung unmittelbar die Bezeichnung derselben durch fünf Indizes, welche zwei verschiedene Werte annehmen können. Auf ähnliche Weise können die 16 Ebenen und 16 Punkte des hier betrachteten Systems bezeichnet werden. Die 16 Ebenen entsprechen den geraden Linien der einen, die 16 Punkte denen der anderen Gruppe. Es geht hieraus hervor, daß die Gleichung 16. Grades, welche die 16 Ebenen bestimmt, von der eben betrachteten Gleichung des 32. Grades nur dadurch verschieden ist, daß bei ihr eine Quadratwurzel als bekannt vorausgesetzt wird.

Wenn einer von den 16 Punkten des hier betrachteten Systems in einer der 16 Ebenen eines beliebigen ähnlichen Systems liegt, findet ein Gleiches für die übrigen 15 Punkte statt, und jede der 16 Ebenen enthält einen der 16 Punkte des zweiten Systems.

Die 16 Ebenen eines Systems schneiden sich nach $\frac{16 \cdot 15}{2} = 120$ geraden Linien, welche zugleich die Verbindungslinien der 16 Punkte sind. Dieselben sondern sich in 15 Gruppen von jedesmal acht. Die Linien einer Gruppe gehören denselben beiden Fundamentalkomplexen an und haben also die beiden entsprechenden Direktrizen zu gemeinschaftlichen Transversalen. Es gibt dies das Mittel, aus dem Systeme der 16 Ebenen und 16 Punkte die 30 Direktrizen und die 15 Fundamentaltetraeder zu konstruieren.

*) Monatsberichte der Berliner Akademie, 1864.

Außer in den 16 Punkten des Systems schneiden sich die 16 Ebenen desselben zu drei in 240 Punkten, welche zu sechs auf den 120 Durchschnittslinien liegen. Ebenso gibt es 240 Ebenen, welche drei der 16 Punkte des Systems enthalten. Sie schneiden sich zu sechs nach denselben 120 geraden Linien.

Wenn eine der 16 Ebenen des Systems gegen die sechs Fundamentalkomplexe eine ausgezeichnete Lage hat, findet ein Gleiches für die übrigen 15 Ebenen und die 16 Punkte statt. Besonders hervorzuheben ist dasjenige System, welches entsteht, wenn eine der Ebenen einen der 60 Eckpunkte der Fundamentaltetraeder enthält. Dann gehen die 16 Ebenen zu vier durch die Eckpunkte des fraglichen Tetraeders und die 16 Punkte liegen zu vier in den Seitenflächen desselben. Es ist das System das Singularitätensystem eines Tetraedroids[9]) geworden. Die Gleichung 16. Grades, welche die Ebenen des Systems bestimmt, ist hier algebraisch lösbar, indem dieselbe nur die Auflösung einer biquadratischen Gleichung und mehrerer quadratischer verlangt.

III.

Die Kummersche Fläche und ihr Zusammenhang mit den Komplexen zweiten Grades.

13. Als Gleichung des zu untersuchenden Komplexes zweiten Grades sei die folgende gegeben:

$$2) \qquad k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \ldots + k_6 x_6^2 = 0.$$

Dabei ist:

$$(1) \qquad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_6^2 = 0,$$

so daß der Komplex unverändert bleibt, wenn statt k_α allgemein geschrieben wird $k_\alpha + \lambda$. Die vier Konstanten, welche hiernach noch in der Gleichung (2) enthalten sind, geben mit den 15 Konstanten der Fundamentalkomplexe die 19 Konstanten des Komplexes zweiten Grades.

Die Gleichungsform (2) sagt aus, *daß der gegebene Komplex und alle von demselben unmittelbar abhängigen geometrischen Gebilde sich selbst mit Bezug auf das System der sechs Fundamentalkomplexe entsprechen*[10]).

Es gruppieren sich also die Linien des Komplexes in Systeme von 32. Jedesmal 16 Komplexkurven und 16 Komplexkegel gehören zusammen usf.

Aus diesem Satze leiten sich, unter Zugrundelegung der von Plücker

[9]) Cayley in Liouvilles Journal, 11 (1846). (Coll. Papers, Bd. I, 302–306.)

[10]) Dieses gegenseitige Entsprechen kann statt als durch die sechs Fundamentalkomplexe auch als durch die zehn Fundamentalflächen vermittelt angesehen werden.

entwickelten Eigenschaften der Komplexe des zweiten Grades[11]), die im folgenden aufgeführten Theoreme ab.

14. Diejenigen Punkte, deren Komplexkegel in ein Ebenenpaar zerfällt, die sogenannten *singulären Punkte*, bilden eine Fläche der vierten Ordnung und Klasse, mit 16 Doppelpunkten und 16 Doppelebenen. Dieselbe Fläche wird von den *singulären Ebenen* umhüllt, solchen Ebenen, deren Komplexkurve sich in das System zweier Punkte aufgelöst hat[12]).

Eine derartige Fläche soll im folgenden eine *Kummersche Fläche* genannt werden. In ihrer Beziehung zum Komplexe heiße sie seine *Singularitätenfläche*.

Die nächstfolgenden Betrachtungen untersuchen die Kummersche Fläche als solche, abgesehen von ihrer Beziehung zu dem gegebenen Komplexe.

Eine Kummersche Fläche entspricht sich selbst mit Bezug auf ein System von sechs Fundamentalkomplexen.

Die bezüglichen Fundamentalkomplexe[13]) seien jedesmal, nach wie vor, durch $x_1, x_2, \ldots, x_6$ bezeichnet.

Zur Bestimmung der Tangentialebenen, welche sich an eine gegebene Kummersche Fläche durch eine gerade Linie

$$a_1, a_2, \ldots, a_6$$

legen lassen, dient eine Gleichung des vierten Grades. Dieselbe kann nur die Quadrate der Koordinaten a enthalten[14]).... Es sind also die vier Tangentialebenen, welche durch eine beliebige der 32 geraden Linien:

$$\pm a_1, \pm a_2, \ldots, \pm a_6$$

hindurchgehen, alle durch dieselbe biquadratische Gleichung bestimmt.

[11]) Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Von Julius Plücker. Leipzig, B. G. Teubner, 1868, 1869.

[12]) Plücker, Neue Geometrie. Nr. 311, 320.

[13]) Für die Fresnelsche Wellenfläche, die sich aus dem Ellipsoid:

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1$$

ableitet, sind die Fundamentalkomplexe die folgenden:

$$\begin{aligned}
&(yz' - y'z) + a\sqrt{-1}\,(x - x') = 0, &\quad &(yz' - y'z) - a\sqrt{-1}\,(x - x') = 0,\\
&(zx' - z'x) + b\sqrt{-1}\,(y - y') = 0, &\quad &(zx' - z'x) - b\sqrt{-1}\,(y - y') = 0,\\
&(xy' - x'y) + c\sqrt{-1}\,(z - z') = 0, &\quad &(xy' - x'y) - c\sqrt{-1}\,(z - z') = 0.
\end{aligned}$$

[14]) [Diese Behauptung ist an sich richtig, war aber im Text nicht richtig begründet worden; die Begründung müßte aus den algebraischen Entwickelungen des Abschnittes IV mühsam abgeleitet werden, ist also hier weggelassen. — Ich hatte den Satz von der Gleichheit der anharmonischen Verhältnisse, auf den die Überlegung hinzielt, ursprünglich durch dieselbe Methode bewiesen, welche später Herr A. Voß in der Abhandlung: Über Komplexe und Kongruenzen, Math. Annalen, Bd. 9 (1876) entwickelt hat und die davon ausgeht, daß eine beliebige gerade Linie nach (8) bis (10), S. 79 einem (und sogar vier) Komplexen zweiten Grades angehört, die dieselbe Singulari-

Den vier Tangentialebenen, welche sich durch die gegebene gerade Linie an die Fläche legen lassen, sind die vier Durchschnittspunkte einer beliebigen der 16 Linien der anderen Gruppe mit der Fläche reziprok zugeordnet. Es folgt hieraus und aus dem Vorhergehenden, daß dieselbe Gleichung die durch eine beliebige gerade Linie gehenden Tangentialebenen und die auf derselben liegenden Durchschnittspunkte bestimmt.

Das anharmonische Verhältnis der vier Tangentialebenen, welche sich durch eine gerade Linie an eine Kummersche Fläche legen lassen, ist gleich dem anharmonischen Verhältnisse der vier Durchschnittspunkte derselben Linie mit der Fläche.

15. Es sei ein Punkt einer Kummerschen Fläche gegeben. Aus demselben leitet sich vermöge der sechs entsprechenden Fundamentalkomplexe ein System von 16 Punkten und 16 Ebenen ab. Die Punkte sind Punkte der Fläche, die Ebenen Ebenen derselben. Ebenso entspricht der Tangentialebene in dem gegebenen Punkte ein System von 16 Ebenen und 16 Punkten der Fläche. Die beiden Systeme stehen in der gegenseitigen Beziehung, daß in jeder Ebene des einen ein Punkt des anderen liegt, welcher der zugehörige Berührungspunkt ist. Es folgt hieraus, daß die sechs geraden Linien, nach welchen eine Ebene des einen Systems von den sechs dem zugehörigen Berührungspunkte in dem anderen Systeme entsprechenden Ebenen geschnitten wird, außer in dem allen gemeinsamen Punkte jede noch in einem derjenigen sechs Punkte berühren, welche der angenommenen Ebene in den Fundamentalkomplexen entsprechen. Es sind also diese Linien Doppeltangenten der Fläche. Somit ergeben sich die folgenden Sätze:

Nachdem die einer Kummerschen Fläche zugehörigen Fundamentalkomplexe durch eine Gleichung des sechsten Grades bestimmt worden sind, leiten sich aus den Koordinaten eines Punktes (einer Ebene) der Fläche die Koordinaten von 32 Punkten, 32 Ebenen und 96 Doppeltangenten derselben rational ab.

Die sechs Tangenten, welche sich von dem Berührungspunkte einer Ebene der Kummerschen Fläche an die in derselben liegende Durchschnittskurve ziehen lassen, berühren in den sechs auf einem Kegelschnitt gelegenen Punkten, welche der angenommenen Ebene in den sechs Fundamentalkomplexen entsprechen.

tätenfläche haben. In meiner Note: Über die Plückersche Komplexfläche (siehe Abhandlung XI dieser Ausgabe) habe ich einen anderen Beweis gegeben, der sich in einer mehr elementaren Weise an die von Plücker selbst gefundenen Eigenschaften der allgemeinen Komplexflächen anschließt. — Für die Auffindung des Satzes war im übrigen der Anlaß gewesen, daß v. Staudt ein ähnliches Theorem für das Tetraeder aufgestellt hatte und man das Tetraeder (als Inbegriff von vier Ebenen und vier Ecken) als äußerste Ausartung einer Kummerschen Fläche ansehen kann. K.]

Die 28 Doppeltangenten einer beliebigen ebenen Durchschnittskurve einer Kummerschen Fläche teilen sich in zwei Gruppen von 16 und 12. Die Doppeltangenten der ersten Gruppe sind der Durchschnitt der Ebene der Kurve mit den 16 Doppelebenen der Fläche. Die 12 Doppeltangenten der zweiten Gruppe sondern sich in Gruppen von zwei. Die sechs Punkte, in welchen sich bezüglich die Linien der verschiedenen Paare schneiden, sind die auf einem Kegelschnitt gelegenen sechs Punkte, welche der Ebene der Kurve in den sechs Fundamentalkomplexen entsprechen.

Die Doppeltangenten einer Kummerschen Fläche bilden sechs verschiedene Kongruenzen der zweiten Ordnung und Klasse, deren jede einem der sechs Fundamentalkomplexe angehört[15]).

16. Ausgezeichnet unter den in bezug auf die sechs Fundamentalkomplexe zusammengehörigen Systemen von 16 Punkten und 16 Ebenen der Kummerschen Fläche ist das System der 16 Doppelpunkte und 16 Doppelebenen derselben. An Stelle des zugehörigen zweiten Systems tritt in diesem Falle das System der 16 Berührungskegel und der 16 Berührungskurven. Die 96 Doppeltangenten werden durch die 96 Büschel solcher gerader Linien ersetzt, welche bezüglich innerhalb einer der Doppelebenen durch einen der Doppelpunkte hindurchgehen.

Die Bestimmung der Singularitäten einer Kummerschen Fläche hängt von der Auflösung einer Gleichung sechsten Grades und mehrerer quadratischer Gleichungen ab[16]).

Um die Fundamentaltetraeder aus dem Singularitätensystem einer Kummerschen Fläche zu finden, hat man diejenigen 30 geraden Linien zu konstruieren, welche acht der 120 Durchschnittslinien der 16 Doppelebenen schneiden.

Wenn außer den sechs Fundamentalkomplexen eine der Doppelebenen der Kummerschen Fläche bekannt ist, läßt sich die Fläche konstruieren[17]). Denn indem dann durch die Fundamentalkomplexe sämtliche 16 Doppelebenen und die Berührungskurven in ihnen gegeben sind, kennt man zur Konstruktion einer beliebigen ebenen Durchschnittskurve der Fläche 16 Doppeltangenten und die Berührungspunkte auf denselben.

Enthält die gegebene Doppelebene einen der 60 Eckpunkte der Fundamentaltetraeder, so wird die zugehörige Kummersche Fläche ein Tetraedroid.

Ein Tetraedroid ist dadurch charakterisiert, daß die sechs in einer

[15]) Vgl. Kummer. Abhandl. der Berl. Akad., 1866.

[16]) C. Jordan in Crelles Journal, Bd. 70 (1869).

[17]) Wenn man die Doppelebene durch eine derjenigen 320 geraden Linien hindurchlegt, welche drei der 60 Eckpunkte der 15 Fundamentaltetraeder enthalten, so erhält man eine Fläche, die dem Modelle entspricht, dessen Herr Kummer (Monatsberichte der Berl. Akad., 1864) Erwähnung tut.

Doppelebene desselben liegenden Doppelpunkte ein Brianchonsches Sechseck bilden.

Die Singularitäten eines Tetraedroids sind algebraisch bestimmbar.

17. Wir wenden uns zur Betrachtung der Komplexe zweiten Grades zurück.

Diejenigen geraden Linien, welche Durchschnittslinien zweier Ebenen sind, in welche sich ein Komplexkegel aufgelöst hat, oder, was auf dasselbe hinauskommt, diejenigen geraden Linien, welche Verbindungslinien zweier Punkte sind, in welche eine Komplexkurve zerfallen ist, sind die *singulären Linien* des Komplexes. Dieselben bilden eine Kongruenz der vierten Ordnung und Klasse. Die singulären Linien berühren die Singularitätenfläche des Komplexes. Der Berührungspunkt heißt *der zugeordnete singuläre Punkt*, die Berührungsebene *die zugeordnete singuläre Ebene*. Der Komplexkegel, dessen Mittelpunkt der zugeordnete singuläre Punkt ist, hat sich in die beiden Tangentialebenen der Singularitätenfläche aufgelöst, die außer der doppelt zu zählenden zugeordneten singulären Ebene durch die singuläre Linie hindurchgehen. Entsprechend ist die Komplexkurve in der zugeordneten singulären Ebene in das System derjenigen beiden Punkte zerfallen, welche der singulären Linie neben dem doppelt zu zählenden zugeordneten singulären Punkte mit der Singularitätenfläche gemein sind[18]).

Die Komplexkurve, welche in einer beliebigen Ebene liegt, berührt die Durchschnittskurve vierter Ordnung der Ebene mit der Singularitätenfläche in vier Punkten. Gemeinschaftliche Tangenten beider Kurven in diesen Punkten sind die vier in der Ebene liegenden singulären Linien[19]).

Welche unter den Tangenten der Singularitätenfläche in einem gegebenen Punkte derselben dem gegebenen Komplexe als singuläre Linie angehört, ist durch die Fläche selbst noch nicht bestimmt. Es kann eine aus der einfach unendlichen Anzahl der Tangenten willkürlich als singuläre Linie angenommen werden; dann läßt sich ein zugehöriger Komplex eindeutig bestimmen. Aus der zugeordneten singulären Ebene leitet sich vermöge der sechs Fundamentalkomplexe ein System von 16 singulären Ebenen ab. Sobald die beiden Punkte, in welche die Komplexkurve für die eine singuläre Ebene zerfallen ist, durch Auflösung einer quadratischen Gleichung bestimmt worden sind, sind die entsprechenden Punkte in den übrigen Ebenen bekannt. Sechs unter denjenigen Komplexlinien, welche durch einen der Schnittpunkte von drei der 16 Ebenen hindurchgehen, sind also gegeben und deshalb die Komplexkegel für diese Punkte linear konstruier-

[18]) Plücker, Neue Geometrie. Nr. 317.
[19]) Plücker, Neue Geometrie. Nr. 318.

bar. Indem diese Schnittpunkte zu sechs auf einer jeden der 120 Durchschnittslinien von zwei der 16 Ebenen liegen, kennt man die zu diesen Linien gehörigen Komplexflächen. Zur Konstruktion der in einer beliebigen Ebene liegenden Komplexkurve kann man also über 240 Tangenten verfügen.

Wenn eine Kummersche Fläche und eine dieselbe berührende gerade Linie gegeben ist, so kann man einen Komplex zweiten Grades eindeutig konstruieren, welcher die Fläche zur Singularitätenfläche und die gerade Linie zur singulären Linie hat.

Eine Kummersche Fläche ist die Singularitätenfläche für eine einfach unendliche Schar von Komplexen zweiten Grades.

Eine Kummersche Fläche hängt von 18 Konstanten ab[20]).

Wenn die gegebene gerade Linie eine Doppeltangente der Fläche ist, so artet der zugehörige Komplex in den doppelt zu zählenden linearen Fundamentalkomplex aus, welchem die Doppeltangente angehört.

Zu der Schar von Komplexen zweiten Grades, welche eine gegebene Kummersche Fläche zur Singularitätenfläche haben, gehören auch die doppelt zu zählenden sechs linearen Fundamentalkomplexe. Als singuläre Linien eines solchen Komplexes sind die ihm angehörigen Doppeltangenten der Fläche anzusehen.

18. Ausgezeichnet unter den singulären Linien des gegebenen Komplexes sind diejenigen, welche die Singularitätenfläche oskulieren. Die Tangenten im Berührungspunkte gehören sämtlich dem gegebenen Komplexe an.

Wenn eine Kummersche Fläche und eine dieselbe berührende gerade Linie gegeben ist, gibt es außer dem eben konstruierten noch zwei weitere Komplexe, welche die Fläche zur Singularitätenfläche haben und die gerade Linie (aber nicht als singuläre Linie) enthalten. Singuläre Linien in dem Berührungspunkte der gegebenen sind für diese Komplexe die beiden Haupttangenten in diesem Punkte.

Bei der Konstruktion eines solchen Komplexes sind zunächst die beiden Haupttangenten im Berührungspunkte durch eine quadratische Gleichung zu bestimmen. Die beiden Punkte, in welche sich die Komplexkurve innerhalb der zugeordneten singulären Ebene aufgelöst hat, sind dann linear gegeben.

Die Komplexkurve in einer beliebigen Ebene hat mit der in derselben Ebene liegenden Durchschnittskurve vierter Ordnung der Singularitätenfläche außer den vier doppelt zu zählenden singulären Linien noch $2 \cdot 4 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 16$ Tangenten gemein. Die Berührungspunkte derselben mit der Durchschnittskurve der Singularitätenfläche sind diejenigen Punkte, in welchen die angenommene Ebene von der Kurve solcher Punkte der Singu-

[20]) Es stimmt das mit der von Herrn Kummer gegebenen Zählung überein.

laritätenfläche geschnitten wird, in welchen die zugehörige singuläre Linie mit einer Haupttangente zusammenfällt.

Die Kurve der singulären Punkte, deren zugeordnete singuläre Linien die Singularitätenfläche oskulieren, ist von der 16. Ordnung.

19. Sei eine Kummersche Fläche und eine beliebige gerade Linie gegeben. Durch die gerade Linie gehen vier Ebenen der Fläche, und auf ihr liegen vier Punkte derselben. Die biquadratische Gleichung zur Bestimmung der vier Ebenen ist dieselbe, wie die zur Bestimmung der vier Punkte. Dementsprechend kann man die vier Ebenen den vier Punkten einzeln zuordnen, und zwar auf vierfache Weise. Nachdem über die Art der Zuordnung entschieden ist, ziehe man in einer der Ebenen durch den Berührungspunkt mit der Kummerschen Fläche und den zugeordneten Punkt eine gerade Linie. Derjenige Komplex, welcher die gegebene Kummersche Fläche zur Singularitätenfläche und die konstruierte gerade Linie zur singulären Linie hat, enthält offenbar die gegebene gerade Linie.

Es lassen sich vier Komplexe konstruieren, welche eine gegebene Kummersche Fläche zur Singularitätenfläche haben und die außerdem eine gegebene gerade Linie enthalten.

Die beiden auf der konstruierten singulären Linie liegenden Punkte bestimmen sich linear, indem der eine als Durchschnittspunkt der gegebenen geraden Linie mit der Fläche bekannt ist.

Wenn die gegebene gerade Linie die Singularitätenfläche berührt, fallen zwei von den vier vorstehend konstruierten Komplexen in denjenigen zusammen, der die gegebene Linie zur singulären hat.

Die Tangenten der Singularitätenfläche sind solche gerade Linien, für welche die biquadratische Gleichung, welche die vier einer gegebenen geraden Linie zugehörigen Komplexe bestimmt, eine doppelte Wurzel hat.

Die Komplexgleichung der Singularitätenfläche hat die Form einer Diskriminante.

20. Die einfach unendliche Schar der zu einer gegebenen Kummerschen Fläche gehörigen Komplexe zweiten Grades bestimmt in jeder Ebene des Raumes ein System von Kegelschnitten, welche die Durchschnittskurve vierter Ordnung der Kummerschen Fläche mit der Ebene viermal berühren. Das System ist von der vierten Klasse. Indem als Ausartungskegelschnitte die sechs den Fundamentalkomplexen entsprechenden Punkte mit ihrem Doppeltangentenpaare anzusehen sind, ist das System von der Ordnung $2 \cdot 4 - 6 = 2$.

Durch eine Kummersche Fläche wird in jeder Ebene des Raumes ein Kegelschnittsystem der vierten Klasse und zweiten Ordnung bestimmt.

21. Diejenigen Linien des Komplexes, welche innerhalb einer *Doppelebene* der Singularitätenfläche verlaufen, schneiden sich in einem Punkte

der Berührungskurve. Sie sind sämtlich singuläre Linien. Es kann dieser Punkt beliebig auf der Berührungskurve angenommen werden; dann ist ein zugehöriger Komplex linear bestimmt. Läßt man den Punkt in einen der sechs auf der Berührungskurve liegenden Doppelpunkte rücken, so artet der Komplex in denjenigen Fundamentalkomplex aus, welchem das durch den Doppelpunkt in der angenommenen Ebene gehende Büschel gerader Linien angehört. Auf ähnliche Weise entspricht jedem *Doppelpunkte* der Fläche eine Ebene, welche den Tangentialkegel im Doppelpunkte berührt[21]).

Die 16 Punkte und 16 Ebenen entsprechen einander in bezug auf die sechs Fundamentalkomplexe.

Im allgemeinen sind die Linien des gegebenen Komplexes keine Doppeltangenten der Singularitätenfläche. Es findet dies nur für diejenigen 96 Büschel von singulären Linien statt, welche innerhalb einer Doppelebene der Fläche durch einen Doppelpunkt gehen.

Diejenigen 16 singulären Linien, welche in einer Doppelebene der Singularitätenfläche liegen und die Berührungskurve der Doppelebene berühren, sind die einzigen Komplexlinien, welche die Singularitätenfläche vierpunktig berühren. Die 16 entsprechenden singulären Linien, welche durch die Doppelpunkte de. Singularitätenfläche gehen, sind die einzigen Komplexlinien, welche die dualistisch entgegengesetzte Eigenschaft besitzen.

22. Einer jeden geraden Linie entspricht in bezug auf einen Komplex zweiten Grades eine zweite gerade Linie als *Polare*. Dieselbe steht zu der ersten in der doppelten Beziehung, einmal, daß sie der geometrische Ort ist für die Pole der ersten geraden Linie mit Bezug auf alle Kurven, die in den durch sie hindurchgelegten Ebenen von Linien des Komplexes umhüllt werden, dann, daß sie umhüllt wird von den Polarebenen der ersten geraden Linie mit Bezug auf alle Kegel, die in den Punkten derselben von Linien des Komplexes gebildet werden. Diese Beziehung zwischen den beiden Linien ist indes keine gegenseitige. Abgesehen von den Linien des Komplexes, deren jede sich selbst als Polare konjugiert ist, gibt es nur eine endliche Anzahl solcher gerader Linien, die selbst wieder die Polaren ihrer Polaren sind[22]).

Die Polaren der Diagonalen des von den vier in einer beliebigen Ebene liegenden singulären Linien gebildeten Vierseits schneiden sich in einem Punkte. Dieser Punkt wird der *Pol* der Ebene mit Bezug auf den Komplex genannt. Derselbe fällt zusammen mit dem Pol der Ebene in bezug auf die Singularitätenfläche. — Auf ähnliche Weise entspricht jedem Punkte in bezug auf den Komplex eine *Polarebene*.

[21]) Plücker, Neue Geometrie. Nr. 321.
[22]) Plücker, Neue Geometrie. Nr. 299.

Der Pol einer singulären Ebene ist ihr Berührungspunkt mit der Singularitätenfläche, die Polarebene dieses Punktes ist wiederum die gegebene singuläre Ebene.

Aber im allgemeinen ist die Beziehung zwischen Ebene und Pol, Punkt und Polarebene keine gegenseitige. Es tritt das — abgesehen von den singulären Ebenen und Punkten — nur bei einer endlichen Anzahl von Ebenen und Punkten ein[23]).

23. Der gegebene Komplex des zweiten Grades werde auf ein beliebiges der 15 Fundamentaltetraeder bezogen. Dann nimmt seine Gleichung die folgende Form an[24]):

$$\sum a_{ik} r_{ik}^2 + 2\,A\,r_{\alpha\beta} r_{\gamma\delta} + 2\,B\,r_{\alpha\gamma} r_{\delta\beta} + 2\,C\,r_{\alpha\delta} r_{\beta\gamma} = 0,$$

wo r_{ik} Strahlen- oder Achsenkoordinaten bedeuten.

Wird die Gleichung des gegebenen Komplexes zweiten Grades in bezug auf eins der 15 Fundamentaltetraeder als Koordinatentetraeder geschrieben, so treten in derselben außer den Quadraten der Veränderlichen die Produkte von nur solchen Veränderlichen auf, welche sich auf gegenüberstehende Kanten des Tetraeders beziehen.

Es ist leicht zu sehen, daß diese Gleichungsform für die Fundamentaltetraeder charakteristisch ist. Man schließt weiter:

Wenn der gegebene Komplex auf ein beliebiges Koordinatentetraeder bezogen wird und in der entsprechenden Gleichung zwei Veränderliche, die sich auf gegenüberstehende Kanten des Koordinatentetraeders beziehen, außer als Quadrate nur in gegenseitiger Verbindung auftreten, so sind die betreffenden Kanten zwei zusammengehörige aus dem System der Fundamentaltetraeder.

Die vorstehende Gleichungsform zeigt, daß die gegenüberstehenden Kanten des zugrunde gelegten Tetraeders einander gegenseitig entsprechende Polaren in bezug auf den gegebenen Komplex sind.

Von den 30 Kanten der Fundamentaltetraeder entsprechen sich die zusammengehörigen in bezug auf den Komplex gegenseitig als Polaren.

Die 30 Kanten der Fundamentaltetraeder sind, abgesehen von den Linien des Komplexes, die einzigen geraden Linien, welche diese Eigenschaft besitzen.

Und hieraus schließt man:

Von den 60 Eckpunkten und 60 Seitenflächen der Fundamentaltetraeder entsprechen sich die zusammengehörigen gegenseitig in bezug auf den Komplex als Pol und Polarebene.

[23]) Plücker, Neue Geometrie. Nr. 328, 330, 337.
[24]) Vgl. Nr. 6.

Es gibt, abgesehen von den singulären Punkten und Ebenen, keine weiteren Punkte und Ebenen, die sich gegenseitig in bezug auf den Komplex zugeordnet sind.

Insofern das Verhältnis von Ebene und Pol, Punkt und Polarebene als durch die Singularitätenfläche vermittelt angesehen werden kann, lassen sich die vorstehenden beiden Sätze auch als Eigenschaften der Kummerschen Fläche aussprechen.

24. Ähnliche Untersuchungen, wie die vorstehenden, sind bereits in der Abhandlung über Komplexe zweiten Grades von Herrn Battaglini[25]) enthalten. Nur sind die Voraussetzungen, welche er zugrunde legt, nicht allgemein genug. Unter r_{ik} Strahlen- oder Achsenkoordinaten verstanden, gibt er dem Komplexe zweiten Grades die folgende Gleichung:

$$\sum a_{ik} r_{ik}^2 = 0,$$

welche drei Glieder weniger besitzt, als die letzt-vorangehende, in welcher der Komplex auf eins der Fundamentaltetraeder bezogen ist. In der Tat enthält sie nur 17 Konstanten, während der Komplex von 19 Konstanten abhängt. Dementsprechend verschwinden zwei der simultanen Invarianten, welche sich aus ihr und der zwischen den Linienkoordinaten bestehenden Bedingungsgleichung ableiten lassen.

Der Komplex, welchen Herr Battaglini untersucht, ist dadurch partikularisiert, daß für denselben die um eine passende Konstante vermehrten Größen $k_1, k_2, \ldots, k_6$ einander entgegengesetzt gleich werden. Infolgedessen ist eins der Fundamentaltetraeder, dasselbe, auf welches der Komplex in seiner vereinfachten Gleichung bezogen ist, vor den übrigen ausgezeichnet, und die Singularitätenfläche wird ein Tetraedroid, welches zu diesem Tetraeder gehört. (Nr. 16.)

IV.

Algebraische Darstellung.

25. Der gegebene Komplex sei, wie oben, durch die Gleichung bestimmt:

(2) $$k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \ldots + k_6 x_6^2 = 0,$$

wo:

(1) $$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_6^2 = 0.$$

Vermöge der Gleichung (1) ist es gestattet, die Größen k um eine

[25]) Atti della Reale Accademia di Napoli, 3 (1866), sowie Giornale di Matematiche, Napoli, Bd. 6 (1868).

beliebige Konstante wachsen zu lassen, ohne daß der Komplex geändert wird.

Die *singulären Linien* des Komplexes sind alsdann dargestellt[26] durch (1), (2) und die folgende Gleichung:

$$k_1^2 x_1^2 + k_2^2 x_2^2 + \dots + k_6^2 x_6^2 = 0. \tag{3}$$

Sei unter (x) eine beliebige singuläre Linie verstanden, so sind die Koordinaten (y) einer derjenigen geraden Linien, welche innerhalb der (x) zugeordneten singulären Ebene durch den zugehörigen singulären Punkt gehen, von der folgenden Form:

$$\varrho y_\alpha = (k_\alpha + \sigma) x_\alpha, \tag{4}$$

wo ϱ einen Proportionalitätsfaktor, σ eine Konstante bedeutet[27]. Die durch (4) dargestellten geraden Linien mögen die *zugeordneten* der singulären Linie (x) heißen. Die Gesamtheit der zugeordneten Linien aller singulären Linien fällt mit der Gesamtheit der Tangenten der Singularitätenfläche zusammen.

Wenn die singuläre Linie (x) so bestimmt wird, daß die zugeordneten Linien dem gegebenen Komplexe (2) angehören, so oskuliert sie die Singularitätenfläche. Man findet also zur Darstellung *der oskulierenden singulären Linien* außer (1), (2), (3) die Gleichung:

$$k_1^3 x_1^2 + k_2^3 x_2^2 + \dots + k_6^3 x_6^2 = 0. \tag{5}$$

Die von den oskulierenden singulären Linien gebildete Linienfläche ist von der 16. Ordnung und 16. Klasse.

Die 32 *ausgezeichneten singulären Linien*, welche bezüglich in einer der Doppelebenen der Singularitätenfläche liegen und die in derselben enthaltene Berührungskurve berühren, oder durch einen der Doppelpunkte der Singularitätenfläche gehen und Erzeugende des Tangentialkegels in demselben sind, sind durch die Bedingung bestimmt, daß ihre zugeordneten singulären Linien selbst wieder singuläre Linien sind. Ihre Koordinaten genügen also außer den Gleichungen (1), (2), (3), (5) auch noch der folgenden Gleichung:

$$k_1^4 x_1^2 + k_2^4 x_2^2 + \dots + k_6^4 x_6^2 = 0. \tag{6}$$

Durch Auflösung findet man:

$$\varrho x_1^2 = \frac{1}{(k_2 - k_1)(k_3 - k_1)\dots(k_6 - k_1)} \text{ usw.} \tag{7}$$

26. Wenn $x_1, x_2, \dots, x_6$ und σ willkürliche Parameter bezeichnen, welche den Gleichungen (1), (2), (3) Genüge leisten, so ist eine beliebige

[26] Plücker, Neue Geometrie. Nr. 300.
[27] Plücker, Neue Geometrie. Ebenda.

der Tangenten der Singularitätenfläche durch die Gleichung (4) gegeben. Durch Elimination von $x_1, x_2, \dots, x_6$ ergibt sich:

$$y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_6^2 = 0, \tag{8}$$

$$\frac{y_1^2}{k_1+\sigma} + \frac{y_2^2}{k_2+\sigma} + \dots + \frac{y_6^2}{k_6+\sigma} = 0, \tag{9}$$

$$\frac{y_1^2}{(k_1+\sigma)^2} + \frac{y_2^2}{(k_2+\sigma)^2} + \dots + \frac{y_6^2}{(k_6+\sigma)^2} = 0. \tag{10}$$

Die Gleichung (9) ist eine Gleichung vierten Grades zur Bestimmung von σ. Die Gleichung (10) sagt aus, daß der nach σ genommene Differentialquotient der Gleichung (9) verschwinde.

Die Komplexgleichung der Singularitätenfläche ist die nach σ genommene Diskriminante der Gleichung (9).

Wie das sein muß, wird diese Komplexgleichung vom 12. Grade.

Unter σ eine willkürliche Größe verstanden, stellt die Gleichung (9) einen Komplex des zweiten Grades dar. Derselbe hat mit dem gegebenen (2) die Singularitätenfläche gemein. Denn das System der Gleichungen (8), (9), (10) bleibt ungeändert, wenn k_α allgemein durch $\frac{1}{k_\alpha + \sigma}$ ersetzt wird.

Die Gleichung (9) *stellt das zu der Singularitätenfläche des gegebenen Komplexes zugehörige System von Komplexen zweiten Grades dar.*

Die Gleichung (9) ist durchaus analog den Gleichungen, welche bei der Bestimmung konfokaler Kurven oder Flächen zweiten Grades auftreten.

Wenn (y) eine gegebene gerade Linie bedeutet, bestimmt die Gleichung (9) vier zugehörige Werte von σ. Von denselben werden zwei einander gleich, wenn (y) eine Tangente der Singularitätenfläche ist.

Die *Haupttangenten* der Singularitätenfläche sind dadurch charakterisiert, daß drei Wurzeln der Gleichung (9) gleich werden; sie sind also durch (8), (9), (10) und die folgende Gleichung gegeben:

$$\frac{y_1^2}{(k_1+\sigma)^3} + \frac{y_2^2}{(k_2+\sigma)^3} + \dots + \frac{y_6^2}{(k_6+\sigma)^3} = 0. \tag{11}$$

Endlich sind diejenigen geraden Linien, welche die Berührungskurven in den Doppelebenen der Singularitätenfläche umhüllen, bezüglich die Berührungskegel in den Doppelpunkten derselben erzeugen, durch (8), (9), (10), (11) und die folgende Gleichung bestimmt:

$$\frac{y_1^2}{(k_1+\sigma)^4} + \frac{y_2^2}{(k_2+\sigma)^4} + \dots + \frac{y_6^2}{(k_6+\sigma)^4} = 0. \tag{12}$$

Sei irgendeinem Werte von σ entsprechend das System der Gleichungen (8), (9), (10), (11), (12) aufgelöst. Die in dem entsprechenden Komplexe (9) den so bestimmten geraden Linien zugeordneten Linien sind selbst wieder singuläre Linien. Ihre zugeordneten Linien bilden *die Ge-*

samtheit der in den Doppelebenen der Singularitätenfläche liegenden und der durch die Doppelpunkte derselben hindurchgehenden geraden Linien. Die Koordinaten einer solchen geraden Linie lassen sich also unter der Form schreiben:

$$\varrho x_\alpha = \left(\lambda + \frac{\mu}{k_\alpha + \sigma} + \frac{\nu}{(k_\alpha + \sigma)^2}\right) y_\alpha, \tag{13}$$

wo y_α eine Lösung der Gleichungen (8), (9), (10), (11), (12) ist. Diese Form bleibt unverändert, welchen Wert man σ erteilen mag.

Es erübrigt, die *Doppeltangenten* der Singularitätenfläche zu bestimmen. Für die von denselben gebildeten sechs Kongruenzen ergibt sich aus (9) und (10), indem σ der Reihe nach $= -k_1$, $= -k_2$ usw. gesetzt wird:

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 = 0, \quad \dfrac{y_2^2}{k_2 - k_1} + \cdots + \dfrac{y_6^2}{k_6 - k_1} = 0, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ y_6 = 0, \quad \dfrac{y_1^2}{k_1 - k_6} + \cdots + \dfrac{y_5^2}{k_5 - k_6} = 0. \end{array}\right. \tag{14}$$

Auf dieselben Gleichungen kommt man aus (4), wenn man $\sigma = -k_1$, $= -k_2$ usw. setzt und hierauf x_α aus (1), (2), (3) eliminiert.

Die bei den vorstehenden Betrachtungen vorausgesetzte Umformung der Komplexgleichung ist in vielen Fällen nicht möglich. Unter die hier ausgeschlossenen Komplexe gehört auch der von Herrn Th. Reye betrachtete, dessen Linien der Durchschnitt entsprechender Ebenen zweier kollinearer räumlicher Systeme sind[28]). Derartige Komplexe sind durch das Auftreten von Doppellinien, Ausnahmepunkten und Ausnahmeebenen[29]) ausgezeichnet. Eine Übersicht über die bei ihnen zu unterscheidenden Fälle denke ich bei nächster Gelegenheit zu geben.

[Vielleicht ist es nützlich, aus den Formeln des Abschnittes IV noch folgende Regeln zu abstrahieren:

Während der einzelne Komplex $\sum k_i x_i^2$ ungeändert bleibt, wenn man für die k_i irgendwelche $k_i' = a k_i + b$ setzt, wird die ganze Komplexschar und damit die zu ihr gehörige Kummersche Fläche erhalten bleiben, wenn man die k_i' gleich irgendwelcher linearer Funktion der k_i setzt: $k_i' = \frac{\alpha k_i + \beta}{\gamma k_i + \delta}$. K.]

Göttingen, 14. Juni 1869.

[28]) Reye, Die Geometrie der Lage. Hannover, C. Rümpler, 1868.
[29]) Plücker, Neue Geometrie. Nr. 313.

III. Die allgemeine lineare Transformation der Linienkoordinaten.

[Math. Annalen, Bd. 2 (1870).]

Die Bedeutung der Linienkoordinaten ist zunächst in ihrer steten Verbindung mit den Punktkoordinaten einerseits und den Ebenenkoordinaten andererseits zu suchen. Dem entsprechend stellen sich die Linienkoordinaten dar als die Determinanten aus den Koordinaten zweier Punkte oder zweier Ebenen. Indessen scheint es, als wenn der Fortgang der allgemeinen Theorie es wünschenswert mache, die Linienkoordinaten unabhängig von dieser Beziehung als selbständige Veränderliche zu betrachten. Dieselben haben alsdann eine Bedingungsgleichung zweiten Grades zu erfüllen, welche eine Identität ist, sobald wir zu dem Ausdrucke der Linienkoordinaten in den Koordinaten zweier Punkte oder zweier Ebenen zurückgehen. Die Theorie der Linienkomplexe fällt mit der Theorie der simultanen Formen der Komplexgleichung und dieser Bedingungsgleichung zusammen.

Die nächste hier entstehende Frage ist die nach der geometrischen Bedeutung der allgemeinen linearen Transformation der Linienkoordinaten. Ich erledige dieselbe in der folgenden Notiz durch eine entsprechende allgemeinere Definition der Linienkoordinaten, bei welcher ich, wie dies bereits Herr Zeuthen getan hat[1]), von *dem Moment zweier gerader Linien in bezug aufeinander* als einfacher Maßbestimmung ausgehe. Überdies betrachte ich als bekannt *den Begriff des linearen Komplexes*, sowie *den der involutorischen Lage zweier solcher Komplexe*[2]).

1. [Vorbemerkung[3]). Da Moment ein metrischer Begriff ist, wird es gut sein, zunächst von gewöhnlichen rechtwinkligen Punktkoordinaten x, y, z auszugehen, also die Linienkoordinaten p_{ik} so zu definieren: $p_{12} = x - x', \ldots$, $p_{34} = yz' - y'z, \ldots$ Das Moment zweier Geraden p und p' drückt sich dann in bekannter Weise durch die Formeln aus:

$$M = \frac{p_{12}p'_{34} + p_{13}p'_{42} + p_{14}p'_{23} + p_{34}p'_{12} + p_{42}p'_{13} + p_{23}p'_{14}}{\sqrt{p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{14}^2}\,\sqrt{p'^2_{12} + p'^2_{13} + p'^2_{14}}}, \tag{a}$$

[1]) Math. Annalen, Bd. 1, S. 432.
[2]) Vgl. Math. Annalen, Bd. 2, S. 201 (siehe Abh. II dieser Ausgabe, S. 56).
[3]) [Erst in dieser Ausgabe zur Richtigstellung bez. Klarstellung aller Einzelheiten eingefügt, unter gleichzeitiger Änderung einiger Stellen in Nr. 1. K.]

(wo im Nenner die Ausdrücke stehen, welche verschwinden, wenn p bez. p' den Kugelkreis schneidet). Der Zähler von M gibt, seinerseits gleich Null gesetzt, die Bedingung dafür, daß die Gerade p dem „speziellen“ linearen Komplex angehört, dessen sämtliche Gerade p' schneiden. Schreiben wir dementsprechend die Gleichung eines allgemeinen linearen Komplexes

$$\text{(b)} \qquad 0 = p_{12}a_{34} + p_{13}a_{42} + p_{14}a_{23} + p_{34}a_{12} + p_{42}a_{13} + p_{23}a_{14},$$

so ist es natürlich, *den folgenden Ausdruck:*

$$\text{(c)} \qquad M' = \frac{p_{12}a_{34} + p_{13}a_{42} + p_{14}a_{23} + p_{34}a_{12} + p_{42}a_{13} + p_{23}a_{14}}{\sqrt{p_{12}^2 + p_{13}^2 + p_{14}^2}\ \sqrt{a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2}}$$

als Moment der Geraden p in bezug auf den linearen Komplex a zu bezeichnen, überhaupt aber als Moment zweier linearer Komplexe a, a' in bezug aufeinander:

$$\text{(d)} \qquad M'' = \frac{a_{12}a'_{34} + a_{13}a'_{42} + a_{14}a'_{23} + a_{34}a'_{12} + a_{42}a'_{13} + a_{23}a'_{14}}{\sqrt{a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{14}^2}\ \sqrt{a'^2_{12} + a'^2_{13} + a'^2_{14}}}.$$

Läßt man hier a mit a' zusammenfallen, so hat man das, was Plücker den *Parameter* K des bez. Komplexes nannte, mit 2 multipliziert.

Nun findet man für M'' durch geschickte Partikularisierung des Koordinatensystems leicht folgende geometrische Definition:

$$\text{(e)} \qquad M'' = \Delta \sin\varphi + (K + K')\cos\varphi,$$

unter K, K' die Parameter der linearen Komplexe, unter Δ den Abstand ihrer Hauptachsen, unter φ deren gegenseitige Neigung verstanden (wo $\Delta \sin\varphi$ natürlich das Moment der beiden Hauptachsen in bezug aufeinander bedeutet). Danach ist es klar, was der Ausdruck M' (c) bedeutet; man hat in (e) nur K' gleich 0 zu setzen.]

Dies vorausgesetzt, seien nun sechs lineare Komplexe gegeben, die mit den Symbolen $X_1, X_2, \ldots, X_6$ bezeichnet sein mögen. Über ihre gegenseitige Lage mache ich nur die Voraussetzung, daß es keinen linearen Komplex gibt, der mit sämtlichen sechs zugleich in Involution liegt ... *Die relativen Werte der mit gegebenen Konstanten multiplizierten Momente einer geraden Linie in bezug auf diese (Komplexe) betrachte ich als die homogenen Koordinaten derselben.*

Dieselben seien durch $x_1, x_2, \ldots, x_6$ bezeichnet. Damit die gerade Linie einem der Komplexe X angehöre, muß die betreffende Koordinate verschwinden. $x = 0$ ist also die Gleichung des Komplexes X.

Einem beliebig gegebenen Wertsysteme der x entspricht im allgemeinen keine gerade Linie. Damit dies stattfinde, müssen die x eine Bedingungsgleichung des zweiten Grades erfüllen:

$$f \equiv a_x^2 = 0,$$

in welcher die a Konstanten sind. Aus der Form dieser Gleichung wird es erlaubt sein, auf die Art und die gegenseitige Lage der zugrunde gelegten sechs linearen Komplexe X zu schließen.

Neben die hier gegebene Koordinatenbestimmung stellt sich sofort eine zweite. Wir erhalten dieselbe, wenn wir die halben nach den einzelnen x genommenen partiellen Differentialquotienten von f als neue Veränderliche $u_1, u_2, \ldots, u_6$ einführen. Dieselben sind proportional den mit passenden Konstanten multiplizierten Momenten der geraden Linie in bezug auf sechs lineare Komplexe $U_1, U_2, \ldots, U_6$, welche bezüglich durch $u = 0$ dargestellt werden.

Indem wir die u an Stelle der x in f einführen, erhalten wir eine Form:

$$\varphi \equiv u_\alpha^2 \equiv (abcdeu)^2,$$

deren Verschwinden die Bedingung ist, damit einem gegebenen Wertsysteme der u eine gerade Linie entspricht.

Dabei ist:

$$f = \varphi = u_x.$$

2. Die Koordinaten zweier gegebener gerader Linien seien, in der zwiefachen Koordinatenbestimmung, bezüglich x, y und u, v. Wir bilden uns den Ausdruck:

$$u_y = v_x \equiv a_x a_y \equiv u_\alpha v_\alpha.$$

Derselbe stellt, bis auf leicht anzugebende Faktoren, das Moment der beiden geraden Linien in bezug aufeinander dar. Die Gleichung:

$$u_y = v_x \equiv a_x a_y \equiv u_\alpha v_\alpha = 0$$

vertritt also, wenn wir in ihr die y, v als fest, die x, u als veränderlich betrachten, die Gesamtheit derjenigen Linien (x, u), welche eine gegebene Gerade (y, v) schneiden.

Hiernach entspricht die doppelte Koordinatenbestimmung, x und u, der zweifachen Bedeutung, in welcher die gerade Linie in der vorstehenden Gleichung — sowie überhaupt in den hier anzustellenden Betrachtungen — auftritt. Das eine Mal ist die gerade Linie Raumelement, das andere Mal stellt sie die Gesamtheit der sie schneidenden geraden Linien dar. Der ersten Vorstellung entsprechen die Koordinaten x, der zweiten die Koordinaten u, oder umgekehrt, je nachdem wir bei ihrer Bestimmung von den Komplexen X oder den Komplexen U ausgehen.

3. Wenn wir in die vorstehende Gleichung an Stelle von y, v beliebige Größen setzen (welche nicht mehr der Gleichung

$$f = 0, \quad \varphi = 0$$

zu genügen brauchen), stellt dieselbe einen linearen Komplex dar. Die Größen y, v bezeichne ich *als die Koordinaten dieses Komplexes.*

Dadurch, daß man diese Koordinaten in f, φ einführt, entsteht ein Ausdruck, den ich als *Invariante* des Komplexes bezeichnet habe[4]). Bis auf leicht zu bestimmende Faktoren ist die Invariante gleich dem Parameter[5]) des Komplexes. Das Verschwinden der Invariante gibt an, daß der Komplex ein spezieller Komplex ist.

Als *simultane Invariante* zweier linearer Komplexe (x, u) und (y, v) habe ich den Ausdruck bezeichnet[6]):

$$u_y \equiv v_x \equiv a_x a_y \equiv u_\alpha v_\alpha .$$

Derselbe hat die folgende geometrische Bedeutung. Seien die Parameter der beiden Komplexe bezüglich K und K', der Abstand ihrer Hauptachsen Δ, die gegenseitige Neigung derselben φ, so ist die simultane Invariante bis auf leicht angebbare Faktoren:

$$= \Delta \sin \varphi + (K + K') \cos \varphi .$$

Diese letztere Größe soll *das Moment der beiden linearen Komplexe in bezug aufeinander* genannt werden. [Vgl. Vorbemerkung in Nr. 1.]

Das Verschwinden der simultanen Invariante zweier Komplexe sagt aus, daß die beiden Komplexe in Involution liegen.

Für die simultanen Invarianten eines gegebenen Komplexes mit den Komplexen X bezüglich U finden wir seine betreffenden Koordinaten. *Als Koordinaten eines Komplexes ersten Grades sind die relativen Werte der mit gegebenen Konstanten multiplizierten Momente desselben mit Bezug auf die sechs gegebenen Komplexe anzusehen.*

4. Indem wir den Variabeln in der Gleichung eines Komplexes unbeschränkte Veränderlichkeit erteilen, gelangen wir, nach dem Vorstehenden, *zu einer zweifachen Auffassung eines linearen Komplexes.* Das eine Mal ist der lineare Komplex Element, das andere Mal Vertreter der Gesamtheit der mit ihm in Involution liegenden linearen Komplexe.

Die bei dieser Anschauung zunächst in Betracht kommenden Gebilde sind diejenigen, welche durch

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$$

lineare Gleichungen zwischen den Komplexkoordinaten definiert werden.

[4]) Math. Annalen, Bd. 2, S. 201. [Siehe Abh. II dieser Ausgabe, S. 56.] Wenn man in f, φ bezw. die nach den einzelnen u, x genommenen partiellen Differentialquotienten irgendeiner Komplexgleichung an Stelle der Variabeln einsetzt, entsteht ein Ausdruck, welcher, gleich Null gesetzt, denjenigen kovarianten Komplex darstellt, der mit dem gegebenen die singulären Linien desselben bestimmt. (Plücker, Neue Geometrie, S. 296.)

[5]) Plücker, Neue Geometrie. S. 38.

[6]) Math. Annalen a. a. O. [Siehe Abh. II dieser Ausgabe.]

Mögen für diese Koordinaten zunächst die X gewählt sein. Dann erhält man dieselben Gebilde bezüglich durch:

$$5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1$$

Gleichungen zwischen den u bestimmt. Dem entspricht eine doppelte Auffassung der dargestellten Gebilde. Wie sich dieselbe bei den Endgliedern der vorstehenden zwei Reihen $(1, 5)$, $(5, 1)$, die beide lineare Komplexe sind, gestaltet, ist bereits erörtert. Bei $(2, 4)$, $(4, 2)$, welche beide Kongruenzen sind, kommt dieselbe, wenn wir uns auf die Betrachtung spezieller Komplexe beschränken, darauf hinaus, als eine lineare Kongruenz entweder die Gesamtheit der geraden Linien, welche zwei gegebene schneiden, oder solche zwei gegebene gerade Linien selbst zu betrachten. In der doppelten Darstellungsweise von $(3, 3)$ endlich ist die doppelte Erzeugung der Flächen zweiten Grades durch gerade Linien ausgesprochen.

5. Nach diesen Erörterungen ergibt sich für das hier zugrunde gelegte Koordinatensystem der X und U das Folgende.

Die Koordinaten von X_1 in dem Systeme der U, sowie die von U_1 in dem Systeme der X, sind:

$$1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0 .$$

Es sind also die U diejenigen sechs Komplexe, welche mit jedesmal fünf der Komplexe X in Involution liegen. Diese Beziehung zwischen den X und U ist eine gegenseitige.

Für die Koordinaten von X_1 in dem System der X finden wir:

$$a_{11},\ a_{12},\ a_{13},\ a_{14},\ a_{15},\ a_{16},$$

und für die Koordinaten von U_1 in dem Systeme der U:

$$\alpha_{11},\ \alpha_{12},\ \alpha_{13},\ \alpha_{14},\ \alpha_{15},\ \alpha_{16} .$$

Die Koeffizienten a, α sind die Invarianten der Komplexe X, U.

Mit dem Koordinatensysteme in unmittelbarem Zusammenhange stehen die durch die Komplexe X oder die Komplexe U bestimmten gemeinsamen Elemente. Dabei findet die Reziprozität statt, daß alles, was nach der einen Auffassung der geraden Linie (des linearen Komplexes) einer Anzahl von Komplexen X gemeinsam angehört, nach der anderen Auffassung den Komplexen U zukommt, welche den noch übrigen X entsprechen.

So bestimmen zwei Komplexe X, z. B. X_1, X_2 eine Kongruenz, deren Direktrizen diejenigen beiden Linien sind, welche U_3, U_4, U_5, U_6 zugleich angehören.

Im ganzen bestimmen die Komplexe X, sowie die Komplexe U, 15 Kongruenzen. Die Direktrizen einer Kongruenz einer dieser beiden

Gruppen werden durch die Direktrizen von sechs Kongruenzen der anderen Gruppe geschnitten.

Drei Komplexe X, z. B. X_1, X_2, X_3, bestimmen eine Fläche zweiten Grades vermöge der Linien ihrer einen Erzeugung. Dieselbe Fläche gehört vermöge der Linien ihrer anderen Erzeugung den Komplexen U_4, U_5, U_6 an.

6. Wir mögen noch kurz die folgenden Bemerkungen hinzufügen.

So oft einer der Koeffizienten a_{kk}, α_{kk} verschwindet, wird einer der Komplexe X, bezüglich U ein spezieller Komplex. Sind insbesondere alle a_{kk} und α_{kk} gleich Null, so bilden die zwölf geraden Linien X und U eine [Schläflische] *Doppelsechs*. Als ein ausgezeichneter Fall dieser Gruppierung ist das System der sechs Kanten eines *Tetraeders* zu betrachten, für welches die X von den U nur durch die Anordnung verschieden sind.

Dann ist noch hervorzuheben dasjenige Koordinatensystem, für welches die Komplexe X mit den Komplexen U identisch werden[7]). Dasselbe ist durch das Verschwinden sämtlicher Koeffizienten in f, φ außer denen mit gleichen Indizes charakterisiert.

Göttingen, den 4. August 1869.

[7]) Von der Betrachtung eines derartigen Systems bin ich in dem Aufsatze: Zur Theorie der Komplexe ersten und zweiten Grades [Math. Annalen, Bd. 2 (siehe Abh. II dieser Ausgabe)] ausgegangen.

IV. Über Abbildung der Komplexflächen vierter Ordnung und vierter Klasse.

[Math. Annalen, Bd. 2 (1870).]

Herr Clebsch hat in den Math. Annalen (Bd. 1, S. 253) die Abbildung der Flächen vierter Ordnung mit einer Doppellinie gegeben. Ein Beispiel für Flächen dieser Art bilden die Komplexflächen vierter Ordnung und vierter Klasse, deren Erzeugung sich an die Linienkomplexe zweiten Grades anknüpft[1]). Ausgezeichnet sind diese Flächen dadurch, daß Kegelschnitte, nach welchen dieselben von den Ebenen, die durch die Doppellinie hindurchgehen, geschnitten werden, nicht als Kurven der zweiten Ordnung, sondern als Kurven der zweiten *Klasse* definiert sind.

Solch eine Komplexfläche besitzt acht paarweise zusammengehörige *Doppelpunkte*. Die Verbindungslinien der beiden Doppelpunkte eines Paares sind die sogenannten *singulären Strahlen* der Fläche. Die vier doppelt zu zählenden singulären Strahlen sind — abgesehen von dem Doppelstrahl — die einzigen Strahlen, welche der Fläche angehören. Die acht Doppelpunkte liegen zu vier in acht, paarweise zusammengehörigen *Doppelebenen*. In jeder Doppelebene liegt ein Berührungskegelschnitt; und diese acht, doppelt zu zählenden Kegelschnitte sind, abgesehen von der Kegelschnittschar in den durch die Doppellinie gehenden Ebenen, die einzigen Kegelschnitte, welche auf der Fläche liegen. Je zwei zusammengehörige Doppelebenen schneiden sich in einem Punkte der Doppellinie. Diese Punkte heißen die *singulären Punkte* der Fläche.

Es sind dies die Singularitäten der Fläche, die bei ihrer Abbildung zur Sprache kommen, sofern man die Fläche als durch Punkte erzeugt betrachtet.

Die Abbildung selbst gestaltet sich in der folgenden Weise.

Das Bild der Doppellinie wird eine Kurve der dritten Ordnung. Auf derselben liegt ein doppelter Fundamentalpunkt O. Die Berührungspunkte a,

[1]) Vgl. Plücker, Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. Leipzig, B. G. Teubner, 1868, 1869.

b, c, d der von O an die Kurve gezogenen vier Tangenten sind doppelt zu zählende einfache Fundamentalpunkte. Die Tangenten mögen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ heißen.

Von den *acht Doppelpunkten* der Fläche sind vier dargestellt durch $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, die vier übrigen durch a, b, c, d, doch in der Art, daß eine auf der Fläche liegende Kurve, deren Bild bezüglich durch a, b, c, d geht, nur dann die betreffenden Doppelpunkte enthält, wenn sie nicht $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in a, b, c, d berührt.

Die vier *singulären Strahlen* sind durch a, b, c, d dargestellt. Kurven, welche a, b, c, d enthalten und in denselben $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ berühren, schneiden die entsprechenden singulären Strahlen in Punkten, die von den auf denselben liegenden Doppelpunkten verschieden sind.

Von den *acht Kegelschnitten*, nach welchen die Doppelebenen die Fläche berühren, ist einer durch den Punkt O, ein anderer durch den Kegelschnitt a, b, c, d, O abgebildet. Die sechs übrigen sind durch die Verbindungslinien von a, b, c, d unter sich gegeben.

Einer der *vier singulären Punkte* fällt in den Fundamentalpunkt O. Alle ihn enthaltenden Kurven berühren in O die Kurve dritter Ordnung. Die übrigen drei singulären Punkte sind der Durchschnitt je zweier zusammengehöriger der sechs Verbindungslinien von a, b, c, d. Diese Durchschnittspunkte liegen auf der Kurve dritter Ordnung.

Endlich sind die durch O hindurchgehenden geraden Linien das Bild der auf der Fläche liegenden *Kegelschnittschar*.

Göttingen, den 14. Juni 1869.

V. Eine Abbildung des Linienkomplexes zweiten Grades auf den Punktraum.

[Abgedruckt mit einigen im Interesse der Verständlichkeit gebotenen Umstellungen aus Max Nöther, *Zur Theorie der algebraischen Funktionen mehrerer komplexer Variabeln.* Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1869, Nr. 15 (14. Juli 1869), S. 298—306.]

... Die einfachste Abbildung eines Linienkomplexes zweiten Grades[1]) auf den Punktraum verdanke ich Herrn Dr. Klein. Wenn man den Komplex auf ein Tetraeder bezieht, welches so gegen ihn liegt, daß alle geraden Linien, welche durch den den beiden Kanten 5 und 6 gemeinsamen Punkt innerhalb der durch dieselben bestimmten Ebene hindurchgehen, dem Komplex angehören, so lassen sich die Gleichungen desselben ebenfalls in der Form (3) schreiben

$$\Phi(x_1 x_2 x_3 x_4) + A x_5 + B x_6 = 0, \tag{3}$$

wobei man nur unter Φ eine homogene Funktion zweiten Grades, unter A und B lineare homogene Funktionen von x_1, x_2, x_3, x_4 zu verstehen hat. Denkt man sich noch in den Formeln (4)

$$\left\{\begin{aligned} \varrho x_1 &= \quad \xi_1(A\xi_3 - B\xi_2) \\ \varrho x_2 &= \quad \xi_2(A\xi_3 - B\xi_2) \\ \varrho x_3 &= \quad \xi_3(A\xi_3 - B\xi_2) \\ \varrho x_4 &= \quad \xi_4(A\xi_3 - B\xi_2) \\ \varrho x_5 &= \quad \xi_1\xi_4 B - \xi_3\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \\ \varrho x_6 &= -\xi_1\xi_4 A + \xi_2\Phi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4) \end{aligned}\right. \tag{4}$$

in A und B an Stelle von x_1, x_2, x_3, x_4 resp. $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ gesetzt, so wird der Komplex im Raume abgebildet durch diese Funktionen dritter Ordnung, und als Fundamentalgebilde tritt eine Kurve 5. Ordnung auf.

[1]) [Herr Nöther selbst hat ebendort die heutzutage wohlbekannte Abbildung des Linienkomplexes ersten Grades auf den Punktraum mitgeteilt, zu der ziemlich gleichzeitig auch von ganz anderem Ausgangspunkte aus S. Lie geführt war. K.]

VI. Über die Haupttangentenkurven der Kummerschen Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten.

[Sitzungsberichte der Berl. Akad. 1870. Vorgelegt durch E. E. Kummer, Sitzung vom 15. Dezember 1870. Wiederabgedruckt in den Math. Annalen, Bd. 23 (1884).]

Von

Sophus Lie und Felix Klein.

Die Kummersche Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten ist bekanntlich[1]) für einfach unendlich viele Komplexe des zweiten Grades Singularitätenfläche, d. h. diejenige Fläche, welche der geometrische Ort ist für solche Punkte, deren Komplexkegel in zwei Ebenen zerfallen ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die umhüllt wird von solchen Ebenen, deren Komplexkurve sich in zwei Punkte aufgelöst hat. Die Betrachtung dieser Komplexe zweiten Grades führt fast unmittelbar zu der Bestimmung der Haupttangentenkurven der Fläche, wie im nachstehenden gezeigt werden soll.

1. Aus der einfach unendlichen Zahl der zu der Fläche gehörigen Komplexe zweiten Grades heben wir einen heraus.

Die demselben innerhalb einer Tangentialebene der Fläche entsprechende Komplexkurve hat sich in zwei Punkte aufgelöst. Diese beiden Punkte sind diejenigen, in denen die in der Tangentialebene enthaltene Durchschnittskurve vierter Ordnung mit der Fläche von einer bestimmten, durch den Berührungspunkt gehenden Geraden, die dessen zugeordnete singuläre Linie genannt wird, noch außer in diesem Berührungspunkte geschnitten wird.

Man kann nun nach denjenigen Punkten der Fläche fragen, deren zugeordnete singuläre Linie eine Haupttangente der Fläche ist. Die übrigen Tangenten der Fläche in einem solchen Punkte gehören offenbar auch dem Komplexe an. Andererseits sind diese letzteren Komplexgeraden die einzigen, welche die Fläche berühren, ohne zugleich singuläre Linien des Komplexes zu

[1]) Vgl. Plücker, Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. (B. G. Teubner 1868, 69.) Nr. 310 ff. Vgl. auch hier und im folgenden: Klein, Zur Theorie der Komplexe des ersten und zweiten Grades. Math. Ann., Bd. 2. [Siehe Abh. II dieser Ausgabe.]

sein. Betrachten wir nun in einer beliebigen Ebene den Komplexkegelschnitt und die Durchschnittskurve vierter Ordnung mit der Fläche. Dieselben berühren sich in vier Punkten, und die Tangenten in diesen Punkten sind die in der Ebene gelegenen singulären Linien[2]). Außer diesen doppelt zu zählenden Tangenten haben die beiden Kurven, als bez. von der zweiten und zwölften Klasse, noch 16 Tangenten gemein. Die Berührungspunkte derselben mit der Durchschnittskurve vierter Ordnung sind Punkte der gesuchten Beschaffenheit.

Die Punkte der Kummerschen Fläche, deren zugeordnete singuläre Linien Haupttangenten der Fläche sind, bilden also eine Kurve der 16. Ordnung.

2. *Die so bestimmte Kurve ist nun eine Haupttangentenkurve der Fläche.* Zum Beweise bemerken wir zunächst, daß zwischen den durch eine Komplexlinie, — welche nur keine singuläre Linie sein darf, — hindurchgelegten Ebenen und den Berührungspunkten der in denselben enthaltenen Komplexkurven mit der Linie projektivisches Entsprechen stattfindet. Hieraus schließt man, daß einer unendlich kleinen Verschiebung des Punktes auf der Linie eine Drehung der Ebene entspricht, deren Größe von derselben Ordnung des Unendlich-Kleinen ist.

Nun ist die Verbindungslinie zweier konsekutiver Punkte der eben bestimmten Kurve eine Komplexlinie, ohne zugleich singuläre Linie desselben zu sein. Die beiden Tangentialebenen in den beiden Punkten enthalten dem Komplexe angehörige Strahlbüschel, deren Scheitel diese Punkte sind. Die beiden Tangentialebenen sind also zwei Ebenen, deren Komplexkurven die angenommene Tangente in zwei konsekutiven Punkten berühren. Hieraus folgt, nach der vorstehenden Bemerkung, daß, wenn man auf der Kurve fortschreitet, die Tangentialebene der Fläche sich um die Tangente der Kurve dreht.

Das aber ist die charakteristische Eigenschaft der Haupttangentenkurven einer Fläche; unsere Behauptung ist also erwiesen.

Da der Begriff der Haupttangentenkurve, sowie der des Komplexes, sich selbst dualistisch ist, folgt, daß die dualistisch entgegenstehenden Singularitäten der Kurve einander gleich sind. Insbesondere *ist ihre Klasse gleich ihrer Ordnung, also gleich* 16.

Da ferner die Kurve sich selbst dualistisch in einziger Weise durch den Komplex bestimmt ist, geht sie, wie dieser, durch ein System linearer, sowie reziproker Transformationen in sich über[3]). Man schließt hieraus eine Reihe von Eigenschaften derselben, die wir hier nicht weiter verfolgen können.

[2]) Plücker, Neue Geometrie. Nr. 318.
[3]) Vgl. die bereits zitierte Abhandlung: Zur Theorie usw., Nr. 13.

3. Auf die auseinandergesetzte Weise erhalten wir einem jeden der einfach unendlich vielen Komplexe zweiten Grades, die zu derselben Kummerschen Fläche gehören, entsprechend eine Haupttangentenkurve. Hiermit hat man aber *alle* Haupttangentenkurven, wofern nicht etwa Umhüllungskurven derselben existieren, da man für jeden Punkt der Fläche einen der Komplexe angeben kann, der die eine oder die andere der beiden Haupttangenten in demselben zur singulären Linie hat.

Unter den zu der Fläche gehörigen Komplexen zweiten Grades befinden sich sechs, doppelt zu zählende, lineare Komplexe. Als die singulären Linien derselben sind die Doppeltangenten der Fläche anzusehen, so zwar, daß jedem der sechs Komplexe eines der sechs von den Doppeltangenten gebildeten Systeme angehört. *Entsprechend diesen Komplexen gibt es sechs ausgezeichnete Haupttangentenkurven.* Dieselben sind, wie sich durch dieselben Betrachtungen ergibt, durch die wir Ordnung und Klasse der allgemeinen Kurve bestimmt haben, nur noch von der achten Ordnung und der achten Klasse.

4. Wir gehen jetzt dazu über, die Singularitäten der Haupttangentenkurven zu bestimmen. Hierzu gelangen wir, indem wir der allgemeinen Theorie solcher Kurven die folgenden Sätze entlehnen:

Die Haupttangentenkurven einer beliebigen Fläche haben in den Knotenpunkten dieselben Spitzen.

Überhaupt haben sie Spitzen in den Punkten der parabolischen Kurve, vorausgesetzt, daß diese nicht selbst Haupttangentenkurve ist. In dem letzteren Falle ist sie Umhüllungskurve für die übrigen Haupttangentenkurven. Dies gilt besonders, wenn die parabolische Kurve aus ebenen Berührungskurven besteht.

Ferner haben die Haupttangentenkurven in den Durchschnittspunkten mit der Kurve vierpunktiger Berührung stationäre Tangenten, wofern die Kurve vierpunktiger Berührung nicht zugleich parabolische Kurve ist, was eine besondere Betrachtung verschiedener Fälle verlangt, die wir hier nicht nötig haben.

Endlich können die Haupttangentenkurven außer in den angegebenen Fällen keine Spitzen und keine stationären Tangenten haben.

In unserem Falle hat man 16 Knotenpunkte, in denen also die Haupttangentenkurven Spitzen haben.

Die parabolische Kurve, welche von der 32. Ordnung sein muß, besteht aus den 16 Berührungskegelschnitten in den 16 Doppeltangentialebenen der Fläche. Sie ist also Umhüllungskurve der Haupttangentenkurven. Die 16 Ebenen sind dabei stationäre Ebenen dieser Kurven, wie dies überhaupt die Ebenen ebener Berührungskurven sind.

Man überzeugt sich nun leicht, daß die Haupttangentenkurven in jedem Knotenpunkte nur eine Spitze haben und nur je einmal die Doppeltangentialebenen stationär berühren. Die Kurve kann nämlich mit der Doppeltangentialebene nur 16 Punkte gemein haben; vier davon kommen auf die stationäre Berührung, und zwölf auf die sechs Spitzen in den sechs in der Ebene liegenden Knotenpunkten.

Die Haupttangentenkurven haben hiernach 16 (in die Knotenpunkte der Fläche fallende) Spitzen und 16 (mit den Doppeltangentialebenen derselben identische) stationäre Ebenen.

Die Kurve vierpunktiger Berührung besteht in unserem Falle einmal aus den 16 Berührungskegelschnitten, die hier nicht weiter in Betracht kommen, da sie schon erledigt sind. Andererseits besteht sie aus den sechs ausgezeichneten Haupttangentenkurven achter Ordnung, die den sechs linearen Komplexen angehören. Es geht dies daraus hervor, daß die singulären Linien dieser Komplexe, wie schon angeführt, Doppeltangenten der Fläche sind. Weitere Kurven umfaßt die Kurve vierpunktiger Berührung nicht, da die aufgezählten zusammen die richtige Ordnung, 80, besitzen.

Wir müssen jetzt die Zahl der Durchschnittspunkte einer Haupttangentenkurve mit den sechs ausgezeichneten bestimmen.

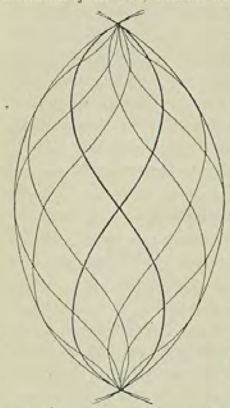
Diese Durchschnittspunkte sind dadurch charakterisiert, daß die vierpunktig berührende Haupttangente eine Linie des Komplexes zweiten Grades ist, dem die gegebene Haupttangentenkurve zugehört. Die in den Punkten einer der sechs Kurven vierpunktig berührenden Haupttangenten bilden aber eine Linienfläche von der achten Ordnung, da der vollständige Durchschnitt derselben mit der Kummerschen Fläche aus der gewählten Kurve besteht, welche vierfach zählt. Mit einer solchen Fläche hat aber der Komplex zweiten Grades 16 Linien gemein. Man erhält also, jeder der sechs Kurven entsprechend, 16 Durchschnittspunkte. Wir haben somit den Satz:

Die Haupttangentenkurven haben $6 \cdot 16 = 96$ *stationäre Tangenten.*

Fügen wir noch hinzu, daß die Haupttangentenkurven keinen wirklichen Doppelpunkt und also auch keine wirkliche Doppeloskulationsebene besitzen können, da in keinem Punkte der Kummerschen Fläche, der nicht auf der parabolischen Kurve liegt, die beiden Haupttangenten demselben Komplexe als singuläre Linien angehören, so können wir die sämtlichen Singularitäten derselben, von denen die dualistisch entgegenstehenden gleich sind, ohne weiteres bestimmen. Insbesondere finden wir: den Rang $= 48$, die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte $= 72$, die Ordnung der Doppelkurve der Developpablen $= 952$, das Geschlecht $= 17$.

5. Für die sechs ausgezeichneten Haupttangentenkurven wird die Zahl der Spitzen und stationären Oskulationsebenen gleich Null. Eine solche

Kurve geht nämlich durch jeden der Doppelpunkte einfach hindurch und hat in ihm eine der sechs ihn enthaltenden Doppeltangentialebenen zur Oskulationsebene. Man hat sich den stetigen Übergang zwischen den allgemeinen Kurven und diesen besonderen so vorzustellen, daß die letzteren doppelt zählen und aus der Vereinigung je zweier in einer Spitze zusammenstoßender Zweige der übrigen entstanden sind. Darum sinkt Ordnung und Klasse auf die Hälfte. Hiernach müßte auch der Rang halb so groß sein, wie der der anderen, also gleich 24. Das aber findet man auch, wenn man die Zahl der stationären Tangenten berechnet. Für dieselbe kommt nämlich jetzt 40, indem die Kurve jede der anderen nicht mehr 16 mal, sondern, weil sie 2 mal zählt, nur 8 mal schneidet, und das nicht 6 mal, sondern nur 5 mal geschieht.



Wir finden weiter: die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte gleich 16, die Ordnung der Doppelkurve der Developpable gleich 200, das Geschlecht gleich 5.

6. Wie man sich die Aufeinanderfolge der Haupttangentenkurven zu denken hat, ist in der nebenstehenden Zeichnung für den Fall, daß die sechs zugehörigen linearen Komplexe reell sind, schematisch dargestellt.

In diesem Falle haben nämlich die Teile der Fläche, für welche die Haupttangenten reell werden, die Gestalt eines von zwei Kegelschnittstücken begrenzten Segmentes, das sich von einem Knotenpunkte nach einem anderen hinzieht. Die beiden begrenzenden Kurvenstücke gehören den Berührungskegelschnitten in denjenigen beiden Doppeltangentialebenen der Fläche an, welche beide Knotenpunkte zugleich enthalten.

Innerhalb eines solchen Segmentes verlaufen nun zunächst zwei der sechs ausgezeichneten Haupttangentenkurven. Dieselben gehören denjenigen zwei der sechs linearen Komplexe an, denen in den zwei Knotenpunkten, zwischen denen sich das Segment erstreckt, die beiden dasselbe begrenzenden Doppeltangentialebenen entsprechen. Die betreffenden Kurven sind in der Figur stärker ausgezogen. Dieselben haben eine S-förmige Gestalt. Sie ziehen sich von dem einen Knotenpunkte zu dem anderen hin, indem sie in jedem eine der beiden Begrenzungskurven berühren. Außer in den beiden Knotenpunkten schneiden sich dieselben in einem beiden gemeinsamen Wendepunkte, der den Mittelpunkt der Zeichnung bildet. — Übrigens setzen sich diese Kurven über die beiden Knotenpunkte hinaus auf weitere, ähnlich gestaltete Segmente der Fläche fort.

Von den übrigen Haupttangentenkurven, deren drei gezeichnet sind, weiß man, daß sie in den Knotenpunkten eine Spitze haben, daß sie jeden der beiden begrenzenden Kegelschnitte einmal berühren, und daß sie dort, wo sie, außer in den beiden Knotenpunkten, die beiden ausgezeichneten Kurven treffen, einen Wendepunkt besitzen. Hiernach wird es leicht sein, ihrem Verlaufe in der Figur zu folgen.

---

7. Die im vorstehenden gegebene Bestimmung der Haupttangentenkurven der Kummerschen Fläche, welche wir an die Betrachtung der zugehörigen Komplexe zweiten Grades geknüpft haben, kann noch unter einem anderen Gesichtspunkte gefaßt werden, indem man von einem der sechs unter denselben befindlichen linearen Komplexe ausgeht. Die Fläche ist nämlich Brennfläche eines diesem Komplexe angehörigen Strahlensystems: des einen Systems ihrer Doppeltangenten. Wir wollen nun zeigen, *daß das Problem: die Haupttangentenkurven auf der Brennfläche eines einem linearen Komplexe angehörigen Strahlensystems zu bestimmen, identisch ist mit dem anderen: die Krümmungskurven einer gewissen Fläche zu finden.* In unserem Falle wird diese Fläche die Fläche vierter Ordnung, welche den unendlich weit entfernten imaginären Kreis doppelt enthält; und da man deren Krümmungskurven kennt, so erhält man eine Bestimmung der Haupttangentenkurven der Kummerschen Fläche, die natürlich mit der oben gegebenen übereinstimmt.

Man beziehe nämlich die Linien des gegebenen linearen Komplexes eindeutig auf die Punkte des Raumes, indem man, vermöge der gegebenen linearen Gleichung und der zwischen den Linienkoordinaten bestehenden Identität zwei der sechs Linienkoordinaten, die sich auf zwei sich schneidende Kanten des Tetraeders beziehen, als Funktionen der vier übrigen auffaßt und diese letzten als Punktkoordinaten interpretiert[1]).

Man findet, daß dann allen Linien des Komplexes, welche durch einen Punkt hindurchgehen, die Punkte einer geraden Linie entsprechen, und daß diese gerade Linie einen festen Kegelschnitt schneidet, der für die Abbildung fundamental ist. Das Strahlensystem, welches dem linearen Komplexe mit einem Komplexe n-ten Grades gemein ist, bildet sich ab als Fläche $2n$-ten Grades, welche den Kegelschnitt n-fach enthält. Insbesondere ist das Bild einer geraden Linie, d. h. der dieselbe schnei-

[1]) Dieses Abbildungsverfahren ist bereits gelegentlich von Herrn Nöther angegeben worden: Zur Theorie der algebraischen Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen. Gött. Nachrichten 1869.

denden Komplexlinien, eine Fläche zweiten Grades, die durch den Kegelschnitt geht.

Wir wollen fortan für den fundamentalen Kegelschnitt den unendlich weit entfernten imaginären Kreis wählen, so daß also das Bild einer geraden Linie eine Kugel wird.

Sei jetzt eine beliebige Fläche gegeben und auf derselben eine Krümmungskurve. Die Fläche ist das Bild eines dem linearen Komplexe angehörigen Strahlensystems, die Kurve das Bild einer in demselben enthaltenen geradlinigen Fläche. Wir behaupten, *daß diese geradlinige Fläche die Brennfläche des Strahlensystems nach einer Haupttangentenkurve berührt.*

Zum Beweise bemerken wir zunächst, daß, rückwärts, das Bild dieser Brennfläche dasjenige Strahlensystem ist, dessen Linien gleichzeitig die gegebene Fläche berühren und den unendlich weit entfernten imaginären Kreis schneiden. Einer jeden geraden Linie, welche die Brennfläche berührt, entspricht hiernach eine die gegebene Fläche berührende Kugel. Insbesondere entspricht einer Haupttangente eine stationär berührende Kugel.

Eine der beiden in einem beliebigen Punkte der Krümmungskurve stationär berührenden Kugeln enthält aber drei konsekutive Punkte der Krümmungskurve. Also schneidet eine der beiden Haupttangenten der Brennfläche in einem Berührungspunkte mit der umgeschriebenen Linienfläche drei konsekutive Erzeugende derselben, mit anderen Worten, ist eine Haupttangente auch der letzteren.

Man hat aber allgemein den Satz: Wenn zwei Flächen sich nach einer Kurve berühren und in jedem Punkte dieser Kurve ist ihnen eine Haupttangente gemeinsam, so ist die Kurve eine Haupttangentenkurve.

Damit ist unsere Behauptung erwiesen.

Wenn man nun insbesondere für die gegebene Fläche eine Fläche vierter Ordnung nimmt, die den unendlich weit entfernten imaginären Kreis doppelt enthält, — eine solche ist das Bild eines dem linearen Komplexe angehörigen Strahlensystems zweiter Ordnung und Klasse, — so erhält man auf diesem Wege die Haupttangentenkurven der Kummerschen Fläche, welche die Brennfläche eines solchen Strahlensystems ist.

Die in der letzten Nummer enthaltenen Betrachtungen sind es gewesen, durch die der eine von uns (Lie)[5]) zuerst zu der Bemerkung geführt wurde, daß die Haupttangentenkurven der Kummerschen Fläche

[5]) Vgl. Lie: Über eine Klasse geometrischer Transformationen, Berichte der Akademie zu Christiania, 1870, oder auch: Sur une transformation géométrique, in den Comptes rendus de l'Académie des Sciences von demselben Jahre (Bd. 71. 31. Oktober 1870).

algebraische Kurven der 16. Ordnung sind; hierauf fand der andere (Klein) die Beziehung dieser Kurven zu den Komplexen zweiten Grades, die zu der Kummerschen Fläche gehören, und bestimmte, wie im vorstehenden auseinandergesetzt ist, ihre Singularitäten[6]).

[6]) [Vorstehende Abhandlung geht, wie schon im Text angedeutet, auf das Zusammenarbeiten von Lie und mir in unserer Pariser Zeit zurück und bildet sozusagen dessen Höhepunkt. Ich war — Anfang Juli 1870 — eines Morgens früh aufgestanden und wollte gerade ausgehen, als mich Lie, der noch im Bette lag, in sein Zimmer rief und mir den von ihm in der Nacht gefundenen Zusammenhang der Haupttangentenkurven einer Fläche mit den Krümmungskurven einer anderen Fläche in einer Weise auseinandersetzte, daß ich kein Wort verstand. (Es handelte sich um die Linienkugeltransformation, aber statt mit Kugeln operierte er halbanschaulich mit geradlinigen Hyperboloiden, die durch einen festen rellen Kegelschnitt gingen.) Jedenfalls versicherte er mir, daß danach die Haupttangentenkurven der Kummerschen Fläche algebraische Kurven 16. Ordnung sein müßten. Am Vormittage kam mir dann, während ich das Conservatoire des Arts et Métiers besichtigte, der Gedanke, daß es sich um eben jene Kurven 16. Ordnung handeln müßte, welche schon in der Abhandlung II (siehe S. 74) in meiner „Theorie der Linienkomplexe ersten und zweiten Grades" aufgetreten waren, und es gelang mir rasch, die im Texte unter 1 bis 5 gegebenen, von der Lieschen Transformation unabhängigen geometrischen Betrachtungen durchzuführen. Als ich am Nachmittage um 4 Uhr nach Hause zurückkam, war Lie ausgegangen, und ich hinterließ ihm eine Zusammenstellung meiner Resultate in einem Briefe. — Die Figur der Nr. 6 des Textes fand ich Ende Juli oder Anfang August 1870 während meines Aufenthaltes in Düsseldorf.

Die Haupttangentenkurven der Kummerschen Fläche sind ja seitdem vielfach weiter untersucht worden. Zunächst von Lie und mir in unseren Abhandlungen in Bd. 5 der Math. Ann. (1871); siehe die nachstehenden Abhandlungen. Während Lie daselbst seine Linienkugeltransformation eingehend entwickelte, habe ich den in Betracht kommenden Integrationsprozeß von verschiedenen anderen Seiten beleuchtet. — Ich verweise auf diese Arbeiten um so lieber, als die vorstehend in Nr. 2 und 7 des Textes entwickelten Beweise des Hauptsatzes, trotzdem sie materiell richtig sind, vielleicht in formaler Hinsicht unbefriedigend erscheinen können. — Es folgen die Entwicklungen von Herrn Rohn in seiner Dissertation (München, 1878) und in seinen Abhandlungen in Bd. 15, 18 der Math. Ann. (1879 bez. 1881). Hier tritt die Bedeutung der Haupttangentenkurven der Kummerschen Fläche für deren Darstellung durch hyperelliptische Funktionen zum erstenmal klar hervor, und wird ihr reeller Verlauf für die Fälle, wo die in Nr. 6 des Textes gegebene Figur eines von zwei Kegelschnittstücken umgrenzten Segmentes nicht stimmt, angegeben. Weiteres vergleiche man im Artikel III C 8 der Enzyklopädie der Math. Wiss. von K. Zindler über algebraische Liniengeometrie. K.]

VII. Über einen Satz aus der Theorie der Linienkomplexe, welcher dem Dupinschen Theorem analog ist.

Vorgelegt von A. Clebsch.

[Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1871, Nr. 3 (8. März 1871), vorgelegt in der Sitzung vom 4. März 1871[1]).]

Bei der Bestimmung der Haupttangentenkurven der Kummerschen Fläche[2]) hat sich gezeigt, daß diese Kurven in einem unmittelbaren Zusammenhange mit den Komplexen zweiten Grades stehen, deren Singularitätenfläche die Kummersche Fläche ist. Im folgenden will ich nun ein allgemeines Theorem aufstellen, betreffend eine Beziehung zwischen *Linienkomplexen* und *Haupttangentenkurven*, unter welches sich die Bestimmung der Haupttangentenkurven der Kummerschen Fläche subsumiert.

Seien zunächst zwei Komplexe und eine ihnen gemeinsame Gerade gegeben. In einer beliebig durch die letztere hindurchgelegten Ebene befinden sich zwei bez. den beiden Komplexen angehörige Komplexkurven und diese berühren die gegebene Gerade je in einem Punkte. Man betrachte den einen Berührungspunkt als dem anderen entsprechend. Läßt man sich die angenommene Ebene um die gerade Linie drehen, so erhält man daraus ein lineares Entsprechen zwischen zwei auf der Geraden befindlichen Punktreihen. Die beiden Komplexe sollen nun *mit Bezug auf die gegebene gerade Linie in Involution* heißen, wenn die Beziehung zwischen diesen Punktreihen die involutorische ist.

Analytisch drückt sich dies, wie ich hier ohne Beweis angebe, folgendermaßen aus[3]). Die Linienkoordinaten $x_1, \ldots, x_6$ mögen so gewählt

[1]) [Das Prinzip ist, in die vorliegende Ausgabe von den vorläufigen Mitteilungen, die in den Göttinger Nachrichten oder anderen Akademieberichten erschienen sind, nur aufzunehmen, was nicht in spätere umfassende Abhandlungen eingearbeitet ist. Bei VII wird wie in einigen analogen Fällen eine Ausnahme gemacht, weil die Methode der Darstellung eine andere ist, als bei der endgültigen Darstellung in VIII. K.]

[2]) Vgl. die Arbeit von Herrn Lie und mir: „Über die Haupttangentenkurven der Kummerschen Fläche", Monatsberichte der Berliner Akademie, Dezember 1870; sowie eine Notiz von mir in diesen Nachrichten, 1871. Nr. 1. [Vgl. Abh. II, VI dieser Ausgabe.]

[3]) Hier und im folgenden verweise ich auf die beiden Arbeiten: „Zur Theorie der Linienkomplexe ersten und zweiten Grades" und „Die allgemeine lineare Transformation der Linienkoordinaten", Math. Ann., Bd. 2. [Siehe Abh. II, III dieser Ausgabe.]

sein, daß die Summe ihrer Quadrate identisch verschwindet. Die beiden gegebenen Komplexe seien $A = 0$, $B = 0$; sie liegen mit Bezug auf eine gemeinsame gerade Linie in Involution, wenn für diese Linie $\sum \frac{\partial A}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial B}{\partial x_\alpha}$ verschwindet.

Diese Definition vorausgesetzt, ist nun der Satz, um den es sich hier handelt, der folgende:

Wenn vier Komplexe mit Bezug auf eine gemeinsame gerade Linie (p) *paarweise in Involution liegen, wenn ferner je drei derselben mit Bezug auf die ihnen gemeinsame, nächstfolgende gerade Linie ebenfalls paarweise in Involution sind, so berührt die dreien der Komplexe gemeinsame Linienfläche die Brennfläche desjenigen Strahlensystems, das zweien dieser drei Komplexe angehört, in der Nähe von* (p) *nach der Richtung einer Haupttangentenkurve.*

Der hiermit ausgesprochene Satz hat seiner Form nach eine gewisse Ähnlichkeit mit dem Dupinschen Theorem über Krümmungskurven, wenn man das letztere so ausspricht, wie dies beispielsweise in Salmons Raumgeometrie (II, S. 51 der Übersetzung von Fiedler) geschieht. Diese Ähnlichkeit entspricht dem Wesen der Sache; ich werde hier einen solchen Beweis für den aufgestellten Satz geben, der dem in Salmons Raumgeometrie mitgeteilten Beweise des Dupinschen Theorems genau nachgebildet ist, und aus dem sich ergibt, daß der Satz eine Erweiterung des Dupinschen Theorems von drei Variabeln auf vier ist.

Überhaupt ist, wie an einem anderen Orte ausführlicher dargelegt werden soll, *die Liniengeometrie äquivalent mit der metrischen Geometrie für vier Variabeln*. Diese Behauptung findet ihren einfachsten Ausdruck in der sogleich zu gebrauchenden Koordinatenbestimmung, vermöge derer die bilineare Invariante zweier gerader Linien sich darstellt wie die Entfernung zweier Punkte und die Bedingung für die involutorische Lage zweier Komplexe wie die Bedingung für die Orthogonalität zweier Flächen. Zu dieser Beziehung zwischen metrischer Geometrie und Liniengeometrie, insbesondere auch zu der Aufstellung des hier in Rede stehenden Theorems, bin ich durch weiteren Verfolg eines Gedankenganges gekommen, der Herrn Lie angehört. Herr Lie hat nämlich, wie dies beiläufig auch in der vorstehend zitierten Arbeit: „Über die Haupttangentenkurven usw." [vgl. die vorstehende Abhandlung VI] auseinandergesetzt ist, gefunden, daß zwischen der Geometrie eines linearen Komplexes und der metrischen Geometrie bei drei Variabeln ein vollständiger Parallelismus statthat, der darauf zurückkommt, daß man die Linien eines linearen Komplexes in der Art eindeutig auf die Punkte des Raumes beziehen kann, daß dabei der unendlich weit entfernte imaginäre Kreis als fundamentales Gebilde auftritt[4]). Dabei entsprechen sich, wie Herr Lie fand, die Krümmungskurven im metrischen Raume und die Haupttangentenkurven im Raume des linearen Komplexes in einer gewissen Weise.

Man kann sich nun die Frage vorlegen: Was bedeutet für den linearen Komplex das auf den metrischen Raum bezügliche Dupinsche Theorem? Die Antwort auf diese Frage ist eben der hier aufgestellte Satz, nur nicht in seiner allgemeinsten Form, sondern mit der Beschränkung, daß einer der vier Komplexe, von denen in demselben die Rede ist, ein linearer ist. Es ist nicht schwer, von dieser besonderen Annahme zu dem allgemeinen Satze überzugehen; der Wunsch, einen unmittelbaren Beweis zu haben, führte mich zu der Aufstellung des im nachstehenden benutzten Koordinatensystems und dieses zu der oben hervorgehobenen Analogie zwischen Liniengeometrie und metrischer Geometrie bei vier Variabeln.

Ich wende mich jetzt zu dem Beweise des aufgestellten Theorems.

Die vier gegebenen Komplexe mögen heißen:

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = 0, \quad \varphi_3 = 0, \quad \varphi_4 = 0, \tag{1}$$

die ihnen gemeinsame gerade Linie, in bezug auf welche sie paarweise in Involution liegen, sei p; ihre (Komplex-)Gleichung sei $p = 0$. Aus der einfach unendlichen Schar der linearen Tangentialkomplexe von $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ mit Bezug auf p wähle man je einen aus; dieselben heißen $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Endlich möge $q = 0$ diejenige gerade Linie sein, welche den vier linearen Komplexen noch außer p gemeinsam ist. Die sechs linearen Ausdrücke x_1, x_2, x_3, x_4, p, q lege ich im folgenden als Linienkoordinaten zugrunde. Wegen der zwischen den betreffenden linearen Komplexen bestehenden Beziehungen schreibt sich die für diese Linienkoordinaten geltende Identität bei passender Wahl von Multiplikatoren unter der folgenden Form:

$$0 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2pq. \tag{2}$$

Fortan werde ich $q = +1$ setzen, dann ist:

$$-2p = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2, \tag{3}$$

p drückt sich mithin rational und ganz durch die x aus. Es ist also gestattet, *in allen Gleichungen, welche vorkommen, p durch die x zu ersetzen und die x als die einzigen und dann unabhängigen Veränderlichen zu betrachten.*

Seien unter dieser Voraussetzung $A = 0$, $B = 0$ die Gleichungen

[4]) Herr Lie hat diese Beziehungen ausführlicher in einer demnächst in den Berichten der Akademie zu Christiania erscheinenden Abhandlung auseinandergesetzt (1871). [Vgl. die große Abhandlung von Lie in den Math. Ann., Bd. 5.]

zweier Komplexe, so ist die Bedingung dafür, daß dieselben mit Bezug auf eine gemeinsame Linie in Involution liegen,

$$\frac{\partial A}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial B}{\partial x_1} + \frac{\partial A}{\partial x_2}\cdot\frac{\partial B}{\partial x_2} + \frac{\partial A}{\partial x_3}\cdot\frac{\partial B}{\partial x_3} + \frac{\partial A}{\partial x_4}\cdot\frac{\partial B}{\partial x_4} = 0, \tag{4}$$

was der Bedingung für die Orthogonalität zweier Flächen im Raume von vier Dimensionen entspricht. Die Bedingung für die Involution ist nämlich ursprünglich:

$$\sum \frac{\partial A}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial B}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial A}{\partial p}\cdot\frac{\partial B}{\partial q} + \frac{\partial A}{\partial q}\cdot\frac{\partial B}{\partial p} = 0,$$

da aber A und B nach Voraussetzung kein p mehr enthalten, so fallen die Glieder mit $\frac{\partial A}{\partial p}, \frac{\partial B}{\partial p}$ fort, und man erhält die vorstehende Bedingung (4)[5]).

Die Gleichungen der vier gegebenen Komplexe (1) erhalten nun die folgende Form:

$$0 = \varphi_1 = 2x_1 + \Omega_1(x_1, x_2, x_3, x_4) + \ldots, \tag{5}$$

usw., wo Ω eine homogene Funktion zweiten Grades der x ist und die nicht hingeschriebenen Glieder aus homogenen Funktionen höheren Grades derselben Argumente bestehen.

Die Form von (5) sagt erst aus, daß die vier Komplexe mit Bezug auf die gemeinsame Gerade p paarweise in Involution liegen; sollen dieselben zu je drei auch mit Bezug auf die ihnen angehörige nächstfolgende Gerade paarweise in Involution sein, so partikularisiert das die Form der Ω. Man findet nämlich, daß die Ω dann nur die Quadrate der x enthalten dürfen, so daß also:

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= \varphi_1 = 2x_1 + (a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 + a_4 x_4^2) + \ldots \\ 0 &= \varphi_2 = 2x_2 + (b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2 + b_4 x_4^2) + \ldots \end{aligned}\right. \tag{6}$$

usf. die Gleichungen der vier gegebenen Komplexe werden.

Betrachten wir jetzt die Kongruenz, welche zweien der vier Komplexe, etwa φ_1 und φ_2, gemeinsam ist. Dieselbe besitzt eine Brennfläche und diese wird von p in zwei Punkten (den Doppelpunkten des auf p befindlichen, zu φ_1 und φ_2 gehörigen, involutorischen Punktsystems) berührt. Sei a einer dieser Berührungspunkte. Jetzt möge p in eine benachbarte Lage übergehen, doch in der Art, daß es nach wie vor den beiden Kom-

[5]) Auf ähnliche Weise erhält man für das Moment zweier Geraden $(x_1, x_2, x_3, x_4, p, q)$ und $(y_1, y_2, y_3, y_4, p^1, q^1)$, welches ursprünglich (bis auf einen Faktor)

$$= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4) + p q^1 + p^1 q$$

ist, durch Einsetzung der Werte für p und q:

$$= -\tfrac{1}{2}\left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2 + (x_4 - y_4)^2\right].$$

plexen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ angehört. Dann ist p Doppeltangente der Brennfläche geblieben; der Berührungspunkt a ist in einen benachbarten Berührungspunkt übergegangen. Soll dieser Punkt in der Richtung einer der beiden in a die Brennfläche berührenden Haupttangenten liegen, so muß die Tangentialebene in ihm, auch wenn man auf Größen erster Ordnung Rücksicht nimmt, durch a hindurchgehen. Mit anderen Worten: *das Büschel der in a und das Büschel der in dem benachbarten Punkte die Fläche berührenden Tangenten müssen, auch wenn man auf Größen erster Ordnung Rücksicht nimmt, eine Gerade gemein haben.* Dies werde ich analytisch ausdrücken; in der Form der betreffenden Gleichung liegt dann unmittelbar der Beweis des aufgestellten Theorems.

Beiläufig sei bemerkt, daß sich aus den folgenden Resultaten ergibt, daß, wenn der Berührungspunkt a auf einer Haupttangente der Brennfläche fortrückt, dieses auch mit dem zweiten Berührungspunkte der Brennfläche mit der Linie p der Fall ist.

Die Linie p hat bei unserer Koordinatenwahl die Koordinaten:

$$\frac{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ p,\ q}{0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1}.$$

Für eine benachbarte Linie ist wegen (3) $dp = 0$; sie hat also die Koordinaten:

$$dx_1,\ dx_2,\ dx_3,\ dx_4,\ 0,\ 1,$$

wo dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 völlig unabhängig sind. Soll die benachbarte Linie, wie hier vorausgesetzt, den Komplexen φ_1, φ_2 angehören, so ist dx_1 und dx_2 gleich Null: Die genannte Bedingung also: daß die beiden Tangentenbüschel eine Gerade gemein haben, wird eine Gleichung zwischen dx_3 und dx_4. Der Beweis für das aufgestellte Theorem liegt nun darin, daß diese Gleichung die Form annimmt:

$$dx_3 \cdot dx_4 = 0,$$

wie jetzt gezeigt werden soll.

Zunächst, um auszudrücken, daß zwei Geradenbüschel eine Gerade gemein haben, wähle man zwei Gerade aus beiden Büscheln aus. Die Bedingung ist die, daß die aus beliebigen vier der Koordinaten der vier geraden Linien zusammengesetzten Determinanten verschwinden.

Von dem Büschel der in a die Brennfläche berührenden Tangenten kennt man aber eine gerade Linie; das ist p selbst, deren Koordinaten, wie schon angegeben, sind:

$$0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1.$$

Ferner findet sich unter denselben jedesmal eine Direktrix der Kongruenz, welche irgend zweien auf p bezüglichen linearen Tangentialkomplexen

von φ_1 und φ_2 gemeinsam ist. Nehmen wir für die beiden Tangentialkomplexe $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$, so erhält die Direktrix die Koordinaten:

$$1,\ i,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.$$

In dem zweiten (benachbarten) Büschel enthalten ist zunächst die zu p benachbarte Linie mit den Koordinaten:

$$0,\ 0,\ dx_3,\ dx_4,\ 0,\ 1,$$

sodann wieder eine Direktrix jeder Kongruenz, die irgend zwei auf diese Linie bezüglichen linearen Tangentialkomplexen von φ_1 und φ_2 gemeinsam ist. Für solche zwei Komplexe findet man aus (6) unmittelbar die folgenden:

$$\begin{aligned} 0 &= x_1 + \cdot + a_3 dx_3 \cdot x_3 + a_4 dx_4 \cdot x_4, \\ 0 &= \cdot + x_2 + b_3 dx_3 \cdot x_3 + b_4 dx_4 \cdot x_4. \end{aligned}$$

Eine Direktrix der diesen beiden Komplexen gemeinsamen Kongruenz hat zu Koordinaten:

$$1,\ i,\ (a_3 + ib_3)dx_3,\ (a_4 + ib_4)dx_4,\ 0,\ 0.$$

Die aus den Koordinaten der aufgezählten vier geraden Linien gebildeten viergliedrigen Determinanten sollen verschwinden. Vereinigt man dieselben in ein rechtwinkliges Schema, so kann man dasselbe auf die folgende Form reduzieren:

$$\left|\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & dx_3 & dx_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a_3 + ib_3)dx_3 & (a_4 + ib_4)dx_4 & 0 & 0 \end{array}\right|.$$

Damit die aus diesem Schema gebildeten Determinanten sämtlich verschwinden, muß offenbar sein:

$$dx_3 \cdot dx_4 = 0,$$

womit der Beweis unseres Theorems geführt ist.

Diese Gleichung sagt nämlich aus: damit der Berührungspunkt a und also auch der zweite Berührungspunkt von p mit der Brennfläche bei einer infinitesimalen Verschiebung von p auf einer Haupttangente der Brennfläche fortrücke, muß diese Verschiebung so geschehen, daß dx_3 oder dx_4 gleich Null ist, d. h. daß p in der benachbarten Lage nicht nur, wie selbstverständlich, den Komplexen $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, sondern auch einem der beiden Komplexe $\varphi_3 = 0$ oder $\varphi_4 = 0$ angehöre. Mit anderen Worten: die Linienfläche, welche $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ und $\varphi_3 = 0$ oder $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ und $\varphi_4 = 0$ gemeinsam ist, berührt die Brennfläche der Kongruenz $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$ in der Nähe von p nach der Richtung einer Haupttangentenkurve, was das aufgestellte Theorem war.

Es mag jetzt ein System von unendlich vielen Komplexen gegeben sein, welches von einem Parameter λ abhängt, der bis zur vierten Potenz vorkommt:

$$\varphi + \lambda\varphi_1 + \lambda^2\varphi_2 + \lambda^3\varphi_3 + \lambda^4\varphi_4 = 0.$$

Eine beliebige gerade Linie gehört vieren der Komplexe des Systems an. Das System soll nun so beschaffen sein, daß diese vier Komplexe jedesmal mit Bezug auf die gemeinsame Gerade in Involution sind[6]). Dann gibt das aufgestellte Theorem durch Übergang vom Unendlich-Kleinen zum Endlichen den Satz:

Die Linienfläche, welche dreien der Komplexe des Systems gemeinsam ist, berührt die Brennfläche der zweien dieser drei Komplexe gemeinsamen Kongruenz nach einer Haupttangentenkurve.

Hiernach kennt man die Haupttangentenkurven auf den Brennflächen der Kongrenzen je zweier der Komplexe des Systems.

Aber auch die Haupttangentenkurven auf den je dreien der Komplexe gemeinsamen Linienflächen bestimmen sich ohne weiteres. Die Berührungskurven einer solchen Linienfläche mit den Brennflächen der zweien der drei Komplexe gemeinsamen Kongruenzen sind nämlich auch Haupttangentenkurven der Linienfläche, da überhaupt, wenn zwei Flächen sich nach einer Haupttangentenkurve berühren, diese Kurve für beide Haupttangentenkurve ist. Diese drei Haupttangentenkurven schneiden die Erzeugenden der Linienfläche in drei Punktepaaren. Da nun die Erzeugenden einer Linienfläche von den Haupttangentenkurven derselben projektivisch geteilt werden[7]), so ist die Bestimmung der übrigen Haupttangentenkurven der Fläche im vorliegenden Falle auf rein algebraische Operationen zurückgeführt. Zugleich ergibt sich, daß die drei Punktepaare, die auf jeder Erzeugenden festgelegt wurden, sechs festen Elementen projektivisch sein müssen. In der Tat findet man, daß jedes Paar zu jedem anderen harmonisch ist.

Die hiermit ausgesprochenen Sätze finden ihre Stelle insbesondere *bei den Komplexen zweiten Grades, die dieselbe Singularitätenfläche besitzen.* Das von ihnen gebildete System hat nämlich gerade die Eigenschaft: daß eine beliebige gerade Linie vieren der Komplexe angehört, und daß diese Komplexe mit Bezug auf die Gerade in Involution liegen. Für die Komplexe zweiten Grades, welche eine Kummersche Fläche zur Singularitätenfläche haben, kann man dies aus den Gött. Nachrichten 1871, Nr. 1 [siehe Abh. II dieser Ausgabe] mitgeteilten Formeln unmittelbar entnehmen. Der Nachweis für die allgemeine Gültigkeit dieses Satzes, den ich hier der Kürze wegen nicht ausführe, entspricht übrigens ganz dem Gange, den man einschlägt, um zu zeigen, daß konfokale Flächen zweiten Grades sich senkrecht schneiden.

[6]) Ein solches Komplexsystem entspricht bei vier Variabeln einem Orthogonalflächensysteme bei drei Variabeln. Die allgemeinen Eigenschaften der letzteren [cf. Darboux, Recherches sur les surfaces orthogonales. Ann. de l'École Normale Supérieure, t. 2 (1865)] finden bei den Komplexsystemen ihre Analoga.

[7]) Dieser Satz ist, soviel ich weiß, zuerst von Herrn Paul Serret ausgesprochen worden.

Sei nun ein solches System von Komplexen zweiten Grades gegeben. Zwei demselben angehörige Komplexe bestimmen eine Kongruenz, deren Brennfläche im allgemeinen von der 16. Ordnung und Klasse ist. Auf diesen Brennflächen kennt man nach dem aufgestellten Theoreme die Haupttangentenkurven; es werden algebraische Kurven von der 32. Ordnung und Klasse. Dieselben sind die Berührungkurven mit den je dreien der Komplexe angehörigen Linienflächen, die im allgemeinen auch von der 16. Ordnung und Klasse sind. Auf diesen Linienflächen kann man nach dem Obigen ebenfalls durch algebraische Operationen die Haupttangenkurven bestimmen.

Durch passende Partikularisationen erhält man hieraus die Bestimmung der Haupttangentenkurven auf einer großen Zahl von besonderen Flächen. Hier sei nur eine solche Partikularisation erwähnt. Die beiden Komplexe des Systems, welche miteinander die Kongruenz und durch diese die Brennfläche bestimmen, mögen unendlich wenig voneinander verschieden sein. Dann wird die Kongruenz die Kongruenz der singulären Linien desjenigen Komplexes, in welchen die beiden zusammengefallen sind. Ihre Brennfläche zerfällt in die allen Komplexen gemeinsame Singularitätenfläche, die von der vierten Ordnung und Klasse ist, und eine weitere Fläche von der 12. Ordnung und Klasse. Auf beiden erhält man die Haupttangentenkurven. Nun ist für die allgemeinen Komplexe zweiten Grades die Singularitätenfläche eine Kummersche Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten. Man erhält also eine Bestimmung der Haupttangentenkurven dieser Fläche und zwar eine solche, die sich unmittelbar in diejenige überführen läßt, welche Herr Lie und ich in der im Eingange zitierten Arbeit auseinandergesetzt haben.

VIII. Über Liniengeometrie und metrische Geometrie.

[Math. Annalen, Bd. 5 (1872).]

In der vorstehenden Abhandlung[1]) hat Herr Lie unter anderem eine fundamentale Analogie entwickelt, welche zwischen der Geometrie des linearen Komplexes und der gewöhnlichen metrischen Geometrie besteht. Diese Analogie kommt darauf zurück, daß man den linearen Komplex eindeutig auf den Punktraum abbilden kann[2]), wobei im linearen Komplexe eine einzelne Linie, im Punktraume ein Kegelschnitt als Fundamentalgebilde auftritt. Denn die metrische Geometrie ist ja nichts anderes, als die Untersuchung der projektivischen Eigenschaften der räumlichen Gebilde unter Zugrundelegung eines ein für allemal gegebenen Kegelschnittes, des unendlich fernen imaginären Kreises. Die Geometrie des linearen Komplexes ist durch die fragliche Abbildung also mit der metrischen Geometrie in Verbindung gesetzt, jedoch so, daß im linearen Komplexe noch eine Linie willkürlich ausgezeichnet ist. — Der hierdurch aufgedeckte Zusammenhang zwischen zwei auf den ersten Blick sehr heterogenen Gebieten der Geometrie muß nach beiden Seiten hin von großer Fruchtbarkeit sein. Es mag hier genügen, in diesem Betracht auf den reichen Inhalt der vorstehenden Abhandlung zu verweisen, insbesondere auf die

[1]) [Gemeint ist die im Bd. 5 der Math. Ann. unmittelbar vorher abgedruckte große Abhandlung von Lie: „Über Komplexe, insbesondere Linien- und Kugelkomplexe, mit Anwendung auf die Theorie partieller Differentialgleichungen". Es wäre gewiß erwünscht, die engen Beziehungen, die zwischen den Abhandlungen VIII und IX und dieser Abhandlung von Lie bestehen, genauer klarzulegen, zumal auch letztere auf zahlreiche zugehörige Bemerkungen meinerseits Bezug nimmt. Aber es scheint unmöglich, dies in Form eines kurzen zusammenfassenden Kommentars zu tun. So muß es bei gelegentlichen Verweisen sein Bewenden haben. Hoffen wir, daß die Fülle der geometrischen Ideen, welche in den jetzt schwer zugänglichen Lieschen Abhandlungen in ihrer ursprünglichen Form enthalten ist, doch noch einmal in der seit langem vorbereiteten, durch die Ungunst der Verhältnisse bislang zurückgestellten Ausgabe der Lieschen Werke zum Gesamtgut der Mathematiker wird! K.]

[2]) Auf diese Abbildung ist zuerst durch Herrn Nöther aufmerksam gemacht worden: Zur Theorie algebraischer Funktionen. Gött. Nachrichten. 1869.

dort gegebene Beziehung zwischen dem Probleme der Haupttangentenkurven und der Krümmungskurven.

Anknüpfend an diese Untersuchungen von Herrn Lie, über die ich durch wiederholte ausführliche Mitteilungen desselben unterrichtet war, fand ich, daß in ganz gleicher Weise, wie die Geometrie des linearen Komplexes mit der metrischen Geometrie des gewöhnlichen Raumes zusammenhängt, *ein Zusammenhang besteht zwischen dem Gesamtinhalte der Liniengeometrie und der metrischen Geometrie des Raumes von vier Dimensionen*[3]). In diesem Betracht stellte ich insbesondere ein liniengeometrisches Theorem auf[4]), welches dem Dupinschen Theorem der gewöhnlichen metrischen Geometrie nachgebildet war. Hieran habe ich weitere Überlegungen geknüpft, die darauf abzielen: einmal den gesamten Inhalt der metrischen Geometrie auf Liniengeometrie zu übertragen; andererseits die algebraischen Methoden, deren man sich in der Liniengeometrie mit Erfolg bedient, zur Behandlung metrischer Probleme zu verwerten. Diese Betrachtungen — die übrigens mit den von Herrn Lie vorgetragenen in engster Beziehung stehen und aus ihnen erwachsen sind — sollen im folgenden, wenn auch nur in allgemeinen Zügen, dargelegt werden. Hoffentlich genügt die hier gegebene Auseinandersetzung, um deutlich zu zeigen: daß auf dem hier eingeschlagenen Wege eine Weiterentwickelung der beiden in Betracht kommenden Disziplinen: der *Liniengeometrie* und der *metrischen Geometrie* gegeben ist.

In der Liniengeometrie pflegt man, wie bekannt, die Gerade durch sechs homogene Koordinaten p_{ik} zu definieren, welche an eine Bedingungsgleichung zweiten Grades:

$$P \equiv p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$$

geknüpft sind. Betrachtet man einen Augenblick die p_{ik} als unabhängige Veränderliche, so konstituieren sie eine Mannigfaltigkeit, oder, wie man häufig sagt, einen Raum von fünf Dimensionen. Derselbe soll mit R_5 bezeichnet werden (überhaupt ein Raum von n Dimensionen mit R_n). Aus diesem Raume wird die von den Geraden gebildete Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen durch die vorstehende quadratische Gleichung ausgeschieden, in ähnlicher Weise, wie aus der Gesamtheit der Punkte des gewöhnlichen Raumes (R_3) durch eine quadratische Gleichung eine Fläche

[3]) Unter der metrischen Geometrie eines solchen Raumes ist wiederum die Untersuchung der projektivischen Eigenschaften seiner Gebilde unter Zugrundelegung eines ausgezeichneten Gebildes zu verstehen, welches dem Kegelschnitte der gewöhnlichen Geometrie entspricht. Bestimmt man, wie gewöhnlich bei metrischen Untersuchungen, das Raumelement (den Punkt) durch rechtwinklige Koordinaten, hier also durch vier Koordinaten x, y, z, t, so besteht das fragliche Gebilde aus denjenigen unendlich fernen Elementen, für die $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0$.

[4]) Göttinger Nachrichten. 1871. Nr. 3. [Vgl. Abh. VII dieser Ausgabe.]

zweiten Grades ausgeschieden wird. Man wird so dazu geführt, *die Liniengeometrie in ähnlicher Weise analytisch zu behandeln, wie die Geometrie auf einer Fläche zweiten Grades.* Die hiermit angedeutete Auffassung soll in § 1 noch näher erörtert und begründet werden; sie liegt übrigens meinen sämtlichen bisherigen Arbeiten über Liniengeometrie zugrunde.

Es mag hier gleich eine Bezeichnung eingeführt werden, die im folgenden nötig wird. Den Raum von n Dimensionen bezeichneten wir bereits als R_n. Ein Gebilde nun, welches aus ihm durch μ Gleichungen ausgeschieden wird, welches also noch immer eine Mannigfaltigkeit von $n-\mu$ Dimensionen vorstellt, soll als $M_{n-\mu}$ bezeichnet sein. Dabei mögen rechts oben zugesetzte Indizes den Grad der μ Gleichungen angeben, durch welche die $M_{n-\mu}$ bestimmt wird. — Die Gesamtheit der geraden Linien bildet bei dieser Bezeichnung eine $M_4^{(2)}$, die im Raume R_5 gelegen ist. In ähnlicher Weise bilden die Linien eines linearen Komplexes eine $M_3^{(2)}$ des R_4, die Linien einer linearen Kongruenz eine $M_2^{(2)}$ des R_3, endlich die Linien einer Regelschar eine $M_1^{(2)}$ des R_2. [Während diese Gebilde, im R_5 betrachtet, die Bezeichnungen $M_3^{(1,2)}$, $M_2^{(1,1,2)}$, $M_1^{(1,1,1,2)}$ erhalten mußten.] Diese Bezeichnungsweise ist etwas abstrakt; sie ist aber im folgenden nicht gut zu umgehen.

Der Zusammenhang zwischen Liniengeometrie und metrischer Geometrie bei vier Variabeln kommt nun auf eine eindeutige Abbildung der in R_5 gelegenen $M_4^{(2)}$ auf den R_4 hinaus. — Es ist bekannt, wie man eine im R_3 gelegene $M_2^{(2)}$, also etwa eine im gewöhnlichen Raume gelegene Fläche zweiten Grades, eindeutig auf den R_2, etwa die Ebene, abbilden kann. Dies geschieht, geometrisch ausgedrückt, durch das Verfahren der stereographischen Projektion. Dabei treten in der Ebene zwei Fundamentalpunkte auf, die Bilder der durch den Projektionspunkt gehenden beiden Erzeugenden. Auf der Fläche zweiten Grades findet sich ein Fundamentalpunkt, der Projektionspunkt. Nun benutzt aber die metrische Geometrie in der Ebene als Fundamentalgebilde ein Punktepaar, die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte. Man wird deshalb sagen können: die Geometrie auf einer Fläche zweiten Grades und die metrische Geometrie in der Ebene entsprechen einander, sowie man auf der Fläche einen (willkürlichen) Punkt auszeichnet. — Bei der in Rede stehenden Abbildung einer $M_{n-1}^{(2)}$ des R_n auf den R_{n-1} findet nun etwas ganz Ähnliches statt. Ein Element der $M_{n-1}^{(2)}$ (welches dem Projektionspunkte entspricht) wird ausgezeichnet. Dafür tritt im R_{n-1} ein Fundamentalgebilde auf, wie es auch die metrische Geometrie des R_{n-1} benutzt, nämlich eine $M_{n-3}^{(1,2)}$. Allgemein kann man also sagen:

Die metrische Geometrie des R_{n-1} kann als stereographische Projektion der Geometrie auf einer im R_n gelegenen $M_{n-1}^{(2)}$ aufgefaßt werden[5]).

Mit diesem Satze, der in § 2 vollständig begründet werden soll, ist der Zusammenhang der Liniengeometrie mit der metrischen Geometrie des R_4 vollständig gegeben. Ebenso natürlich der Zusammenhang zwischen der Geometrie des linearen Komplexes und der metrischen Geometrie des R_3. Man könnte endlich in dem nämlichen Sinne die Geometrie der linearen Kongruenz mit der metrischen Geometrie des R_2, die Geometrie der Regelschar mit der metrischen Geometrie des R_1 in Verbindung setzen. Andererseits begründet der Satz diejenige Behandlung der metrischen Geometrie des R_{n-1}, welche vorher bereits angedeutet wurde. Dieselbe soll ebenfalls in § 2 etwas weiter ausgeführt werden. Man wird bei ihr in erster Linie dazu geführt, zwischen solchen metrischen Eigenschaften des R_{n-1} zu unterscheiden, welche, auf die $M_{n-1}^{(2)}$ des R_n übertragen, eine besondere Beziehung zu dem bei der Abbildung benutzten Projektionspunkte implizieren, und solche, welche dies nicht tun. Letztere ergeben, wenn $n=5$, allgemeine liniengeometrische Sätze; erstere solche, bei denen eine willkürliche Gerade fundamental auftritt.

Um wenigstens an einem Beispiele die Fruchtbarkeit dieser Übertragungen zu zeigen, suche ich in § 3 das liniengeometrische Analogon der *Orthogonalsysteme* der metrischen Geometrie. Es sind dies Systeme von Linienkomplexen, welche ich als *Involutionssysteme* bezeichne. Ein Involutionssystem ist ein einfach unendliches System von Komplexen, welche von einem Parameter im vierten Grade abhängen, so daß durch jede Gerade des Raumes vier Komplexe des Systems hindurchgehen. Diese vier Komplexe — und das konstituiert eben den Charakter der in Rede stehenden Systeme — liegen paarweise mit Bezug auf die gemeinsame Gerade in Involution[6]). Die involutorische Lage zweier Komplexe entspricht dabei auf seiten der Liniengeometrie der Orthogonalität zweier

[5]) Die metrische Geometrie der Ebene als stereographische Projektion der Geometrie auf einer Fläche zweiten Grades (insbesondere einer Kugel) anzusehen, ist ein Mittel, welches namentlich von Chasles gebraucht worden ist. Die im Texte angedeutete allgemeine Auffassung wird gelegentlich von Herrn Darboux in der Theorie der Orthogonalflächensysteme benutzt (Comptes Rendus t. 69. 1869, 2. Sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques). Wie mir Herr Darboux auf eine Anfrage meinerseits mitteilte, ist sie ein allgemeines Prinzip gewesen, welches ihn bei der Aufstellung seiner Theoreme über metrische Geometrie geleitet hat.

[6]) Als *involutorische Lage* zweier Komplexe mit Bezug auf eine gemeinsame Gerade bezeichne ich die folgende Beziehung. In jeder durch die Gerade hindurchgelegten Ebene befindet sich, jedem Komplexe entsprechend, eine Komplex-Kurve welche die gegebene Gerade berührt. Die beiden Berührungspunkte mögen als einander zugeordnet angesehen werden. Dreht sich nun die Ebene, so beschreiben die beiden Punkte kollineare Punktreihen. Die Komplexe heißen nun involutorisch gelegen, wenn die Beziehung der beiden Punktreihen die involutorische ist.

Flächen in der metrischen Geometrie. — Für Involutionssysteme von Komplexen gilt dann ein Theorem, welches dem Dupinschen Theoreme der gewöhnlichen metrischen Geometrie analog ist. Dasselbe ist, wie ich in § 4 des weiteren auseinandersetze, insofern höchst fruchtbar, als es, sowie ein Involutionssystem gegeben ist, auf einer großen Zahl von Flächen die Haupttangenten-Kurven kennen lehrt. Insbesondere ist hier eingeschlossen die Bestimmung der Haupttangenten-Kurve der Kummerschen Fläche vierter Ordnung mit sechzehn Knotenpunkten, wie sie sich aus den Untersuchungen von Herrn Lie und mir ergeben hat[7]).

Ich will noch ausdrücklich auf einen Unterschied aufmerksam machen, der zwischen den hier vorgetragenen Dingen und einigen Kapiteln der voraufgehenden Lieschen Arbeit besteht und dabei zugleich auseinandersetzen, wie, anknüpfend an diesen Unterschied, Herr Lie eine neue in der metrischen Geometrie anzuwendende Transformation entwickelt hat[8]). Vermöge der erwähnten Abbildung des linearen Komplexes in den gewöhnlichen Punktraum setzt Herr Lie die Liniengeometrie in Verbindung mit der Geometrie, deren Element die *Kugel* des *gewöhnlichen* Raumes ist. Hier dagegen wird die Liniengeometrie auf die *Punkt*geometrie des Raumes *von vier Dimensionen* bezogen. Während die letztere Beziehung eindeutig ist, ist es die erstere nicht, jeder Linie entspricht allerdings nur eine Kugel, dagegen jeder Kugel ein Linienpaar. Da beide Abbildungen der Liniengeometrie metrisch interessante Dinge ergeben, so wird man, zur Behandlung metrischer Probleme, indem man die Betrachtung der Liniengeometrie als unwesentlich beiseite läßt, die folgende Methode aufstellen können: Man bezieht den Punkt des Raumes von n Dimensionen auf die Kugel des Raumes von $n-1$ Dimensionen, in der Art, daß jedem Punkte eine Kugel, jeder Kugel dagegen ein Punktepaar entspricht. Dies geschieht einfach, indem man die n Koordinaten des Punktes im R_n bez. die $n-1$ Mittelpunktskoordinaten und den Radius einer Kugel im R_{n-1} bedeuten läßt. Dies ist die von Lie aufgestellte Methode, welche die metrische Geometrie des R_n und des R_{n-1} in Verbindung setzt. Nicht zu verwechseln mit ihr ist ein von Herrn Darboux aufgestellter Prozeß[9]), der ebenfalls die metrische Geometrie des R_n mit der des R_{n-1} verknüpft. Derselbe kommt im wesentlichen darauf zurück: die metrische Geometrie des R_n durch sphärische Abbildung auf eine Kugel des R_n und dann von dieser durch stereographische Projektion auf den R_{n-1} zu übertragen.

[7]) Vgl. eine gemeinsame Mitteilung in den Monatsberichten der Berliner Akademie. Dezember 1870 [siehe Abh. VI dieser Ausgabe], sowie die in der vorstehenden Abhandlung [von S. Lie] enthaltenen bez. Auseinandersetzungen.

[8]) Göttinger Nachrichten. 1871. Nr. 7.

[9]) Vgl. die bereits zitierte Note: Sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques. Comptes Rendus. 69. 1869.

§ 1.

Die Liniengeometrie ist wie die Geometrie auf einer $M_4^{(2)}$ des R_5.

Diese Aussage findet in dem folgenden Verhalten der Linienkoordinaten p_{ik} ihre eigentliche Begründung. Für die Koordinaten p_{ik} hat man:

$$P = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0.$$

Damit sich nun zwei Gerade, p und p', schneiden, muß sein:

$$\sum \frac{\partial P}{\partial p_{ik}} \cdot p'_{ik} = 0.$$

Infolgedessen kann man den folgenden Satz aufstellen, den ich bereits gelegentlich mitteilte[10]):

Setzt man statt der Linienkoordinaten p_{ik} beliebige lineare Funktionen derselben, die nur der einen Bedingung genügen sollen, die Mannigfaltigkeit $M_4^{(2)}$:

$$P = 0$$

in sich überzuführen, so hat man eine kollineare oder eine dualistische (reziproke) Umformung des Linienraumes. Andererseits erhält man auf diesem Weg alle solchen kollinearen und reziproken Umformungen.

Was den ersten Teil dieses Satzes betrifft, so werden offenbar durch die in Rede stehenden Transformationen alle Geraden wieder in Gerade, sich schneidende Gerade in sich schneidende Geraden übergeführt. Der Gesamtheit der zweifach unendlich vielen Geraden, die durch einen Punkt gehen (sich also schneiden), entsprechen wiederum zweifach unendlich viele Gerade, die sich schneiden. Dabei bleibt die doppelte Möglichkeit: daß dieselben entweder wieder durch einen Punkt gehen oder daß sie die Gesamtheit der in einer Ebene verlaufenden Geraden vorstellen[11]). Im ersten Falle hat man eine räumliche Transformation vor sich, welche jede Gerade in eine Gerade, jeden Punkt in einen Punkt überführt, und das ist ersichtlich eine kollineare Umformung. Im zweiten Fall dagegen hat man eine räumliche Transformation, welche jede Gerade in eine Gerade, jeden Punkt in eine Ebene überführt. Es ist also eine dualistische Umformung.

Aber auch umgekehrt wird jede kollineare und jede dualistische Umformung sich in Linienkoordinaten in der vorgenannten Weise darstellen.

[10]) Math. Ann., Bd. 2 (1870) (Geometrisches über Resolventen ...) [Siehe Bd. 2 dieser Ausgabe. Dieser Satz ist bereits in meiner Dissertation (Abh. I dieser Ausgabe) auf dem Wege der Rechnung bewiesen worden. (Nr. 6—8.) K.]

[11]) In ähnlicher Weise spalten sich überhaupt die linearen Transformationen, welche eine $M_{n-1}^{(2)}$ im R_n in sich überführen, falls n eine ungerade Zahl ist, in zwei Scharen. Vgl. die Arbeit: „Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie", § 16. [Math. Annalen, Bd. 4 (1872).] [Siehe Abh. XVI dieser Ausgabe.]

Denn bei einer solchen Umformung werden die Punktkoordinaten durch lineare Funktionen der neuen Punkt- oder Ebenenkoordinaten ersetzt. Infolgedessen treten an Stelle der früheren Linienkoordinaten p_{ik}, die gleichmäßig als zweigliedrige Determinanten aus Punktkoordinaten oder aus Ebenenkoordinaten dargestellt werden können, lineare Funktionen derselben. Diese linearen Funktionen haben auch die Eigenschaft, die $M_4^{(2)}$

$$P = 0$$

in sich selbst überzuführen, da ja bei ihnen gerade Linien gerade Linien bleiben und sich also die durch die vorstehende Gleichung dargestellte Linienmannigfaltigkeit nicht ändert.

Hiermit ist der vorstehende Satz vollständig bewiesen. Dieser Satz gibt nun zu der folgenden Behandlung liniengeometrischer Probleme Veranlassung. Die neuere Geometrie untersucht alle räumlichen Gebilde, insonderheit also die Liniengebilde, nur insofern sie durch kollineare oder dualistische Transformationen ungeändert bleiben, oder, wenn man will, sie führt alle anderen Eigenschaften auf Eigenschaften dieser Art zurück. Ganz denselben Umfang von Transformationen ziehen wir aber in Betracht, wenn wir den Linienraum als eine $M_4^{(2)}$ im R_5 betrachten und die projektivischen Eigenschaften des R_5 untersuchen, welche sich auf die $M_4^{(2)}$ beziehen. Die gesamte Liniengeometie wird dadurch auf folgendes Problem zurückgeführt:

Man untersuche im projektivischen Sinne die im R_5 gelegene $M_4^{(2)}$. Sodann übertrage man die Resultate in die Sprache der Liniengeometrie.

Wie sich dies bei näherer Ausführung stellt, habe ich in aller Kürze in dem Aufsatze: „Die allgemeine lineare Transformation der Linienkoordinaten" (Math. Annalen, Bd. 2 [siehe Abh. III dieser Ausgabe]) auseinandergesetzt. Eine lineare Gleichung (oder sagen wir: die Ebene des R_5) stellt einen linearen Komplex dar, der ein spezieller wird, wenn die Ebene die $M_4^{(2)}$ berührt. Sind zwei Ebenen in bezug auf die $M_4^{(2)}$ konjugiert, so heißen die Komplexe in Involution. Berührt der Durchschnitt der beiden Ebenen die $M_4^{(2)}$, so berühren sich die beiden Komplexe (die ihnen gemeinsame Kongruenz hat dann zwei zusammenfallende Direktrizen).

Es soll hier nicht weiter in diese Dinge eingegangen werden[12]; doch mag noch folgende Bemerkung hier ihre Stelle finden. Liniengeometrie ist schließlich nichts, als überhaupt projektivische Raumgeometrie. Der vorstehende Satz begründet also eine eigentümliche Behandlung der Geometrie des R_3, bei der die linearen und dualistischen Transformationen

[12]) [Diese Untersuchungsmethode ist später von C. Segre systematisch ausgebaut worden. (Mem. della R. Acc. di Torino, Ser. II, T. 36, (1885).]

des R_3 durch die linearen Transformationen eines höheren Raumes ersetzt werden, welche ein in diesem Raume gelegenes Gebilde ungeändert lassen. Man kann die Frage aufstellen, ob eine analoge Behandlung bei anderen Räumen, als dem R_3, möglich ist. Dies ist allerdings, aber nur bei besonderen Räumen, der Fall. So kann man den R_1 behandeln als Kegelschnitt im R_2 oder als Raumkurve dritter Ordnung im R_3 usw. Denn die gerade Linie R_1 läßt sich derart auf einen Kegelschnitt, bez. eine Raumkurve dritter Ordnung beziehen, daß ihren dreifach unendlich vielen linearen Transformationen die gleich zahlreichen linearen Transformationen entsprechen, welche einen Kegelschnitt in der Ebene, eine Raumkurve der dritten Ordnung im Raume in sich überführen. Hierauf beruht das von Hesse vorgeschlagene Übertragungsprinzip (Borchardts Journal, Bd. 66, 1866). Hesse bespricht insbesondere die Beziehung zwischen der geraden Linie und dem Kegelschnitte der Ebene und zeigt, wie bei der Übertragung die projektivische Geometrie der Ebene eine Geometrie der Punktepaare auf der Geraden ergibt[13]).

§ 2.

Zusammenhang der metrischen Geometrie bei $(n-1)$ Variabeln und der Geometrie auf einer $M_{n-1}^{(2)}$ eines R_n.

Sei eine $M_{n-1}^{(2)}$ eines R_n gegeben. Durch passende Wahl der homogenen Veränderlichen $x_1 \ldots x_{n+1}$ wird man deren Gleichung im Allgemeinen auf die Form bringen können:

$$0 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + x_n^2 + x_{n+1}^2.$$

Setzen wir jetzt:

$$p = x_n + i x_{n+1}$$
$$q = x_n - i x_{n+1},$$

so kommt:

$$0 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + pq.$$

Von dieser Gleichungsform ausgehend, kann man die $M_{n-1}^{(2)}$ ohne weiteres auf den R_{n-1} abbilden. Zu diesem Behufe hat man nur zu setzen, unter ϱ einen Proportionalitätsfaktor verstanden:

$$\begin{aligned}
\varrho x_1 &= y_1 y_n \\
\varrho x_2 &= y_2 y_n \\
&\vdots \\
\varrho x_{n-1} &= y_{n-1} y_n \\
\varrho p &= y_n y_n \\
\varrho q &= -(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n-1}^2).
\end{aligned}$$

[13]) Hiermit wieder kann man in Zusammenhang bringen, wenn man, wie die Herren Clebsch und Gordan, behufs der typischen Darstellung gerader binärer Formen getan haben, die Punkte der Geraden durch drei homogene Koordinaten bestimmt, zwischen denen eine Bedingungsgleichung zweiten Grades statthat; vgl. Clebsch: Theorie der binären Formen (Leipzig 1871). Neunter Abschnitt.

Für $n = 3$ sind dies die bekannten Formeln, welche die stereographische Projektion einer Fläche zweiten Grades auf die Ebene vorstellen.

Als Fundamentalgebilde treten bei dieser Abbildung auf:

1. Im R_{n-1} die $M_{n-3}^{(1,2)}$, welche durch die beiden Gleichungen vorgestellt wird:

$$0 = y_n,$$
$$0 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2.$$

Jedem Elemente derselben entspricht nicht ein Element der gegebenen $M_{n-1}^{(2)}$, sondern einfach unendlich viele.

2. Auf der $M_{n-1}^{(2)}$ ein einzelnes Element (der Projektionspunkt):

$$x_1 = 0,\quad x_2 = 0, \dots, x_{n-1} = 0,\quad p = 0.$$

Ihm entspricht die lineare Mannigfaltigkeit von $(n-1)$ Dimensionen:

$$y_n = 0.$$

Nun wurde bereits bemerkt, daß die metrische Geometrie des R_{n-1} eben eine $M_{n-3}^{(1,2)}$ als fundamentales Gebilde benutzt. Durch unsere Abbildung wird also, wie behauptet wurde, die metrische Geometrie des R_{n-1} mit der Geometrie der $M_{n-1}^{(2)}$ des R_n, unter Zugrundelegung eines ausgezeichneten Elementes, in Beziehung gesetzt.

Die Art dieser Beziehung wird durch den folgenden Satz dargelegt, der die Beziehung als eine wesentliche kennzeichnet:

Den linearen Transformationen des R_{n-1}, welche dessen fundamentale $M_{n-3}^{(1,2)}$ ungeändert lassen, entsprechen diejenigen linearen Transformationen des R_n, welche die gegebene M_{n-1} und den auf ihr befindlichen (willkürlich gewählten) Projektionspunkt nicht ändern.

In der Tat, setzen wir statt $y_1 \dots y_n$ lineare Funktionen derselben, welche die fundamentale $M_{n-3}^{(1,2)}$:

$$0 = y_n$$
$$0 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2$$

nicht ändern, so ergeben die Formeln ohne weiteres die Richtigkeit des Satzes.

Die ersteren Transformationen sind aber diejenigen, welche man in der metrischen Geometrie des R_{n-1} betrachtet; d. h. es sind diejenigen Umformungen, welche metrische Eigenschaften des R_{n-1} nicht ändern. Beispielsweise, ist $n = 4$, so ist der R_{n-1} der gewöhnliche Punktraum. Die fundamentale $M_{n-3}^{(1,2)}$ ist der unendlich ferne imaginäre Kreis. Die linearen Transformationen des Punktraumes, welche letzteren nicht ändern, sind diejenigen, die man als Bewegungen, als Ähnlichkeitstransformationen

und als Transformationen durch Spiegelung bezeichnet. Bei diesen Transformationen bleiben aber alle metrischen Beziehungen räumlicher Figuren ungeändert. — Andererseits würde man den entsprechenden Zyklus linearer Transformationen der x in Betracht zu ziehen haben, wenn man nach denjenigen Eigenschaften von Gebilden des R_n fragt, welche sich auf die gegebene $M_{n-1}^{(2)}$ und den auf ihr befindlichen Projektionspunkt beziehen.

Man wird jetzt die Frage aufstellen können: Welche Transformationen des R_{n-1} entsprechen denn denjenigen linearen Transformationen des R_n, welche nur die gegebene $M_{n-1}^{(2)}$, nicht aber auch den Projektionspunkt selbst ungeändert lassen? Ehe wir diese Frage beantworten, wollen wir die benutzten Abbildungsformeln so umändern, daß auch formell der Zusammenhang mit der gewöhnlichen Darstellung der metrischen Geometrie des R_n (wobei rechtwinklige Koordinaten gebraucht werden) hervortritt. Es genügt, zu diesem Zwecke $y_n = 1$ zu setzen und die dann absolut bestimmten $y_1 \dots y_{n-1}$ als rechtwinklige Koordinaten des R_{n-1} aufzufassen. $y_n = 0$ ist dann der Ort der unendlich fernen Elemente des R_{n-1} (die unendlich ferne Ebene). In $y_n = 0$ befindet sich die fundamentale $M_{n-3}^{(1,2)}$, die aus ihm durch die Gleichung:

$$0 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{n-1}^2$$

ausgeschieden wird. — Es sei nun gestattet, die $M_{n-2}^{(2)}$, welche durch folgende Gleichung dargestellt wird:

$$(y_1 - \alpha_1)^2 + (y_2 - \alpha_2)^2 + \dots + (y_{n-1} - \alpha_{n-1})^2 = r^2$$

nach Analogie mit der gewöhnlichen Raumgeometrie als eine *Kugel* des R_{n-1} zu bezeichnen. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1}$ sind die Koordinaten ihres Mittelpunktes, r ist der Radius. Eine derartige Kugel ist das Bild eines ebenen Schnittes der im R_n gegebenen und auf den R_{n-1} projizierten $M_{n-1}^{(2)}$. Denn die Gleichung der Kugel ist die allgemeine lineare Gleichung zwischen den die gegebene $M_{n-1}^{(2)}$ darstellenden Abbildungsfunktionen. Unter den Kugeln finden sich insbesondere solche mit unendlich großem Radius, d. h. Ebenen; sie sind das Bild solcher ebenen Schnitte der gegebenen $M_{n-1}^{(2)}$, welche durch den Projektionspunkt hindurchgehen[14]).

Betrachten wir jetzt, wie sich die Abbildung der gegebenen $M_{n-1}^{(2)}$ ändert, wenn wir die $M_{n-1}^{(2)}$ durch lineare Transformationen des R_n in sich selbst überführen. Wir untersuchten bereits diejenigen unter diesen Transformationen, welche den Projektionspunkt nicht ändern. Ihnen entsprechen

[14]) Man versinnliche sich dies an der gewöhnlichen stereographischen Projektion einer F_2. Jeder ebene Schnitt bildet sich als Kreis ab; insbesondere als Gerade, wenn er den Projektionspunkt enthält.

die Bewegungen und die Ähnlichkeitstransformationen des R_{n-1}. Alle anderen Transformationen setzen sich aber augenscheinlich aus Transformationen dieser besonderen Art und solchen Transformationen zusammen, welche einer Verlegung des Projektionspunktes auf der gegebenen $M_{n-1}^{(2)}$ entsprechen. Vertauschen wir aber den bisher benutzten Projektionspunkt:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \ldots, x_{n-1} = 0, \quad p = 0$$

mit einem anderen, für den wir, unbeschadet der Allgemeinheit, den Punkt:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \ldots, x_{n-1} = 0, \quad q = 0$$

nehmen wollen, so kommt dies darauf hinaus, im R_{n-1} die Größen

$$y_1, \quad y_2, \ldots, y_{n-1}$$

mit den folgenden

$$\frac{y_1}{\varrho^2}, \quad \frac{y_2}{\varrho^2}, \ldots, \frac{y_{n-1}}{\varrho^2}$$

zu vertauschen, wo ϱ^2 den Ausdruck bezeichnet:

$$\varrho^2 = y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_{n-1}^2.$$

Eine derartige Transformation soll, nach Analogie mit der entsprechenden Transformation bei zwei und drei Variabeln, eine Transformation *durch reziproke Radii vectores* heißen. Wir können jetzt den Satz aussprechen:

Der Gesamtheit der linearen Transformationen des R_n, welche die gegebene $M_{n-1}^{(2)}$ in sich überführen, entspricht im R_{n-1} ein Transformationszyklus, der sich aus dessen Bewegungen, den Ähnlichkeitstransformationen und den Transformationen durch reziproke Radien zusammensetzt.

Hier nun knüpft diejenige Behandlung der metrischen Geometrie des R_{n-1} an, von der in der Einleitung die Rede war. Zunächst wird man den Gesamtinhalt der metrischen Geometrie in zwei Teile sondern. Man wird solche Beziehungen unterscheiden, welche, auf die $M_{n-1}^{(2)}$ übertragen, den gewählten Projektionspunkt implizieren, und solche, bei denen dieses nicht der Fall ist. Die letzteren sind, wie man jetzt sieht, alle diejenigen, welche bei Umformung durch reziproke Radien ungeändert bleiben. Zu ihrer Behandlung muß es vorteilhaft sein, den R_{n-1} auch algebraisch als eine $M_{n-1}^{(2)}$ des R_n zu behandeln. Das heißt: man wird bei ihrer Behandlung das Element des R_{n-1} nicht durch $n-1$ absolute, sondern durch $n+1$ homogene Koordinaten bestimmen, zwischen denen eine Bedingungsgleichung zweiten Grades besteht. (Da dieselben, gleich Null gesetzt, ebene Schnitte der $M_{n-1}^{(2)}$ vorstellen, so repräsentieren sie im R_{n-1} Kugeln.)

Man bestimme also z. B. den Punkt des gewöhnlichen Raumes nicht durch drei absolute Koordinaten, sondern durch fünf homogene:

$$s_1, \quad s_2, \quad s_3, \quad s_4, \quad s_5,$$

die, gleich Null gesetzt, Kugeln vorstellen. Geometrisch kommt dies darauf hinaus, den Punkt durch die relativen Werte der mit gewissen Konstanten multiplizierten Potenzen desselben in bezug auf fünf gegebene Kugeln festzulegen. Zwischen den fünf s besteht eine Bedingungsgleichung zweiten Grades:

$$\Omega = 0.$$

In der Diskussion dieser Gleichung ist in demselben Sinne der gesamte Teil der metrischen Raumgeometrie vorhanden, der durch reziproke Radien ungeändert bleibt, wie sich die gesamte Liniengeometrie an die Diskussion der entsprechenden Gleichung $P = 0$ anknüpft. Daß diese Behandlung metrischer Probleme von großem Vorteile sein kann, mag hier nur an einem Beispiele erörtert werden. Auf dieses Beispiel ist Herr Lie bei dem Studium seiner Abbildung des linearen Komplexes geführt worden, indem er liniengeometrische Betrachtungen, die ich in einer früheren Abhandlung[15]) gegeben hatte, auf die entsprechenden metrischen Dinge übertrug. Andererseits ist dieses Beispiel eben für mich Veranlassung gewesen, die allgemeineren hier vorgetragenen Überlegungen anzustellen. Man bestimme nämlich den Punkt des Raumes durch fünf Koordinaten $s_1 \ldots s_5$, welche, gleich Null gesetzt, Kugeln vorstellen, die sich orthogonal schneiden. Dann hat Ω die Gestalt:

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + s_4^2 + s_5^2 = 0.$$

Schreibt man nun die Gleichung:

$$\frac{s_1^2}{k_1 + \lambda} + \frac{s_2^2}{k_2 + \lambda} + \cdots + \frac{s_5^2}{k_5 + \lambda} = 0,$$

wo λ ein Parameter, so hat man ohne weiteres das Orthogonalflächensystem vor sich, welches von den Herren Darboux und Moutard gefunden wurde, und das aus Flächen vierter Ordnung gebildet ist, die den imaginären Kreis doppelt enthalten[16]). — Diese Form entspricht, bis auf die Zahl der Variabeln, genau der Gestalt, die ich l. c. der Gleichung der Komplexe zweiten Grades mit gemeinsamer Singularitätenfläche gegeben habe; es findet also auch dieselbe Art der Diskussion auf sie Anwendung, wie dies Herr Lie in der vorstehenden Abhandlung [Math. Ann., Bd. 5] ausführt.

[15]) Math. Annalen, Bd. 2 (1870). Zur Theorie der Komplexe ersten und zweiten Grades. [Siehe Abh. II dieser Ausgabe.]

[16]) Vgl. Lie, Göttinger Nachrichten. 1871. Nr. 7, oder die vorstehende Abhandlung von S. Lie (Math. Ann., Bd. 5). — Auf dieselbe Gleichungsform war Herr Darboux bereits früher geführt worden. Er hat dieselbe in einer Abhandlung entwickelt, welche er 1868 der Akademie zu Paris eingereicht hat, die aber noch nicht veröffentlicht ist. Vgl. eine neuere Note in den Comptes Rendus, Sept. 1871, wo Herr Darboux einige in seiner gen. Abhandlung enthaltene Resultate anführt. [Die hier erwähnte Abhandlung von Darboux ist seitdem in erweiterter Form als Buch erschienen: Sur une classe remarquable des courbes et des surfaces. Paris, 1873.]

Aber auch für die Geometrie der $M_{n-1}^{(2)}$ des R_n ist die Verbindung, in welche sie hier mit der metrischen Geometrie gebracht wird, nicht ohne Wichtigkeit. Ich will hier unter vielen ähnlichen Betrachtungen nur eine hervorheben, die im folgenden für Liniengeometrie verwandt werden soll. Die ∞^{n-2} verschiedenen Fortschreitungsrichtungen, welche von einem Elemente des metrischen Raumes R_{n-1} zu benachbarten Elementen führen, bilden miteinander *Winkel*, z. B. können zwei solche Fortschreitungsrichtungen aufeinander senkrecht stehen. Diese Winkel bleiben, wie bekannt, bei Umformungen durch reziproke Radien ungeändert. Man wird daher, wenn im R_n eine $M_{n-1}^{(2)}$ gegeben ist, auch von Winkeln reden können, welche die Fortschreitungsrichtungen von einem Elemente der $M_{n-1}^{(2)}$ zu benachbarten Elementen der $M_{n-1}^{(2)}$ bilden. Bei der Bestimmung dieser Winkel kommen nur die projektivischen Eigenschaften der $M_{n-1}^{(2)}$ selbst, nicht etwa außerhalb im R_n gelegene fundamentale Gebilde in Betracht. Man übersieht dies deutlich, wenn man $n = 3$ nimmt, die $M_{n-1}^{(2)}$ also eine Fläche zweiten Grades bedeuten läßt. Durch jeden Punkt der Fläche gehen zwei Erzeugende hindurch; auf sie beziehen sich, als fundamentales Geradenpaar[17]), die zwischen den Fortschreitungsrichtungen zu benachbarten Punkten bestehenden Winkel. Insbesondere wird man zwei Fortschreitungsrichtungen zueinander senkrecht nennen, wenn sie harmonisch zu den beiden Erzeugenden liegen. Der analytische Ausdruck hierfür ist offenbar dieser. Sei $\Omega = 0$ die Fläche zweiten Grades. So bilden wir den Ausdruck:

$$2\,\Omega_{xy} = \frac{\partial\Omega}{\partial x_1}\cdot y_1 + \frac{\partial\Omega}{\partial x_2}\cdot y_2 + \frac{\partial\Omega}{\partial x_3}\cdot y_3 + \frac{\partial\Omega}{\partial x_4}\cdot y_4 .$$

Setzen wir in ihn für x_1, x_2, x_3, x_4 bez. dx_1, dx_2, dx_3, dx_4, für y_1, y_2, y_3, y_4 bez. $d'x_1, d'x_2, d'x_3, d'x_4$, so bedeutet das Verschwinden des Ausdrucks, daß die beiden Fortschreitungsrichtungen in dem genannten Sinne aufeinander senkrecht stehen[18]). Die entsprechende Formel wird auch bei n Dimensionen gültig bleiben und soll im folgenden Paragraphen für Liniengeometrie verwandt werden.

---

[17]) Vgl. „Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie". Math. Annalen, Bd. 4 (1871) [siehe Abh. XVI dieser Ausgabe] § 2, 3.

[18]) Allgemein wird der fragliche Winkel durch den folgenden Ausdruck gegeben sein. Sei Ω_{xy} der im Texte aufgestellte Aufdruck; Ω_{xx} und Ω_{yy} bedeute die Gleichung Ω bez. mit den x oder den y geschrieben. So ist der gesuchte Winkel

$$= \arccos \frac{\Omega_{xy}}{\sqrt{\Omega_{xx}}\,\sqrt{\Omega_{yy}}},$$

wo statt x und y bez. dx und $d'x$ einzutragen ist.

Hier ist ersichtlich, wie diese Winkelbestimmung mit der allgemeinen von Cayley aufgestellten projektivischen Maßbestimmung zusammenhängt, die eine F_2 als fundamentales Gebilde benutzt. (Phil. Transactions. t. 149. A sixth Memoir upon Quantics [(1859) Coll. Papers, Bd. II]. Vgl. auch des Verf.: „Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie" l. c.) Indes soll dieser Zusammenhang, der auch bei beliebig vielen Dimensionen gilt, hier nicht weiter verfolgt werden. [Auf den Begriff des Winkels zweier linearer Komplexe geht ausführlicher F. Lindemann in seiner Dissertation ein: Über unendlich kleine Bewegungen und über Kraftsysteme bei allgemeiner projektivischer Maßbestimmung. Erlangen, 1873 (Math. Ann., Bd. 7).]

§ 3.

Übertragung der Lehre von den Krümmungskurven und den Orthogonalsystemen auf Liniengeometrie.

Die Lehre von den Krümmungskurven und den Orthogonalsystemen konstituiert einen Teil der metrischen Geometrie, welcher durch reziproke Radien ungeändert bleibt. Es soll jetzt — als ein Beispiel für solche Übertragungen — das Entsprechende bei der Liniengeometrie aufgesucht werden. Zu diesem Zwecke mag die gewöhnliche Theorie zunächst so formuliert werden, daß ihre Unabhängigkeit von der Transformation durch reziproke Radien in Evidenz tritt.

Sei im gewöhnlichen Raum R_3 eine Fläche gegeben. Dieselbe wird in jedem Punkte von einfach unendlich vielen Kugeln berührt. Unter denselben gibt es nun jedesmal zwei ausgezeichnete, die auch noch in einem benachbarten Punkte berühren, die sogenannten *Hauptkugeln*. An ihre Existenz knüpft sich unmittelbar die Definition der Krümmungskurven. Man erhält eine Krümmungskurve, wenn man vom gewählten Punkte zu dem benachbarten Punkte fortschreitet, in welchem eine der beiden Hauptkugeln berührt. Krümmungskurven sind also solche auf einer Fläche verlaufenden Kurven, in deren konsekutiven Punkten die Fläche von derselben Kugel berührt wird[19]). Durch jeden Punkt gehen zwei Krümmungskurven; dieselben stehen aufeinander senkrecht.

Gehen wir nun zum metrischen Raume von vier oder gleich von $(n-1)$ Dimensionen. Eine Fläche desselben, d. h. eine Mannigfaltigkeit, die durch eine Gleichung von ihm ausgeschieden wird, wird wieder in jedem Punkte von einfach unendlich vielen Kugeln berührt (unter einer Kugel, wie oben, eine besondere $M_{n-2}^{(2)}$ verstanden). Unter denselben finden sich $(n-2)$ stationär berührende, d. h. solche, die noch in einem benachbarten Elemente berühren. Man wird jetzt von dem beliebig gewählten Punkte zu einem der benachbarten Berührungspunkte fortschreiten können und so weiter fort. Man erhält dann, einer Krümmungskurve

---

[19]) Die gewöhnliche Definition der Krümmungskurven, daß sich die Flächennormalen in konsekutiven Punkten einer Krümmungskurve schneiden, ist eine Folge der hier vorgetragenen. Sie geht durch Anwendung reziproker Radien in eine allgemeinere über, in welcher das (zufällig gewählte) Inversionszentrum mit auftritt; deshalb ziehen wir die Definition, wie sie im Texte gegeben ist, vor.

im R_3 entsprechend, eine einfach unendliche auf der Fläche gelegene Mannigfaltigkeit, welche die Eigenschaft hat, *daß die gegebene Fläche in je zwei konsekutiven Punkten derselben von der nämlichen Kugel berührt wird*. Solcher Mannigfaltigkeiten[20]) gehen durch jeden Punkt der Fläche $n-2$; ihre Fortschreitungsrichtungen stehen aufeinander senkrecht.

Gehen wir jetzt zur Liniengeometrie über. Wir haben dann n gleich 5 zu setzen. An Stelle der Fläche des R_4 tritt hier der Linienkomplex. Statt von Punkten der Fläche sprechen wir von Linien des Komplexes; statt von Kugeln des R_4 von linearen Komplexen (den ebenen Schnitten der in R_5 gelegenen $M_4^{(2)}$, die den Linienraum vorstellt). So erhalten wir das Folgende.

Sei ein Linienkomplex gegeben. Derselbe wird in einer (beliebig gewählten) seiner Geraden von einfach unendlich vielen linearen Komplexen berührt, den von Plücker sogenannten linearen Tangentialkomplexen. Unter ihnen gibt es drei ausgezeichnete, welche auch noch in einer benachbarten Geraden berühren. Schreitet man von der angenommenen Geraden zu einer dieser benachbarten und von da weiter in gleichem Sinne fort, so beschreibt man eine dem Komplexe angehörige Linienfläche — sie soll im folgenden *eine Hauptfläche des Komplexes* heißen — welche die Eigenschaft hat, daß der Komplex in je zwei konsekutiven Erzeugenden derselben von dem nämlichen linearen Komplexe berührt wird. Durch jede Gerade des Komplexes gehen drei Hauptflächen hindurch; ihre Fortschreitungsrichtungen sind, in übertragenem Sinne, zueinander senkrecht.

Wir haben jetzt noch zu erörtern, welchen metrischen Sinn dieses Senkrecht-Stehen besitzt. Da unter Zugrundelegung gewöhnlicher Linienkoordinaten die für sie geltende Bedingungsgleichung die Form hat:

$$P \equiv p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0,$$

so werden nach § 2 zwei Fortschreitungsrichtungen dp und $d'p$ zueinander senkrecht genannt werden müssen, wenn:

$$\begin{aligned} 0 = {} & dp_{12}d'p_{34} + dp_{13}d'p_{42} + dp_{14}d'p_{23} \\ & + d'p_{12}dp_{34} + d'p_{13}dp_{42} + d'p_{14}dp_{23}. \end{aligned}$$

Dann aber besteht zwischen der gegebenen Geraden p und ihren beiden benachbarten, $p+dp$ und $p+d'p$, eine Beziehung, die ich als *involu-*

[20]) Man kann sie wieder dadurch definieren, daß sich die in ihren konsekutiven Punkten errichteten Flächennormalen schneiden. — Die Krümmungstheorie eines Raumes von beliebig vielen Dimensionen ist in neuerer Zeit Gegenstand wiederholter Darstellungen gewesen. Man geht dabei meist von der letztgenannten Definition aus.

torische Lage der beiden benachbarten Geraden bezeichne[21]) und die folgenden geometrischen Inhalt hat.

Eine benachbarte Gerade $p+dp$ ordnet jedesmal die Ebenen, welche durch p gehen, den auf p befindlichen Punkten projektivisch zu. Jede durch p gehende Ebene schneidet nämlich $p+dp$ in einem Punkte, der beim Grenzübergange auf p selbst rückt. Man übersieht dies deutlich, wenn man p und $p+dp$ als konsekutive Erzeugende einer Linienfläche betrachtet. Jeder durch p hindurchgehenden Ebene entspricht dann ein auf p gelegener und durch $p+dp$ bestimmter Punkt: der Berührungspunkt mit der Fläche.

Sind nun zwei benachbarte Gerade $p+dp$, $p+d'p$ gegeben, so betrachte man jedesmal diejenigen beiden Punkte als entsprechend, die einer durch p gelegten Ebene bezüglich durch die beiden benachbarten Geraden zugeordnet werden. So erhält man auf p zwei kollinear aufeinander bezogene Punktreihen.

Die beiden benachbarten Geraden heißen nun involutorisch gelegen, wenn die beiden Punktreihen eine Involution bilden[22]). [Vgl. die ganz analoge Definition von der involutorischen Lage zweier Komplexe in der Einleitung, S. 109.]

Gehen wir jetzt noch einmal zu dem metrischen Raume R_3 zurück und betrachten in demselben Orthogonalsysteme. Dies sind einfach unendlich viele Flächen, von denen durch jeden Punkt des Raumes drei hindurchgehen. Dieselben schneiden einander senkrecht. Für solche Orthogonalflächensysteme gilt der Dupinsche Satz: *Je zwei Flächen des Systems schneiden sich nach einer gemeinsamen Krümmungskurve.*

Ähnliche Flächensysteme kann man im R_{n-1} betrachten; für sie gilt ein Satz, der dem Dupinschen entspricht. Diese Flächensysteme sind wieder einfach unendlich, durch jeden Punkt des R_{n-1} gehen $n-1$ Flächen. Dieselben schneiden sich gegenseitig senkrecht. Für diese Systeme gilt dann der Satz: *Je $n-2$ Flächen schneiden sich nach einer gemeinsamen Krümmungskurve*, unter Krümmungskurven die eben betrachteten einfach unendlichen Mannigfaltigkeiten verstanden.

[21]) Als *Winkel* zweier benachbarter Geraden würde man bezeichnen können

$$\operatorname{arc\,cos} \frac{dp_{12}d'p_{34} + d'p_{12}dp_{34} + \dots}{2\sqrt{dp_{12}dp_{34} + \dots} \cdot \sqrt{d'p_{12}d'p_{34} + \dots}}.$$

[22]) Man sieht ohne weiteres die Richtigkeit des folgenden Satzes ein: Diejenigen Geraden, welche einem Linienkomplexe in der Nähe einer seiner Geraden p angehören, liegen zu einer bestimmten p benachbarten Linie, die im allgemeinen nicht selbst dem Komplexe angehört, in Involution. Und umgekehrt gehören alle solche benachbarten Geraden dem Komplexe an. — Zwei Komplexe heißen nun in bezug auf eine gemeinsame Gerade p in Involution, wenn die benachbarten Geraden $p+dp$, $p+d'p$ involutorisch liegen, die sie bez. in dem hier auseinandergesetzten Sinne der Geraden p zuordnen.

Im Linienraume werden wir uns den Begriff der *Involutionssysteme von Komplexen* zu bilden haben. Das sind einfach unendliche Komplexsysteme. Jede Gerade des Raumes gehört vieren der Komplexe an, und zwar liegen die vier Komplexe, denen eine Gerade angehört, jedesmal paarweise mit Bezug auf diese Gerade in Involution.

Für diese Komplexinvolutionssysteme gilt dann wieder ein Satz, der dem Dupinschen entspricht: *Je drei Komplexe schneiden sich nach einer gemeinschaftlichen Hauptfläche.*

Es ist bekannt, wie für irreduzibele Orthogonalsysteme noch andere allgemeine Sätze aufgestellt werden können. So zeigte Herr Kummer, daß die Kurven eines irreduzibelen Orthogonal-Kurvensystems notwendig konfokal sind; Herr Darboux[23]) dehnte diesen Satz auf Orthogonalflächensysteme im R_3 aus und fügte weitere, erst im R_3 auftretende, Eigenschaften hinzu. Es ist ersichtlich, daß analoge Eigenschaften für die irreduzibeln Orthogonalsysteme in beliebigen Räumen, wie auch im Linienraume für irreduzibele Involutionssysteme existieren. Ich gehe hier auf dieselben nicht ein; ich bemerke nur, daß dem Satze von der Konfokalität der orthogonalen Flächen der liniengeometrische Satz entspricht: *Komplexe eines irreduzibeln Involutionssystems haben eine gemeinsame Singularitätenfläche*[24]).

Das einfachste Beispiel eines irreduzibelen Involutionssystems geben denn auch die einfach unendlich vielen Komplexe zweiten Grades mit gemeinsamer Singularitätenfläche. Man kann für dieselben, wie ich in der schon genannten Arbeit: „Zur Theorie usw." (Math. Annalen, Bd. 2 (1870) [siehe Abh. II dieser Ausgabe] gezeigt habe, die folgende algebraische Darstellung anwenden. Seien $x_1, \ldots, x_6$ homogene Funktionen der p_{ik}, für die

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_6^2 = 0.$$

So sind die Komplexe dargestellt durch:

$$\frac{x_1^2}{k_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{k_2 - \lambda} + \ldots + \frac{x_6^2}{k_6 - \lambda} = 0,$$

wo λ einen Parameter bezeichnet. In der Tat kommt der Parameter λ vermöge der Relation $\sum x^2 = 0$ im vierten Grade vor. Jede Gerade des Raumes gehört also vier Komplexen des Systems an. Je zwei Komplexe $\lambda = \lambda_1$ und $\lambda = \lambda_2$ liegen aber auch in bezug auf die gemeinsame Gerade in Involution. Die Bedingung dafür, daß zwei Komplexe

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0$$

[23]) Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure. t. 2. 1865.

[24]) Bei Plücker ist die Singularitätenfläche nur für Komplexe zweiten Grades definiert. Diese Lücke ist durch Herrn Pasch in seiner Habilitationsschrift: „Zur Theorie der Komplexe und Kongruenzen von Geraden", Gießen 1870, ausgefüllt worden.

mit Bezug auf eine gemeinsame Gerade in Involution sind, ist nämlich bei der gewählten Koordinatenbestimmung:

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} = 0 \,\{\text{ vermöge } \varphi = 0,\ \psi = 0\}.$$

Dieser Ausdruck verschwindet aber immer, wenn φ, ψ zwei Komplexe des hier betrachteten Systems sind. Denn derselbe wird gleich

$$4\left[\frac{x_1^2}{(k_1-\lambda_1)\,(k_1-\lambda_2)} + \frac{x_2^2}{(k_2-\lambda_1)\,(k_2-\lambda_2)} + \ldots + \frac{x_6^2}{(k_6-\lambda_1)\,(k_6-\lambda_2)}\right]$$

und das ist durch Zerlegung in Partialbrüche:

$$= \frac{4}{\lambda_1 - \lambda_2}(\varphi - \psi),$$

verschwindet also mit φ und ψ.

Je drei Komplexe des Systems haben als Komplexe des zweiten Grades Linienflächen des sechzehnten Grades gemein; *die Hauptflächen der Komplexe zweiten Grades sind also vom sechzehnten Grade.* Ich gehe nicht näher auf die Diskussion dieser Flächen ein, die, wenn man die Komplexe spezialisiert, eine große Zahl besonderer Flächen unter sich begreifen.

§ 4.

Weitere Betrachtungen über die Hauptflächen der Komplexe.

In diesem letzten Paragraphen mögen wir noch weitere Eigenschaften der Hauptflächen von Komplexen, der Involutionssysteme usw. entwickeln, und zwar an der Hand rein liniengeometrischer Betrachtungen. Dieselben übertragen sich natürlich wieder auf die metrische Geometrie des R_4, was aber nicht weiter verfolgt werden soll.

Herr Lie hat den merkwürdigen Satz gefunden (der bei ihm in anderweitigem Zusammenhange steht), *daß man auf jeder Linienfläche, die einem linearen Komplexe angehört, eine Haupttangenten-Kurve kennt.* Es gibt nämlich auf jeder Erzeugenden der Linienfläche zwei Punkte, deren Tangentialebene gleichzeitig die ihnen im linearen Komplexe entsprechende Ebene ist. Die Gesamtheit dieser Punkte bilden die in Rede stehende Haupttangenten-Kurve.

Den Beweis kann man einfach so stellen. Alle Tangenten der Fläche in einem solchen Punkte gehören dem Komplexe an. Die Punkte bilden daher eine Kurve, deren Tangenten dem Komplexe angehören, eine Komplexkurve. Eine Komplexkurve hat aber die Eigenschaft, in jedem ihrer Punkte die im Komplexe entsprechende Ebene zur Oskulationsebene zu besitzen. Andererseits ist diese Ebene jedesmal nach Voraussetzung Tangentialebene der Fläche. Die Kurve ist also eine Haupttangenten-Kurve.

Wenn nun eine Linienfläche als irgendeinem Komplexe angehörig gegeben ist, so kann man auf ihr immer in ähnlicher Weise eine Kurve bestimmen; nur ist sie dann im allgemeinen keine Haupttangenten-Kurve. Man suche nämlich auf jeder Erzeugenden diejenigen beiden Punkte, in denen die Fläche vom Komplexkegel berührt wird. Die Reihenfolge dieser Punktepaare konstituiert die fragliche Kurve.

Ist nun aber die Linienfläche insbesondere eine Hauptfläche des gegebenen Komplexes, *so ist die so konstruierte Kurve eine Haupttangenten-Kurve derselben*[25]).

Der Beweis ergibt sich vermöge des Lieschen Satzes unmittelbar aus der Definition der Hauptfläche. Der gegebene Komplex wird in je zwei konsekutiven Erzeugenden von dem nämlichen linearen Komplexe berührt. Der betreffende lineare Komplex enthält also drei konsekutive Erzeugende der Linienfläche und bestimmt auf den beiden ersten derselben die nämlichen beiden Punktepaare, wie der gegebene Komplex selbst.

Nun kann man den Lieschen Satz auch so formulieren. Enthält ein linearer Komplex drei konsekutive Erzeugende einer Linienfläche, so bestimmt er auf den beiden ersten Punktepaare, die derselben Haupttangenten-Kurve angehören. Hiermit ist der Beweis unseres Satzes gegeben.

Wenden wir uns jetzt zur Betrachtung eines Involutionssystems. Eine einzelne Gerade p gehört vieren der Komplexe an, die mit a, b, c, d bezeichnet sein mögen. Dieselben liegen paarweise miteinander in Involution. Infolgedessen hat man zunächst die folgenden Sätze, wegen deren Beweis ich auf die Arbeit: „Zur Theorie usw.“ (Math. Annalen, Bd. 2 (1870) [siehe Abh. II dieser Ausgabe] verweise[26]).

1. Die Linienfläche, welche dreien der Komplexe, etwa a, b, c, angehört wird in allen Punkten von p von dem betreffenden Komplexkegel von d berührt.

2. Die Linie p berührt die Brennfläche der Kongruenz zweier Komplexe a, b in den nämlichen beiden Punkten, in denen sie die Brennfläche der Kongruenz der beiden anderen Komplexe c, d berührt.

3. Die drei in dieser Weise auf der Geraden entstehenden Punktepaare (ab, cd), (ac, bd), (ad, bc) sind zueinander harmonisch[27]).

Betrachten wir jetzt eine Hauptfläche, die dreien der Komplexe, etwa a, b, c, gemeinsam ist. Auf ihr kennt man, jedem der drei Komplexe entsprechend, eine Haupttangenten-Kurve, welche jede Erzeugende zweimal schneidet. Nun gilt aber für Haupttangenten-Kurven der Linien-

[25]) Auch die Umkehrung dieses Satzes ist richtig.

[26]) Dieselben sind dort nur für lineare Komplexe bewiesen. Sie gelten also auch für die linearen Tangentialkomplexe der hier gegebenen Komplexe und hiermit für die letzteren selbst.

[27]) Hieran knüpft sich der weitere Satz: Legt man durch p eine Ebene, so enthält dieselbe, a, b, c, d entsprechend, je eine Komplexkurve. Die vier Berührungspunkte der vier Kurven mit p bilden eine viergliedrige Punktgruppe, deren Kovariante sechsten Grades durch die drei Punktepaare des Textes dargestellt wird.

flächen der von Herrn Paul Serret angegebene Satz: daß die Erzeugenden der Linienfläche von den Haupttangenten-Kurven projektivisch geteilt werden. Hieraus wird man einmal schließen, daß die sechs Punkte, in denen jede Erzeugende von den drei Haupttangenten-Kurven a, b, c geschnitten wird, sechs festen Elementen projektivisch sind. Dies ist, wie vorstehend (Satz 3) angegeben, in der Tat der Fall. Andererseits wird man folgern, *daß man auf der fraglichen Hauptfläche alle Haupttangenten-Kurven durch rein algebraische Prozesse bestimmen kann.* Denn man erhält alle Haupttangenten-Kurven, wenn man sich einen Punkt auf der Fläche so bewegen läßt, daß er jedesmal auf allen Erzeugenden mit dreien der sechs Punkte (und also mit allen) ein festes Doppelverhältnis bildet, und hierzu sind nur algebraische Operationen notwendig.

Die beiden Punkte, in denen die Haupttangenten-Kurve a eine Erzeugende, etwa p, trifft, sind, behaupte ich jetzt, die Berührungspunkte von p mit der Brennfläche der b und c gemeinsamen Kongruenz. Denn in diesen Punkten berührt der Komplexkegel von a die Fläche, also auch, nach Satz 1, den Komplexkegel von d. Deshalb sind diese Punkte die Berührungspunkte von p mit der Brennfläche ad und also auch, nach Satz 2, mit der Brennfläche bc, was zu beweisen war. Man hat also den Satz:

Die Hauptfläche abc berührt die Brennfläche bc nach der Haupttangenten-Kurve a, die Brennfläche ca nach der Kurve b, die Brennfläche ab nach der Kurve c.

Hieraus wird man weiter schließen:

Daß man auch auf den Brennflächen der Kongruenzen je zweier Komplexe die Haupttangenten-Kurven kennt.

Es sind dies dieselben Kurven, die Haupttangenten-Kurven der Hauptflächen waren. In der Tat erhält man in der Gesamtheit der Berührungs-Kurven der Brennfläche mit den Hauptflächen auch die Gesamtheit der Haupttangenten-Kurven der Brennfläche. Denn die in einem Punkte der Brennfläche ab berührende Gerade, welche a und b angehört, gehört gleichzeitig zwei weiteren Komplexen c und d an. Man erhält also in den Berührungskurven der Brennflächen mit den Hauptflächen abc, abd die *beiden* durch den gewählten Punkt hindurchgehenden Haupttangenten-Kurven[28]).

[28]) Die verschiedenen hier aufgestellten Sätze hatte ich, mitsamt dem Satze des § 3: „daß sich je drei Komplexe eines Involutionssystems nach einer gemeinsamen Hauptfläche schneiden“, in der bereits zitierten Note in den Gött. Nachrichten Nr. 3. (1871) [siehe Abh. VII dieser Ausgabe] in dem Satze zusammengefaßt: *daß die Linienfläche, welche drei Komplexen eines Involutionssystems gemeinsam ist, die Brennfläche je zweier derselben nach einer Haupttangenten-Kurve berührt,* und in dieser Fassung analytisch erwiesen. Die heterogenen Bestandteile, welche dieser Satz enthielt, erscheinen im Texte gesondert. Ich bin Herrn Lie dafür verpflichtet, daß er mich auf die Möglichkeit der Sonderung aufmerksam gemacht hat.

Für das Involutionssystem der Komplexe zweiten Grades findet man insbesondere: die Haupttangenten-Kurven auf den Hauptflächen, nach denen diese die Brennflächen berühren, sind von der 32. Ordnung und Klasse. Die Brennflächen selbst sind gleich den Hauptflächen von der sechzehnten Ordnung und Klasse.

Durch passende Partikularisationen erhält man aus der Betrachtung dieser Brennflächen und Hauptflächen die Bestimmung der Haupttangenten-Kurven auf einer großen Zahl besonderer Flächen. Hier sei nur eine solche Partikularisation erwähnt. Die beiden Komplexe des Systems, die miteinander die Kongruenz und durch diese die Brennfläche bestimmen, mögen zusammenfallen. Dann wird die Kongruenz die Kongruenz der singulären Linien des betreffenden Komplexes. Ihre Brennfläche zerfällt in die allen Komplexen gemeinsame Singularitätenfläche, die von der vierten Ordnung und Klasse ist und eine weitere Fläche von der zwölften Ordnung und Klasse. Auf beiden erhält man die Haupttangenten-Kurven, die jetzt bezüglich von der sechzehnten Ordnung werden. Nun ist für die allgemeinen Komplexe zweiten Grades die Singularitätenfläche eine Kummersche Fläche vierten Grades mit sechzehn Knotenpunkten. Man erhält also eine Bestimmung der Haupttangenten-Kurven dieser Fläche, die dahin geht: daß sie die Berührungs-Kurven der Fläche mit denjenigen Linienflächen sind, welche einem beliebigen (aber fest gewählten) zugehörigen Komplexe als singuläre Linien und außerdem noch bez. einem zweiten (veränderlichen) der zugehörigen Komplexe angehören. Hiermit in Übereinstimmung findet sich eine Bestimmung der Haupttangenten-Kurven der Kummerschen Fläche, wie sie in einer gemeinsamen Arbeit in den Monatsberichten der Berliner Akademie, Dezember 1870 [siehe Abh. VI dieser Ausgabe], von Lie und mir gegeben worden ist. Der Inhalt dieser Note kann als eine nähere Ausführung einiger der dort vorgetragenen Betrachtungen angesehen werden.

Göttingen, im Oktober 1871.

IX. Über gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen.

[Math. Annalen, Bd. 5 (1872).]

Bei liniengeometrischen Untersuchungen wird man zu gewissen Differentialgleichungen geführt, die im folgenden formuliert und in noch näher anzugebenden Fällen integriert werden sollen. Dieselben entsprechen im wesentlichen den folgenden drei Aufgaben:

1. Man soll diejenigen Linienkomplexe finden, deren Geraden die Tangenten einer Fläche sind.

2. Man soll diejenigen einem gegebenen Linienkomplexe angehörigen Kongruenzen bestimmen, deren Geraden Haupttangenten ihrer Brennflächen sind.

3. Man soll die Umhüllungskurven der Linien einer Kongruenz angeben.

Bei der im folgenden eingeschlagenen Darstellung, bei welcher durchgängig von Linienkoordinaten Gebrauch gemacht werden wird[1]), erkennt man, wie diese drei Probleme zusammen eine naturgemäße Gruppe bilden.

Das Problem 1 ist eines der ersten, welche bei der Untersuchung der Linienkomplexe auftreten. Es ist denn auch bereits von Cayley in seiner ersten bez. Mitteilung[2]), wenn auch nur beiläufig, beantwortet worden. Cayley untersucht dort diejenigen Bedingungen, denen ein Linienkomplex genügen muß, damit seine Geraden eine feste Kurve schneiden. Er findet nur eine erste Bedingung, die aber noch nicht hinreichend ist, vielmehr auch dann erfüllt ist, wenn die Linien des Komplexes eine Fläche umhüllen[3]). Diese nämliche Bedingung wird im folgenden auf einem ganz

[1]) Das Nachstehende mag zugleich dazu dienen, zu illustrieren, wie man mit Linienkoordinaten operieren kann, ohne auf den Zusammenhang derselben mit Punkt- und Ebenenkoordinaten zurückzugehen.

[2]) Quarterly Journal, t. 3, S. 227. [(1860) Coll. Papers IV.]

[3]) [Ein vollständiges System von Bedingungen für den Sekantenkomplex einer Kurve hat erst Herr A. Voß in einer Note in den Gött. Nachr., 1875, S. 101—123, aufgestellt.]

anderen Wege abgeleitet werden, und es wird gezeigt werden, daß sie in der Tat den Komplex als Gesamtheit der Tangenten einer Fläche charakterisiert. Für Komplexe zweiten Grades, insbesondere für diejenigen, die eine Fläche umhüllen, findet sich das Entsprechende bei Plücker (Neue Geometrie, Nr. 341) angegeben.

Das Problem 2 ist von Lie, zunächst unter einer anderen Form aufgestellt worden[4]). Er verlangt nämlich, solche Flächen zu finden, die in jedem ihrer Punkte von dem Komplexkegel eines gegebenen Komplexes berührt werden. Sodann zeigt er, daß die Kante, nach welcher der Komplexkegel die gesuchte Fläche berührt, eine Haupttangente der Fläche ist, und daß diese Eigenschaft die fraglichen Flächen charakterisiert. Das Problem kommt also darauf hinaus: Flächen zu finden, bei welchen ein System Haupttangenten dem gegebenen Komplexe angehört. In dieser Form ist es offenbar mit dem Problem 2 identisch; die Gestalt, die ihm vorstehend erteilt wurde, schließt sich nur besser an die gleich vorzutragende Behandlung an.

Das Problem 3 endlich entsteht, sowie man von Linienkongruenzen handelt. Die Linien einer Kongruenz lassen sich nach der allgemeinen Theorie[5]) auf zwei Weisen in eine Reihe Developpablen zusammenfassen; das Problem ist: wenn die Kongruenz gegeben ist, diese Developpablen zu bestimmen.

Das Problem 2 soll im folgenden insbesondere für den allgemeinen Linienkomplex zweiten Grades gelöst werden. Eine solche Lösung hat auf anderem, mehr geometrischem Wege Lie in der vorstehenden Abhandlung gegeben. Die Resultate stimmen natürlich überein; es wird daher interessant, zu verfolgen, wie seine geometrischen Betrachtungen den hier angewandten analytischen entsprechen. In der analytischen Schlußformel, die aufgestellt werden wird, erscheinen seine Resultate in übersichtlicher Weise zusammengefaßt.

Gleichzeitig erledigt sich bei der eingeschlagenen Methode das Problem 3 für diejenigen Linienkongruenzen vierter Ordnung und Klasse, welche zwei Linienkomplexen zweiten Grades gemeinsam sind, die zu der nämlichen Singularitätenfläche gehören. Unter dieselben fallen als besondere Art, wie hier gleich hervorgehoben sein soll, die allgemeinen Kongruenzen zweiter

[4]) Vgl. die Abhandlung von Lie in den Math. Annalen, Bd. 5 und dessen bezügliche Mitteilungen an die Akademie zu Christiania (Berichte 1870, 71). Es ist dort die das Problem darstellende Differentialgleichung kurz als „die Differentialgleichung des gegebenen Linienkomplexes“ bezeichnet. — Auch Herr Darboux hatte sich mit diesem Gegenstande beschäftigt; vgl. eine bez. Bemerkung von Lie in dem vorstehenden Aufsatze. [Die hier und weiter im Text als vorstehender Aufsatz zitierte Arbeit von Lie ist die in der Fußnote [1]) zur Abh. VIII erwähnte Abhandlung.]

[5]) Vgl. Kummer in Borchardts Journal, Bd. 57 (1860).

Ordnung und Klasse, welche einem Komplexe zweiten und einem Komplexe ersten Grades angehören[6]).

Nach der oben zitierten Abhandlung von Lie wird man erkennen, wie diese liniengeometrischen Probleme identisch sind mit Problemen, die sich auf *Kugelgeometrie* beziehen. Problem 1 entspricht dann der Forderung: diejenigen Gleichungen zwischen den vier Koordinaten einer Kugel (ihren Mittelpunktskoordinaten und ihrem Radius) anzugeben, welche dreifach unendliche Kugelsysteme (Kugelkomplexe) darstellen, deren sämtliche Kugeln eine feste Fläche berühren. Dem Problem 2 entspricht die Aufgabe: Wenn ein Kugelkomplex gegeben ist, diejenigen Flächen zu finden, deren ein System Hauptkugeln dem Komplexe angehört[7]). Endlich dem Probleme 3 die Aufgabe: Wenn eine Kugelkongruenz, d. h. zweifach unendlich viele Kugeln, gegeben ist, solche einfach unendliche Kugelreihen aus ihr auszuscheiden, in denen sich je zwei konsekutive Kugeln berühren.

Andererseits wird man, von dem Zusammenhange ausgehend, der zwischen Liniengeometrie und der metrischen Punktgeometrie des Raumes von vier Dimensionen besteht[8]), äquivalente Probleme für diese metrische Geometrie aufstellen können. Die entsprechenden Probleme der metrischen Geometrie des Raumes von drei Dimensionen mögen hier ausgesprochen sein; ihre Zahl hat sich, wie die Zahl der Variabeln, um 1 vermindert. Es sind die folgenden beiden:

a) diejenigen developpablen Flächen anzugeben, welche den unendlich fernen imaginären Kreis enthalten;

b) auf einer gegebenen Fläche diejenigen Kurven zu bestimmen, deren Tangenten den unendlich fernen Kreis fortwährend treffen (die sogenannten Kurven ohne Länge).

Mit den letzteren Kurven haben sich besonders die neueren französischen Geometer beschäftigt. Auf die Aufsuchung dieser Kurven kommt, wie beiläufig bemerkt sei, das Problem der konformen Abbildung zweier Flächen aufeinander hinaus. Man hat nämlich nur die beiden Flächen so aufeinander zu beziehen, daß den fraglichen Kurven der einen Fläche die der anderen entsprechen. — Die Developpablen a) sind hinsichtlich ihrer ausgezeichneten

[6]) Vgl. den Satz XXXVI der allgemeinen Aufzählung der Strahlensysteme zweiter Ordnung von Kummer. (Abhandlungen der Berl. Akad. 1866.)

[7]) Mit diesem Probleme, das, zusammen mit Problem 2), von Lie in der vorstehenden Abhandlung behandelt ist, hatte sich, wie er uns mitteilte, auch Herr Darboux in der neuesten Zeit beschäftigt. Er hatte dasselbe gerade in dem Umfange gelöst, wie eine solche Lösung bei Lie angegeben ist, und wie sie durch Anwendung der Lieschen Transformation von Liniengeometrie in Kugelgeometrie aus der im Texte gegebenen Lösung des liniengeometrischen Problems hervorgeht. Die Methode, die Herr Darboux dabei benutzte, war, soweit ich übersehen kann, mit der, die hier angewandt werden soll, durchaus identisch.

[8]) Vgl. den vorstehenden Aufsatz: Über Liniengeometrie und metrische Geometrie.

metrischen Eigenschaften zuerst von Herrn Darboux untersucht worden[9]). Herr Darboux hat auch, wie er mir mitteilte, das Problem b) für die Flächen vierten Grades gelöst, die den imaginären Kreis doppelt enthalten. Dies entspricht vermöge der Lieschen Abbildung (wie auch Lie bemerkt) der von mir im folgenden gegebenen und schon früher gelegentlich mitgeteilten [Göttinger Nachrichten, 1871, Nr. 1 (in diese Ausgabe nicht aufgenommen)] Integration der Umhüllungskurven einer Linienkongruenz zweiter Ordnung und Klasse. Es mag genügen, hiermit auf die entsprechenden metrischen Probleme hingewiesen zu haben, die sich natürlich nicht nur auf den metrischen Raum von drei und vier, sondern von beliebig vielen Dimensionen beziehen[10]). Ich wende mich jetzt zu den liniengeometrischen Aufgaben zurück, die den eigentlichen Inhalt dieser Mitteilung bilden sollen und beginne damit, einiges, was später benutzt werden soll, über den linearen Komplex vorauszuschicken.

§ 1.

Einiges über den linearen Komplex.

In dem vorhergehenden Aufsatze: „Über Liniengeometrie und metrische Geometrie" habe ich in § 1 entwickelt, wie die Liniengeometrie aufgefaßt werden kann als die Geometrie auf einer im Raume von fünf Dimensionen gelegenen Fläche zweiten Grades[11]). Dieselbe sei, unter $x_1, x_2, \ldots, x_6$ die homogenen Koordinaten des Raumes von fünf Dimensionen verstanden, durch

$$\Omega(x_1, x_2, \ldots, x_6) = 0$$

dargestellt. Ein linearer Komplex:

$$u_1 x_1 + u_2 x_2 + \ldots + u_6 x_6 = 0$$

ist bei dieser Auffassung wie die Ebene des betreffenden Raumes. Hieraus schließt man, *daß ein linearer Komplex eine Invariante hat*, nämlich denjenigen Ausdruck, der, gleich Null gesetzt, aussagt, daß die Ebene $u_x = 0$ die Fläche $\Omega = 0$ berührt. Dieser Ausdruck entsteht aus der Determinante von Ω durch Ränderung mit den Koeffizienten u. Hat Ω insbesondere[12]), wie im folgenden der Einfachheit wegen angenommen werden wird, die Form

$$0 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_6^2,$$

[9]) Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure, t. 2, 1865.

[10]) Nach den Auseinandersetzungen des § 2 des vorhergehenden Aufsatzes ist ersichtlich, wie sich diese metrischen Probleme genau mit denselben Formeln behandeln lassen, wie die hier ausgeführten liniengeometrischen.

[11]) Dieser Ausdruck sei hier gestattet, da er wohl nicht mißverstanden werden kann.

[12]) Vgl. „Zur Theorie der Komplexe usw.", Math. Annalen, Bd. 2 (1870). [Siehe Abh. II dieser Ausgabe.]

so erhält die Invariante die Gestalt:

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_6^2.$$

Verschwindet die Invariante, so ist der lineare Komplex ein sogenannter *spezieller*, d. h. er besteht aus der Gesamtheit der Geraden, die eine feste Gerade schneiden.

Seien jetzt zwei lineare Komplexe gegeben:

$$u = 0, \qquad v = 0.$$

Dieselben haben eine lineare Kongruenz gemein, die gleichzeitig allen Komplexen

$$\lambda u + \mu v = 0$$

angehört. Unter denselben finden sich zwei spezielle, die sogenannten beiden Direktrizen. Man bestimmt dieselben, indem man die Invariante von $\lambda u + \mu v$ bildet. Sei A_{uu} die Invariante von u, A_{vv} diejenige von v, endlich $A_{uv} = A_{vu}$ derjenige Ausdruck, der entsteht, wenn man die Determinante von Ω auf der einen Seite mit den Koeffizienten von u, auf der anderen mit denen von v rändert. Diesen Ausdruck A_{uv} habe ich gelegentlich die *simultane Invariante* der beiden Komplexe genannt. (Ihr Verschwinden ist die Bedingung für die involutorische Lage zweier Komplexe.) Bei dieser Bezeichnung wird die Invariante von $\lambda u + \mu v$:

$$\lambda^2 A_{uu} + 2\lambda\mu A_{uv} + \mu^2 A_{vv}.$$

Dieselbe, gleich Null gesetzt, ergibt eine quadratische Gleichung für $\frac{\lambda}{\mu}$, und diese ist es, welche die beiden Direktrizen bestimmt. Die hiermit aufgestellte quadratische Gleichung hat, als quadratische binäre Form der Variabeln λ, μ betrachtet, eine Invariante:

$$A_{uu} A_{vv} - A_{uv}^2.$$

Dieselbe ändert sich (bis auf einen Faktor) nicht, wenn man statt u, v irgend zwei andere Komplexe der Gruppe $\lambda u + \mu v$ setzt. Sie ist also eine *Kombinante* der beiden Komplexe u, v, und deswegen eine *Invariante der durch dieselben bestimmten Kongruenz.*

Das Verschwinden dieser Invariante sagt aus, daß die quadratische Gleichung zur Bestimmung der Direktrizen der Kongruenz zwei gleiche Wurzeln hat, daß also die Direktrizen der Kongruenz zusammenfallen (vgl. Plückers Neue Geometrie, Nr. 68). Die Kongruenz soll dann eine *spezielle* lineare Kongruenz heißen.

Eine weitere Partikularisation tritt ein, wenn nicht nur $A_{uu} A_{vv} - A_{uv}^2 = 0$, sondern A_{uu}, A_{vv}, A_{uv} einzeln verschwinden. Dann sind u und v beides spezielle Komplexe (gerade Linien), die sich schneiden. Die Kongruenz zerfällt in zwei: in die Kongruenz erster Ordnung und nullter

Klasse derjenigen Geraden, die durch den gemeinsamen Schnittpunkt gehen, und die Kongruenz erster Klasse und nullter Ordnung der in der gemeinsamen Ebene verlaufenden Geraden. Eine solche lineare Kongruenz wird im folgenden als eine *zerfallende* bezeichnet werden. Eine zerfallende Kongruenz hat unendlich viele Direktrizen: die Geraden des Büschels, dem u und v angehören und die durch

$$\lambda u + \mu v = 0$$

dargestellt sind.

Betrachten wir jetzt drei lineare Komplexe:

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0.$$

Dieselben haben eine Regelschar, d. h. die eine Erzeugung einer Fläche zweiten Grades (eines einschaligen Hyperboloids) gemein. Die anderen Erzeugenden des Hyperboloids sind die Direktrizen der Kongruenz je zweier Komplexe der Gruppe:

$$\lambda u + \mu v + \nu w = 0.$$

Man erhält alle zweiten Erzeugenden, wenn man alle Werte von λ, μ, ν wählt, für welche die Invariante von $\lambda u + \mu v + \nu w$ verschwindet, für welche also:

$$0 = \lambda^2 A_{uu} + 2\lambda\mu A_{uv} + \mu^2 A_{vv} + 2\nu\lambda A_{uw} + 2\mu\nu A_{vw} + \nu^2 A_{ww}.$$

Diese Gleichung stellt, wenn wir λ, μ, ν als Koordinaten in der Ebene interpretieren, einen Kegelschnitt dar. Derselbe hat, hinsichtlich linearer Transformationen, denen man λ, μ, ν aussetzen kann, eine Invariante, nämlich die Determinante:

$$\begin{vmatrix} A_{uu} & A_{uv} & A_{uw} \\ A_{vu} & A_{vv} & A_{vw} \\ A_{wu} & A_{wv} & A_{ww} \end{vmatrix}.$$

Wir werden dieselbe als die *Invariante* der den drei Komplexen gemeinsamen Regelschar zu bezeichnen haben.

Das Verschwinden der Invariante sagt aus: zunächst, daß der Kegelschnitt, der durch die Gleichung zwischen λ, μ, ν dargestellt wird, zerfällt. Es zerfällt also auch das zweite Erzeugendensystem. Das bez. Hyperboloid artet in diesem Falle in zwei Ebenen und zwei auf deren Durchschnitt gelegene Punkte aus (vgl. Plückers Neue Geometrie, Nr. 144)[13]. Die

[13]) Während also eine F_2 als Punktgebilde betrachtet den Kegel, als Ebenengebilde betrachtet den Kegelschnitt als erste Partikularisation ergibt, tritt hier ein mit einem Punktepaare vereinigt gelegenes Ebenenpaar als solche auf. Es ist interessant, daß man bei den allgemeinen auf Systeme von Flächen zweiten Grades bezüglichen Abzählungen gleichmäßig auf alle drei Partikularisationen Rücksicht nehmen muß. Vgl. die Arbeit von Herrn Schubert: Zur Theorie der Charakteristiken (Borchardts Journal, Bd. 71, 1870). Die hier in Rede stehende Partikularisation der F_2 ist dort als „begrenzter Ebenenschnitt" bezeichnet.

eine Erzeugung desselben besteht aus den Geraden, welche durch den ersten Punkt in der ersten Ebene, oder durch den zweiten Punkt in der zweiten Ebene hindurchgehen; die andere Erzeugung aus den Geraden, die durch den ersten Punkt in der zweiten Ebene, oder den zweiten Punkt in der ersten Ebene hindurchgehen. Die drei Komplexe haben also zwei vereinigt gelegene Strahlbüschel gemein. Wir werden eine solcherart zerfallene Regelschar in Analogie mit dem Vorstehenden als *spezielle* Regelschar zu bezeichnen haben.

Eine weitere Partikularisation ist, daß nicht nur die Invariante der Regelschar, sondern sämtliche Unterdeterminanten derselben verschwinden. Dann ist die Regelschar in zwei sich deckende Strahlbüschel ausgeartet (Plückers Neue Geometrie, Nr. 146). Die Kongruenzen je zweier Komplexe der Schar $\lambda u + \mu v + \nu w$ sind alsdann spezielle, da sich ihre Invarianten linear aus den verschwindenden Unterdeterminanten zusammensetzen.

Es wäre der letzte Fall noch denkbar, daß auch die zweiten Unterdeterminanten, d. h. A_{uu}, A_{uv} usw. selbst sämtlich verschwinden. Dann sind u, v, w drei spezielle Komplexe, deren Achsen sich gegenseitig schneiden, also entweder einen Punkt gemein haben oder in einer Ebene verlaufen. Es genügen dann den drei Gleichungen $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ zweifach unendlich viele Linien, nämlich diejenigen, die durch den gemeinsamen Punkt gehen, resp. in der gemeinsamen Ebene liegen. Denn die Bedingungsgleichung $\Omega = 0$ ist dann vermöge $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ identisch erfüllt; die dritte Gleichung, etwa $w = 0$, dient nur dazu, um aus der zerfallenden Kongruenz: $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ den einen Teil auszusondern. Es ist dies also ein von den vorhergehenden wesentlich verschiedener Fall, der im folgenden nicht in Betracht kommen wird.

Es mögen endlich vier Komplexe:

$$u = 0, \qquad v = 0, \qquad w = 0, \qquad t = 0$$

in Betracht gezogen werden. Dieselben haben zwei Geraden gemein, und für dieses Geradenpaar erhält man die Invariante:

$$\begin{vmatrix} A_{uu} & A_{uv} & A_{uw} & A_{ut} \\ A_{vu} & A_{vv} & A_{vw} & A_{vt} \\ A_{wu} & A_{wv} & A_{ww} & A_{wt} \\ A_{tu} & A_{tv} & A_{tw} & A_{tt} \end{vmatrix}.$$

Verschwindet dieselbe, so fallen die beiden Geraden zusammen[14]. Ver-

[14]) Läßt man $t = 0$ einen speziellen Komplex bedeuten, wodurch A_{tt} verschwindet, so sagt das Verschwinden der Invariante des Textes aus, daß die Gerade t das Hyperboloid der drei Komplexe $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$ berührt. Aber A_{tu}, A_{tv}, A_{tw} sind offenbar nichts anderes, als die Gleichungen der Komplexe u, v, w, in die nur die

schwinden die ersten Unterdeterminanten, so schneiden sich die beiden zusammenfallenden Geraden [und also haben die linearen Komplexe das ganze Büschel, welches durch diese beiden Erzeugenden gegeben ist, gemein]. Was das Verschwinden der zweiten und dritten Unterdeterminanten bedeutet, mag hier unerörtert bleiben.

§ 2.

Aufstellung der Differentialgleichungen.

Sei jetzt ein beliebiger Komplex

$$\varphi = 0$$

gegeben. Betrachten wir eine seiner Geraden (x). In der Nähe dieser Geraden kann der Komplex als ein linearer angesehen werden, d. h. die benachbarten Geraden sind, bis auf Größen höherer Ordnung, durch einen tangierenden linearen Komplex bestimmt (vgl. Plückers Neue Geometrie, Nr. 297 ff.). Derselbe ist:

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)y_1 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)y_2 + \dots + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_6}\right)y_6 = 0,$$

wo die eingeklammerten Differentialquotienten sich auf den konstanten Wert x beziehen. Dieser lineare Tangentialkomplex ist indes nicht einzig bestimmt, sondern es gibt einfach unendlich viele gleichberechtigte. Da nämlich der gegebene Komplex

$$\varphi = 0$$

nicht geändert wird, wenn man zu seiner Gleichung Ω mit einem beliebigen Faktor hinzufügt:

$$\lambda\varphi + \mu\Omega = 0,$$

so ist jeder lineare Komplex, der in der Gleichung enthalten ist:

$$\sum\left(\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x_a} + \mu\frac{\partial\Omega}{\partial x_a}\right)\cdot y_a = 0$$

Koordinaten der Geraden t eingetragen sind. Ersetzt man daher A_{tu}, A_{tv}, A_{tw} kurz durch u, v, w, so stellt die resultierende Gleichung:

$$0 = \begin{vmatrix} A_{uu} & A_{uv} & A_{uw} & u \\ A_{vu} & A_{vv} & A_{vw} & v \\ A_{wu} & A_{wv} & A_{ww} & w \\ u & v & w & 0 \end{vmatrix}$$

die *Komplexgleichung der Hyperboloids* u, v, w dar, wie ich Math. Annalen, Bd. 2 (1870) [siehe Abh. II dieser Ausgabe] ohne Beweis angab. — Auf ähnliche Weise findet man das Produkt der Gleichungen der beiden Direktrizen der Kongruenz u, v:

$$0 = \begin{vmatrix} A_{uu} & A_{uv} & u \\ A_{vu} & A_{vv} & v \\ u & v & 0 \end{vmatrix}.$$

ein linearer Tangentialkomplex[15]). Dabei ist:

$$\frac{\partial\Omega}{\partial x_a}\cdot y_a = 0$$

die Gleichung des speziellen Komplexes, dessen sämtliche Gerade die Gerade x schneiden.

Die einfach unendlich vielen linearen Tangentialkomplexe haben eine *spezielle* lineare Kongruenz gemein. In der Tat, nehmen wir für Ω, wie fortan immer geschehen soll, die vereinfachte Form:

$$\Omega = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_6^2,$$

so wird die Schar der linearen Tangentialkomplexe:

$$\sum\left(\lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x_a} + \mu x_a\right)y_a = 0.$$

Die Invariante der einzelnen Komplexe ist also gleich:

$$\lambda^2\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_a}\right)^2,$$

da sowohl $\sum x_a^2$ vermöge $\Omega = 0$, als $\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_a}\cdot x_a$ vermöge $\varphi = 0$ verschwindet, und ergibt, gleich Null gesetzt, die Doppelwurzel $\lambda = 0$. Die beiden Direktrizen der Kongruenz fallen also zusammen, und zwar in die gegebene Gerade (x).

Es wird nun insbesondere unter den Linien eines Komplexes solche geben, für welche die den tangierenden linearen Komplexen gemeinsame spezielle Kongruenz zerfällt. Die Bedingung hierzu ist nach dem vorstehenden

$$\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_a}\right)^2 = 0.$$

Dann sind alle einfach unendlich vielen Tangentialkomplexe speziell, d. h. gerade Linien, und diese Geraden bilden ein Büschel. Durch dies Büschel werden der gegebenen Geraden ein auf ihr gelegener Punkt und eine durch sie hindurchgehende Ebene zugeordnet. Alle Geraden des Komplexes, welche der gegebenen (x) unendlich nahe sind und sie schneiden, müssen entweder sie in dem zugeordneten Punkte treffen oder in der zugeordneten Ebene verlaufen. Der zugeordnete Punkt ist deshalb gemeinsamer Berührungspunkt für die Gerade (x) und die in den durch sie hindurchgelegten Ebenen enthaltenen Komplexkurven; ebenso wird die zugeordnete Ebene von allen Kegeln, die von Punkten der Geraden (x) ausgehen, nach der Geraden (x) berührt.

[15]) Unter den linearen Tangentialkomplexen gibt es drei ausgezeichnete, die stationär berühren. Vgl. den vorhergehenden Aufsatz.

Derartige Komplexlinien (x) heißen bei Plücker *singuläre Linien des Komplexes* (Nr. 305, 306 der Neuen Geometrie). Der zugeordnete Punkt heißt der zugeordnete *singuläre Punkt*, die zugeordnete Ebene die zugeordnete *singuläre* Ebene.

Hat Ω, wie oben angenommen, die vereinfachte Gestalt $\sum x_\alpha^2 = 0$, so werden die singulären Linien des Komplexes

$$\varphi = 0$$

aus demselben ausgeschieden durch die Gleichung:

$$\sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\right)^2 = 0.$$

Ist φ vom Grade m, so ist diese Gleichung vom Grade $2(m-1)$; *die singulären Linien bilden also eine Kongruenz der Ordnung und Klasse* $2m(m-1)$.

Ich will hieran beiläufig die Definition einer für die Theorie der Komplexe sehr wichtigen Fläche knüpfen. Jeder der zweifach unendlich vielen singulären Linien ist ein singulärer Punkt und eine singuläre Ebene zugeordnet. Es gibt hiernach eine Fläche der singulären Punkte und eine Fläche der singulären Ebenen. *Diese beiden Flächen sind nun identisch und bilden einen Teil der von der Kongruenz der singulären Linien umhüllten Brennfläche*[16]). Im folgenden werde ich diese Fläche, wie ich bereits früher gelegentlich getan, als die *Singularitätenfläche* des Komplexes bezeichnen.

Es wird nun Komplexe besonderer Art geben können — sie sollen im folgenden *spezielle* Komplexe heißen —, für die

$$\sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\right)^2 = 0$$

vermöge $\sum x^2 = 0$, $\varphi = 0$ identisch verschwindet, deren sämtliche Linien also singuläre Linien sind. Ich behaupte, daß diese Komplexe es sind, deren Linien eine Fläche umhüllen, *daß also die Komplexe, die aus der Gesamtheit der Tangenten einer Fläche bestehen, durch die Differentialgleichung*

$$\sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\right)^2 = 0$$

charakterisiert sind[17]).

Zunächst ist ersichtlich, daß für alle Komplexe, deren Linien eine Fläche umhüllen, diese Bedingung erfüllt ist. Denn jede Linie eines solchen

[16]) Es ist dieser Satz von Herrn Pasch in seiner Habilitationsschrift gegeben worden (Zur Theorie der Komplexe usw., Gießen 1870). Bei Plücker findet sich das Entsprechende für Komplexe zweiten Grades auf einem Umwege bewiesen (Nr. 318–320).

[17]) [Auch dieser Satz ist zum erstenmal in der oben zitierten Abhandlung von Pasch gegeben worden.]

Komplexes hat den Charakter einer singulären. Die Komplexkurven z. B., die in den durch sie hindurchgelegten Ebenen liegen (die Durchschnittskurven dieser Ebenen mit der umhüllten Fläche), berühren die Gerade in einem festen Punkte usw.

Um auch die Umkehrung des Satzes einzusehen, benutzen wir einen Hilfssatz. Sei nämlich (x) eine Linie des Komplexes. So wird wegen

$$\sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\right)^2 = 0$$

auch $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$ eine gerade Linie sein. Dieselbe wird überdies, wegen

$$\varphi = 0 \quad \text{und also} \quad \sum x_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} = 0$$

die Gerade (x) schneiden. $\left(x + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)$ ist deshalb ein Büschel gerader Linien, das schon oben betrachtete Büschel der zu der singulären Linie (x) gehörigen speziellen linearen Tangentialkomplexe. *Im vorliegenden Falle gehört nun dieses ganze Büschel von Geraden dem Komplexe $\varphi = 0$ an.*

Der Beweis, den ich bei einer anderen Gelegenheit ausführlicher zu geben hoffe, läßt sich so führen. Ist, wie vorausgesetzt:

$$\sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\right)^2 = 0$$

vermöge $\varphi = 0$, $\sum x_\alpha^2 = 0$, so kann man, wie sich zeigen läßt, setzen[18]):

$$\sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\right)^2 = M\varphi + N \sum x_\alpha^2.$$

Man bilde jetzt

$$\varphi\left(x_\alpha + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\right)$$

$$= \varphi(x_\alpha) + \lambda \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} + \frac{\lambda^2}{1 \cdot 2} \cdot \sum \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} + \ldots .$$

Das Glied mit λ^0 und mit λ^1 verschwindet ohne weiteres mit $\varphi = 0$, $\sum x_\alpha^2 = 0$. Für die anderen Glieder kann man es dann durch ein rekurrentes Verfahren nachweisen, indem man von der dem Ausdrucke $\sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\right)^2$ gegebenen Darstellung Gebrauch macht.

Die Linien des Komplexes fassen sich also in zweifach unendlich viele Büschel

$$x + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

[18]) [Die Zulässigkeit des Ansatzes für algebraische Komplexe ergibt sich aus den in der Note: Über einen liniengeometrischen Satz (Gött. Nachr. 1872, Math. Ann., Bd. 22, siehe Abh. X dieser Ausgabe) entwickelten Überlegungen.]

zusammen. Der gemeinsame Schnittpunkt der Geraden des Büschels ist für alle der zugeordnete singuläre Punkt, die Ebene des Büschels für alle die zugeordnete singuläre Ebene. Den dreifach unendlich vielen Geraden des Komplexes entsprechen also nur zweifach unendlich viele singuläre Punkte und zweifach unendlich viele singuläre Ebenen. Es gibt also (wie beim allgemeinen Komplexe) eine Fläche der singulären Punkte und eine Fläche der singulären Ebenen. Nun ist es leicht, zu sehen, daß (wie beim allgemeinen Komplexe) diese beiden Flächen identisch sind und daß die Linien des Komplexes die Tangenten dieser Fläche sind. Jede Komplexlinie muß nämlich jetzt die Komplexkurve in einer beliebigen durch sie hindurchgelegten Ebene, als singuläre Linie, im zugehörigen singulären Punkte berühren. Die in einer Ebene enthaltene Komplexkurve ist also die Durchschnittskurve der Ebene mit der Fläche der singulären Punkte. Die Fläche der singulären Punkte wird mithin von den Linien des Komplexes umhüllt. Die Linien des Komplexes umhüllen also in der Tat eine Fläche, die Fläche der singulären Punkte. Dasselbe beweist man von der Fläche der singulären Ebenen. Die Fläche der singulären Punkte und die Fläche der singulären Ebenen sind also identisch[19]).

Betrachten wir jetzt die Kongruenz, welche zwei Komplexen

$$\varphi = 0, \qquad \psi = 0$$

gemeinsam ist. Eine Linie derselben habe die Koordinaten x. In der Nähe derselben kann man die beiden Komplexe durch einen ihrer linearen Tangentialkomplexe ersetzen:

$$\sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} + \lambda x_\alpha \right) y_\alpha = 0,$$

$$\sum \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} + \mu x_\alpha \right) y_\alpha = 0.$$

[19]) Man kann, wie hier beiläufig angegeben sein mag, die Singularitätenfläche eines Komplexes als denjenigen speziellen Komplex definieren, der dem Komplexe umschrieben ist; die Brennfläche einer Kongruenz als denjenigen speziellen Komplex, dem die Kongruenz angehört. [Der innere Zusammenhang der Singularitätenfläche und der anderen hier vorkommenden Gebilde mit den entsprechenden Differentialgleichungen wird vielleicht deutlicher werden, wenn ich die ursprüngliche Auffassung, die mich bei diesen Untersuchungen geleitet hat, erwähne. Man gehe von den Linienkoordinaten aus, die der Identität $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + pq = 0$ genügen, setze $q = 1$ und eliminiere dann p aus der Komplexgleichung. Dann wird z. B. die partielle Differentialgleichung der speziellen Komplexe zu

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_4}\right)^2 = 0.$$

Man sieht die Analogie mit den Developpablen, die im gewöhnlichen R_3 dem Kugelkreis umgeschrieben sind. Die „Büschel" des Komplexes entsprechen den Erzeugenden der Developpablen (und damit den Charakteristiken der partiellen Differentialgleichung), die vereinigte Lage konsekutiver Büschel dem Schnitt aufeinander folgender Erzeugender (bzw. der vereinigten Lage konsekutiver charakteristischer Streifen). K.]

Die gegebene Kongruenz kann man in der Nähe von (x) durch die lineare Kongruenz ersetzen, welche irgend zwei dieser Komplexe gemeinsam ist. *Es gibt also zweifach unendlich viele lineare Kongruenzen, welche eine gegebene Kongruenz in einer ihrer Geraden (x) berühren.*

Diese linearen Kongruenzen haben alle eine Regelschar gemein:

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \cdot y_\alpha = 0, \quad \sum \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} \cdot y_\alpha = 0, \quad \sum x_\alpha y_\alpha = 0.$$

Aber dieselbe zerfällt in zwei Büschel, da ihre Invariante

$$\begin{vmatrix} \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\right)^2 & \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} & \varphi \\ \sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha} & \sum \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha}\right)^2 & \psi \\ \varphi & \psi & \sum x_\alpha^2 \end{vmatrix}$$

vermöge $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\sum x_\alpha^2 = 0$ verschwindet. Die Direktrizen der zweifach unendlich vielen tangierenden Kongruenzen bestehen also aus zwei Büscheln, welche die gegebene Gerade (x) gemein haben. Irgend zwei Gerade, entnommen den beiden Büscheln, sind Direktrizen einer tangierenden Kongruenz. Man erkennt in diesen beiden Büscheln die Tangentenbüschel[20]) der Brennfläche der Kongruenz in deren Berührungspunkten mit der Geraden (x).

Unter den Linien einer Kongruenz wird es nun insbesondere solche geben, für welche die beiden Büschel, d. h. also die beiden Berührungspunkte mit der Brennfläche zusammenfallen. Dann wird die Kongruenzgerade, die vorher Doppeltangente der Brennfläche war, im allgemeinen eine vierpunktig berührende Tangente. Diese Kongruenzgeraden sind durch die Bedingung dargestellt, daß für sie die Unterdeterminanten der vorstehenden Invariante verschwinden, was sich, vermöge der vereinfachten Form der letzteren, auf die eine Bedingung reduziert:

$$\sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha}\right)^2 \cdot \sum \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha}\right)^2 - \left(\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_\alpha}\right)^2 = 0.$$

Diese Gleichung, zusammen mit

$$\varphi = 0, \qquad \psi = 0, \qquad \sum x_\alpha^2 = 0$$

stellt eine Linienfläche der Kongruenz dar, welche die Brennfläche vierpunktig berührt. Ist φ vom Grade m, ψ vom Grade n, so wird diese Fläche vom Grade $4mn(m+n-2)$.

[20]) Bei der gewöhnlichen Darstellung zeichnet man die gegen (x) rechtwinkligen Linien der beiden Büschel aus und bezeichnet sie als die *Brennlinien* des in der Nähe von (x) verlaufenden unendlich dünnen Strahlenbündels. Jedes andere den beiden Büscheln entnommene Linienpaar ist im projektiven Sinne gleichberechtigt.

Diejenigen Linien einer Kongruenz $[m, n]$, *welche die Brennfläche vierpunktig berühren, bilden im allgemeinen eine Linienfläche vom Grade*

$$4\,m\,n\,(m+n-2).$$

Es wird nun besondere Kongruenzen geben — sie sollen *spezielle* Kongruenzen heißen —, für welche die vorstehende Gleichung:

$$\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\right)^2\cdot\sum\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}\right)^2-\left(\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}\right)^2=0$$

vermöge

$$\varphi=0,\qquad \psi=0,\qquad \sum x_\alpha^2=0$$

identisch erfüllt ist. Diese haben die Eigentümlichkeit, daß alle ihre Linien die Brennfläche in zusammenfallenden Punkten berühren. Es sind dies diejenigen Kongruenzen, deren Linien Haupttangenten der Brennfläche sind[21]: im Gegensatze zu den allgemeinen Kongruenzen, deren Linien Doppeltangenten der Brennfläche sind.

Hiermit ist denn auch das Problem (2) *formuliert*[22]. Ist ein Linien-

---

[21]) Vgl. Kummer, Allgemeine Theorie der Strahlensysteme, § 8. (Borchardts Journal, Bd. 57).

[22]) Lie erteilte diesem Problem bereits früher eine ähnliche Form. Er fand nämlich, daß die betr. Differentialgleichung durch eine Transformation, die darauf hinauskommt, die Geraden des Komplexes als Raumelement einzuführen, in eine Gleichung zweiten Grades übergeht. Insbesondere gibt er die Gleichung:

$$p\cdot\frac{\partial H}{\partial x}+q\frac{\partial H}{\partial y}-\frac{\partial H}{\partial z}=\sqrt{1+p^2+q^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^2-1}$$

(Bericht der Akademie zu Christiania, 1870, Dezember.) Wollte man statt Linienkoordinaten Punktkoordinaten anwenden, so würde man zu einer auf den ersten Blick sehr verschiedenen partiellen Differentialgleichung geführt werden. Sei unter Anwendung der Koordinaten p_{ik} die Gleichung des Komplexes

$$\varphi(p_{ik})=0,$$

so stellt die Gleichung

$$\varphi(x_i y_k - y_i x_k)=0,$$

wenn man den x feste Werte erteilt, den vom Punkte (x) ausgehenden Komplexkegel dar. Das Problem (2) besteht nun darin, solche Flächen $\psi(x)=0$ zu finden, die in jedem ihrer Punkte von dem betreffenden Komplexkegel berührt werden. Man drücke also die Bedingung aus, daß die Ebene

$$\frac{\partial\psi}{\partial x_1}\cdot y_1+\frac{\partial\psi}{\partial x_2}\cdot y_2+\frac{\partial\psi}{\partial x_3}\cdot y_3+\frac{\partial\psi}{\partial x_4}\cdot y_4=0$$

den Kegel

$$\varphi(x_i y_k - y_i x_k)=0$$

berühre, so hat man die Differentialgleichung des Problems. Ist φ vom Grade m, so werden die Differentialquotienten $\frac{\partial\psi}{\partial x}$ im allgemeinen bis zum Grade $m(m-1)$ vorkommen.

komplex $\varphi=0$ gegeben, so suche man solche Kongruenzen desselben: $\varphi=0$, $\psi=0$, daß für die Kongruenzlinien

$$\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\right)^2\cdot\sum\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}\right)^2-\left(\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}\right)^2=0.$$

Ist insbesondere $\varphi=0$ ein spezieller Komplex, d. h. eine Fläche, so reduziert sich diese Gleichung auf:

$$\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}=0.$$

Es mögen endlich drei Komplexe

$$\varphi=0,\qquad \psi=0,\qquad \chi=0$$

gegeben sein. Dieselben haben eine Linienfläche gemein. Sei (x) eine Gerade derselben. Dieselbe hat in φ, ψ, χ bez. die folgenden Tangentialkomplexe

$$\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}+\lambda x_\alpha\right)y_\alpha=0$$

$$\sum\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}+\mu x_\alpha\right)y_\alpha=0$$

$$\sum\left(\frac{\partial\chi}{\partial x_\alpha}+\nu x_\alpha\right)y_\alpha=0.$$

Je drei Komplexe aus diesen drei Scharen haben ein Hyperboloid gemeinsam, welches die den drei gegebenen Komplexen gemeinsame geradlinige Fläche in (x) berührt. *Es gibt dreifach unendlich viele solcher berührenden Hyperboloide.* Alle haben zwei zusammenfallende Gerade gemein, nämlich (x) und die benachbarte Erzeugende: die gemeinschaftlichen Geraden der vier Komplexe:

$$\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\cdot y_\alpha=0,\quad \sum\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}\cdot y_\alpha=0,\quad \sum\frac{\partial\chi}{\partial x_\alpha}\cdot y_\alpha=0,\quad \sum x_\alpha y_\alpha=0.$$

Denn die Invariante des diesen Komplexen gemeinsamen Geradenpaares:

$$\begin{vmatrix}
\sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\right)^2 & \sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha} & \sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial x_\alpha} & \varphi\\
\sum\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha} & \sum\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}\right)^2 & \sum\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial x_\alpha} & \psi\\
\sum\frac{\partial\chi}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha} & \sum\frac{\partial\chi}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha} & \sum\left(\frac{\partial\chi}{\partial x_\alpha}\right)^2 & \chi\\
\varphi & \psi & \chi & \sum x_\alpha^2
\end{vmatrix}$$

verschwindet.

Für besondere Geraden der Linienfläche werden auch sämtliche Unterdeterminanten dieser Invariante verschwinden. Es sind dies die sogenannten *singulären* Erzeugenden der Linienfläche, die ihre konsekutive schneiden. Zu ihrer Bestimmung erhält man:

$$0=\begin{vmatrix} \sum\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\right)^2 & \sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha} & \sum\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial x_\alpha} \\ \sum\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha} & \sum\left(\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}\right)^2 & \sum\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\chi}{\partial x_\alpha} \\ \sum\frac{\partial\chi}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha} & \sum\frac{\partial\chi}{\partial x_\alpha}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x_\alpha} & \sum\left(\frac{\partial\chi}{\partial x_\alpha}\right)^2 \end{vmatrix}$$

Diese Gleichung ist, wenn φ, ψ, χ bez. vom Grade m, n, p sind, vom Grade $2(m+n+p-3)$. Man erhält also den Satz: *die Linienfläche, welche drei Komplexen bez. vom Grade m, n, p gemeinsam ist, hat im allgemeinen*

$$4mnp(m+n+p-3)$$

singuläre Erzeugende[23]).

Es gibt nun *spezielle* Linienflächen, deren sämtliche Linien singuläre Erzeugende sind, d. h. ihre konsekutiven schneiden. Dies sind die *Developpablen*. Sie sind dadurch charakterisiert, daß für sie, vermöge $\varphi=0$, $\psi=0$, $\chi=0$ die vorstehende Gleichung identisch erfüllt ist. Sind also φ und ψ gegeben und betrachtet man χ als unbekannt, *so stellt diese Gleichung die Differentialgleichung für die Developpablen der Kongruenz $\varphi=0$, $\psi=0$ dar*, was das Problem (3) ist. Dieselbe wird insbesondere linear, wenn $\varphi=0$, $\psi=0$ eine spezielle Kongruenz ist.

Die Umhüllungskurven der Kongruenz zweier zu derselben Singularitätenfläche gehöriger Komplexe zweiten Grades werden wir in etwas anderer Weise bestimmen, indem wir nämlich die Kongruenzgeraden durch zwei Parameter ausdrücken und dann die Bedingung aufstellen, daß sich zwei benachbarte Kongruenzgeraden schneiden. Zu diesem Zwecke mag hier die Bedingung gegeben werden, unter der sich überhaupt zwei benachbarte Gerade (x) und $(x+dx)$ schneiden. Damit sich zwei Gerade (x) und (y) schneiden, muß sein

$$\sum x_\alpha y_\alpha = 0.$$

Ist aber $y_\alpha = x_\alpha + dx_\alpha$, so ist diese Gleichung identisch befriedigt, weil die y_α, als Linienkoordinaten, an die Gleichung $\sum y_\alpha^2 = 0$ geknüpft sind, was, wegen $\sum x_\alpha^2 = 0$, auf $\sum x_\alpha\, dx_\alpha = 0$ führt. Setzen wir jetzt $y_\alpha = x_\alpha + dx_\alpha + d^2x_\alpha$, so haben wir einmal, wegen $\sum y_\alpha^2 = 0$:

$$\sum x_\alpha\, dx_\alpha = 0, \qquad \sum(2x_\alpha\, d^2x_\alpha + dx_\alpha^2) = 0.$$

[23]) Dieselbe Zahl hat auf etwas anderem Wege Herr Lüroth abgeleitet: Zur Theorie der windschiefen Flächen (Borchardts Journal, Bd. 67, 1867).

Andererseits wird die Bedingung des Schneidens

$$\sum x_\alpha\, d^2x_\alpha = 0$$

und diese reduziert sich vermöge der letzten Gleichung auf

$$\sum dx_\alpha^2 = 0.$$

Dies ist die Bedingung für das Schneiden zweier konsekutiven Geraden, welche im folgenden angewandt werden wird[24]).

§ 3.

Elliptische Koordinaten zur Bestimmung der geraden Linie[25]). Bestimmung verschiedener Umhüllungskurven.

Ich werde jetzt statt der bisher gebrauchten homogenen Linienkoordinaten $x_1, \ldots, x_6$, welche an die Bedingungsgleichung

$$\sum x_\alpha^2 = 0$$

gebunden waren, vier voneinander unabhängige, nicht homogene Koordinaten λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 einführen. Dieselben werden in der folgenden Weise definiert.

In einer früheren Arbeit [Math. Ann., Bd. 2 (siehe Abh. II dieser Ausgabe)] habe ich gezeigt, daß die Komplexe zweiten Grades mit gemeinsamer Singularitätenfläche in der folgenden Weise durch einen Parameter λ dargestellt werden können:

$$0 = \frac{x_1^2}{k_1-\lambda} + \frac{x_2^2}{k_2-\lambda} + \cdots + \frac{x_6^2}{k_6-\lambda},$$

wo $x_1, x_2, \ldots, x_6$ Koordinaten der eben betrachteten Art sind. Die gemeinsame Singularitätenfläche ist in dem allgemeinen Falle, auf welchen diese kanonische Form paßt, eine Kummersche Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten.

Nun kann man die vorstehende Gleichung, wenn man für die x die Koordinaten einer geraden Linie setzt, als eine Gleichung für λ betrachten. Dieselbe ist vom vierten Grade, da die beim Heraufmultiplizieren auftretende Potenz λ^5 den verschwindenden Faktor $\sum x^2$ hat. Die vier Wurzeln der Gleichung sollen λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 heißen; sie sind es, die fortan als Koordinaten der Geraden benutzt werden. *Diese vier Koordinaten geben also*

[24]) Lie benutzt als Bedingung für das Schneiden zweier konsekutiven Geraden (oder die Berührung zweier konsekutiver Kugeln) die folgende:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 + (i\,dH)^2 = 0.$$

[25]) Vgl. eine Note in den Göttinger Nachrichten, 1871, Nr. 1. [In die vorliegende Ausgabe nicht aufgenommen, weil sie genau die Entwicklungen des Textes enthält.]

den Wert des Parameters λ derjenigen vier Komplexe des Systems an, denen die fragliche Gerade angehört.

Wie man sieht, ist diese Koordinatenbestimmung der allgemeinen Jacobischen Methode der elliptischen Koordinaten analog. Bei der Jacobischen Methode hat man nur eine Gleichung, und zwar eine nicht homogene, von der Form[26]):

$$\sum_1^n \frac{x_\alpha^2}{k_\alpha - \lambda} = 1,$$

während hier zwei homogene Gleichungen gegeben sind:

$$\sum_1^{n+1} \frac{x_\alpha^2}{k_\alpha - \lambda} = 0, \qquad \sum_1^{n+1} x_\alpha^2 = 0.$$

Diese allgemeinere[27]) Art elliptischer Koordinaten findet sich zuerst bei Herrn Darboux erwähnt[28]) und werden von ihm in einem neueren Aufsatze entwickelt[29]). Er bezeichnet dieselben als die erste Derivation der gewöhnlichen elliptischen Koordinaten, insofern er auf sie durch einmalige Anwendung eines Prozesses geführt wird, durch den er aus jedem Orthogonalsysteme ein neues Orthogonalsystem herleitet. Auf das System der konfokalen Flächen zweiten Grades angewandt, ergibt der Prozeß das Darboux-Moutardsche Orthogonalsystem der Flächen vierten Grades, die den imaginären Kreis doppelt enthalten, und auf dieses System beziehen sich die neuen Koordinaten. (Vgl. hierzu auch den vorstehenden Aufsatz, § 2.)

Wir werden zunächst die früheren Koordinaten x_α durch die neuen λ_κ ausdrücken. Zu diesem Zwecke mag $f(\lambda)$ den Ausdruck bezeichnen:

$$f(\lambda) = (k_1 - \lambda)(k_2 - \lambda) \ldots (k_6 - \lambda).$$

So hat man bekanntlich die Relationen:

$$\sum \frac{1}{f'(k_\alpha)} = 0, \quad \sum \frac{k_\alpha}{f'(k_\alpha)} = 0, \quad \sum \frac{k_\alpha^2}{f'(k_\alpha)} = 0, \quad \sum \frac{k_\alpha^3}{f'(k_\alpha)} = 0, \quad \sum \frac{k_\alpha^4}{f'(k_\alpha)} = 0.$$

Infolgedessen sind die x_α durch die folgende Gleichung gegeben:

$$\varrho x_\alpha^2 = \frac{(k_\alpha - \lambda_1)(k_\alpha - \lambda_2)(k_\alpha - \lambda_3)(k_\alpha - \lambda_4)}{f'(k_\alpha)}.$$

[26]) Bei Jacobi ist dem Parameter λ ein anderes Vorzeichen gegeben, was aber nicht vorteilhaft scheint.

[27]) Als *allgemeiner* kann man diese Koordinaten bezeichnen, da sich aus ihnen die gewöhnlichen elliptischen Koordinaten ergeben, wenn zwei der x_α zusammenfallen. Es würde dies einer Ausartung der Kummerschen Fläche in eine Fläche mit Doppellinie, d. h. in eine Plückersche Komplexfläche, entsprechen.

[28]) Comptes Rendus, t. 69, 1869, 2. Sur une nouvelle série de systèmes orthogonaux algébriques.

[29]) Comptes Rendus, t. 73, 1871, 2. Des courbes tracées sur une surface et dont la sphère osculatrice est tangente en chaque point à la surface.

In der Tat überzeugt man sich infolge der zwischen den $f'(k)$ existierenden Gleichungen ohne weiteres, daß diese Werte von x_α^2 sowohl der Gleichung $\sum x_\alpha^2 = 0$ als den vier Komplexgleichungen genügen, welche den Werten λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 von λ entsprechen.

Wir mögen beiläufig erörtern, wie durch die Parameter λ die hauptsächlichen Elemente des gegebenen Komplexsystems und der mit ihm verknüpften Kummerschen Fläche dargestellt werden[30]).

Setzt man zwei Parameter λ, etwa λ_3 und λ_4, einander gleich, so hat man eine Tangente der Kummerschen Fläche. Betrachtet man λ_1 und λ_2 als konstant, während $\lambda_3 = \lambda_4$ alle Werte durchläuft, so erhält man das Büschel aller solcher Tangenten, welche die Fläche in einem Punkte berühren. λ_1 und λ_2 charakterisieren also den Berührungspunkt; man kann sie als Koordinaten des Punktes auf der Fläche auffassen[31]). Die von den Tangenten in zwei Punkten (λ_1, λ_2) und (λ_1', λ_2') gebildeten zwei Büschel sind dabei, gleichen Werten von $\lambda_3 = \lambda_4$ entsprechend, eindeutig und also projektiv aufeinander bezogen.

Setzt man drei Parameter einander gleich, so erhält man die Haupttangenten der Fläche.

Nimmt man die vier Parameter paarweise gleich, so hat man die Linien, welche die 16 Doppelebenen der Fläche ausfüllen und diejenigen, die durch die 16 Doppelpunkte hindurchgehen.

Endlich die Annahme, daß alle Parameter einander gleich sind, ergibt die Tangenten der in den 16 Doppelebenen gelegenen Berührungskegelschnitte, sowie die Erzeugenden der in den 16 Knotenpunkten berührenden Kegel.

Die einem bestimmten Komplexe des Systems angehörigen Geraden erhält man, wenn man einen der Parameter, etwa λ_4, dem betreffenden λ gleichsetzt. Nimmt man zwei Parameter konstant, etwa λ_3 und λ_4, so hat man die Linien der Kongruenz, die den beiden Komplexen $\lambda = \lambda_3$ und $\lambda = \lambda_4$ gemeinsam ist. Ist dabei gleichzeitig $\lambda_3 = \lambda_4$, so hat man die *singulären Linien* des Komplexes $\lambda = \lambda_3 = \lambda_4$. Durch den Wert von $\lambda_3 = \lambda_4$ wird also in jedem Tangentenbüschel der Kummerschen Fläche diejenige Tangente bestimmt, die dem Komplexe $\lambda = \lambda_3 = \lambda_4$ als singuläre Linie zugehört. Ist $\lambda_3 = \lambda_4 = k_\alpha$, so sind die singulären Linien *Doppeltangenten* der Kummerschen Fläche, nämlich diejenigen, welche dem unter den Komplexen des Systems befindlichen linearen (Fundamental-) Komplexe $x_\alpha = 0$ angehören. — Sind drei Parameter konstant, etwa λ_2, λ_3, λ_4, so

[30]) Wegen der Beweise siehe den Aufsatz: Zur Theorie der Komplexe usw. Math. Annalen, Bd. 2 (1870) [siehe Abh. II dieser Ausgabe].

[31]) Die Kurven $\lambda_1 = \varrho$, $\lambda_2 = \sigma$ sind, wie noch gezeigt werden soll, die Haupttangentenkurven der Kummerschen Fläche.

erhält man die Erzeugenden der den drei Komplexen $\lambda = \lambda_2$, $\lambda = \lambda_3$, $\lambda = \lambda_4$ gemeinsamen Linienfläche. Ist dabei $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$, so hat man die singulären Linien des Komplexes $\lambda = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$, welche die **Kummer**sche Fläche oskulieren. Wenn der gemeinsame Wert von $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$ gleich k_α ist, so sind dies vierpunktig berührende Linien. Und zwar erhält man, wenn man α die Werte $1 \ldots 6$ erteilt, alle vierpunktig berührenden Linien der **Kummer**schen Fläche, außer denen, die die Berührungskegelschnitte in den 16 Doppelebenen tangieren[32]). — Endlich die Annahme, daß alle Parameter konstant sind, ergibt die den Komplexen $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$, $\lambda = \lambda_3$, $\lambda = \lambda_4$ gemeinsamen 32 geraden Linien. Ist dabei $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$, so hat man die 32 ausgezeichneten singulären Linien des Komplexes $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$, welche Tangenten der Berührungskegelschnitte in den Doppelebenen, bez. Erzeugende der Berührungskegel in den Doppelpunkten sind.

Die neuen Koordinaten $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ wollen wir jetzt in die Gleichung

$$\sum dx_\alpha^2 = 0$$

einsetzen, welche ausdrückt, daß sich zwei konsekutive Linien schneiden. Man findet:

$$\begin{aligned} 0 = d\lambda_1^2 &\cdot \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)}{f(\lambda_1)} \\ + d\lambda_2^2 &\cdot \frac{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_1)}{f(\lambda_2)} \\ + d\lambda_3^2 &\cdot \frac{(\lambda_3-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_2)}{f(\lambda_3)} \\ + d\lambda_4^2 &\cdot \frac{(\lambda_4-\lambda_1)(\lambda_4-\lambda_2)(\lambda_4-\lambda_3)}{f(\lambda_4)}. \end{aligned}$$

Diese Differentialgleichung wird nun in einigen Fällen ohne weiteres integrierbar.

Es tritt dies insbesondere ein für die Kongruenzen je zweier Komplexe des gegebenen Systems. Setzt man nämlich λ_3 und λ_4 konstant, also $d\lambda_3$, $d\lambda_4$ gleich Null, so hebt sich der Faktor $(\lambda_1 - \lambda_2)$ fort *und man erhält die Differentialgleichung der Umhüllungskurven der Kongruenz in der Form:*

$$d\lambda_1 \sqrt{\frac{(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)}{f(\lambda_1)}} = \pm\, d\lambda_2 \sqrt{\frac{(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)}{f(\lambda_2)}}.$$

Setzt man in dieser Gleichung $\lambda_3 = \lambda_4$, so hat man *die Umhüllungskurven der singulären Linien des Komplexes $\lambda = \lambda_3 = \lambda_4$.*

Ist insbesondere $\lambda_3 = \lambda_4 = k_\alpha$, so hat man *die Umhüllungskurven derjenigen Doppeltangenten der **Kummer**schen Fläche, die dem Komplexe $x_\alpha = 0$ angehören.* Diese Doppeltangenten bilden bekanntlich eine allgemeine Kongruenz zweiter Ordnung und zweiter Klasse; für diese Kongruenzen ist also das Problem 3 gelöst.

[32]) Vgl. die Arbeit von **Lie** und mir: Über die Haupttangentenkurven der **Kummer**schen Fläche. Monatsberichte der Berliner Akademie, 1870, Dezember. [Siehe Abh. VI dieser Ausgabe.]

Setzt man in die vorstehende Differentialgleichung $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_4$, so wird sie identisch befriedigt. Die Kongruenz $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_4$ ist also eine solche, in der jede Gerade alle ihre benachbarten schneidet. In der Tat stellen die Gleichungen $\lambda_1 = \lambda_2$, $\lambda_3 = \lambda_4$, wie schon bemerkt, diejenigen Geraden dar, welche entweder in einer Doppelebene der **Kummer**schen Fläche liegen oder durch einen Doppelpunkt hindurchgehen. Ihre Gesamtheit bildet eine Kongruenz 16. Ordnung und Klasse, welche allerdings die geforderte Eigenschaft hat.

Endlich sei $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4$. So wird die vorstehende Differentialgleichung:

$$d\lambda_1 = 0, \text{ also } \lambda_1 = \text{konst.}$$

*Dies sind die Haupttangentenkurven der **Kummer**schen Fläche.* In Worten: Die Haupttangentenkurven der **Kummer**schen Fläche werden jedesmal von solchen Punkten der Fläche gebildet, in welchen die zweite Haupttangente einem bestimmten Komplexe des Systems als singuläre Linie angehört. Es sind dies dieselben Kurven 16. Ordnung, welche ich in dem früheren Aufsatze: Zur Theorie usw. (Math. Annalen, Bd. 2 [siehe Abh. II dieser Ausgabe]) in Nr. 18 betrachtet hatte. Daß die Haupttangentenkurven der **Kummer**schen Fläche algebraische Kurven der 16. Ordnung sind, hat zuerst **Lie** gefunden, indem er seine Abbildung studierte, die Liniengeometrie in Kugelgeometrie, Haupttangentenkurven in Krümmungskurven überführt. Sodann bemerkte ich die Identität der fraglichen Haupttangentenkurven mit dem früher von mir untersuchten Kurvensysteme, und bestimmte im Anschluß hieran die Singularitäten derselben. Diese Resultate haben **Lie** und ich in einer gemeinsamen Arbeit dargestellt[33]). Hierauf fand ich den hier vorgetragenen analytischen Beweis[34]) und erkannte endlich[35]), daß sich die ganze Bestimmungsweise der Haupttangentenkurven durch die zugehörigen Komplexe unter ein allgemeineres liniengeometrisches Theorem subsumiert, das dem **Dupin**schen Theoreme der metrischen Geometrie entspricht. Dieses letztere ist in dem vorhergehenden Aufsatze ausführlicher dargelegt, und dort auch gezeigt worden, wie dasselbe die Bestimmung der Haupttangentenkurven der **Kummer**schen Fläche umfaßt. — Es sei noch bemerkt, daß die sechs Haupttangentenkurven $\lambda_1 = k_\alpha$ die Kurven der vierpunktigen Berührung auf der **Kummer**schen Fläche sind.

[33]) Monatsberichte der Berl. Akademie, 1870, Dezember. [Siehe Abh. VI dieser Ausgabe.]

[34]) Göttinger Nachrichten, 1871, Nr. 1. [In diese Ausgabe nicht aufgenommen.]

[35]) Göttinger Nachrichten, 1871, Nr. 3. [Siehe Abh. VII dieser Ausgabe.]

§ 4.

Bestimmung der Integralflächen der allgemeinen Komplexe zweiten Grades.

Die Einführung der neuen Veränderlichen $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ in die Differentialgleichung

$$\sum dx_a^2 = 0$$

ergab:

$$0 = d\lambda_1^2 \cdot \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)}{f(\lambda_1)} + \dots .$$

Die partielle Differentialgleichung, welche die speziellen Komplexe charakterisierte:

$$\sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_a}\right)^2 = 0$$

wird also nach bekannten Methoden übergehen in:

$$0 = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1}\right)^2 \cdot \frac{f(\lambda_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_2}\right)^2 \cdot \frac{f(\lambda_2)}{(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_2 - \lambda_1)} + \dots .$$

Nun ist aber bekannt[36]), daß eine Differentialgleichung, wie die vorstehende, ohne weiteres eine vollständige Lösung (mit drei willkürlichen Konstanten) ergibt, nämlich:

$$\varphi = \int d\lambda_1 \frac{\sqrt{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - b)}}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + \int d\lambda_2 \frac{\sqrt{(\lambda_2 - a)(\lambda_2 - b)}}{\sqrt{f(\lambda_2)}} + \int d\lambda_3 \frac{\sqrt{(\lambda_3 - a)(\lambda_3 - b)}}{\sqrt{f(\lambda_3)}}$$
$$+ \int d\lambda_4 \frac{\sqrt{(\lambda_4 - a)(\lambda_4 - b)}}{\sqrt{f(\lambda_4)}} + C.$$

Lassen wir a, b, C der Reihe nach alle möglichen Werte annehmen, so stellt uns die Gleichung

$$\varphi = 0$$

dreifach unendlich viele spezielle Komplexe, dreifach unendlich viele Flächen dar. Jeder in der allgemeinen Lösung enthaltene Komplex, d. h. jeder Komplex, dessen Linien eine Fläche umhüllen, wird als Umhüllungsgebilde von zweifach unendlich vielen dieser Flächen erhalten.

Nun behaupte ich, *daß die Fläche $\varphi = 0$ mit den Konstanten a, b, C gemeinsames Integral der beiden Komplexe $\lambda = a$ und $\lambda = b$ ist*[37]), d. h. daß das eine System Haupttangenten der Fläche dem Komplexe $\lambda = a$, das andere dem Komplex $\lambda = b$ angehört, oder, was dasselbe ist, daß die Fläche mit dem Komplexe $\lambda = a$, sowie mit dem Komplexe $\lambda = b$ eine spezielle Kongruenz gemein hat.

[36]) Vgl. Jacobis Vorlesungen über Dynamik.

[37]) Daß zwei Komplexe des Systems einfach unendlich viele gemeinsame Integralflächen haben, bildet den Ausgangspunkt der bez. Überlegungen von Lie.

Um dies zu beweisen, ist nur zu zeigen, daß der Differentialgleichung der speziellen Kongruenzen:

$$\left(\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_a} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_a}\right)^2 - \sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_a}\right)^2 \cdot \sum \left(\frac{\partial \psi}{\partial x_a}\right)^2 = 0$$

Genüge geschieht, wenn man statt φ eine der hier gefundenen Flächen und statt ψ etwa $(\lambda_4 - a)$ oder $(\lambda_4 - b)$ nimmt. $\sum \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_a}\right)^2$ verschwindet aber, da φ ein spezieller Komplex. Es bleibt also nur noch:

$$\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_a} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial x_a} = 0$$

oder, unter Anwendung der Koordinaten λ:

$$0 = \frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_1} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_1} \cdot \frac{f(\lambda_1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_4)} + \dots .$$

Aber $\frac{\partial \psi}{\partial \lambda_1}, \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_2}, \frac{\partial \psi}{\partial \lambda_3}$ verschwinden, da $\psi = \lambda_4 - a$, oder $\psi = \lambda_4 - b$ nur von λ_4 abhängt. Andererseits ist $\frac{\partial \varphi}{\partial \lambda_4} = \frac{\sqrt{(\lambda_4 - a)(\lambda_4 - b)}}{\sqrt{f(\lambda_4)}}$ und verschwindet, wenn $\lambda_4 = a$ oder $= b$ gesetzt wird. Der Differentialgleichung der speziellen Kongruenzen wird also allerdings Genüge geleistet.

Der Wert der Konstante C in der Gleichung von φ kommt dabei gar nicht in Betracht, bleibt also willkürlich. Wir haben also den Satz: *Je zwei Komplexe $\lambda = a$, $\lambda = b$ der zu der Kummerschen Fläche gehörigen Schar haben einfach unendlich viele gemeinsame Integralflächen.*

Läßt man außer C auch noch b sich ändern, so erhält man zweifach unendlich viele Integralflächen des Komplexes $\lambda = a$, also eine vollständige Lösung der mit dem Komplexe verknüpften partiellen Differentialgleichung. Die allgemeine Lösung umfaßt alle Flächen, die das Umhüllungsgebilde von einfach unendlich vielen Flächen aus der so bestimmten zweifach unendlichen Schar sind. — *Hiernach ist das Problem 2) für allgemeine Komplexe zweiten Grades erledigt.*

Die gefundenen Integralflächen, welche den Komplexen $\lambda = a$ und $\lambda = b$ gemeinsam sind, stehen zu den Umhüllungsgeraden der Kongruenz $\lambda = a$, $\lambda = b$, welche im vorigen Paragraphen bestimmt wurden, in einer bemerkenswerten Beziehung.

[In der Tat reduziert sich die Gleichung der einzelnen Integralflächen, wenn wir λ_3 konstant gleich $a, \lambda_4 = b$ nehmen, auf die Differentialgleichung der genannten Umhüllungskurven. Die Beziehung, welche hiernach zwischen der Integralfläche und der Brennfläche der Kongruenz $\lambda_3 = a$, $\lambda_4 = b$ besteht, bleibt näher zu entwickeln[38]).]

[38]) [Die genaueren Angaben, welche hierüber im Original, Math. Ann., Bd. 5, gemacht sind, lassen sich nach dem Einwande, den Herr A. Voß in den Math. Ann., Bd. 9, S. 134—135 erhoben hat, nicht aufrecht erhalten. Das Sachverhältnis bedarf weiterer Untersuchung. K.]

Aus der Bedeutung der Singularitätenfläche folgt ferner, daß die Integralfläche überall dort, wo sie die Singularitätenfläche trifft, sie berühren muß. Denn der Komplexkegel a oder b, der von einem Punkte der Singularitätenfläche ausgeht, hat sich in ein Ebenenenpaar aufgelöst, dessen Durchschnitt, die zugeordnete singuläre Linie, die Singularitätenfläche berührt. Die Integralfläche kann den ausgearteten Kegel nicht anders berühren, als indem sie die singuläre Linie berührt. Die Integralfläche berührt also in jedem Punkte, in welchem sie die Singularitätenfläche trifft, die beiden zugehörigen singulären Linien der Komplexe a und b, d. h. sie berührt die Singularitätenfläche selbst.

Wir erhalten die singulären Linien des Komplexes a, die zu den Punkten der Berührungskurve gehören, wenn wir in der Gleichung der Integralfläche $\lambda_3 = \lambda_4 = a$ setzen. So bleibt:

$$\int d\lambda_1 \frac{\sqrt{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - b)}}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + \int d\lambda_2 \frac{\sqrt{(\lambda_2 - a)(\lambda_2 - b)}}{\sqrt{f(\lambda_2)}} + C = 0.$$

Diese Gleichung bestimmt mit $\lambda_3 = \lambda_4 = a$ zusammen die fraglichen singulären Linien. Andererseits können wir sie — da nach dem vorigen Paragraphen λ_1 und λ_2 als Koordinaten eines Punktes auf der Singularitätenfläche angesehen werden können — geradezu für die Gleichung der Berührungskurve halten. Wir haben so den Satz:

Die Integralfläche berührt die Singularitätenfläche nach Erstreckung einer Kurve, deren Gleichung die vorstehende ist.

Die Singularitätenfläche entspricht also einer *singulären Lösung* der mit dem Komplexe verknüpften Differentialgleichung in dem Sinne, als dieselbe von allen Integralflächen des Komplexes nach einer Kurve berührt wird.

Wir mögen endlich noch das Folgende bemerken. Setzen wir in der Gleichung einer Integralfläche des Komplexes a, $\lambda_4 = a$, so kommt man zur Darstellung der bezüglichen dem Komplexe a angehörigen speziellen Kongruenz:

$$\int d\lambda_1 \frac{\sqrt{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - b)}}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + \int d\lambda_2 \frac{\sqrt{(\lambda_2 - a)(\lambda_2 - b)}}{\sqrt{f(\lambda_2)}} + \int d\lambda_3 \frac{\sqrt{(\lambda_3 - a)(\lambda_3 - b)}}{\sqrt{f(\lambda_3)}} + C = 0.$$

Nun sind die hier vorkommenden Integrale hyperelliptische, die $p = 3$ entsprechen. Es ist also durch die vorstehende Gleichung ein Umkehrproblem indiziert. Wir schreiben sie zu diesem Zwecke in der Form:

$$\int d\lambda_1 \frac{\sqrt{(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - b)}}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + \ldots = u$$

und verknüpfen sie mit zwei ähnlich gebauten Gleichungen, deren Integrale sich aus den vorstehenden durch Differentiation nach den Parametern a, b ergeben:

$$\int d\lambda_1 \frac{\sqrt{\lambda_1 - b}}{\sqrt{\lambda_1 - a} \cdot \sqrt{f(\lambda_1)}} + \ldots = v$$

$$\int d\lambda_1 \frac{\sqrt{\lambda_1 - a}}{\sqrt{\lambda_1 - b} \cdot \sqrt{f(\lambda_1)}} + \ldots = w.$$

Diese Gleichungen dienen dazu, um die $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, und weiterhin die $x_1, \ldots, x_6$ der Komplexlinie durch die u, v, w auszudrücken. Und da x_α mit den λ durch eine Gleichung von der symmetrischen Form:

$$\varrho x_\alpha^2 = \frac{(k_\alpha - \lambda_1)(k_\alpha - \lambda_2)(k_\alpha - \lambda_3)(k_\alpha - a)}{f(k_\alpha)}$$

zusammenhängt, drücken sich die x_α geradezu als hyperelliptische Funktionen der u, v, w aus.

Die Koordinaten x_α der Linien eines Linienkomplexes zweiten Grades sind hiermit unter Zugrundelegung eines zweiten Komplexes als sechsfach periodische hyperelliptische Funktionen dreier Parameter u, v, w dargestellt.

Es wurde bereits wiederholt hervorgehoben, wie das von Flächen vierter Ordnung mit imaginärem Doppelkreise gebildete Orthogonalsystem dem System der Linienkomplexe zweiten Grades mit gemeinsamer Singularitätenfläche entspricht. Man übersieht, wie man für diese Flächen ähnlich wie für diese Komplexe einen Satz aufzustellen hat, der dahin geht: *daß sich die Koordinaten der Punkte einer Fläche des Orthogonalsystems als vierfach periodische hyperellyptische Funktionen zweier Parameter darstellen lassen.* Diesen Satz hat Herr Darboux in den Comptes Rendus (t. 68, 1869, 1: Mémoire sur une classe de courbes et de surfaces) ohne Beweis angegeben; er hebt besonders hervor, wie derselbe auf allgemeine Flächen dritten Grades Anwendung findet, da drei unter den Flächen des Orthogonalsystems allgemeine Flächen dritten Grades sind. Ein ähnlicher Satz gilt offenbar für die entsprechenden Gebilde bei beliebig viel Dimensionen.

Noch zu einem zweiten Umkehrprobleme wird man geführt, nämlich durch die Gleichung der Umhüllungskurven der singulären Linien:

$$\int \frac{d\lambda_1 (\lambda_1 - a)}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + \int \frac{d\lambda_2 (\lambda_2 - a)}{\sqrt{f(\lambda_2)}} + C = 0,$$

da auch für sie die Zahl der summierten Integrale mit dem p der auftretenden hyperelliptischen Funktionen übereinstimmt. Wir setzen zu diesem Zwecke:

$$\int \frac{d\lambda_1 (\lambda_1 - a)}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + \int \frac{d\lambda_2 (\lambda_2 - a)}{\sqrt{f(\lambda_2)}} = u,$$

und nehmen eine ähnliche Gleichung hinzu:

$$\int \frac{d\lambda_1 (\lambda_1 - b)}{\sqrt{f(\lambda_1)}} + \int \frac{d\lambda_2 (\lambda_2 - b)}{\sqrt{f(\lambda_2)}} = v,$$

Es sind dies zwei Scharen auf der allen Komplexen gemeinsamen Singularitätenfläche (der Kummerschen Fläche) verlaufender Kurven: die Umhüllungskurven der singulären Linien der Komplexe $\lambda = a$ und $\lambda = b$ Indem wir statt u und v lineare Kombinationen derselben setzen, können wir insbesondere a und b gleich zweien der sechs Größen k_α nehmen. Dann stellen die vorstehenden Gleichungen zwei der Scharen von Umhüllungskurven vor, welche die sechs Doppeltangentensysteme der Fläche besitzen. *Mit Bezug auf zwei solche Kurvensysteme sind dann die Koordinaten der Punkte der Kummerschen Fläche als vierfach periodische hyperelliptische Funktionen dargestellt.*

Für besondere Linienkomplexe zweiten Grades vereinfachen sich natürlich die in den hier genannten Umkehrproblemen auftretenden hyperelliptischen Funktionen. Sind z. B. die k_α paarweise gleich, so werden sie Logarithmen. Der Komplex ist dann in den bekannten Komplex übergegangen, dessen Geraden ein festes Tetraeder nach konstantem Doppelverhältnisse schneiden. Die Singularitätenfläche ist in dies Tetraeder ausgeartet. In der Tat sind die gemeinsamen Integralflächen zweier zu dem nämlichen Tetraeder gehörigen Komplexe durch eine Gleichung zwischen den Logarithmen der Koordinaten, nämlich durch eine lineare Gleichung zwischen denselben dargestellt. Es sind dies dieselben Flächen, die Lie und ich unter der Bezeichnung „Flächen W" untersucht[39]) und deren Analoga in der Ebene wir neuerdings in einem gemeinsamen Aufsatze in diesen Annalen[40]) betrachtet haben.

Göttingen, im November 1871.

---

[39]) Comptes Rendus. 1870, 1. Sur une certaine classe de courbes et de surfaces. [Siehe Abh. XXV dieser Ausgabe.] Die Auffassung der Flächen W als gemeinsamer Integralflächen zweier zu dem nämlichen Tetraeder gehöriger Komplexe gehört Lie

[40]) Über diejenigen ebenen Kurven usw. Math. Ann., Bd. 4 (1871). [Siehe Abh. XXVI dieser Ausgabe.]

X. Über einen liniengeometrischen Satz.

[Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1872, Nr. 9 (20. März 1872), abgedruckt in den Math. Annalen, Bd. 22 (1884).]

Statt die Koordinaten p_{ik} der geraden Linie im Raume als zweigliedrige Determinanten aus den Koordinaten zweier Punkte oder Ebenen zu definieren, kann man sie bekanntlich auch als selbständige Veränderliche auffassen, welche an eine Bedingungsgleichung zweiten Grades:

$$P = p_{12}p_{34} + p_{13}p_{42} + p_{14}p_{23} = 0$$

gebunden sind. Bei diesem Ausgangspunkte entsteht die Frage, ob jeder algebraische Linienkomplex durch *eine* zu $P = 0$ hinzutretende algebraische Gleichung definiert werden kann, oder ob nicht zur reinen Darstellung des Komplexes gelegentlich mehrere Gleichungen erforderlich sind. Ich werde nun im folgenden zeigen: *daß allerdings zur Darstellung eines algebraischen Linienkomplexes immer eine zu $P = 0$ hinzutretende Gleichung genügt.* Die zum Beweise notwendigen, sehr einfachen Überlegungen, wie sie im nachstehenden auseinandergesetzt sind, können voraussichtlich überhaupt bei der Untersuchung analoger Fragen[1]) Anwendung finden und scheinen dadurch ein allgemeineres Interesse zu besitzen.

Rein analytisch gefaßt, lautet der zu beweisende Satz folgendermaßen: „Aus einer allgemeinen[2]) Mannigfaltigkeit von fünf Dimensionen ist eine Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen durch eine quadratische Gleichung mit nicht verschwindender Determinante[3])

$$P = 0$$

ausgeschieden. Jede in ihr enthaltene algebraische Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen kann durch *eine* zu $P = 0$ hinzutretende algebraische Gleichung dargestellt werden.

---

[1]) Ich erinnere hier an eine Betrachtung, welche Cayley gelegentlich anstellt (Quart. Journ., Bd. 3, 1860, S. 234 [Coll. Pap., Bd. IV]), und die sich darauf bezieht, daß nicht auf allen algebraischen Flächen unvollständige Durchschnittskurven gelegen sein können.

[2]) *Allgemein* mag eine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen heißen, deren Elemente von *unabhängig gedachten* Parametern abhängt.

[3]) Diese nähere Bestimmung ist zugefügt, weil sie die quadratische Gleichung, sofern ihre Eigenschaften hier in Betracht kommen, vollständig charakterisiert.

Statt dieses Satzes mögen wir gleich den folgenden, ihn einschließenden beweisen:

„Es sei eine allgemeine Mannigfaltigkeit von n Dimensionen gegeben, wo $n \geqq 4$, und aus ihr eine Mannigfaltigkeit von $(n-1)$ Dimensionen durch eine quadratische Gleichung:

$$P = 0$$

ausgeschieden. Jede in der letzteren enthaltene algebraische Mannigfaltigkeit von $(n-2)$ Dimensionen kann durch *eine* zu $P=0$ hinzutretende algebraische Gleichung dargestellt werden, *falls nicht alle aus den Koeffizienten von P zusammengesetzten fünfreihigen Unterdeterminaten verschwinden.*"

Diese Bedingung ist in dem ursprünglich aufgestellten Satze befriedigt, insofern dort die (sechsreihige) Determinante von P selbst nicht verschwindet, um so weniger also ihre fünfreihigen Unterdeterminanten sämtlich gleich Null sind.

Der Beweis des allgemeinen algebraischen Satzes mag zunächst für $n=4$ geführt werden, wo also die Bedingung die ist, *daß die Determinante von P nicht verschwindet.* Bei einem beliebigen n lassen sich hinterher dieselben Betrachtungen anstellen, für $n=4$ haben wir nur den Vorzug, den Überlegungen, wie im folgenden geschehen soll, ein anschauliches geometrisches Bild zugrunde legen zu können.

Das einzelne Element der gegebenen Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen sei durch die relativen Werte der fünf homogenen Veränderlichen

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$$

bestimmt. Man wird dieselben immer (und auf unendlich viele Weisen) so wählen können, daß die gegebene quadratische Gleichung $P=0$ (deren Determinante nicht verschwindet) die folgende Gestalt annimmt:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 = 0,$$

oder, indem man

$$x_4 + ix_5 = p, \quad x_4 - ix_5 = q$$

setzt:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + pq = 0.$$

Das Element:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad p = 0,$$

welches im folgenden ausgezeichnet werden soll, ist dabei ein unter den übrigen der Mannigfaltigkeit $P=0$ angehörigen beliebig ausgewähltes.

In der nunmehr hergestellten Gleichungsform kann die Mannigfaltigkeit $P=0$ ohne weiteres auf eine allgemeine Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen eindeutig abgebildet werden, ganz dem entsprechend, wie die Abbildung einer Fläche zweiten Grades auf die Ebene durch Projektion von einem Punkte der Fläche aus erfolgt. Man setze nämlich, unter

$$\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$$

die homogenen Koordinaten eines Elementes einer allgemeinen Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen verstanden:

$$\varrho x_1 = \xi_1\xi_4, \quad \varrho x_2 = \xi_2\xi_4, \quad \varrho x_3 = \xi_3\xi_4, \quad \varrho p = \xi_4\xi_4, \quad \varrho q = -(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2).$$

Die allgemeine Mannigfaltigkeit von drei Dimensionen mag jetzt durch den Punktraum vorgestellt sein, die ξ mögen also homogene Punktkoordinaten bedeuten: *dann ist die gegebene Mannigfaltigkeit $P=0$ durch die vorstehenden Gleichungen eindeutig auf den Punktraum abgebildet.* Dabei tritt im Punktraume ein fundamentaler Kegelschnitt auf:

$$\xi_4 = 0, \qquad \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0,$$

dessen Punkten jedesmal ∞^1 Elemente der gegebenen Mannigfaltigkeit $P=0$ entsprechen. Andererseits sind sämtliche übrige Punkte der Ebene

$$\xi_4 = 0$$

einem einzigen Elemente der Mannigfaltigkeit $P=0$, dem Elemente:

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0, \quad p = 0$$

zugeordnet, welches, in Analogie mit dem Projektionspunkte bei der Abbildung der Flächen zweiten Grades, im folgenden das *Projektionselement* heißen mag.

Fügt man nun zu $P=0$ eine weitere algebraische Gleichung, die vom m-ten Grade sein mag;

$$\Omega = 0$$

hinzu, so erhält man im Punktraume als Bild der beiden Gleichungen genügenden Elemente eine Fläche vom Grade $2m$, welche den fundamentalen Kegelschnitt m-fach enthält. Von dieser Bildfläche kann sich gelegentlich, einfach oder mehrfach zählend, die Ebene $\xi_4 = 0$ absondern. Es tritt dies dann und nur dann ein, wenn das Projektionselement selbst der Mannigfaltigkeit $\Omega = 0$, als gewöhnliches oder singuläres Element, angehört. Aber dies können wir immer vermeiden, da es uns ja frei steht, auch wenn die Mannigfaltigkeit $\Omega = 0$ bereits gegeben ist, das Projektionselement unter den Elementen von $P=0$ zu wählen, wie wir wollen. Es bildet sich also allgemein die Mannigfaltigkeit:

$$P = 0, \quad \Omega = 0$$

als eine Fläche vom $2m$-ten Grade ab, *welche den fundamentalen Kegelschnitt zur m-fachen Kurve hat, und die Ebene desselben in nicht dem Kegelschnitte angehörigen Punkten nicht trifft.*

Es ist aber auch umgekehrt ersichtlich, daß jede Fläche $2m$-ten Grades, welche diesen Bedingungen genügt, den vollständigen Durchschnitt von $P=0$ mit der durch eine hinzutretende Gleichung $\Omega = 0$ vorgestellten Mannigfaltigkeit repräsentiert. Denn die Gleichung einer solchen Fläche muß in jedem Gliede die Ausdrücke ξ_4 und $(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)$ zusammen in der m-ten Dimension enthalten. Das einzelne Glied hat also, unter μ eine Zahl $\geqq 0$ und $\leqq m$ verstanden, die folgende Form

$$\xi_4^\mu \cdot (\xi_2^1 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^{m-\mu} \cdot \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4),$$

wo φ eine homogene Funktion vom μ-ten Grade der beigefügten Argumente ist. Aber das Produkt:

$$\xi_4^\mu \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$$

ist ersichtlich nichts anderes, als eine homogene Funktion μ-ten Grades der Argumente

$$\xi_1\xi_4, \ \xi_2\xi_4, \ \xi_3\xi_4, \ \xi_4\xi_4.$$

Jedes Glied der gegebenen Flächengleichung und also die Flächengleichung selbst ist mithin eine homogene Funktion m-ten Grades der fünf Argumente:

$$\xi_1\xi_4, \ \xi_2\xi_4, \ \xi_3\xi_4, \ \xi_4\xi_4, \ (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2).$$

Man hat jetzt nur statt dieser Argumente bez.

$$x_1, \ x_2, \ x_3, \ p, \ -q$$

zu setzen, um die Gleichung m-ten Grades

$$\Omega = 0$$

derjenigen Mannigfaltigkeit zu haben, welche mit $P = 0$ zusammen als vollständigen Durchschnitt eine Mannigfaltigkeit bestimmt, deren Bild im Punktraume die ursprünglich gegebene Fläche ist, womit denn die Behauptung, daß die Fläche das Bild eines vollständigen Durchschnittes sei, bewiesen ist.

Eine beliebige in $P = 0$ enthaltene algebraische Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen, wird sich nun aber, — falls wir nicht, was wir immer vermeiden können, das Projektionselement unter ihren Elementen wählen — *nicht anders als eine solche Fläche abbilden können, die den vorgenannten Bedingungen genügt.* Denn die Bildfläche darf, der Annahme über die Lage des Projektionselementes entsprechend, die Ebene $\xi_4 = 0$ in keinen anderen Punkten, als in den Punkten des fundamentalen Kegelschnittes treffen, und das ist, *weil der Kegelschnitt ein irreduzibeles Gebilde ist,* nicht anders möglich, als wenn sie von gerader Ordnung $= 2m$ ist, und den Kegelschnitt als m-fache Kurve enthält[4]).

[4]) [Für die genaue Durchführung dieses Schlusses ist es notwendig zu berücksichtigen, daß die Bildfläche mit der Ebene $\xi_4 = 0$ auch keine Berührung haben kann, weil die ihr im R_4 entsprechende Mannigfaltigkeit sonst durch den benutzten Projektionspunkt hindurchgehen würde. Man überzeugt sich hiervon in einfachster Weise durch Betrachtung der ebenen Schnitte mit den durch den Projektionspunkt hindurchgehenden Ebenen, wenn man die bekannten Verhältnisse bei der stereographischen Projektion einer Fläche zweiten Grades heranzieht. K.]

Hiermit ist der Beweis unseres Satzes für $n = 4$ geführt. Seine wesentlichen Momente mögen hier noch ausdrücklich zusammengefaßt werden, es sind die folgenden:

1. daß im Punktraume eine *irreduzibele* Fundamentalkurve auftritt;

2. daß eine durch die Fundamentalkurve gelegte Fläche (die Ebene $\xi_4 = 0$) ein einzelnes, beliebig anzunehmendes Element des darzustellenden Gebildes repräsentiert;

3. daß es nur auf das Verhalten der Bildfläche zum Fundamentalkegelschnitte ankommt, ob eine $P = 0$ angehörige Mannigfaltigkeit von zwei Dimensionen als vollständiger Durchschnitt gefaßt werden kann. —

Unser Schluß würde dagegen sofort ungültig werden, wenn der Fundamentalkegelschnitt reduzibel wäre, also in ein Geradenpaar zerfiele. Denn dann kann man Flächen von der Ordnung $(m' + m'')$ konstruieren, welche die Geraden bez. m'- und m''-fach enthalten. Dieselben treffen, wie verlangt, die Ebene des Kegelschnittes nur in Punkten des Kegelschnittes, aber vollständige Schnitte würden sie erst dann vorstellen, wenn $m' = m''$ wäre.

Dieses Zerfallen des fundamentalen Kegelschnittes tritt nun gerade dann ein, wenn die Determinante der Form P verschwindet, und mußte deshalb beim Beweise unseres Satzes diese Möglichkeit ausdrücklich ausgeschlossen werden. In der Tat, hat P eine verschwindende Determinante (ohne daß zugleich alle Unterdeterminanten verschwinden), so kann man ihm die Form geben:

$$0 = x_1^2 + x_2^2 + pq,$$

die Abbildungsfunktionen werden:

$$\varrho x_1 = \xi_1\xi_4, \quad \varrho x_2 = \xi_2\xi_4, \quad \varrho x_3 = \xi_3\xi_4, \quad \varrho p = \xi_4\xi_4, \quad \varrho q = -(\xi_1^2 + \xi_2^2),$$

und der fundamentale Kegelschnitt wird:

$$\xi_4 = 0, \quad \xi_1^2 + \xi_2^2 = 0,$$

ist also in ein Linienpaar:

$$\xi_4 = 0, \quad \xi_1 + i\xi_2 = 0,$$
$$\xi_4 = 0, \quad \xi_1 - i\xi_2 = 0$$

zerfallen. —

Auf ganz ähnliche Weise, wie nunmehr der Beweis unseres Satzes für $n = 4$ geführt und das Nichtverschwinden der Determinante als notwendige und hinreichende Bedingung erkannt wurde, erledigt sich die Frage für ein beliebiges n. Ist erstlich $n = 3$, haben wir also eine Fläche zweiten Grades, so entsteht bei der Abbildung derselben auf die allgemeine Mannigfaltigkeit der nächst niederen Dimension ohnehin ein reduzibeles Fundamentalgebilde, auch wenn die Determinante der Fläche nicht verschwindet, nämlich ein Punktepaar. *Auf Flächen zweiten Grades findet unser Satz* *deshalb keine Anwendung*[5]). Dagegen gilt der Satz allemal, wenn bei der Abbildung der Mannigfaltigkeit $P = 0$ auf die allgemeine Mannigfaltigkeit von $(n-1)$ Dimensionen — eine Abbildung, die sich immer in gleicher Weise gestaltet — ein irreduzibeles Fundamentalgebilde auftritt. Hierzu ist das Nichtverschwinden der aus den Koeffizienten von P gebildeten fünfreihigen Determinanten die notwendige und hinreichende Bedingung. Als Fundamentalgebilde tritt nämlich eine Mannigfaltigkeit von $(n-3)$ Dimensionen auf, welche aus einer allgemeinen Mannigfaltigkeit von $(n-2)$ Dimensionen durch eine quadratische Gleichung ausgeschieden wird. Soll das Fundamentalgebilde zerfallen, so ist dazu das Verschwinden aller aus den Koeffizienten der Gleichung gebildeter dreireihiger Unterdeterminanten die Bedingung; und dies Verschwinden tritt dann und nur dann ein, wenn ein Gleiches bei den fünfreihigen Unterdeterminanten der ursprünglichen quadratischen Gleichung $P = 0$ der Fall war. *Hiermit ist denn unser allgemeiner Satz für ein beliebiges n, insbesondere das in ihm enthaltene liniengeometrische Theorem, bewiesen.*

Ich will hier von der auseinandergesetzten Theorie noch zwei weitere geometrische Anwendungen geben. Die erste bezieht sich wieder auf Liniengeometrie. Man verbinde nämlich mit der quadratischen Gleichung, der die Linienkoordinaten zu genügen haben:

$$P = 0,$$

eine lineare. So hat man einen linearen Komplex, den man auch in der folgenden Weise bestimmen kann. Aus der linearen Gleichung nehme man den Wert einer der Veränderlichen, ausgedrückt in den fünf anderen, und substituiere ihn in $P = 0$, wodurch eine neue quadratische Gleichung $P' = 0$ entsteht. Der lineare Komplex erscheint dann als durch diese Gleichung aus einer allgemeinen Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen ausgeschieden. Die Determinante von P' verschwindet nicht, wenn der lineare Komplex ein allgemeiner ist; sie verschwindet dann und nur dann, wenn er ein spezieller wird[6]). Wir erhalten also den folgenden Satz:

[5]) Ebensowenig gilt der Satz für Kegelschnitte, wie ohne weiteres ersichtlich.

[6]) Es braucht kaum darauf hingewiesen zu werden, daß die eben vorgetragene Abbildung einer Mannigfaltigkeit $P = 0$ von drei Dimensionen auf den Punktraum mit der Abbildung des linearen Komplexes auf den Punktraum gleichbedeutend ist, welche Herr Nöther in den Göttinger Nachrichten, 1869, Nr. 15, gegeben und die Herr Lie seinen metrisch-projektivischen Untersuchungen zugrunde gelegt hat. Ich möchte an dieser Stelle ausdrücklich auf die Abbildung des speziellen linearen Komplexes hinweisen, welche die Theorie der Flächen mit einer mehrfachen Geraden mit derjenigen der Flächen mit zwei sich schneidenden mehrfachen Geraden in eine merkwürdige Verbindung setzt, durch welche z. B. die Zeuthenschen Untersuchungen über die Flächen mit einer mehrfachen Geraden [Math. Ann., Bd. 4 (1871)] für die letztgenannten Flächen verwertet werden können.

Kongruenzen, welche einem allgemeinen linearen Komplexe angehören, können als vollständiger Durchschnitt desselben mit einem anderen Komplexe dargestellt werden.

Für den speziellen linearen Komplex gilt aber der Satz nicht mehr. Ebensowenig wird der analoge Satz gelten, wenn wir zu der Gleichung des linearen Komplexes eine weitere lineare Gleichung hinzufügen und die durch beide dargestellte lineare Kongruenz ins Auge fassen. Auf einer linearen Kongruenz gibt es in der Tat Linienflächen, welche sich nicht als vollständiger Durchschnitt der Kongruenz mit einem hinzutretenden Komplex darstellen lassen. Es sind dies diejenigen, welche die Leitlinien der Kongruenz ungleich oft enthalten.

Eine zweite geometrische Anwendung bezieht sich auf die Darstellung des Raumpunktes durch die relativen Werte seiner (mit gewissen Konstanten multiplizierten) Potenzen mit Bezug auf fünf Kugeln, welche Herr Lie in Anknüpfung an die Abbildung des linearen Komplexes Göttinger Nachrichten, 1871, Nr. 7, S. 208 gegeben hat, während sie Herr Darboux bereits früher (1868) in einer der Pariser Akademie eingereichten Abhandlung aufgestellt hatte, die aber noch nicht veröffentlicht ist (vgl. Darboux in den Comptes Rendus, 1871, September). Der Punkt wird durch fünf homogene Koordinaten dargestellt, welche, einzeln gleich Null gesetzt, fünf linear unabhängige Kugeln vorstellen, und diese Koordinaten sind an eine Bedingungsgleichung zweiten Grades mit nicht verschwindender Determinante geknüpft. Der Punktraum ist hiernach das Bild einer Mannigfaltigkeit, die aus einer allgemeinen Mannigfaltigkeit von vier Dimensionen durch diese quadratische Gleichung abgeschieden wird, es liegen also genau die Verhältnisse vor, wie wir sie eben bei dem Beweise des allgemeinen Satzes für $n = 4$ voraussetzten. Dem Projektionselemente entspricht die unendlich ferne Ebene des Punktraumes, der in ihr enthaltene imaginäre Kugelkreis ist der fundamentale Kegelschnitt. Einer Verlegung des Projektionselementes entspricht, wie man leicht sieht, eine Transformation des Punktraums durch reziproke Radien. Hier erhalten wir also: *Jede algebraische Fläche kann vermöge Umformung durch reziproke Radien in eine solche übergeführt werden, die durch eine Gleichung zwischen den in Rede stehenden Koordinaten rein dargestellt wird.* Dagegen würde der entsprechende Satz bei einer analogen Koordinatenbestimmung in der Ebene nicht mehr richtig sein[7]).

[7]) [Man vergleiche die Arbeiten von Lie und mir in Math. Ann., Bd. 5 (s. Abh. VIII, IX dieser Ausgabe), sowie Herrn Darboux' im Jahre 1873 erschienenes Buch: „Sur une certaine famille de courbes et de surfaces" (Paris, Gauthier-Villars).]

XI. Über die Plückersche Komplexfläche.

[Math. Annalen, Bd. 7 (1874).]

Aus der Diskussion der Linienkomplexe zweiten Grades, wie sie Herr Weiler in dem vorstehenden Aufsatze[1]) durchgeführt hat, geht hervor, daß die Plückersche Komplexfläche gleich der allgemeineren Kummerschen Fläche für unendlich viele Komplexe zweiten Grades die singuläre Fläche[2]) bildet, und daß dieselbe also mit ganz ähnlichen Mitteln untersucht werden kann, wie dies der Verf. früher [Math. Ann., Bd. 2, S. 198ff. (siehe Abh. II dieser Ausgabe)] bei der Kummerschen Fläche getan hatte. Das System der sechs paarweise in Involution liegenden linearen Komplexe, welches bei der Kummerschen Fläche eine fundamentale Rolle spielte, ist bei der Komplexfläche nur in dem Sinne ausgeartet, daß zwei dieser Komplexe, indem sie zusammenrückten, speziell wurden und in die Doppellinie der Fläche übergingen. Mit Bezug auf die vier übrigen linearen Komplexe bleiben durchaus die Schlußweisen bestehen, welche bei der Kummerschen Fläche ihre Anwendung fanden, und man hat also insbesondere den Satz:

Eine Plückersche Komplexfläche ist mit Bezug auf vier paarweise in Involution liegende lineare Komplexe ihre eigene reziproke Polare.

Aus diesem Satze folgt ohne weiteres, daß das Doppelverhältnis der vier singulären Punkte der Komplexfläche gleich dem Doppelverhältnisse ihrer vier Ebenen sei. Indem man sodann die Komplexfläche nicht mehr als singuläre Fläche eines besonderen Komplexes zweiten Grades betrachtet, sondern in der Art, wie sie bei Plücker eingeführt wird, d. h. als Brennfläche derjenigen Linien eines Komplexes zweiten Grades, welche eine feste Gerade schneiden, erhält man:

Die vier Punkte, in denen eine beliebige Gerade die singuläre Fläche eines Komplexes zweiten Grades trifft, und die vier Ebenen, die man durch dieselbe Gerade als Tangentenebenen der singulären Fläche legen kann, haben dasselbe Doppelverhältnis.

1) [A. Weiler, Über die verschiedenen Gattungen der Komplexe zweiten Grades, Math. Ann., Bd. 7 (1874).]

2) Ich ziehe diesen von Herrn Voß vorgeschlagenen Ausdruck (Göttinger Nachrichten, 1873, S. 546) dem sonst gebräuchlichen „Singularitätenfläche“ vor.

Diesen Satz habe ich für die singuläre Fläche des allgemeinen Komplexes vom zweiten Grade, d. h. für die Kummersche Fläche, bereits in Math. Ann., Bd. 2, S. 215 (siehe Abh. II dieser Ausgabe, S. 70) mitgeteilt; aber der Zusammenhang, in welchem er dort ausgesprochen ist, kann nicht als Beweis desselben gelten.

Um so lieber will ich hier eine einfache Betrachtung mitteilen, die in Anlehnung an die von Plücker begonnene Untersuchungsweise der Komplexflächen (vgl. dessen Neue Geometrie, S. 205ff.) unmittelbar die vier zur Fläche gehörigen linearen Komplexe nachweist und aus ihrer Existenz die Gleichheit der fraglichen Doppelverhältnisse, sowie weiterhin die Eigenschaft der Fläche erschließt, ihre eigene reziproke Polare zu sein. Aus der Gleichheit der beiden Doppelverhältnisse wird man weiterhin, was bei Plücker in minder übersichtlicher Weise bewiesen wird, den Satz von der Identität der von den singulären Punkten gebildeten und von den singulären Ebenen umhüllten Fläche gewinnen. Ist nämlich das Doppelverhältnis der vier Punkte, in welchen eine beliebige Gerade die erste Fläche trifft, immer gleich dem Doppelverhältnisse der vier Ebenen, welche man durch die Gerade hindurch an die zweite Fläche legen kann, so sind die Tangenten der ersten Fläche immer auch Tangenten der zweiten Fläche, d. h. die beiden Flächen sind identisch[3]), wie zu beweisen.

Für die Singularitäten der Komplexfläche, wie sie Plücker nachweist, sollen im nachstehenden, soweit sie in Betracht kommen, die folgenden Bezeichnungen[4]) angewandt werden. Die vier singulären Ebenen der Fläche mögen E_1, E_2, E_3, E_4 heißen. Sie enthalten je ein Paar von Doppelpunkten der Fläche: $1, 1'$; $2, 2'$; $3, 3'$; $4, 4'$. Die in ihnen verlaufenden Verbindungslinien der Doppelpunktpaare, die singulären Strahlen der Fläche, seien S_1, S_2, S_3, S_4. Dieselben schneiden die Doppellinie und die Polare der Fläche bez. in den Punkten p_1, p_2, p_3, p_4 und q_1, q_2, q_3, q_4, die jedesmal zu den zwei auf dem singulären Strahle gelegenen Doppelpunkten harmonisch sind. Weiter sollen die vier singulären Punkte der Fläche P_1, P_2, P_3, P_4 genannt sein. Von ihnen gehen die Paare Doppelebenen I, I'; II, II'; III, III'; IV, IV' aus. Die singulären Achsen endlich, in welchen sich die zusammengehörigen Doppelebenen schneiden, seien durch A_1, A_2, A_3, A_4 bezeichnet.

Die Doppelebenen der Fläche enthalten (vgl. Plücker) jedesmal vier Doppelpunkte, und durch jeden Doppelpunkt gehen vier Doppelebenen hin-

3) Der Nachweis der Identität der beiden Flächen ist durch Herrn Pasch in seiner Habilitationsschrift (Gießen 1870) auf allgemeinere und fundamentalere Betrachtungen betr. Brennflächen von Kongruenzen zurückgeführt worden. Der im Texte angegebene Beweis scheint aber immer dadurch interessant, daß er bis zum Schlusse die Vorstellung des Unendlich-Kleinen vermeidet.

4) Vgl. Clebschs Bericht über Plückers Neue Geometrie in den Göttinger Anzeigen, 1869.

durch. Man kann die festgesetzten Bezeichnungen insbesondere so wählen, daß dieses Verhältnis in dem folgenden Schema seine Darstellung findet:

Ebenen	Punkte	Ebenen	Punkte
I	1 2 3 4	I'	1′ 2′ 3′ 4′
II	1 2 3′ 4′	II'	1′ 2′ 3 4
III	1 2′ 3 4′	III'	1′ 2 3′ 4
IV	1 2′ 3′ 4	IV'	1′ 2 3 4′

Ich behaupte nun zunächst, daß es möglich ist, die acht Doppelpunkte den acht Doppelebenen in den folgenden vier Weisen durch lineare Komplexe zuzuordnen. *Es entsprechen den Punkten:*

$$1,\quad 1',\quad 2,\quad 2',\quad 3,\quad 3',\quad 4,\quad 4'$$

bezüglich die Ebenen:

$$\begin{array}{cccccccc} I, & I', & II, & II', & III, & III', & IV, & IV \\ II, & II', & I, & I', & IV', & IV, & III', & III \\ III, & III', & IV', & IV, & I, & I', & II', & II \\ IV, & IV', & III', & III, & II', & II, & I, & I'. \end{array}$$

Gesetzt, es sei dieses bewiesen, dann folgt unmittelbar, daß die vier betreffenden linearen Komplexe paarweise in Involution liegen. Denn die Zuordnungen, wie sie durch das vorstehende Schema gegeben sind, haben ersichtlich die Eigenschaft, paarweise vertauschbar zu sein, und die Vertauschbarkeit der mit ihnen verknüpften Zuordnungen ist für lineare Komplexe das Kennzeichen der involutorischen Lage [vgl. Math. Ann., Bd. 4, S. 414. (Siehe Abh. XIV dieser Ausgabe, S. 237)].

Um aber den nötigen Beweis zu führen, konstruiere ich vier lineare Komplexe aus je fünf denselben angehörigen Linien und zeige sodann, daß sie die voraufgeführten Zuordnungen zur Folge haben. Es soll dies der Kürze wegen nur mit Bezug auf die erste Zuordnung auseinandergesetzt werden. Man konstruiere nämlich den linearen Komplex, der die folgenden fünf Geraden enthält:

die Doppellinie der Fläche,
die Polare,
die Verbindungsgeraden der Doppelpunkte 2, 3; 3, 4′; 4, 2′.

Man betrachte sodann etwa die singulären Strahlen S_2 und S_3. Die Linien des linearen Komplexes, welche beide schneiden, müssen eine Regelschar bilden, und vermöge derselben werden die beiden Punktreihen S_2 und S_3 projektiv aufeinander bezogen sein. Aber von dieser Regelschar sind drei Erzeugende bekannt: die Doppellinie, die Polare und die Gerade 2, 3′. Sie ordnen den Punkten p_2, q_2, 2 von S_2 die Punkte p_3, q_3, 3′ von S_3

zu. Da aber p_2, q_2 auf S_2 zu 2, 2′ und p_3, q_3 auf S_3 zu 3, 3′, oder, was dasselbe ist, zu 3′, 3 harmonisch sind, so werden auch 2′, 3 durch die Regelschar zugeordnet werden. *Dem linearen Komplexe gehört also auch die Gerade* 2′, 3 *an.* Dasselbe beweist man in ähnlicher Weise von den Geraden 3′, 4; 4′, 2.

Unter den geraden Linien, die durch den Punkt 2 hindurchgehen, kennt man jetzt zwei als dem linearen Komplexe angehörig, nämlich 2, 3′ und 2, 4′. Dem Punkte 2 ist also im Komplexe die Ebene 2, 3′, 4′, d. h. nach der oben festgesetzten Bezeichnung die Ebene II zugeordnet. Dieselbe geht außer durch 2, 3′, 4′ noch durch 1 hindurch; die Gerade 1, 2 gehört also ebenfalls dem Komplexe an. In gleicher Weise zeigt man, daß den Punkten 3 und 4 die Ebenen III und IV entsprechen und also auch 1, 3; 1, 4 dem Komplexe angehören. Hieraus denn endlich folgt, daß dem Punkte 1 die Ebene I entspricht. Die Zuordnung von 1′, 2′, 3′, 4′ bez. zu I', II', III', IV' ergibt sich auf dieselbe Weise, und es ist somit der geforderte Beweis erbracht.

Durch denselben linearen Komplex werden einander zugeordnet, wie nicht näher ausgeführt zu werden braucht: die vier singulären Ebenen E_1, E_2, E_3, E_4 bez. den vier singulären Punkten P_1, P_2, P_3, P_4; die vier singulären Strahlen S_1, S_2, S_3, S_4 bez. den vier singulären Achsen A_1, A_2, A_3, A_4 usw. Wir haben also:

Das Singularitätensystem ist in bezug auf den konstruierten linearen Komplex seine eigene konjugierte Polare,

was die Gleichheit der von den vier singulären Punkten und den vier singulären Ebenen gebildeten Doppelverhältnisse als einzelne Behauptung einschließt. Weiter aber folgt:

Die Komplexfläche selbst ist in bezug auf den Komplex ihre eigene konjugierte Polare.

Denn die Polarfläche derselben ist wieder eine Fläche vierter Ordnung mit derselben Doppellinie, denselben singulären Strahlen, denselben Berührungskegelschnitten in den Doppelebenen, und durch diese Elemente ist die Fläche als Fläche vierter Ordnung mehr als vollständig bestimmt.

Hiermit sind die zu Anfang voraufgeschickten Sätze und also auch die aus ihnen gezogenen Folgerungen bewiesen.

Erlangen, Oktober 1873.

XII. Über Konfigurationen, welche der Kummerschen Fläche zugleich eingeschrieben und umgeschrieben sind.

[Math. Annalen, Bd. 27 (1885).]

Eine Reihe von Vorträgen, welche ich in dem nun vergangenen Sommer in meinem Seminare gehalten habe, gaben mir die Veranlassung, die interessanten Sätze, welche Herr Rohn betreffs des in der Überschrift genannten Gegenstandes von der Theorie der hyperelliptischen Funktionen ausgehend in seiner Habilitationsschrift[1]) mehr andeutet als entwickelt, im Zusammenhange darzulegen und nach einigen Richtungen weiter zu führen. Indem ich im folgenden den wesentlichen Inhalt meiner Betrachtungen reproduziere, hoffe ich zu erreichen, daß der Gegenstand allseitig zugänglich wird und von anderer Seite vielleicht bald weiter gefördert werden kann.

I. Elementares über Liniengeometrie.

§ 1.

Vorbemerkungen.

Die eigentliche Grundlage für die Betrachtung der Kummerschen Fläche bildet anerkanntermaßen die Untersuchung der Linienkomplexe zweiten Grades, deren Singularitätenfläche die Kummersche Fläche ist. Ich werde im folgenden durchweg, wie dies auch Herr Rohn tut, von dem kanonischen Koordinatensysteme ausgehen, das ich im zweiten Bande der Math. Annalen[2]) einführte und vermöge dessen die Raumgerade homogene Koordinaten $x_1, x_2, \ldots, x_6$ erhält, welche an die Bedingung:

$$\sum x_i^2 = 0 \tag{1}$$

gebunden sind, während gleichzeitig die unendlich vielen in Rede stehenden Komplexe zweiten Grades durch folgende Gleichung gegeben sind:

$$\sum \frac{x_i^2}{\varkappa_i - \lambda} = 0, \tag{2}$$

[1]) Math. Ann., Bd. 15: *Transformation der hyperelliptischen Funktionen $p = 2$ und ihre Bedeutung für die Kummersche Fläche* (vgl. insbesondere S. 348—350 daselbst). [An die in der Einleitung genannten Vorträge schließt sich hinwiederum die Leipziger Dissertation von Reichardt (Halle, 1886), welche die Anwendung der hyperelliptischen Funktionen auf die Kummersche Fläche in ausführlicher Darstellung zusammenfassend behandelt. Für die spätere Entwicklung vgl. den Enzyklopädieartikel von Krazer und Wirtinger.]

[2]) [Vgl. Abh. II dieser Ausgabe.]

unter λ einen Parameter verstanden. Übrigens setze ich im folgenden die Theorie dieser Komplexe, die jetzt ja verschiedentlich bearbeitet und zur Darstellung gebracht ist, im wesentlichen als bekannt voraus. Es soll sich zunächst darum handeln, die l. c. besprochenen Konfigurationen, soweit dies unmittelbar gelingt, in elementarer Weise, d. h. unter Beiseitelassung der hyperelliptischen Funktionen, zu behandeln. Wenn wir dann weiter unten, im zweiten Teile der gegenwärtigen Darstellung, die letzteren in Betracht ziehen und, auf ihre Kenntnis gestützt, im dritten Teile auf die Konfigurationen zurückkommen, so wird der große Vorteil, den die Benutzung transzendenter Funktionen hier bietet, um so deutlicher hervortreten. Derselbe zeigt sich zumal darin, daß wir alle Konstruktionen sofort verallgemeinern und insbesondere eine neue Klasse von Konfigurationen konstruieren können, worauf gleich hier aufmerksam gemacht sei.

§ 2.

Konjugierte Punkte und Ebenen der Kummerschen Fläche.

Der Hauptsatz, den ich nunmehr der speziellen Betrachtung voranstellen will, ist folgender:

Die vier Punkte, in denen eine beliebige Raumgerade die Kummersche Fläche schneidet, und die vier Tangentialebenen, welche man durch dieselbe Raumgerade an die Fläche legen kann, sind in der Art aufeinander bezogen, daß jeder Zerlegung der vier Punkte in zwei Paare eine Zerlegung der vier Ebenen in zwei Paare rational entspricht.

Dieser Satz ergibt sich, beiläufig bemerkt, als Korollar des anderen, mehrfach behandelten, den ich in Bd. 2 der Math. Ann. (l. c.) mitteilte, demzufolge die vier Punkte und die vier Ebenen in richtiger Reihenfolge zusammen dasselbe Doppelverhältnis darbieten[3]). In der Tat sind vier Elemente eines einstufigen Gebildes

$$I,\ II,\ III,\ IV$$

vier Elementen'

$$1,\ 2,\ 3,\ 4$$

eines zweiten einstufigen Gebildes projektiv, so sind sie es nicht minder zu folgenden Elementenreihen:

$$\begin{gathered} 2,\ 1,\ 4,\ 3; \\ 3,\ 4,\ 1,\ 2; \\ 4,\ 3,\ 2,\ 1, \end{gathered}$$

[3]) Vgl. meine Bemerkungen in Bd. 7 der Math. Annalen [vgl. Abh. XI dieser Ausgabe] oder auch die Entwicklungen von Voß im 9. Bande daselbst, S. 66. Übrigens folgt der Satz auch sofort aus der allgemeinen Theorie der zwei-zweideutigen Verwandtschaft zweier Grundgebilde erster Stufe. Man betrachte die Raumgerade als Leitlinie einer gewöhnlichen Komplexfläche und beachte, daß dann ihre Punkte und Ebenen zwei-zweideutig zusammen geordnet sind, usw.

und es entsprechen sich also die Zerfällungen:

$$(3)\quad \begin{cases} (I,\ II)\ (III,\ IV) & \text{und}\quad (1,\ 2)\ (3,\ 4), \\ (I,\ III)\ (IV,\ II) & \text{und}\quad (1,\ 3)\ (4,\ 2), \\ (I,\ IV)\ (II,\ III) & \text{und}\quad (1,\ 4)\ (2,\ 3) \end{cases}$$

in eindeutiger Weise.

Es sollen jetzt die römischen Ziffern die Ebenen und die arabischen Ziffern die Punkte der Kummerschen Fläche bedeuten, welche unserer Raumgeraden angehören. *Ich werde dann solche Ebenenpaare und Punktepaare, welche in einer der Zerfällungen* (3) *nebeneinander stehen,* z. B.

$$(I,\ II)\quad \text{und}\quad (1,\ 2)$$

in bezug auf die Kummersche Fläche konjugiert nennen. Zu jeder Raumgeraden gehören offenbar zwölf konjugierte Ebenen- und Punktepaare. Kennen wir von den Ebenen der Kummerschen Fläche, die durch eine Raumgerade gehen, zwei und außerdem einen Schnittpunkt der Raumgeraden mit der Fläche, so können wir denjenigen anderen Schnittpunkt, der mit den beiden Ebenen und dem vorgegebenen Punkte konjugiert ist, rational berechnen. Man beachte, daß man diesen Satz auch umkehren kann. Gelingt es, durch rationale Prozesse einen weiteren Schnittpunkt unserer Raumgeraden mit der Kummerschen Fläche zu finden, so wird dies eben derjenige Schnittpunkt sein, der mit den anderen Elementen konjugiert ist.

Ich stelle jetzt die Frage, wie der Begriff konjugierter Ebenen und Punkte hervortritt, wenn wir unsere Raumgerade mit einem Komplexe der Schar (2) kombinieren und die Komplexfläche konstruieren, deren Leitlinie sie ist.

Es soll zunächst einer derjenigen vier Komplexe der Schar (2) herausgegriffen werden, denen unsere Raumgerade als Linie angehört. Vermöge eines solchen Komplexes werden die Ebenen und Punkte unserer Raumgeraden in bekannter Weise eindeutig zusammengeordnet, indem jede Ebene einen Komplexkegelschnitt trägt, der die Gerade in einem bestimmten Punkte (den wir dann der Ebene entsprechend setzen) berührt. Für die Ebenen I, II, III, IV, die wir jetzt die singulären Ebenen nennen, gilt insbesondere folgendes: Der in der singulären Ebene enthaltene Komplexkegelschnitt hat sich in zwei Strahlbüschel aufgelöst, deren eines seinen Mittelpunkt auf unserer Raumgeraden hat. Dieser Mittelpunkt, welcher der singulären Ebene in dem hier in Betracht kommenden Sinne entspricht, ist gleichzeitig einer der vier auf unserer Raumgeraden gelegenen singulären Punkte, die wir schon mit $1, 2, 3, 4$ bezeichneten. — Es sind hier betreffs der Zusammengehörigkeit der singulären Ebenen und Punkte dem projektiven Charakter der Zuordnung und der Vierzahl der in Betracht

kommenden Komplexe entsprechend genau jene vier Anordnungen möglich, die wir soeben aufgezählt haben. Daher folgt zunächst:

(A) *Beliebige zwei der singulären Ebenen und diejenigen zwei der singulären Punkte, die ihnen in einem der vier Komplexe entsprechen, sind jedesmal konjugiert.*

Wir können auch so sagen:

(A′) *Sind zwei der Ebenen und zwei der Punkte konjugiert, so gibt es unter den vier Komplexen unserer Schar, denen die Raumgerade angehört, immer zwei, welche den beiden Ebenen, in der einen oder anderen Reihenfolge, die beiden Punkte entsprechen lassen;*

oder auch:

(A″) *Befindet sich unter den vier Komplexen einer, der zweien der Ebenen zwei bestimmte unter den Punkten entsprechen läßt, so gibt es noch einen zweiten Komplex, der dies ebenfalls tut, nur daß die Reihenfolge, in der die Punkte den Ebenen zugeordnet werden, bei ihm umgekehrt erscheint.* —

Es sei jetzt $\lambda = a$ ein Komplex unserer Schar, dem unsere Raumgerade nicht angehört. Die Komplexkegelschnitte, welche $\lambda = a$ in den singulären Ebenen I, II, III, IV entsprechen, sind wieder je in zwei Strahlbüschel zerfallen; ich will die Mittelpunkte dieser Büschel (von denen jetzt keiner auf der anfänglichen Raumgeraden liegt) folgendermaßen bezeichnen:

$$(4\text{a})\qquad I', I''; \ II', II''; \ III', III''; \ IV', IV''.$$

Wir betrachten andererseits die Komplexkegel, die von den singulären Punkten $1, 2, 3, 4$ auslaufen. Sie sind ebenfalls je in zwei Büschel zerfallen, deren Ebenen wir beziehungsweise nach folgendem Schema benennen mögen:

$$(4\text{b})\qquad 1', 1''; \ 2', 2''; \ 3', 3''; \ 4', 4'';$$

keine dieser Ebenen geht durch unsere Raumgerade hindurch.

Nun ist die Beziehung dieser Ebenen zu den Punkten (4a) bekanntlich die, daß jede der Ebenen vier der Punkte trägt (immer einen aus jeder singulären Ebene), während zugleich die beiden Ebenen eines Paares zusammengenommen alle acht Punkte enthalten.

Wir betrachten jetzt die Punkte:

$$I', I''; \ II', II'',$$

die in den singulären Ebenen I, II enthalten sind. Dieselben mögen sich auf die beiden von 1 auslaufenden Ebenen:

$$1,\ 1''$$

in der Weise verteilen, daß $1'$ durch I, II' und also $1''$ durch I'', II'' hindurchgeht (was keine Partikularisation ist, sondern immer durch Wahl der Bezeichnung erreicht werden kann). Nun mögen 1, 2, wie wir vorhin schon annahmen, zu I, II konjugiert sein; wir fragen, wie sich unter dieser Voraussetzung die Punkte I', I'', II', II'' auf die beiden von 2 auslaufenden Ebenen (also auf $2', 2''$) verteilen. Ich behaupte, daß die Verteilung genau so geschehen muß, wie bei den Ebenen $1', 1''$, also in der Art, daß I', II' in einer der beiden Ebenen liegen (die wir fernerhin $2'$ nennen wollen), I'', II'' in der anderen der beiden Ebenen (die dann $2''$ genannt werden muß). Es gibt nämlich überhaupt nur zwei Weisen, wie sich die Punkte I', I'', II', II'' auf die beiden von einem der singulären Punkte 1, 2, 3, 4 auslaufenden Ebenen verteilen können: entweder gehören I', II' und andererseits I'', II'' zusammen, oder I', II'' und I'', II'. Böten nun die von 2 auslaufenden Ebenen nicht dieselbe Verteilungsweise dar, wie die von 1 auslaufenden, so müßten es die Ebenen tun, die von 3 oder von 4 ausgehen. Dann aber gehörte 3 oder 4 zu 1 und den beiden Ebenen I, II eindeutig hinzu, wäre also aus I, II und 1 rational zu berechnen, während dies nach Annahme doch nur bei 2 zutreffen kann. Daher usw. — Natürlich könnte man den hiermit gegebenen indirekten Beweis sofort durch einen direkten ersetzen, wenn man genauer auf die Gruppierung der acht Punkte und acht Ebenen eingehen wollte, wie ich dies beispielsweise in Bd. 7 der Math. Annalen[4]) (l. c.) getan habe. Wichtiger ist für das Folgende, daß wir unseren Satz, wie sofort ersichtlich, umkehren können. Wir haben:

(B) *Wenn die Punkte I', I'', II', II'' irgendzweier singulärer Ebenen I, II sich auf die von zwei singulären Punkten* 1, 2 *der Durchschnittskante auslaufenden Ebenen* $1', 1'', 2', 2''$ *in gleicher Weise verteilen, so sind I, II,* 1, 2 *in bezug auf die Kummersche Fläche konjugiert.*

§ 3.

Ausgezeichnete Tetraeder.

Wir wollen jetzt das Tetraeder genauer betrachten, welches in 1, 2 und in zweien der in I, II von uns zusammengeordneten Punkte, also etwa in I', II', seine Eckpunkte hat, und dessen Seitenebenen durch I, II, beziehungsweise $1', 2'$ vorgestellt sein werden, wobei den Punkten

$$1,\ 2,\ I',\ II'$$

der Reihe nach die folgenden Ebenen

$$2',\ 1',\ II,\ I$$

gegenüberliegen. Der Komplex $\lambda = a$ enthält von den 12 Büscheln, die, in den Seitenflächen des Tetraeders liegend, eine Ecke des Tetraeders zum Mittelpunkte haben, vier, nämlich:

$$(I, I'),\ (II, II'),\ (1', 1),\ (2', 2).$$

[4]) [Vgl. Abh. XI dieser Ausgabe.]

Jedes dieser Büschel hat mit zweien derselben eine Kante unseres Tetraeders gemein, so daß wir überhaupt von einer *windschiefen Büschelkonfiguration* unseres Tetraeders sprechen können, die dem Komplexe $\lambda = a$ angehört. Wir schließen hieraus, *daß je zwei Ebenen unseres Tetraeders und die beiden Eckpunkte, welche ihre Durchschnittskante enthält, in bezug auf die Kummersche Fläche konjugiert sind.* Für die ursprünglich allein betrachtete Linie (I, II), bez. (1, 2), war dies von vornherein bekannt, bez. folgte aus (B); ebenso folgt es aus (B) für die gegenüberliegende Kante. Für die anderen vier Kanten (die jedesmal zweien der vier Büschel der Büschelkonfiguration gemeinsam sind) ergibt sich der Satz aus (A).

Ein Tetraeder der hiermit betrachteten Art werde ich fortan als *ausgezeichnetes* Tetraeder bezeichnen. Ein ausgezeichnetes Tetraeder ist der Kummerschen Fläche *gleichzeitig ein- und umgeschrieben.* Denn seine Ecken sind singuläre Punkte eines Komplexes $\lambda = a$, seine Ebenen singuläre Ebenen desselben. *Offenbar gibt es fünffach unendlich viele ausgezeichnete Tetraeder*[5]). Denn wir können den Komplex $\lambda = a$ und die Anfangskante I, II (die ihrerseits von vier Konstanten abhängt) beliebig annehmen. Übrigens gelangen wir auch noch durch andere Annahme derselben Bestimmungsstücke zu demselben Tetraeder. Erstlich ist klar, daß wir, unter Festhaltung des Komplexes $\lambda = a$, statt mit der Kante (I, II) ebensowohl mit der gegenüberliegenden Kante $(1', 2')$ beginnen können. Dann aber sage ich, *daß unser Tetraeder noch zu zwei anderen Komplexen der Schar* (2), die ich $\lambda = b$ und $\lambda = c$ nennen will, *genau in derselben Beziehung steht, wie zum Komplexe $\lambda = a$.* Es sind dies diejenigen beiden unter den vier Komplexen, denen die Kante (I, II) angehört, welche dem Theoreme (A') zufolge die Ebenen I, II und die Punkte 1, 2 zusammenordnen.

In der Tat: jedem der beiden hiermit definierten Komplexe muß eine windschiefe Büschelkonfiguration unseres Tetraeders angehören. Der Komplex $\lambda = b$ möge etwa zunächst das Büschel I, 1 und also das Büschel II, 2 enthalten. Er enthält dann insbesondere die Tetraederkanten, längs deren sich I und $1'$, bez. II und $2'$ schneiden. Aber die beiden Ebenen, welche wir hiermit bei der einzelnen Kante nennen, sind zu den beiden Eckpunkten, die auf derselben Kante liegen, also zu 1 und I', bez. zu 2 und II', wie wir wissen, konjugiert. Daher gehören dem Komplexe $\lambda = b$ auch die Büschel an, die von den Ecken I', II' bez. in den Ebenen $1', 2'$ auslaufen, womit unsere Behauptung bewiesen ist.

[5]) Den Satz, daß es ∞^5 Tetraeder gibt, die der Kummerschen Fläche gleichzeitig ein- und umgeschrieben sind, hat gelegentlich Herr Hurwitz auf meinen Wunsch mitgeteilt; siehe Bd. 15 der Math. Ann., S. 14 (Fußnote).

Auf Grund dieser Betrachtungen ergibt sich schließlich eine Konstruktion unseres Tetraeders, welche von den drei Komplexen $\lambda = a$, $\lambda = b$, $\lambda = c$ ganz unabhängig ist. Die drei Eckpunkte, welche einer Seitenfläche des Tetraeders bez. in den drei Komplexen entsprechen, sind nämlich, wie aus der Konstantenzählung hervorgeht, unter den Punkten der Durchschnittskurve, die unserer Ebene mit der Kummerschen Fläche gemeinsam ist, drei ganz beliebige. Daher also werden wir zur Konstruktion unseres Tetraeders erstlich eine Seitenfläche desselben unter den Tangentialebenen der Kummerschen Fläche nach Willkür annehmen, dann aber auf der zu ihr gehörigen Durchschnittskurve mit der Kummerschen Fläche drei Ecken des Tetraeders beliebig fixieren. *Wenn wir dann durch je zwei dieser Ecken diejenige Ebene legen, die zu ihnen in bezug auf die anfänglich angenommene Ebene konjugiert ist, so schneiden sich diese Ebenen von selbst in einem weiteren Punkte der Kummerschen Fläche, und wir haben ein ausgezeichnetes Tetraeder konstruiert.*

§ 4.

Allgemeinere Konfigurationen.

Die fünffach unendlich vielen Tetraeder, welche wir jetzt kennen, gruppieren sich in charakteristischer Weise zu größeren Konfigurationen zusammen, welche ebenfalls der Kummerschen Fläche gleichzeitig ein- und umgeschrieben sind. Eine erste solche Konfiguration erhalten wir sofort, wenn wir erneut an die Anfangsüberlegung anknüpfen, von der aus wir die ausgezeichneten Tetraeder zunächst definiert haben. Es ist dies diejenige Konfiguration, welche von den vier singulären Punkten und Ebenen $1, 2, 3, 4$ bez. I, II, III, IV, den acht zugehörigen Ebenen $1', 1''$; $2', 2''$; $3', 3''$; $4', 4''$ und den acht zugehörigen Punkten I', I''; II', II''; III', III''; IV', IV'', kurzum von den singulären Elementen der zu unserer Raumgeraden und dem Komplexe $\lambda = a$ gehörigen *Komplexfläche* gebildet wird, und aus der man, wie sofort ersichtlich, die Ecken und Ebenen von 24 ausgezeichneten Tetraedern herausgreifen kann[6]). Nun ist aber die Komplexfläche als Umhüllungsgebilde derjenigen Komplexlinien, welche eine feste Raumgerade treffen, in allen diesen Untersuchungen nur der spezielle Fall jener Brennfläche, welche bei Zusammenstellung des Komplexes $\lambda = a$ mit einem *allgemeinen* linearen Komplexe entsteht, und die selbst eine *Kummersche Fläche* sein wird, die wir mit unserer von Anfang an betrachteten Kummerschen Fläche, der Singularitätenfläche der Komplexe (2), natürlich nicht verwechseln dürfen[7]). Wir handeln im folgenden nur von der Konfiguration $(16)_6$, welche von den Doppelpunkten und den Doppelebenen der neuen Kummerschen Fläche gebildet wird. *Offenbar ist auch diese Konfiguration der anfänglichen Kummerschen Fläche gleichzeitig ein- und umgeschrieben.* Denn durch jeden der Doppelpunkte geht innerhalb einer der hindurchlaufenden Doppelebenen der Theorie der Linienkongruenzen zweiter Ordnung und Klasse zufolge[8]) ein Strahlbüschel, so daß der Doppelpunkt als Punkt, die Doppelebene als Ebene der Singularitätenfläche des Komplexes $\lambda = a$ angehören muß. *Man zeigt aber überhaupt* (wie ich hier beiläufig anführe, da ich es sogleich als Beweisgrund benutze), *daß die beiden Kummerschen Flächen einander nach Erstreckung einer Kurve achter Ordnung, resp. einer Developpablen achter Klasse berühren, so zwar, daß sie keinen Punkt und keine Ebene gemein haben, welche nicht dieser Kurve, bez. dieser Developpablen angehörten.* Die betreffende Berührungkurve ist der geometrische Ort solcher singulären Punkte des Komplexes $\lambda = a$, deren zugeordnete singuläre Linie unserer Kongruenz angehören; die Umhüllungsdeveloppable ist in genau dualistischer Weise definiert. Zum Beweis beachte man, daß eine singuläre Linie des Komplexes $\lambda = a$ nur von solchen benachbarten Linien desselben geschnitten wird, die entweder durch den zugeordneten singulären Punkt laufen oder in der zugeordneten singulären Ebene liegen, — daß andererseits unsere zweite Kummersche Fläche, nach der Begriffsbestimmung der Brennfläche, von allen Linien der zugehörigen Kongruenz umhüllt wird[9]).

[6]) Ich verfolge die Gruppierung dieser Punkte und Ebenen oder auch die Beziehung der Komplexfläche zu unserer Kummerschen Fläche (der Singularitätenfläche) nicht weiter, weil selbstverständlich alles, was im Text sogleich über den Fall der als Brennfläche auftretenden Kummerschen Fläche gesagt werden soll, auf den speziellen Fall der Komplexfläche übertragen werden kann.

§ 5.

Eigenschaften der neuen Konfigurationen.

Über die nunmehr gewonnenen Konfigurationen $(16)_6$ hat Herr Rohn, den ich seinerzeit auf die Existenz derselben aufmerksam machte, zwei einfache Sätze aufgestellt, deren Beweis sich jetzt ohne Mühe ergibt, wie ich zeigen will[10]).

[7]) Dem widerspricht nicht, daß weiterhin die Beziehung der Kummerschen Flächen zueinander als eine durchaus gegenseitige erkannt wird; vgl. die Note am Schluß von § 5.

[8]) Wegen der Sätze, die im Texte betreffs der in Rede stehenden Kongruenzen gebraucht werden, möchte ich hier ein für alle Mal auf Kummers Originalabhandlung: *Über algebraische Strahlensysteme usw.* verweisen; siehe Abhandl. d. Berliner Akademie von 1866, insbesondere S. 62—71 daselbst.

[9]) In allgemeinerer Form findet man diese Überlegungen bei Voß in Bd. 9 der Math. Ann., siehe insbesondere, was die Resultate angeht, S. 148ff. daselbst.

[10]) Rohn l. c.; ebenda (S. 352) die Darstellung der Berührungskurve achter Ordnung in transzendenter Form. Man vgl. hierzu die Entwicklungen von Herrn Reye im 97. Bande des Journals für Mathematik [*Über die Singularitätenflächen quadratischer Strahlenkomplexe und ihre Haupttangentenkurven* (1884)].

Wir betrachten zunächst eine einzelne Ebene der Konfiguration, die wir I nennen wollen. Sie ist Tangentialebene der ursprünglichen Kummerschen Fläche und schneidet die letztere also in einer Kurve vierter Ordnung mit Doppelpunkt. Andererseits berührt sie die zutretende Kummersche Fläche (die Brennfläche) nach Erstreckung eines Kegelschnitts. Jetzt trägt der Kegelschnitt 6 von den 16 Doppelpunkten der Brennfläche (die wir weiterhin mit $1, 2, \ldots, 6$ bezeichnen wollen), und wir bemerkten bereits oben, daß sämtliche 16 Doppelpunkte als einfache Punkte der Singularitätenfläche angehören. Daher fallen sechs von den acht Schnittpunkten, welche unser Kegelschnitt mit der Kurve vierter Ordnung gemein hat, in die Punkte $1, 2, \ldots, 6$. Der erste von Herrn Rohn mitgeteilte Satz behauptet: *daß die weiteren beiden Schnittpunkte unserer Kurven im Doppelpunkte der Kurve vierter Ordnung koinzidieren, daß also der Kegelschnitt zur Kurve vierter Ordnung adjungiert ist.* In der Tat, die ursprüngliche Kummersche Fläche und die Ebene I haben die Eigenschaft gemein, die zweite Kummersche Fläche überall zu berühren, wo sie dieselbe treffen. Gibt es also einen Punkt, der allen drei Flächen gemein ist und ist derselbe, wie wir hier annehmen (da die Doppelpunkte $1, 2, \ldots, 6$ bereits betrachtet wurden), kein singulärer Punkt der zweiten Kummerschen Fläche, so ist er ein Berührungspunkt der ersten Kummerschen Fläche mit der Ebene I. Also usw. — Natürlich gilt der entsprechende Satz für den Kegel zweiter Klasse, der in einem beliebigen Eckpunkte unserer Konfiguration durch die zugehörigen Tangentialebenen der zweiten Kummerschen Fläche umhüllt wird, wie denn überhaupt *alle* Beziehungen, die im vorliegenden Aufsatze zur Sprache kommen, nach dualistischer Umkehr ebenfalls zutreffen, wie ich nicht jedesmal betonen möchte und also hier ein für allemal hervorgehoben haben will.

Wir nehmen jetzt die übrigen 15 Ebenen zu I hinzu. Da durch jede der 15 Verbindungslinien der sechs in I enthaltenen Eckpunkte $1, 2, \ldots, 6$ eine der Ebenen hindurchläuft, so wird es zweckmäßig sein, die einzelne Ebene durch diejenigen beiden dieser Punkte zu benennen, welche sie enthält. Sechs Ebenen, welche durch einen der zehn nicht in I enthaltenen Eckpunkte der Konfiguration laufen, erhält man dann bekanntlich in der Weise, daß man die Punkte $1, 2, \ldots, 6$ irgendwie in zwei Gruppen von drei teilt, z. B.

$$1,\ 2,\ 3;\ 4,\ 5,\ 6,$$

und dann die Ebenen aufzählt, welche irgendzwei der sonach zusammengehörigen Punkte tragen, also im Beispiele:

$$\overline{12},\ \overline{23},\ \overline{31};\ \overline{45},\ \overline{56},\ \overline{64}.$$

Wir fassen jetzt drei Ebenen $\overline{ik}$, $\overline{kl}$, $\overline{li}$ mit I zu einem Tetraeder zusammen und erhalten so ein Tetraeder, welches der ursprünglichen

Kummerschen Fläche gleichzeitig um- und eingeschrieben ist. Offenbar gibt es solcher Tetraeder, zu I gehörig, 20, also im ganzen bei unserer Konfiguration, wenn wir I durch eine beliebige Ebene der 16 ersetzen, $\frac{16\cdot 20}{4} = 80$. *Ich sage jetzt, daß diese sämtlichen Tetraeder ausgezeichnete Tetraeder in dem früher definierten Sinne sind.*

Der Beweis zerlegt sich, indem wir von dem Komplexe $\lambda = a$ ausgehen, in mehrere Schritte. Ich will annehmen, daß dem Komplexe $\lambda = a$ in der Ebene I speziell dasjenige Strahlbüschel angehöre, dessen Mittelpunkt in 1 fällt. Dann werden von den 20 Tetraedern, deren eine Seitenfläche mit I koinzidiert, 10 eine windschiefe, dem Komplexe a angehörige Büschelkonfiguration tragen, wie sofort aus bekannten Sätzen über die Kongruenzen zweiter Ordnung und Klasse folgt: diejenigen 10 nämlich, welche zugleich 1 zu einer ihrer Ecken haben und denen also das Büschel $(I, 1)$ angehört. Ersetzen wir hier die Ebene I durch irgendeine andere Ebene unserer Konfiguration, so erhalten wir im ganzen 40 Tetraeder derselben Definition, bei denen also die Behauptung, die wir aufstellen, selbstverständlich ist. Nun aber partizipieren an diesen 40 Tetraedern alle 120 durch den Schnitt zweier Konfigurationsebenen entstehenden Linien als Kanten. Zum Beweise betrachte man nur die 15 dieser Linien, die in I liegen: diejenigen fünf derselben, welche durch 1 laufen, sind, wie man unmittelbar sieht, bei je vier von den 10 Tetraedern, die I zur Seitenfläche haben, beteiligt, die zehn, welche nicht durch 1 laufen, bei je einem derselben. Wir schließen hieraus, was an sich ein schönes Theorem ist: *daß die beiden Ebenen unserer Konfiguration, welche durch eine der 120 Linien hindurchgehen, und die beiden Eckpunkte derselben, welche auf derselben Linie liegen, allemal in bezug auf die erste Kummersche Fläche konjugiert sind.* Das aber heißt, daß überhaupt jedes Tetraeder, welches man aus den Ebenen und Ecken unserer Konfiguration bilden kann, ein ausgezeichnetes Tetraeder im früher festgestellten Sinne ist, w. z. b. w.[11]).

An die hiermit gegebenen Entwicklungen knüpfen wir jetzt zunächst eine einfache Konstruktion unserer Konfiguration $(16)_6$, in der man sofort die sechs Konstanten erkennt, von denen die Konfiguration abhängt: wir wählen zunächst unter den Tangentenebenen der ersten Kummerschen Fläche die Ebene I beliebig (2 Const.), zeichnen die Kurve vierter Ordnung, in der sie die Kummersche Fläche durchdringt, nehmen dann in I einen zur Kurve vierter Ordnung adjungierten Kegelschnitt und bezeichnen diejenigen sechs Schnittpunkte desselben mit der Kurve vierter Ordnung,

[11]) Der im Text gegebene Beweis wäre unnötig, wenn man zeigen könnte (was vermutlich nicht schwer ist), daß in der Tat jedes einer Kummerschen Fläche gleichzeitig um- und eingeschriebene Tetraeder ein ausgezeichnetes Tetraeder ist.

welche nicht in den Doppelpunkt der letzteren fallen, mit $1, 2, \ldots, 6$. Wir werden die 16 Ebenen einer Konfiguration der von uns gewollten Art haben, indem wir durch jede der 15 Verbindungsgeraden $\overline{12}, \ldots$ eine Ebene legen, die mit I zusammen zu den beiden auf der Verbindungsgeraden liegenden Punkten (also zu 1 und 2, usw.) in bezug auf die Kummersche Fläche konjugiert ist, — und diese 15 Ebenen der Ebene I hinzufügen. Die 16 Eckpunkte der Konfiguration sind $1, 2, \ldots, 6$ und die weiteren Punkte, in denen sich die konstruierten Ebenen begegnen. —

Übrigens aber haben wir alle Mittel, um den zweiten Satz von Rohn abzuleiten. Die sechs Strahlbüschel, welche innerhalb der Ebene I durch die Punkte $1, 2, \ldots, 6$ laufen, werden sechs Komplexen unserer Schar beziehungsweise angehören, nämlich $\lambda = a$ und fünf weiteren Komplexen, die wie $\lambda = b, c, d, e, f$ resp. nennen wollen. Aus dem eben aufgestellten Satze von dem Konjugiertsein gewisser Ebenen- und Punktenpaare und dem in § 2 gegebenen Theoreme (A') folgt dann, daß jedem der sechs Komplexe (also nicht nur $\lambda = a$) in jeder der 16 Ebenen ein Strahlbüschel angehört, dessen Mittelpunkt in einen der 16 Eckpunkte der Konfiguration fällt. Dabei erweist sich die Gruppierung dieser $6 \cdot 16$ Strahlbüschel als dieselbe, welche man für die Strahlbüschel der sechs zu der zweiten Kummerschen Fläche gehörigen Kongruenzen zweiter Ordnung und Klasse kennt. Wir gingen davon aus, daß die eine dieser Kongruenzen dem Komplexe $\lambda = a$ angehört; *ich sage, daß die anderen fünf Kongruenzen beziehungsweise in den Komplexen* $\lambda = b, c, d, e, f$ *liegen.* In der Tat kann ein Komplex zweiten Grades mit einer irreduziblen Kongruenz zweiter Ordnung und Klasse nicht 16 Strahlbüschel gemein haben, ohne die Kongruenz ganz zu enthalten. Wir würden unsere „zweite" Kummersche Fläche also ebensowohl haben gewinnen können, hätten wir nicht mit Komplex $\lambda = a$, sondern mit dem Komplex $\lambda = b$ oder $\lambda = c$ usw. begonnen. Mit anderen Worten (und dies ist der Rohnsche Satz): *Die Komplexe* a, b, c, d, e, f *sind für die Definition der zweiten Kummerschen Fläche (oder auch der Konfiguration* $(16)_6$) *von durchaus gleicher Bedeutung.* —

Ich breche hier die elementaren Betrachtungen ab, obgleich ersichtlich ist, daß sich eine Menge von Fragen aufdrängen, welche einer direkten (algebraisch-geometrischen) Behandlungsweise sehr wohl zugänglich sind[12]).

[12]) Herr Rohn hat sich früher, wie er mir mitteilt (und übrigens auch in Bd. 15 der Math. Ann., S. 350, andeutet), seinerseits mit solchen weitergehenden Fragen beschäftigt. Indem ich seine Ausdrucksweise den von mir gebrauchten Bezeichnungen anpasse, entnehme ich einem seiner Briefe das Folgende:

„Es seien die Komplexe zweiten Grades, denen die Doppeltangentensysteme der zweiten Kummerschen Fläche angehören sollen, d. h. die Konstanten $\lambda = a, b, c, d, e, f$, gegeben; ich stelle die Aufgabe, die linearen Komplexe zu bestimmen, welche die Doppeltangentensysteme enthalten, und überhaupt die Schar von Komplexen zweiten

II. Über die Darstellung der Kummerschen Fläche durch hyperelliptische Funktionen $p = 2$.

§ 6.

Allgemeine Vorbemerkungen, die Theorie der hyperelliptischen Funktionen betreffend.

Um die Darstellung der Kummerschen Fläche durch hyperelliptische Funktionen zweier Argumente U_1, U_2, oder vielmehr, um die Ausbreitung zweier Integralsummen U_1, U_2 auf der Kummerschen Fläche (die allein bei der folgenden Darstellung in Betracht kommt) in völliger Deutlichkeit zu

Grades anzugeben, deren Singularitätenfläche die zweite Kummersche Fläche ist. Ich will der Kürze halber $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$ für $a, b, \ldots, f$ schreiben und die Produkte

$$(\varkappa_1 - \lambda_m)(\varkappa_2 - \lambda_m) \ldots (\varkappa_6 - \lambda_m), \text{ bez. } (\varkappa_n - \lambda_1)(\varkappa_n - \lambda_2) \ldots (\varkappa_n - \lambda_6)$$

mit $f(\lambda_m)$ und $\varphi(\varkappa_n)$ bezeichnen. Ist dann, unter ϱ einen Proportionalitätsfaktor verstanden:

$$\varrho\, a_{mn} = \sqrt{\frac{f(\lambda_m) \cdot \varphi(\varkappa_n)}{(\varkappa_n - \lambda_m)^2 \cdot f'(\varkappa_n) \cdot \varphi'(\lambda_m)}}, \tag{1}$$

so sind die gesuchten linearen Komplexe durch folgende Gleichungen gegeben:

$$z_\varkappa = a_{1\varkappa} x_1 + a_{2\varkappa} x_2 + \ldots + a_{6\varkappa} x_6 = 0. \tag{2}$$

Ich habe dabei die linken Seiten gleich so normiert, daß $\sum z_\varkappa^2 = 0$ wird vermöge $\sum x_\varkappa^2 = 0$. Man hat also eine orthogonale Substitution und die Auflösungen von (2) lauten mit Unterdrückung eines Proportionalitätsfaktors:

$$x_i = a_{i1} z_1 + a_{i2} z_2 + \ldots + a_{i6} z_6. \tag{3}$$

Hierin liegt zugleich, daß die Vorzeichen der Quadratwurzeln in (1) nicht völlig willkürlich sind. Vielmehr wird man die Vorzeichen nur derjenigen a_{mn}, welche einem festen m oder einem festen n entsprechen, willkürlich annehmen dürfen, worauf alle anderen Vorzeichen fixiert sein werden. Es entspricht dies (mit Rücksicht auf den in (1) auftretenden Proportionalitätsfaktor ϱ) dem Umstande, daß die vorgelegte Aufgabe $2^5 = 32$ Lösungen zuläßt. — Die Schar der Komplexe zweiten Grades, deren Singularitätenfläche die zweite Kummersche Fläche ist, wird jetzt durch folgende Gleichung gegeben:

$$\sum \frac{z_\alpha^2}{\lambda_\alpha - \varkappa} = 0, \tag{4}$$

unter $\varkappa$ den Parameter verstanden. Vergleicht man diese Formel mit Gleichung (2) des Textes (welche die zur ersten Kummerschen Fläche gehörigen Komplexe vorstellt), so ist ersichtlich, *daß zwischen beiden Kummerschen Flächen volle Gegenseitigkeit besteht.* Die Doppeltangenten der ersten Kummerschen Fläche liegen also in den Komplexen $\varkappa = \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_6$ der Komplexschar (4). Dabei findet noch folgende Übereinstimmung statt. Eine Linie, welche unsere erste Kummersche Fläche berührt, wird einem Komplex der ersten Schar, sagen wir $\lambda = m$, als singuläre Linie angehören. Jetzt soll der Berührungspunkt insbesondere auf jene Berührungskurve achter Ordnung rücken, die den beiden Kummerschen Flächen gemeinsam ist. Die Linie wird dann auch einem Komplex der zweiten, durch (4) gegebenen, Schar als singuläre Linie angehören. Der Satz ist, daß dieser Komplex durch $\varkappa = m$ gegeben ist, unter m dieselbe Größe verstanden, wie vorhin."

gewinnen, scheint es zweckmäßig, einige allgemeine Bemerkungen zur Theorie der hyperelliptischen Integrale vom Geschlechte Zwei vorauszuschicken.

Die beiden Integrale, welche wir im folgenden zugrunde legen wollen, sind diese:

$$(5) \qquad w_1 = \int \frac{d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}}, \qquad w_2 = \int \frac{\lambda\, d\lambda}{\sqrt{f(\lambda)}},$$

wo die Bezeichnung $f(\lambda)$, die wir schon gelegentlich benutzten, das Produkt $(\lambda - \varkappa_1)(\lambda - \varkappa_2)\ldots(\lambda - \varkappa_6)$ vertreten soll. Man betrachtet den Verlauf dieser Integrale gemeinhin — und so müssen wir es hier zunächst auch tun — auf der zweiblättrigen Riemannschen Fläche vom Geschlechte Zwei, die zu $\sqrt{f(\lambda)}$ gehört und deren Verzweigungspunkte bei $\lambda = \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_6$ liegen. Es erscheint dann zweckmäßig, die untere Grenze der Integrale in einen der Verzweigungspunkte zu legen, als welchen wir $\varkappa_6$ wählen wollen. Indem wir gleichzeitig die obere Grenze genau fixieren, wird das einzelne Integral durch folgende Formel gegeben sein:

$$(6) \qquad w = \int_{\varkappa_6}^{\lambda, \sqrt{f(\lambda)}} dw.$$

Ich habe diese Formel der Kürze halber so geschrieben, daß nach Belieben 1 oder 2 als Index zugefügt werden kann, ein Verfahren, dessen ich mich weiterhin durchgängig bedienen will.

Es kommt jetzt darauf an, die Periodizitätsmoduln der so definierten Integrale in möglichst einfacher Weise zu bezeichnen. Zu dem Zwecke werde ich statt der vier Fundamentalperioden, aus denen sich alle anderen zusammensetzen, fünf Perioden einführen, zwischen denen natürlich eine lineare Abhängigkeit bestehen muß. Ich denke mir nämlich den Verzweigungspunkt $\varkappa_6$ mit den anderen Verzweigungspunkten $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_5$ durch fünf in demselben Blatte der Riemannschen Fläche verlaufende Linien, welche einander nur in $\varkappa_6$ treffen, verbunden und setze nun, indem ich an diesen Linien hinintegriere:

$$(7) \qquad P^{(i)} = 2 \int_{\varkappa_6}^{\varkappa_i} dw.$$

Was aber die Relation angeht, die zwischen den so definierten Perioden besteht, so findet man nach bekannter Methode:

$$(8) \qquad \sum_1^5 P^{(i)} = 0$$ [13].

[13]) Will man die Symmetrie der später zu entwickelnden Formeln noch steigern, so empfiehlt es sich, noch eine sechste Periode $P^{(6)}$, mit der Relation $P^{(6)} = 0$, einzuführen, was ich hier nur beiläufig erwähne.

Die Größe w ist durch die Formel (6) nur bis auf beliebig hinzufügbare ganzzahlige Multipla der Perioden $P^{(i)}$ bestimmt. Indem ich mit $\overline{w}$ einen der Werte bezeichne, deren sie fähig ist, werde ich das Gesagte durch die Formel ausdrücken:

$$(9) \qquad w \equiv \overline{w} \quad (\text{mod. } P^{(i)}).$$

Sind die Werte der w (d. h. von w_1 und w_2) gegeben, so ist nach der Theorie der hyperelliptischen Funktionen die obere Grenze $\lambda, \sqrt{f(\lambda)}$ in (6) völlig bestimmt. Daß w_1, w_2 dabei nicht unabhängig sein können, sondern durch eine Relation verbunden sein müssen ($\Theta = 0$), ist selbstverständlich, aber soll hier nicht weiter untersucht werden, wie überhaupt von der Theorie der Θ-Funktionen abgesehen werden wird. Solche Werte w_1, w_2, die vermöge (6) zu einer oberen Grenze $\lambda, \sqrt{f(\lambda)}$ zugehören, nenne ich *einfache* Integrale. Bezeichnen wir mit $\overline{w}$ dieselben Größen, wie in (9) und schreiben:

$$(10) \qquad w \equiv -\overline{w} \quad (\text{mod. } P^{(i)}),$$

so haben wir wieder einfache Integrale, die jetzt zur oberen Grenze $\lambda, -\sqrt{f(\lambda)}$ gehören. Wir berühren hiermit die charakteristische Eigenschaft des hyperelliptischen Gebildes, die im folgenden immer wieder hervortritt, die Eigenschaft nämlich, durch eine Transformation von der Periode Zwei (die in dem Vorzeichenwechsel der Quadratwurzel $\sqrt{f(\lambda)}$, oder nach (10), des $\overline{w}$, ihren Ausdruck findet) in sich selbst überzugehen.

Die hiermit aufgezählten Sätze und die Anschauungsweisen, auf denen sie beruhen, sind wohlbekannt. Es scheint nun aber für den Fortschritt unserer Untersuchungen wesentlich und überhaupt für die Theorie der hyperelliptischen Funktionen vorteilhaft, ein neues methodisches Hilfsmittel einzuführen. *Neben der zweiblättrigen Riemannschen Fläche nämlich, die zu $\sqrt{f(\lambda)}$ gehört, werden wir die andere Riemannsche Fläche in Betracht ziehen, die durch Simultanstellung der fünf in der laufenden Proportion:*

$$\sqrt{\lambda - \varkappa_1} : \sqrt{\lambda - \varkappa_2} : \ldots : \sqrt{\lambda - \varkappa_6}$$

vereinigten Wurzelfunktionen entsteht[14]). Es ist dies eine 32-blättrige Fläche ($32 = 2^5$), welche in der Art regulär verzweigt ist, daß bei $\lambda = \varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_6$ jedesmal 16 einfache Verzweigungspunkte übereinander liegen, was im ganzen 96 einfache Verzweigungspunkte und also $p = 17$ ergibt. Wir müssen uns vorstellen, daß diese 32-blättrige Fläche 16-fach über die bisher betrachtete zweiblättrige Fläche ausgebreitet sei, so zwar, daß wir einem Punkte $\lambda, \sqrt{f(\lambda)}$ der letzteren unter den 32 Punkten der ersteren,

[14]) Wegen der hier im Texte gebrauchten Ausdrucksweisen siehe insbesondere Dyck: *Über Untersuchung und Aufstellung von Gruppe und Irrationalität regulärer Riemannscher Flächen* in Bd. 17 der Math. Ann. (1880).

welche dasselbe λ besitzen, etwa diejenigen 16 zuweisen, für welche

$$\sqrt{\lambda - \varkappa_1} \cdot \sqrt{\lambda - \varkappa_2} \ldots \sqrt{\lambda - \varkappa_6} = \sqrt{f(\lambda)}$$

wird. Demselben Werte von λ entsprechen auf der 32-blättrigen Fläche noch 16 weitere Punkte; sie korrespondieren dann ihrerseits dem Punkte $\lambda, -\sqrt{f(\lambda)}$ der zweiblättrigen Fläche.

Wir werden jetzt die Integrale (5) auf der 32-blättrigen Fläche betrachten. Zu dem Zwecke müssen wir ihre oberen und unteren Grenzen wesentlich genauer bezeichnen, als es in (6) geschehen ist. Dem Werte $\lambda = \varkappa_6$ entsprechen auf unserer neuen Fläche 16 Punkte, von denen wir einen herausheben, indem wir für die Verhältnisse:

$$\sqrt{\varkappa_6 - \varkappa_1} : \sqrt{\varkappa_6 - \varkappa_2} : \ldots : \sqrt{\varkappa_6 - \varkappa_5}$$

bestimmte Vorzeichen verabreden. Ich will dies in der Weise bezeichnen, daß ich $\sigma\sqrt{\varkappa_6 - \varkappa_i}$ als untere Grenze an das Integralzeichen schreibe, wo man sich das σ als einen Proportionalitätsfaktor denken mag, dessen Wert völlig gleichgültig ist. Genau entsprechend werde ich zur Bezeichnung der oberen Grenze die Schreibweise $\varrho\sqrt{\lambda - \varkappa_i}$ anwenden (wodurch also ausgedrückt sein soll, daß die Quotienten:

$$\sqrt{\lambda - \varkappa_1} : \sqrt{\lambda - \varkappa_2} : \ldots : \sqrt{\lambda - \varkappa_6}$$

vollständig, d. h. auch den Vorzeichen nach gegeben sind). An Stelle der Formel (6) tritt also jetzt die folgende:

$$(11) \qquad w = \int_{\sigma\sqrt{\varkappa_6 - \varkappa_i}}^{\varrho\sqrt{\lambda - \varkappa_i}} dw.$$

Es sei nun wieder $\overline{w}$ einer der Werte, die durch (11) definiert sind. Welches ist die allgemeinste Bedeutung von w? Wie modifiziert sich dieselbe, wenn wir den oberen Grenzpunkt durch einen beliebigen der 16 oder 32 ersetzen, mit denen er zusammengehört? Und sind die so entstehenden Integralwerte (d. h. die Werte von w_1 und w_2) wiederum für den oberen Grenzpunkt charakteristisch? — Auf diese Fragen gibt die Theorie der hyperelliptischen Funktionen folgende Auskunft:

1. Die Größe w ist durch (11) bis auf *gerade* Periodenmultipla bestimmt, was wir, der Formel (9) entsprechend, in folgender Weise andeuten wollen:

$$(12) \qquad w \equiv \overline{w} \quad (\text{mod. } 2P^{(i)}).$$

2. Wir wollen unter $\varepsilon^{(i)}$ die 1 oder die 0 verstehen, je nachdem beim Übergange von dem anfänglich gewählten oberen Grenzpunkte zum neuen der Quotient $\sqrt{\lambda - \varkappa_i} : \sqrt{\varkappa_6 - \varkappa_i}$ sein Vorzeichen ändert oder nicht. Die

Integralwerte, welche zur neuen oberen Grenze gehören, sind dann durch folgende Formel gegeben:

$$(13) \qquad w \equiv (-1)^{\sum \varepsilon^{(i)}} \cdot \overline{w} + \sum \varepsilon^{(i)} P^{(i)} \quad (\text{mod. } 2P^{(i)}).$$

3. Die letzte Frage ist zu bejahen. Die Integralwerte w_1, w_2, welche sich aus (11) für eine bestimmte obere Grenze ergeben, und die ich wieder als *einfache* Integrale bezeichnen werde, sind in der Tat zur Definition der oberen Grenze ausreichend.

§ 7.

Über elliptische Linienkoordinaten.

Ich werde nunmehr als Koordinaten einer Raumgeraden statt der bisher benutzten $x_1, x_2, \ldots, x_6$, welche an die Identität (1):

$$\sum x_i^2 = 0$$

gebunden sind, diejenigen Größen $\lambda', \lambda'', \lambda''', \lambda^{IV}$ einführen, die ich in Bd. 5 der Math. Annalen[15]) als *elliptische Linienkoordinaten* bezeichnete, und die durch die Gleichung (2):

$$\sum \frac{x_i^2}{\varkappa_i - \lambda} = 0$$

gegeben werden, indem man in ihr die x_i als bekannt, das λ als unbekannt betrachtet. Vor allem bemerke ich, daß sich die x_i durch die λ folgendermaßen darstellen:

$$(14) \qquad \tau x_i = \frac{\sqrt{\lambda' - \varkappa_i} \cdot \sqrt{\lambda'' - \varkappa_i} \cdot \sqrt{\lambda''' - \varkappa_i} \cdot \sqrt{\lambda^{IV} - \varkappa_i}}{\sqrt{f'(\varkappa_i)}},$$

wo τ einen Proportionalitätsfaktor und f' den Differentialquotienten von f bedeutet. Die 32 Vorzeichenwechsel der $x_1 : x_2 : \ldots : x_6$, welche für die geometrische Theorie in bekannter Weise fundamental sind, indem sie die 16 Kollineationen und 16 Reziprozitäten vorstellen, durch welche unsere Gebilde in sich selbst übergeführt werden, erscheinen hier durch die Vorzeichenwechsel der rechter Hand auftretenden Quadratwurzeln bedingt. Ich erinnere übrigens an folgende Sätze:

1. Sind zwei λ einander gleich, z. B. $\lambda''' = \lambda^{IV}$, so hat man eine Tangente der Kummerschen Fläche, zugleich eine singuläre Linie des Komplexes $\lambda''' = \lambda^{IV}$.

2. Ändert man $\lambda''' = \lambda^{IV}$ (die fortwährend einander gleich sein sollen) beliebig, während λ', λ'' konstant bleiben, so dreht sich die gerade Linie

[15]) *Über gewisse in der Liniengeometrie auftretende Differentialgleichungen*, siehe insbesondere daselbst S. 293 ff. [Vgl. Abh. IX dieser Ausgabe, S. 143 ff.]

als Tangente der Kummerschen Fläche innerhalb ihrer Tangentialebene um ihren Berührungspunkt.

3. Wird bei dem so definierten Änderungsprozesse λ''' $(=\lambda^{IV})$ gleich λ' oder gleich λ'', so hat man eine der beiden in dem genannten Büschel enthaltenen Haupttangenten der Kummerschen Fläche.

4. Nimmt man außer $\lambda''' = \lambda^{IV}$ auch noch $\lambda' = \lambda''$, so hat man solche gerade Linien, welche entweder in einer der 16 Doppelebenen der Kummerschen Fläche liegen oder durch einen ihrer 16 Doppelpunkte laufen.

An den letztangeführten Satz knüpfen wir jetzt noch eine Verabredung, die prinzipiell wichtig ist. Indem wir in (14) $\lambda' = \lambda''$, $\lambda''' = \lambda^{IV}$ setzen, kommt:

$$\tau \cdot x_i = \pm \frac{\lambda' - \varkappa_i \cdot \lambda''' - \varkappa_i}{\sqrt{f'(\varkappa_i)}}. \tag{15}$$

Die 32 hier zu unterscheidenden Vorzeichenkombinationen werden wir wieder auf zwei Gruppen von je 16 verteilen, je nachdem das Produkt der Vorzeichen positiv oder negativ ist[16]). Es ist a priori deutlich, daß die Unterscheidung der beiden Gruppen der Unterscheidung der Doppelpunkte und Doppelebenen der Kummerschen Fläche entspricht. Welche der Gruppen aber die Doppelpunkte bez. die Doppelebenen liefert, ist zunächst unentschieden, da wir weder für die Koordinaten x_i einen bestimmten Zusammenhang mit den Punktkoordinaten oder den Ebenenkoordinaten festgesetzt haben, noch auch die Bedeutung der Quadratwurzeln $\sqrt{f'(\varkappa_i)}$ in absoluter Weise fixiert haben, was doch beides geschehen sein müßte, sollte unsere Frage unzweideutig beantwortet werden können. Die Unbestimmtheit, die hier vorliegt, wollen wir nun durch eine Verabredung beseitigen, mit der wir unsere späteren Entwicklungen natürlich in Übereinstimmung halten müssen: *wir wollen festsetzen, daß den Doppelpunkten eine gerade, den Doppelebenen eine ungerade Anzahl von Minuszeichen in* (15) *entsprechen soll.* Es gibt dann insbesondere einen Doppelpunkt, für welchen in (15) rechter Hand lauter gleiche Vorzeichen (Plus- oder Minuszeichen, was wegen des τ dasselbe ist) auftreten, und eine Doppelebene, für welche in (15) die ersten fünf Vorzeichen übereinstimmen und nur das Vorzeichen von x_6 von den anderen abweicht. Ersteren Punkt nennen wir den *Anfangspunkt* (der Kummerschen Fläche), die Ebene die *Anfangsebene.* Die Anfangsebene läuft durch den Anfangspunkt und entspricht ihm im Komplex $x_6 = 0$.

Wir benutzen die Formeln (14) jetzt, um zwischen den Geraden des Raumes und den Punktquadrupeln der 32-blättrigen Riemannschen Fläche

[16]) Bei Abzählung der Kombinationen wolle man immer beachten, daß die x_i homogene Koordinaten sind und also nur ihre Verhältnisse in Betracht kommen, wie hier ein für allemal hervorgehoben sei.

ein Entsprechen herzustellen. Es seien den Werten $\lambda = \lambda', \lambda'', \lambda''', \lambda^{IV}$ zugehörig vier Punkte der Riemannschen Fläche gegeben, wobei also die Wurzelquotienten

$$\sqrt{\lambda' - \varkappa_1} : \sqrt{\lambda' - \varkappa_2} : \ldots \sqrt{\lambda' - \varkappa_6}$$

usw. in bestimmter Weise fixiert gedacht werden. Wir werden diese vier Punkte einer zu denselben Werten von $\lambda', \lambda'', \lambda''', \lambda^{IV}$ gehörigen Raumgeraden (14) dann und nur dann entsprechend setzen, wenn die auf die vier Punkte bezüglichen Produkte

$$\begin{array}{c}
\sqrt{\lambda' - \varkappa_1} \cdot \sqrt{\lambda'' - \varkappa_1} \cdot \sqrt{\lambda''' - \varkappa_1} \cdot \sqrt{\lambda^{IV} - \varkappa_1}, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\sqrt{\lambda' - \varkappa_6} \cdot \sqrt{\lambda'' - \varkappa_6} \cdot \sqrt{\lambda''' - \varkappa_6} \cdot \sqrt{\lambda^{IV} - \varkappa_6}
\end{array}$$

den mit $\sqrt{f'(\varkappa_i)}$ bez. multiplizierten Koordinaten x_i der Raumgeraden proportional werden. Es entspricht hiernach jedem Punktquadrupel eine bestimmte Raumgerade, umgekehrt aber sind jeder Raumgeraden $32^3 = 2^{15}$ Punktquadrupel zugeordnet. In der Tat, wir können, um die gewünschte Übereinstimmung zu erzielen, die Vorzeichen der Quadratwurzeln, die sich auf drei der Größen λ, z. B. auf $\lambda', \lambda'', \lambda'''$, beziehen, ganz beliebig nehmen, die zur vierten Größe gehörigen Vorzeichen sind dann gerade bestimmt (wir können die drei ersten Punkte des Quadrupels jeden in ein beliebiges der 32 Blätter der Riemannschen Fläche legen, der vierte Punkt ist dann eindeutig gegeben). Ist insbesondere $\lambda''' = \lambda^{IV}$ (bei den Tangenten der Kummerschen Fläche) oder $\lambda'' = \lambda''' = \lambda^{IV}$ (bei den Haupttangenten)[17]), so können wir zwei oder drei Punkte des Punktquadrupels zusammenfallen lassen, wobei sich dann die Zahl der zulässigen Punktquadrupel auf $32^2 = 2^{10}$, bez. auf $32 = 2^5$ reduziert. Ist $\lambda' = \lambda''$, und haben wir insbesondere eine Gerade, die durch den Anfangspunkt der Kummerschen Fläche läuft, so können wir die Punkte der zugehörigen Quadrupel paarweise zusammenfallen lassen, worauf wieder nur $32 = 2^5$ Quadrupel zulässig erscheinen.

[17]) Hält man λ' fest und läßt $\lambda'' = \lambda''' = \lambda^{IV}$ sich ändern, so umhüllt die betr. Haupttangente nach den Untersuchungen von Lie und mir eine Haupttangentenkurve der Kummerschen Fläche (siehe die Mitteilung in den Berliner Monatsberichten von 1870, die in Bd. 23 der Math. Annalen, wieder abgedruckt ist [vgl. Abh. VI dieser Ausgabe]). Wir lassen jetzt der Haupttangente im Sinne des Textes ein Punktquadrupel der 32-blättrigen Fläche entsprechen, welches drei zusammenfallende Punkte besitzt. Die Haupttangentenkurve erscheint dann, indem wir an dem Gesetze der Kontinuität festhalten, eindeutig auf unsere 32-blättrige Fläche bezogen, womit übereinstimmt, daß ihr Geschlecht früher (l. c., mit Hilfe der Plücker-

§ 8.

Transzendente Parameter einer Raumgeraden.

Es seien jetzt (indem wir eine früher gebrauchte Bezeichnung aufnehmen) $\varrho'\sqrt{\lambda' - \varkappa_i}$, $\varrho''\sqrt{\lambda'' - \varkappa_i}$, $\varrho'''\sqrt{\lambda''' - \varkappa_i}$, $\varrho^{IV}\sqrt{\lambda^{IV} - \varkappa_i}$ die Punkte eines Punktquadrupels auf der 32-blättrigen Riemannschen Fläche, das einer Raumgeraden zugeordnet ist. *Wir werden dann der betr. Raumgeraden vier Paare transzendenter Parameter w_1', w_2'; w_1'', w_2''; usw. beilegen, indem wir schreiben:*

$$(16)\qquad w' = \int\limits_{\sigma\sqrt{\varkappa_6-\varkappa_i}}^{\varrho'\sqrt{\lambda'-\varkappa_i}} dw,\quad w'' = \int\limits_{\sigma\sqrt{\varkappa_6-\varkappa_i}}^{\varrho''\sqrt{\lambda''-\varkappa_i}} dw,\quad w''' = \int\limits_{\sigma\sqrt{\varkappa_6-\varkappa_i}}^{\varrho'''\sqrt{\lambda'''-\varkappa_i}} dw,\quad w^{IV} = \int\limits_{\sigma\sqrt{\varkappa_6-\varkappa_i}}^{\varrho^{IV}\sqrt{\lambda^{IV}-\varkappa_i}} dw.$$

In genauer Analogie zu den Entwicklungen des § 6 fragen wir zunächst nach den allgemeinsten Größensystemen w, welche in diesem Sinne einer Raumgeraden zugehören. Es sei wieder $\bar{w}', \bar{w}'', \bar{w}''', \bar{w}^{IV}$ ein erstes zulässiges Wertsystem. Dann folgt durch Vergleich von § 6 und § 7:

Die allgemeinsten Werte w', w'', w''', w^{IV} sind modulo doppelter Perioden durch folgende Kongruenzen definiert:

$$(17)\qquad \begin{cases} w' \equiv \eta' \cdot \bar{w}' + \sum\limits_1^4 \varepsilon_1^{(i)} P^{(i)}, & w'' \equiv \eta'' \cdot \bar{w}'' + \sum\limits_1^4 \varepsilon_2^{(i)} P^{(i)}, \\ w''' \equiv \eta''' \cdot \bar{w}''' + \sum\limits_1^4 \varepsilon_3^{(i)} P^{(i)}, & w^{IV} \equiv \eta^{IV} \cdot \bar{w}^{IV} + \sum\limits_1^4 \varepsilon_4^{(i)} P^{(i)}, \end{cases}$$

wo die η die positive oder negative Einheit, die $\varepsilon_\varkappa^{(i)}$ Eins oder Null bedeuten und

$$\eta'\eta''\eta'''\eta^{IV} = +1,\ \varepsilon_1^{(i)} + \varepsilon_2^{(i)} + \varepsilon_3^{(i)} + \varepsilon_4^{(i)} \equiv 0 \pmod{2}$$

zu setzen ist.

Die Unsymmetrie, welche wir in die Formulierung dieses Satzes einführten, indem wir die vorkommenden Summen von eins bis vier erstreckten, kann durch Heranziehen der Identität (8) sofort ausgeglichen werden.

Wir fragen ferner, wie sich die w abändern werden, wenn wir statt der anfänglichen Raumgeraden die anderen setzen, die sich aus ihr durch Vorzeichenwechsel der Koordinaten x_i ergeben. Es wird genügen, wenn wir angeben, wie wir in jedem Falle aus den anfänglichen $\bar{w}', \bar{w}'', \bar{w}''', \bar{w}^{IV}$ ein einzelnes zulässiges Parametersystem erhalten. Es wird ferner genügen,

Cayleyschen Formeln) zu $p = 17$ bestimmt wurde. Die sechs l. c. genannten ausgezeichneten Haupttangentenkurven, welche nur $p = 5$ aufweisen, gehören eindeutig zu solchen 16-blättrigen Flächen über der λ-Ebene, welche bloß an fünf der sechs Stellen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_6$ verzweigt sind und also $5 \cdot 8 = 40$ Verzweigungspunkte aufweisen. Es ist lehrreich, den Vergleich dieser verschiedenen Riemannschen Flächen und der Haupttangentenkurven ins einzelne durchzuführen.

wenn wir bei den $\bar{w}', \bar{w}''$, usw. nur diejenigen Modifikationen angeben, welche dem Vorzeichenwechsel allein einer Koordinate x_i entsprechen: sollten mehrere x_i im Zeichen geändert werden, so kombinieren wir einfach die den einzelnen Änderungen entsprechenden Formeln. Wir rekurrieren wieder auf § 6 und § 7 und erhalten als Antwort auf unsere neuen Fragen den Satz:

Wird die Koordinate x_i der Raumgeraden in $-x_i$ abgeändert, so haben wir in (17) für

$$\bar{w}',\ \bar{w}'',\ \bar{w}''',\ \bar{w}^{IV},$$

die folgenden Größen einzuführen:

$$-\bar{w}' + P^{(i)},\ -\bar{w}'' + P^{(i)},\ -\bar{w}''' + P^{(i)},\ -\bar{w}^{IV} + P^{(i)}.$$

Endlich konstatieren wir, daß eine Raumgerade eindeutig bestimmt ist, sobald wir ein System zugehöriger transzender Parameter kennen. —

Wir betrachten jetzt insbesondere den Fall, daß unsere Raumgerade eine Tangente der Kummerschen Fläche wird. Indem wir $\lambda''' = \lambda^{IV}$ nehmen, wollen wir den Punkt $\varrho'''\sqrt{\lambda''' - \varkappa_i}$ mit dem Punkte $\varrho^{IV}\sqrt{\lambda^{IV} - \varkappa_i}$ zusammenfallen lassen. Es wird dann $w''' \equiv w^{IV} \pmod{2P^{(i)}}$. *Die Werte w', w'' nun, welche unter dieser Voraussetzung resultieren, will ich in der Folge u', u'' nennen.* Die Formeln (17) nehmen, was die u', u'' angeht, eine äußerst einfache Bedeutung an. Es zeigt sich nämlich, daß die Änderungen, welche man bei u', u'' unter Festhaltung der Raumgeraden (der Tangente an die Kummersche Fläche) anbringen kann, gerade darauf hinauslaufen, *daß man u', u'' entweder simultan im Zeichen umgekehrt oder simultan um irgendwelche Periodenvielfache vermehrt.* — Handelt es sich insbesondere um gerade Linien, die durch einen Doppelpunkt der Kummerschen Fläche laufen oder in einer Doppelebene derselben liegen, so wird

$$(18)\qquad u' \equiv \pm u'' + \sum_1^4 \varepsilon^{(i)} P^{(i)} \pmod{P^{(i)}}$$

wo das Minuszeichen für die Ebenen zutrifft und die $\varepsilon^{(i)}$ je nach der Wahl des Doppelpunktes oder der Doppelebene Null oder Eins bedeuten. Sämtliche $\varepsilon^{(i)}$ werden Null sein, wenn es sich um den Anfangspunkt oder die Anfangsebene handelt.

§ 9.

Ausbreitung von Integralsummen auf der Kummerschen Fläche.

Die letztangeführten Sätze sind es, auf die wir jetzt die Zuordnung der Punkte und Ebenen der Kummerschen Fläche zu transzendenten Parametern, die sich als Summen (oder Differenzen) zweier einfacher hyperelliptischer Integrale darstellen, stützen wollen. Aus § 7 geht hervor, daß alle solche Tangenten der Kummerschen Fläche, welche denselben Berührungspunkt und dieselbe Berührungsebene besitzen, dieselben Parameter u', u'' aufweisen (während $w''' = w^{IV}$ von einer Tangente zur anderen wechselt). Diese Parameter wollen wir jetzt auf den Punkt und die Ebene selbst übertragen. *Wir legen nämlich dem Punkte die Parameter:*

$$(19\text{a})\qquad U_1 = u_1' - u_1'', \quad U_2 = u_2' - u_2'',$$

der Ebene die Parameter:

$$(19\text{b})\qquad (U_1) = u_1' + u_2'', \quad (U_2) = u_2' + u_2''$$

bei (die wir weiterhin mit Unterdrückung der Indizes durch U und (U) bezeichnen wollen).

Offenbar gehören zu jedem Punkte unendlich viele Parameterpaare, welche sich aus einem ersten Paare, welches wir $\bar{U}$ nennen, nach dem Gesetze ableiten:

$$(20)\qquad U \equiv \pm \bar{U} \,(\text{mod. } 2P^{(i)});$$

entsprechend ist es mit den Parametern (U) der Tangentialebenen. Aber ich sage, *daß rückwärts zu einem gegebenen Wertsysteme der U_1, U_2 (resp. der (U_1), (U_2)) immer nur ein Punkt, bez. eine Ebene der Kummerschen Fläche zugehört.* Für Wertsysteme der U_1, U_2 (oder der $(U_1), (U_2)$), die von $0, 0$ oder Multiplis der Perioden verschieden sind, ist dies aus den Untersuchungen über das Jacobische Umkehrsystem sofort deutlich. Letztere zeigen nämlich, daß es in solchen Fällen (von möglicherweise zutretenden Perioden abgesehen) immer nur ein System einfacher Integrale u', u'' gibt, welche den Gleichungen (19a) oder den Gleichungen (19b) genügen, wodurch wir zu einem eindeutig definierten Tangentialbüschel der Kummerschen Fläche und also zu einem bestimmten Punkte und einer bestimmten Ebene derselben geführt werden. Wenn aber U_1, U_2 oder $(U_1), (U_2)$ gleich $0, 0$ oder gleich Multiplis von Perioden sind, so haben wir allerdings den sogenannten unbestimmten Fall des Umkehrproblems, und es gibt dann unendlich viele zugehörige Wertsysteme von u', u'' und also unendlich viele in Betracht kommende Tangentenbüschel der Kummerschen Fläche. *Aber infolge der in § 7 getroffenen Verabredung und auf Grund der in* (19a), *bez. in* (19b) *gewählten Zeichen, haben alle Büschel denselben Mittelpunkt, resp. dieselbe Ebene.* Es handelt sich nämlich um die unendlich vielen Tangentenbüschel, welche in einem Doppelpunkte der Kummerschen Fläche berühren, bez. in einer Doppelebene derselben liegen. In der Tat, sind beispielsweise in (19a) die U gleich $\sum \varepsilon^{(i)} P^{(i)}$, so hat man für die unendlich vielen zugehörigen Lösungen u', u'' die Relation:

$$u' = u'' + \sum \varepsilon^{(i)} P^{(i)},$$

und eben hierdurch sind nach § 8 (Schluß) die Raumgeraden charakterisiert, welche durch einen bestimmten Doppelpunkt der Kummerschen Fläche laufen. Analog bei den Doppelebenen. — Man beachte insbesondere, daß der Anfangspunkt und die Anfangsebene der Kummerschen Fläche die Argumentenpaare

$$U_1 = U_2 = 0, \quad (U_1) = (U_2) = 0$$

erhalten (die natürlich noch vermöge (20) modifiziert werden können).

Ich werde das Gesagte noch in etwas anderer Weise ausdrücken. Die unendlich vielen komplexen Wertsysteme, deren die Variabeln U_1, U_2, bez. $(U_1), (U_2)$, fähig sind, erfüllen einen vierfach ausgedehnten Raum, der den Perioden $P^{(1)}, P^{(2)}, P^{(3)}, P^{(4)}$ entsprechend in vierdimensionale Parallelepipeda zerlegt sein soll. Wir müssen $2^4 = 16$ der letzteren zusammenstellen, um ein Parallelepipedon von doppelter Kantenlänge (dessen Kanten also durch $2P^{(i)}$ gegeben sind) zu erhalten. Ein Parallelepidon der letzteren Art mag in der Weise konstruiert werden, daß sein Mittelpunkt in $U_1 = 0$, $U_2 = 0$ fällt, worauf wir dasselbe durch eine beliebige Diametralebene (d. h. durch einen linearen Raum von drei Dimensionen) halbieren. Es entsteht so ein Bereich, dessen Begrenzungspunkte teils durch die Operationen $U' = U + 2P^{(i)}$, teils durch die Transformation $U' = -U$ zusammengeordnet sind. Indem wir festsetzen, daß in dieser Weise zusammengehörige Punkte nur je einmal gezählt werden sollen, definieren wir, wenn ich diesen Ausdruck einer früheren Arbeit von mir entlehnen darf[18]), einen gewissen *Fundamentalbereich*, und nun ist die Sache die, *daß einerseits, durch* (19a), *die Punkte der Kummerschen Fläche, andererseits, durch* (19b), *die Ebenen derselben ausnahmslos eindeutig auf die Elemente des Fundamentalbereichs bezogen sind.*

Was die Einzelheiten der hiermit gefundenen Parameterausbreitung angeht, so verweise ich insbesondere auf Herrn Rohns Dissertation[19]), wo dieselbe mit dem Verlaufe der Haupttangentenkurven auf der Kummerschen Fläche in Verbindung gebracht ist. Will man die 16 Punkte erhalten, die aus dem Punkte U vermöge der 16 Kollineationen entstehen, die die Kummersche Fläche in sich selbst überführen, so hat man U in $U + \sum_1^4 \varepsilon^{(i)} P^{(i)}$ zu verwandeln. Will man dagegen die 16 Punkte aufsuchen, in denen die 16 Ebenen berühren, die aus dem Punkte U bei den Reziprozitäten, die die Kummersche Fläche in sich überführen, hervor-

[18]) Vgl. Bd. 21 der Math. Ann., S. 149. [Vgl. die Abhandlungen im III. Band dieser Ausgabe.]

[19]) *Betrachtungen über die Kummersche Fläche und ihren Zusammenhang mit den hyperelliptischen Funktionen* $p = 2$ (München, Straub, 1878).

gehen, so hat man $U = u' - u''$ zu setzen und wird in $u' + u'' + \sum_1^4 \varepsilon^{(i)} P^{(i)}$ die Parameter der 16 Punkte haben. Die Ebenen selbst erhalten die Parameter $(U) = U + \sum \varepsilon^{(i)} P^{(i)}$. Insbesondere sind die Parameter U eines Punktes und (U) einer Ebene einander gleich, wenn Punkt und Ebene einander im Komplexe $x_6 = 0$ entsprechen.

III. Konfigurationen bei der Kummerschen Fläche, mit Hilfe der transzendenten Parameter behandelt.

§ 10.

Transzendente Parameter für diejenigen Punkte der Kummerschen Fläche, die einer festen Tangentialebene angehören.

Um jetzt die Theorie der Konfigurationen der Behandlung vermittelst der transzendenten Parameter zugänglich zu machen, betrachten wir vorab den Umhüllungskegel vierter Klasse, der von einem Punkte der Kummerschen Fläche aus sich an letztere erstreckt, oder, was für die Ausdrucksweise bequemer ist, und übrigens auf dasselbe hinauskommt, die Kurve vierter Ordnung, in welcher die Kummersche Fläche von einer ihrer Tangentialebenen geschnitten wird. Besagte Kurve ist, wie selbstverständlich, eine hyperelliptische Kurve vom Geschlechte Zwei, von der man leicht erkennt, *daß sie sich auf die zweiblättrige Fläche $\lambda, \sqrt{f(\lambda)}$ eindeutig beziehen läßt.* Ordnet man nämlich jeder Linie, die innerhalb der Ebene der Kurve durch den Doppelpunkt derselben geht, als Parameter das λ desjenigen Komplexes unserer Schar (2) zu, dessen singuläre Linie sie ist, so treffen auf die sechs unter ihnen enthaltenen Doppeltangenten der Kummerschen Fläche (auf die sechs Tangenten also, die sich vom Doppelpunkte an die Kurve legen lassen) die Parameterwerte $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_6$, wie bekannt. Um jetzt unsere Kurve auf die zweiblättrige Fläche eindeutig zu beziehen, brauchen wir nur den beiden beweglichen (nicht in den Doppelpunkt fallenden) Schnittpunkten unserer Geraden λ mit der Kurve vierter Ordnung beziehungsweise die beiden Punkten entsprechend zu setzen, die auf der Riemannschen Fläche demselben Werte von λ zugehören. Welchem der beiden Punkte wir dabei $+\sqrt{f(\lambda)}$, welchem $-\sqrt{f(\lambda)}$ zuweisen wollen, haben wir bei dem ersten Punktepaare, bei dem wir die Entscheidung treffen, willkürlich festzusetzen; für alle anderen Punktepaare ergibt es sich dann durch analytische Fortsetzung. Es entspricht diese doppelte Möglichkeit der Zuordnung dem schon oben hervorgehobenen Satze, daß jedes hyperelliptische Gebilde sich durch eine Transformation von der Periode

Zwei eindeutig auf sich selbst beziehen läßt. — Übrigens ist der Parameter λ, den wir hier der um den Doppelpunkt der Kurve drehbaren Linie beilegen, dieselbe Größe, die wir oben (bei Einführung der elliptischen Linienkoordinaten) mit $\lambda''' = \lambda^{IV}$ bezeichnet haben; λ' und λ'' sind speziell die Parameter λ derjenigen beiden Linien, die unsere Kurve vierter Ordnung im Doppelpunkte berühren (der im Büschel enthaltenen Haupttangenten der Kummerschen Fläche). Die beiden Punkte unserer Kurve vierter Ordnung, denen wir die Parameterwerte $\lambda, \pm\sqrt{f(\lambda)}$ zuordnen, sind zugleich die Mittelpunkte der beiden Strahlbüschel, welche dem Komplex λ der Schar (2) in unserer Ebene angehören.

Dies vorausgesetzt werden wir nun an unserer C_4 die Integrale (6):

$$w = \int_{\varkappa_6}^{\lambda, \sqrt{f(\lambda)}} dw$$

hinerstrecken. Jeder Punkt der C_4 enthält dann, *insofern er der C_4 angehört*, unendlich viele Parameterwerte, die wir W_1, W_2 nennen wollen, und die sich aus einem ersten Paare, das $\overline{W}_1, \overline{W}_2$ heißen mag, durch Zufügen beliebiger Periodenmultipla ergeben:

$$W \equiv \overline{W} \pmod{P^{(i)}}. \tag{21}$$

Dabei ist natürlich vorausgesetzt, daß die C_4 auf die zweiblättrige Fläche $\lambda, \sqrt{f(\lambda)}$ in bestimmter Weise bezogen sei. Führen wir hinterher die andere, ebenso zulässige Beziehungsweise ein, so erfahren die Parameter W_1, W_2 sämtlicher Punkte einen simultanen Zeichenwechsel.

Es seien jetzt in dem hiermit definierten Sinne C_1', C_2' und C_1'', C_2'' transzendente Parameterpaare, welche denjenigen beiden Punkten unserer C_4 zukommen, die im Doppelpunkte derselben vereinigt sind. Ferner seien durch $W', W'', \ldots, W^{(4n)}$ Parameterpaare bezeichnet, welche solchen $4n$ Punkten der C_n zugehören, in denen unsere C_4 von einer beliebigen C_n geschnitten wird. Wir haben dann nach dem Abelschen Theoreme in bekannter Weise:

$$W' + W'' + \ldots + W^{(4n)} \equiv n(C' + C'') \pmod{P^{(i)}}. \tag{22}$$

Ich will hier insbesondere $n = 1$ nehmen. *Dann finden wir für die vier Schnittpunkte einer geraden Linie mit unserer C_4:*

$$W' + W'' + W''' + W^{IV} \equiv (C' + C'') \pmod{P^{(i)}}. \tag{23}$$

Ich will andererseits, worauf ich später gelegentlich zurückkomme, $n = 2$ setzen, aber annehmen, daß $W^{(7)}$ und $W^{(8)}$ mit C' und C'' koinzidieren, daß also der schneidende Kegelschnitt zur C_4 adjungiert sei. Dann kommt für die übrigen sechs Schnittpunkte unseres Kegelschnitts mit der C_4:

$$W' + W'' + \ldots + W^{(6)} \equiv (C' + C'') \pmod{P^{(i)}}. \tag{24}$$

Diese Gleichungen (23), (24) sind bekanntlich auch hinreichend, um ein vorgelegtes Punktsystem als Schnittpunktsystem der in Betracht kommenden Art zu charakterisieren. Was wir hier besonders beachten müssen, ist die Bedeutung der rechter Hand stehenden konstanten Größen. Es sind C' und C'' beide *einfache* Integrale (in dem früher definierten Sinne), dazu im allgemeinen (d. h. bei beliebig gelegter Tangentialebene) voneinander verschieden. Die Summe $C' + C''$ ist also keineswegs, von partikulären Fällen abgesehen, einem zweimal genommenen einfachen Integrale gleich, ein Satz, auf den wir uns später stützen müssen.

§ 11.

Fundamentalsätze über den Schnitt einer geraden Linie mit der Kummerschen Fläche.

Wir knüpfen jetzt an Formel (23) an. Die gerade Linie, welche die Schnittpunkte W', W'', W''', W^{IV} verbindet, gehört, wie schon oben hervorgehoben wurde, den Komplexen $\lambda', \lambda'', \lambda''', \lambda^{IV}$ an. Wenn wir ihr also in früherer Weise Parameterpaare w', w'', w''', w^{IV} beilegen (Formel (16)), so werden, von Multiplis der Perioden $P^{(i)}$ abgesehen, Gleichungen der folgenden Art bestehen müssen:

$$w' = \pm W', \quad w'' = \pm W'', \quad w''' = \pm W''', \quad w^{IV} = \pm W^{IV},$$

wo uns inzwischen die Vorzeichen noch unbekannt sind. Indem wir in (23) eintragen, erhalten wir den vorläufigen Satz, daß eine gerade Linie (w', w'', w''', w^{IV}), die sich in einer Tangentialebene der Kummerschen Fläche bewegt, die folgende Relation befriedigt:

$$(25\,\mathrm{a}) \qquad \pm w' \pm w'' \pm w''' \pm w^{IV} \equiv \text{Const. (mod. } P^{(i)}).$$

Hier sind die Vorzeichen linker Hand noch unbestimmt und ist Const. im allgemeinen nicht gleich dem Doppelten eines einfachen Integrals.

Wir können diesen Satz sofort so präzisieren, daß wir schreiben:

$$(25\,\mathrm{b}) \qquad \pm w' \pm w'' \pm w''' \pm w^{IV} \equiv \text{Const. (mod. } 2P^{(i)}),$$

wo nun natürlich Const. modulo doppelter Perioden bestimmt gedacht werden muß, was aber die Bemerkung, die wir über die Natur von Const. gemacht haben, nicht modifiziert. In der Tat ist, wie wir früher sahen, die auf der linken Seite von (25 a) oder (25 b) stehende Verbindung der w', w'', w''', w^{IV} für jede einzelne Raumgerade modulo doppelter Perioden definiert. Dann aber dürfen wir von (25 a) sofort zu (25 b) übergehen, da ja die Raumgeraden, von denen wir handeln, sich kontinuierlich aneinander schließen.

Wir wenden uns jetzt zur Bestimmung der Vorzeichen. Dabei ist die erste Bemerkung, die wir machen, daß von einer absoluten Fixierung der

Vorzeichen überhaupt nicht die Rede sein kann. Denn die Parameterpaare w', w'' usw., welche wir einer geraden Linie beilegten, waren selbst nur bis auf gewisse Abänderungen bestimmt: nach Formel (17) dürfen wir für w', w'', w''', w^{IV} nach Belieben $\pm w', \pm w'', \pm w''', \pm w^{IV}$ einführen, sofern wir nur an der einen Bedingung festhalten, daß die Anzahl der Vorzeichenwechsel eine gerade sein muß[20]. Alles also, was wir entscheiden können, ist dies: ob in (25a) resp. (25b) linker Hand eine *gerade* oder eine *ungerade* Anzahl von Minuszeichen richtig ist? Wir können gleich vermuten, daß hier die Verabredung des § 7 zur Geltung kommt, und dies bestätigt sich in der Tat, indem wir zur Beantwortung unserer Frage nunmehr ein Beispiel heranziehen. In unserer Ebene liegt eine gerade Linie, welche zugleich der Anfangsebene angehört, für welche also nach unseren früheren Entwicklungen

$$w' = -w'', \quad w''' = w^{IV}$$

genommen werden kann. Kombinieren wir nun diese Beziehungen mit irgendeinem der acht Ausdrücke, in denen eine gerade Anzahl von Minuszeichen vorkommt:

$$\pm(w' + w'') \pm (w''' + w^{IV}),$$
$$\pm(w' - w'') \pm (w''' - w^{IV}),$$

so erhalten wir allemal das Doppelte eines einfachen Integrals, nämlich $\pm 2w'''$ oder $\pm 2w'$. Nun soll aber die in (25) auftretende Konstante dem Doppelten eines einfachen Integrals gerade nicht gleich sein. Es bleibt also nichts anderes übrig, als daß wir linker Hand in (25) eine *ungerade* Anzahl von Minuszeichen in Anwendung bringen.

Ehe wir aus dem Gesagten weitere Konsequenzen ziehen, wollen wir die in (25b) auftretende Konstante in Beziehung zu den Parametern (U) setzen, die unserer Ebene als einer Tangentialebene der Kummerschen Fläche nach Formel (19b) zukommen. Wir betrachten zu dem Zwecke unter den Linien der Ebene insbesondere diejenigen, die durch ihren Berührungspunkt laufen, und erinnern uns, daß nach § 8 für sie

$$w' = u', \quad w'' = u'', \quad w''' = w^{IV}$$

genommen werden kann. Ich trage diese Werte von w in die acht Ausdrücke ein, die eine ungerade Anzahl von Minuszeichen haben:

$$\pm(w' + w'') \pm (w''' - w^{IV}),$$
$$\pm(w' - w'') \pm (w''' + w^{IV}).$$

Nur die ersten vier dieser Ausdrücke ergeben dann eine Summe, die von

[20]) Mit dieser Unbestimmtheit korrespondiert die andere, daß die in (22) rechter Hand auftretende Konstante ($C' + C''$) ebenfalls nach Belieben im Vorzeichen geändert werden kann, da wir unsere Kurve vierter Ordnung ja ebensowohl auf die eine als auf die andere Weise auf die zweiblättrige Fläche $\lambda, \sqrt{f(\lambda)}$ beziehen können.

dem wechselnden $w''' = w^{IV}$ nicht mehr abhängt und also der in (25) auftretenden Konstanten gleich sein kann. Wir finden so:

$$\text{Const.} \equiv \pm (u' + u'') \pmod{2P^{(i)}}.$$

Nun sind aber die Ausdrücke $(u' + u'')$ genau jene Parameter (U), die wir der Ebene als einer Tangentialebene der Kummerschen Fläche beilegten. Diese (U) können selbst im Vorzeichen oder durch Hinzufügen doppelter Perioden beliebig abgeändert werden. Das Resultat ist daher einfach dieses: *daß wir Const. durch (U) selbst ersetzen können.*

Fassen wir zusammen, so haben wir einen Satz bewiesen, der für alles Folgende fundamental ist, und den ich als *Fundamentalsatz I* bezeichne (insofern ihm sogleich vermöge dualistischer Umkehr der Betrachtungen ein zweiter Fundamentalsatz an die Seite gestellt werden soll). Derselbe lautet:

Sind w', w'', w''', w^{IV} die Parameter einer geraden Linie, die in der Ebene (U) liegt, so wird, je nach der Wahl der w', w'', w''', w^{IV}, resp. der (U), eine der folgenden acht Kongruenzen statthaben:

$$(26) \qquad \left.\begin{array}{l} w' + w'' + w''' - w^{IV} \\ w' + w'' - w''' + w^{IV} \\ w' - w'' + w''' + w^{IV} \\ w' - w'' - w''' - w^{IV} \end{array}\right\} \equiv \pm (U) \pmod{2P^{(i)}}.$$

Die Unbestimmtheit der Vorzeichen, welche hier zur Geltung kommt, findet nach anderer Seite ihre Erklärung darin, daß durch die gerade Linie $w', w'', \ldots$ in der Tat vier Tangentialebenen der Kummerschen Fläche hindurchgehen. Ich habe mit Rücksicht hierauf die acht Formeln (26) bereits auf vier Zeilen verteilt. Wir können einfach sagen:

Die Parameter (U) derjenigen vier Tangentialebenen der Kummerschen Fläche, welche durch eine Raumgerade w', w'', w''', w^{IV} hindurchgehen, sind durch die Formeln (26) gegeben.

In der Tat sind sie durch diese Formeln so weit gegeben, als sie überhaupt bestimmt sind, nämlich bis auf die Vorzeichen und bis auf gerade Multipla der Perioden.

Ich wende mich sofort zum *Fundamentalsatz II*. Es ist nicht nötig, daß ich alle die einzelnen Schritte, die wir bei der Aufstellung des ersten Fundamentalsatzes vollzogen haben, unter durchgängiger dualistischer Umkehr hier wiederhole. Vielmehr gebe ich sofort das Resultat an. Wir haben:

Geht eine Gerade w', w'', w''', w^{IV} durch einen Punkt U der Kummerschen Fläche, so muß eine der acht Kongruenzen statthaben:

$$(27) \qquad \left.\begin{array}{l} w' - w'' - w''' + w^{IV} \\ w' - w'' + w''' - w^{IV} \\ w' + w'' - w''' - w^{IV} \\ w' + w'' + w''' + w^{IV} \end{array}\right\} \equiv \pm U \pmod{2P^{(i)}}.$$

Umgekehrt berechnet man aus diesen Gleichungen die Parameter U der vier Punkte, in denen eine Gerade $w', w'', \ldots$ die Kummersche Fläche schneidet.

Ich will unter den Folgerungen, die sich an unsere Fundamentalsätze knüpfen, nur einige wenige hervorheben[21])

1. Es sei $w''' = w^{IV}$, die gerade Linie also eine singuläre Linie des Komplexes $\lambda''' = \lambda^{IV}$. Wir haben dann als Parameter des Berührungspunktes der ursprünglichen Definition dieser Parameter zufolge:

$$\pm U \equiv w' - w'' \pmod{2P^{(i)}}.$$

Formel (27) gibt jetzt für die beiden anderen Schnittpunkte

$$\pm U \equiv w' + w'' \pm 2w''' \pmod{2P^{(i)}}.$$

Nun sind aber die $w' + w''$, ebenfalls zufolge der ursprünglichen Definition, gleich den Parametern (U) der Tangentialebene, die zu unserer singulären Linie gehört, während die beiden vom Berührungspunkte verschiedenen Punkte, in denen unsere singuläre Linie der Kummerschen Fläche begegnet, diejenigen Punkte sind, welche der genannten Ebene in dem Komplexe λ''' als Büschelmittelpunkte entsprechen. Wir haben also folgenden Satz (in welchem ich λ statt λ''' geschrieben habe):

Die Mittelpunkte der beiden Strahlbüschel, die einem Komplex λ in einer Ebene (U) angehören, sind durch folgende Formel gegeben:

$$(28) \qquad \pm U \equiv (U) \pm 2 \int_{\varkappa_6}^{\lambda, \sqrt{f(\lambda)}} dw \pmod{2P^{(i)}}.$$

Dabei erinnere man sich, daß dieselben beiden Punkte als Punkte der in der Ebene enthaltenen Kurve vierter Ordnung nach § 10 die folgenden Parameter erhielten:

$$W \equiv \pm \int_{\varkappa_6}^{\lambda, \sqrt{f(\lambda)}} dw \pmod{P^{(i)}},$$

wobei wir noch willkürlich festsetzen können, ob das Plus- oder das Minuszeichen dem in (28) auftretenden Pluszeichen entsprechen soll.

2. Wir haben hiermit das Mittel gewonnen, um *konjugierte Punkte und Ebenen* durch ihre transzendenten Parameter zu charakterisieren. Unter w', w'' einfache Integrale verstanden, die den oberen Grenzen λ', λ'' zugehören, betrachte man folgende Ebenen:

[21]) Vgl. hier überall Rohn in Bd. 15 der Math. Ann., S. 349 ff. Die von mir gegebene Darstellung weicht von der Rohnschen einmal durch die bindenden Verabredungen betreffs der Vorzeichen, dann aber dadurch ab, daß ich immer neben den Parametern U der Punkte der Kummerschen Fläche die Parameter (U) ihrer Ebenen in Anwendung bringe.

$$\text{(29a)} \qquad (U); \qquad (U)+2w'+2w''$$

und zugleich die Punkte:

$$\text{(29b)} \qquad (U)+2w', \quad (U)+2w''.$$

Aus (28) ergibt sich dann sofort, daß beide Punkte der Ebene (U) in den Komplexen λ', λ'' und der Ebene $(U)+2w'+2w''$ in den Komplexen λ'', λ' zugeordnet sind. Dies aber heißt sofort, daß Ebenen und Punkte im allgemeinsten Sinne konjugiert sind (Theorem (A) des § 2). Also:

Konjugierte Ebenen und Punkte werden durch die Formeln (29) *geliefert.*

3. Ich will zum Schluß noch eine gerade Linie betrachten, welche durch den Anfangspunkt der Kummerschen Fläche läuft. Für sie kann $w'=w''$, $w'''=w^{IV}$ genommen werden und wir erhalten dann für die weiteren beiden Schnittpunkte, die sie mit der Kummerschen Fläche gemein hat, nach (27):

$$\text{(30)} \qquad \pm U = 2(w'+w'''), \quad \text{bez.} \quad \pm U = 2(w'-w''').$$

Ich werde weiter unten dieses Resultat benutzen und bemerke hier nur, daß durch diese Formeln eine elementare Methode indiziert ist, um die Parameter U der Punkte der Kummerschen Fläche einzuführen, indem man die Punkte den durch sie gehenden Linien zuordnet, welche durch den Anfangspunkt laufen, die Parameterpaare λ', λ''' bestimmt, die einer solchen Linie zukommen, usw.[22])

§ 12.

Transzendente Darstellung der früher untersuchten Konfigurationen.

Aus den nunmehr formulierten Sätzen können wir jetzt die früheren Theoreme über Konfigurationen, welche der Kummerschen Fläche gleichzeitig eingeschrieben und umgeschrieben sind, mit leichter Mühe wiedergewinnen.

Es seien K_1, K_2 irgend zwei Konstante, a_1, a_2; b_1, b_2; c_1, c_2 einfache Integrale. Wir betrachten die vier Punkte der Kummerschen Fläche:

$$\text{(31a)} \qquad \pm U = \begin{cases} K-a-b-c, \\ K-a+b+c, \\ K+a-b+c, \\ K+a+b-c, \end{cases} \pmod{2P^{(i)}}$$

[22]) Es ist dies im wesentlichen diejenige Methode, welche Herr Darboux im 92. Bande der Comptes Rendus, S. 1493–1495, entwickelt.

und die vier Tangentialebenen derselben:

$$\text{(31b)} \qquad \pm(U) \equiv \begin{cases} K+a+b+c, \\ K+a-b-c, \\ K-a+b-c, \\ K-a-b+c. \end{cases} \pmod{2P^{(i)}}.$$

Offenbar liegt, nach Formel (28), der an i-ter Stelle angeführte Punkt je in denjenigen drei Ebenen (31b), die *nicht* an der i-ten Stelle stehen und entspricht in jeder dieser Ebenen als Büschelmittelpunkt bez. einem der drei Komplexe a, b oder c[23]). Gleichzeitig sind, nach (29), je zwei Punkte mit den beiden durch sie gemeinsam hindurchgehenden Ebenen konjugiert. *Dies aber ist die ganze Theorie der früher als „ausgezeichnet" benannten fünffach unendlich vielen Tetraeder.* Die Zahl Fünf resultiert dabei aus den drei Paaren einfacher Integrale (a, b und c) und den beiden unabhängigen Konstanten K_1, K_2.

2. Nicht minder einfach ist die Darstellung der Konfigurationen $(16)_6$[24]). Es seien a, b, c, d, e, f die Bezeichnungen für sechs Paare einfacher Integrale, und es mögen ε', ε'', ε''', ε^{IV} nach Belieben die positive oder negative Einheit bedeuten. *Dann werden die 16 Ecken und 16 Ebenen unserer sechsfach unendlich vielen Konfigurationen durch die Formeln gegeben sein:*

$$\text{(32)} \quad \begin{matrix} \pm\ U \equiv a+\varepsilon' b+\varepsilon'' c+\varepsilon''' d+\varepsilon^{IV} e-\varepsilon'\varepsilon''\varepsilon'''\varepsilon^{IV} f, \\ \pm(U) \equiv a+\varepsilon' b+\varepsilon'' c+\varepsilon''' d+\varepsilon^{IV} e+\varepsilon'\varepsilon''\varepsilon'''\varepsilon^{IV} f, \end{matrix} \pmod{2P^{(i)}}$$

wo die zugehörigen sechs Komplexe zweiten Grades direkt durch a, b, c, d, e, f bestimmt sind.

Beispielsweise liegen in der Ebene:

$$(U) \equiv a+b+c+d+e+f,$$

und zwar den sechs Komplexen a, b, c, d, e, f entsprechend, die sechs Punkte:

$$\begin{matrix} -a+b+c+d+e+f, \\ +a-b+c+d+e+f, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{matrix}$$

Als Punkte der C_4, welche von der Ebene aus der Kummerschen Fläche ausgeschnitten wird, erhalten diese Punkte die transzendenten Parameter:

$$W \equiv a, b, c, d, e, f \pmod{P^{(i)}},$$

deren Summe dem Parameter (U) der Ebene selbst gleich ist. Hierin liegt unmittelbar, nach Formel (24), daß unsere sechs Punkte aus der C_4 von

[23]) Ich benutze hier die zu den Parametern λ der Komplexe gehörigen einfachen Integrale kurzweg zur Benennung der Komplexe selbst.

[24]) Vgl. wieder Rohn l. c.

einem Kegelschnitte ausgeschnitten werden, der zur C_4 adjungiert ist, usw. — Man beachte noch, daß durch Angabe der Komplexe $a, b, c \ldots$ die einfachen Integrale $\pm a, \pm b, \pm c, \ldots$ nur modulo einfacher Perioden bestimmt sind. Wir erhalten also aus einer ersten zu den genannten Komplexen gehörigen Konfiguration $(16)_6$, die durch (32) gegeben sein mag, im ganzen 16 gleichberechtigte, die aus (32) hervorgehen, indem man sämtliche U und (U) um dieselbe Kombination einfacher Perioden vermehrt. Von diesen 16 Konfigurationen war schon oben in der Anmerkung zu § 5 die Rede. — Daß man unter den Punkten und Ebenen (32) die Ecken und Seitenflächen von 80 ausgezeichneten Tetraedern, dem Schema (31) entsprechend, herausgreifen kann, liegt unmittelbar auf der Hand. —

Die hiermit gewonnene Darstellung unserer früheren Konfigurationen ist so einfach, daß wir sofort allgemeinere Konfigurationen derselben Art konstruieren können. Einmal werden wir, indem wir die Formeln (31) mit den (32) vergleichen, auch letzteren additive Konstante K willkürlich zufügen wollen, andererseits aber statt der drei Paare einfacher Integrale von (31) und der sechs Paare von (32) deren überhaupt eine beliebige Zahl, sagen wir ν ins Auge fassen. Indem wir diese Integrale der besseren Übersicht halber mit $w', w'', \ldots$ bezeichnen, erhalten wir so *Aggregate von $2^{\nu-1}$ Punkten und $2^{\nu-1}$ Ebenen der Kummerschen Fläche, die durch folgende Formeln definiert sind:*

$$(33)\quad \begin{cases} \pm U = \varepsilon' w' + \varepsilon'' w'' + \ldots + \varepsilon^{(\nu-1)} \cdot w^{(\nu-1)} - \prod\limits_{i=1}^{\nu-1} \varepsilon^{(i)} \cdot w^{(\nu)} + K \pmod{2P^{(i)}}, \\[2ex] \pm (U) = \varepsilon' w' + \varepsilon'' w'' + \ldots + \varepsilon^{(\nu-1)} \cdot w^{(\nu-1)} + \prod\limits_{i=1}^{\nu-1} \varepsilon^{(i)} \cdot w^{(\nu)} + K \pmod{2P^{(i)}}. \end{cases}$$

Es ist nicht meine Absicht, die Theorie der sich solchergestalt darbietenden Konfigurationen, zu der übrigens im vorangehenden alle Mittel gegeben sind, eingehender zu verfolgen. Vielmehr möchte ich hier neben ihnen noch allgemeinere Konstruktionen in Betracht ziehen, die entstehen, indem wir die Argumente U eines Punktes oder (U) einer Ebene um *beliebig* gegebene Konstante $C, C', C'', \ldots$ vermehren. Wenn man die hyperelliptischen Funktionen den elliptischen parallelisiert, so entsprechen unsere neuen Konstruktionen unmittelbar den wohlbekannten Polygonen von Poncelet, die sich auf Kegelschnitte eines Büschels oder einer Schar beziehen[25]).

[25]) Verallgemeinerungen der Ponceletschen Sätze, welche durch Einführung hyperelliptischer Funktionen vom Geschlechte Zwei an Stelle der elliptischen Funktionen entstehen, sind auch jene Theoreme über geradlinige beim Flächenbüschel zweiter Ordnung auftretende Polygone, die neuerdings Herr Staude in Bd. 22 (1883) der Math. Ann. systematisch untersucht hat. In seiner Dissertation (*Über die Darstellung der Flächen vierter Ordnung mit Doppelkegelschnitt durch hyperelliptische Funktionen*, Leipzig 1885, siehe auch Grunerts Archiv, Neue Serie, Teil II) hat nun Herr Domsch die betreffenden Polygone durch einen direkten geometrischen Übertragungsprozeß mit Schließungssätzen für die Kummersche Fläche, bez. für die zugehörigen Komplexe zweiten Grades, in Verbindung gebracht. Die von Herrn Domsch benutzten Konstruktionen sind indes minder einfach, als die von mir im Texte abzuleitenden, und scheinen dementsprechend einem weiteren Gebiete als spezielle Fälle anzugehören; ich begnüge mich also hier, beiläufig auf dieselben verwiesen zu haben. [Vgl. hierzu die folgende Abhandlung XIII.]

§ 13.

Das Additionsproblem der transzendenten Parameter.

Die Elementaraufgabe, mit der wir uns jetzt zunächst beschäftigen müssen, verlangt, *aus einem Punkte U der Kummerschen Fläche, bez. aus einer Ebene (U) derselben allgemein den Punkt oder die Ebene zu konstruieren, welche durch die Formel:*

$$(34)\qquad U' = U + C, \quad \textit{resp.} \quad (U') = (U) + C$$

definiert sind.

Konstatieren wir zunächst, daß die Aufgaben, welche hier einander dualistisch koordiniert erscheinen, in der Tat untrennbar miteinander verbunden sind. Sind nämlich irgendwelche Punkte U in einer Ebene (U) gelegen, so werden die Punkte $U + C$ in der Ebene $(U) + C$ enthalten sein. In der Tat ist ja die Bedingung für die vereinigte Lage von Punkt und Ebene nach unseren früheren Entwicklungen die, daß die Differenz der betreffenden transzendenten Parameter gleich dem Doppelten eines einfachen Integrales ist, — und diese Differenz wird durch Einfügen der Konstante C nicht geändert.

Bemerken wir ferner, daß unsere Aufgabe im allgemeinen *zwei*, untrennbar miteinander verbundene Lösungen besitzt. Wir verstehen dies am besten, wenn wir uns dessen erinnern, was in § 9 über die Beziehung der Punkte der Kummerschen Fläche auf das 16-fache Periodenparallelepiped des Raumes der U gesagt wurde[26]). Wenn wir solche Wertsysteme der U, die sich um doppelte Perioden unterscheiden, als gleichwertig erachten, so wird durch (34) einem jeden Werte von C entsprechend eine *eindeutige* Transformation des Periodenparallelepipedes in sich selbst vorgestellt. Aber für die Kummersche Fläche wird dieselbe im allgemeinen zweideutig. In der Tat, dem einzelnen Punkte der Kummerschen Fläche entspricht ebensowohl die Stelle $+U$ als die Stelle $-U$ des Parallelepipeds, und wir müssen ihm also ebensowohl den Punkt $U + C$ als den Punkt $-U + C$, oder, was dasselbe ist, den Punkt $U - C$, entsprechend

[26]) Ich lasse der Einfachheit halber im Texte die Ebenen (U) beiseite, wie ich auch im folgenden immer nur entweder die Punkte oder die Ebenen bei den Konstruktionen betrachte, wie es gerade am bequemsten scheint.

setzen. Diese beiden Punkte aber fallen nur dann zusammen, wenn entweder C gleich einer ganzzahligen Verbindung der Perioden ist (wo wir dann zu den 16 Kollineationen geführt werden, die die Kummersche Fläche in sich transformieren) oder wenn U einer solchen Verbindung gleich ist, wir also einen Doppelpunkt der Fläche herausgegriffen haben.

Wir können das Gesagte auch so ausdrücken: *Unsere Aufgabe bleibt ungeändert, wenn wir die Konstante C im Vorzeichen umkehren.* Daß sie ebenfalls ungeändert bleibt, wenn wir C um beliebige gerade Multipla der Perioden vermehren, braucht kaum hervorgehoben zu werden.

Was nun die konstruktive Behandlung unserer Aufgabe angeht, so sind alle Mittel dazu in § 11, insbesondere in den Formeln (26), (27) daselbst enthalten. Ich will hier insbesondere von den Ebenen (26) sprechen. Nehmen wir irgendzwei derselben, z. B.

$$w' + w'' - w''' - w^{IV}$$

und

$$w' + w'' + w''' + w^{IV},$$

und bezeichnen die erste mit (U), die zweite mit $(U) + C$, so wird $C = 2(w''' + w^{IV})$, eine Gleichung, die sich bei beliebig gegebenem C befriedigen läßt. Es kommt also nur darauf an, den Zusammenhang zwischen den beiden in Betracht genommenen Ebenen in Form einer Konstruktionsvorschrift auszusprechen. Ich kann dies bei der Einfachheit der Sache ohne weitere Zwischenbetrachtungen ausführen. Wir verfahren folgendermaßen:

Vor allen Dingen setzen wir

$$C \equiv 2\left(\int_{\varkappa_0}^{\lambda''', \sqrt{f(\lambda''')}} dw + \int_{\varkappa_0}^{\lambda^{IV}, \sqrt{f(\lambda^{IV})}} dw\right) \quad (\text{mod. } 2P^{(i)})$$

was uns λ''', λ^{IV} und die zugehörigen Quadratwurzeln $\sqrt{f(\lambda''')}$, $\sqrt{f(\lambda^{IV})}$ eindeutig bestimmt, — sofern wir von dem nicht in Betracht kommenden Ausnahmefalle absehen, daß $C_1, C_2 \equiv 0, 0$ (mod. $2P^{(i)}$) ist. Wir denken uns dann die Durchschnittskurve der Ebene (U) mit der Kummerschen Fläche gezeichnet und suchen auf ihr die beiden Punkte, welche den Komplexen λ''', λ^{IV} in der Art zugehören, wie es durch die Vorzeichen der mitbestimmten $\sqrt{f(\lambda''')}$, $\sqrt{f(\lambda^{IV})}$ verlangt wird. *Hier ist es nun, wo die Zweideutigkeit der Konstruktion Platz greift.* Wie wir immer wieder betonten, kann unsere C_4 auf die fundamentale zweiblättrige Riemannsche Fläche auf zwei Weisen bezogen werden. Bezeichnen wir mit p''', p^{IV} die beiden Punkte unserer C_4, welche bei Anwendung der einen Beziehungsweise resultieren, so sind mit ihnen die anderen beiden Punkte, die bez. mit ihnen auf denselben durch den Doppelpunkt der C_4 laufenden geraden

Linien liegen und die ich π''', π^{IV} resp. nennen will, gleichberechtigt. Wir verbinden jetzt p''', p^{IV} und ebenso π''', π^{IV} durch eine Gerade. *Wir werden die Ebenen $(U) \pm C$ bekommen, indem wir durch jede dieser Geraden diejenige Ebene hindurchlegen, welche zu (U) und zu p''', p^{IV}, bez. zu π''', π^{IV}, konjugiert ist.*

Wir fügen dem Gesagten noch folgende Bemerkung hinzu. Haben wir eine der beiden in Rede stehenden Ebenen gewählt, z. B. diejenige, die durch p''', p^{IV} geht, so folgt, daß in ihr p''' und p^{IV} den Wurzeln $-\sqrt{f(\lambda''')}$ und $-\sqrt{f(\lambda^{IV})}$ zugeordnet werden müssen, womit die Beziehung der in der neuen Ebene enthaltenen Durchschnittskurve vierter Ordnung zur fundamentalen Riemannschen Fläche festgelegt (sogar überbestimmt) ist. Handelt es sich also jetzt darum, aus der Ebene $(U) + C$ weitergehend eine neue Ebene $(U) + C + C'$ zu konstruieren (wo die C irgendwie gegeben sein sollen), so ist dies eine Aufgabe, welche nur *eine* Lösung zuläßt.

§ 14.

Verschiedene Polygonkonstruktionen.

Es gibt zweierlei Weisen, um durch Wiederholung der Additionsoperation des vorigen Paragraphen *geschlossene* Serien von Punkten (oder Ebenen) zu gewinnen. Entweder wir addieren zu einem anfänglichen Elemente solche Konstante $C, C', C'', \ldots$ zu, deren Summe unmittelbar verschwindet, oder aber, wir wählen $C, C', C'', \ldots$ derart, daß ihre Summe gleich einem geraden Periodenvielfachen ist. Einen besonders einfachen Fall der ersten Art haben wir, wenn wir nach vorgängiger Addition beliebiger Größen $C, C', \ldots$ hinterher dieselben Größen $C, C', \ldots$ wieder subtrahieren. Wenn wir dabei die Reihenfolge der Summanden und Subtrahenden noch beliebig permutieren, so bekommen wir Aggregate von Punkten oder Ebenen, deren Beziehung zu den früher betrachteten Konfigurationen auf der Hand liegt. Einen besonders einfachen Fall der zweiten Art bekommen wir, wenn wir $C, C', \ldots$ einander gleich nehmen. Wir betrachten also etwa die Serie der Punkte

$$\ldots U - 2C,\ U - C,\ U,\ U + C,\ U + 2C, \ldots$$

Ist

$$C = 2 \cdot \frac{a_1 P^{(1)} + a_2 P^{(2)} + a_3 P^{(3)} + a_4 P^{(4)}}{n}, \tag{35}$$

(*wo a_1, a_2, a_3, a_4 vier ganze Zahlen vorstellen sollen, die mit der gleichfalls ganzen Zahl n keinen Faktor gemein haben*), *so wird unsere Punktreihe mit n Punkten abgeschlossen sein, und zwar unabhängig von der*

Wahl des Ausgangspunktes[27]); *ist C nicht in solcher Form darstellbar, so kann sich die Punktreihe niemals schließen.* Ich will n insbesondere (um Einzeldiskussionen zu entgehen, die hier zunächst kein Interesse haben) als ungerade Primzahl voraussetzen. Dann sind in der Formel (35) $[n^4 - 1]$ wesentlich verschiedene Werte von C enthalten. Indem C und $-C$ immer gleichzeitig bei der Konstruktion der einzelnen Punktreihe in Betracht kommen, erhalten wir im ganzen $\frac{n^4-1}{2}$ verschiedene Serien. Aber jedesmal $\frac{n-1}{2}$ derselben enthalten dieselben Punkte. Denn ich werde, von U ausgehend, in allerdings veränderter Reihenfolge jeweils dieselben Elemente erhalten, wenn ich statt des anfänglich gewählten C das Doppelte, $2C$, oder das Dreifache, $3C$, usw. in Anwendung bringe. Die Anzahl der verschiedenen hier resultierenden Punktaggregate ist also $(n^4 - 1):(n-1) = n^3 + n^2 + n + 1$, gleich der Zahl der unterschiedenen Transformationen n-ter Ordnung. Es scheint vom geometrischen Standpunkte aus interessant, die sämtlichen $n^4 - 1$ Punkte, welche durch

$$U + 2\,\frac{a_1 P^{(1)} + a_2 P^{(2)} + a_3 P^{(3)} + a_4 P^{(4)}}{n}$$

gegeben sind, mit dem Punkte U zu einer Figur zu vereinigen. —

§ 15.

Über eindeutige Transformationen der Kummerschen Fläche in sich selbst.

Ich wünsche hier noch eine letzte Frage zu berühren. Wir kennen von früher her 32 eindeutige Transformationen der Kummerschen Fläche in sich selbst: die oft genannten 16 Kollineationen und 16 Reziprozitäten. Erstere erhält man, wenn man (um nur von den Punkten der Kummerschen Fläche zu reden) $U' = U + \sum_1^4 \varepsilon^{(i)} P^{(i)}$ setzt, wo die $\varepsilon^{(i)}$ nach Belieben 0 oder 1 bedeuten, letztere, indem man $U = u' - u''$ nimmt und dann $U' = u' + u'' + \sum_1^4 \varepsilon^{(i)} P^{(i)}$ sein läßt. Hierüber hinaus erkennt man auf geometrischem Wege die Existenz noch weiterer 32 eindeutiger Transformationen. Dieselben setzen solche zwei Punkte der Kummerschen Fläche einander entsprechend, die entweder ihre Verbindungslinie durch einen der 16 Doppelpunkte der Fläche schicken oder deren Tangentialebenen sich in einer geraden Linie kreuzen, die einer der 16 Doppelebenen angehört. Die 32 neuen Transformationen erwachsen offenbar, indem man auf eine derselben die 32 Transformationen der ersten Art (die Kollineationen und Reziprozitäten) anwendet. Es wird also genügen, wenn wir nur eine der neuen Transformationen analytisch darstellen. Dies aber wird durch Formel (30) geleistet. Dieselbe besagt, daß die Parameter solcher zwei Punkte, deren Verbindungslinie durch den Anfangspunkt der Kummerschen Fläche geht, sich in der Form

$$2(w' + w'') \quad \text{und} \quad 2(w' - w'')$$

darstellen, unter w', w'' einfache Integrale verstanden. Um also zu einem Punkte U den in der betreffenden Transformation entsprechenden U' zu finden, hat man einfach $U = 2(w' + w'')$ zu setzen und dann $U' = 2(w' - w'')$ zu nehmen. *Es ist die Frage, ob mit den 64 eindeutigen Transformationen, welche wir sonach kennen, die sämtlichen eindeutigen Transformationen der Kummerschen Fläche in sich selbst erschöpft sind.*

Leipzig, den 28. September 1885.

[27]) Sollte sich unter den Punkten unserer Reihe ein Doppelpunkt der Kummerschen Fläche befinden, so muß unsere Behauptung in leicht erkennbarer Weise modifiziert werden.