

Benjamin-Onoソリトンの非対称な二次元相互作用

辻, 英一
九州大学応用力学研究所

及川, 正行
九州大学応用力学研究所

<https://doi.org/10.15017/18721>

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 21ME-S7 (31), 2010-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：



応用力学研究所研究集会報告 No.21ME-S7
「非線形波動研究の現状と将来 — 次の 10 年への展望」（研究代表者 矢嶋 徹）
共催 九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.21ME-S7

*Current and Future Research on Nonlinear Waves —
Perspectives for the Next Decade*

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 19 - 21, 2009

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 31 (pp. 202-205)

Benjamin-Ono ソリトンの 非対称な二次元相互作用

辻 英一 (TSUJI Hidekazu), 及川 正行 (OIKAWA Masayuki)

(Received March 3, 2010)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2010

Benjamin-Ono ソリトンの非対称な二次元相互作用

九大・応力研

辻 英一 (Hidekazu TSUJI)

九大・応力研

及川 正行 (Masayuki OIKAWA)

1 はじめに

流体、プラズマ中を伝わる非線形波動の特徴を記述・理解する目的で、基礎方程式から導出される非線形モデル方程式の性質がこれまで研究されてきた。その中で、二次元系での非線形波動の性質は、一次元的なものとは本質的に異なるという事がわかってきてている。最近，Kodama らのグループが Kadmotsev-Petvishvili(KP) 方程式

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial u}{\partial T} + 6u \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{\partial^3 u}{\partial X^3} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = 0,$$

に関して、新しいクラスの解についての研究を行っている [1, 2]。KP 方程式の解としては、これまで広田の方法で求められる N ソリトン解や、Miles による三本の半無限に伸びるソリトンから構成される共鳴解 [3] が知られていた。新しくこれらを含む形で拡張された解は、非常に複雑な二次元的相互作用を表すものである。著者らは、V 字型にソリトンを置いた初期値における時間発展を調べ、その漸近状態がこの新しいクラスの解の幾つかに落ち着くことを示し、この解が重要な役割を示す事がわかった [1]。

さて、このような性質が KP 方程式以外のモデル方程式における孤立波の相互作用についても成り立つかどうかという観点から、本研究では、BO 方程式のソリトン解の弱二次元的な相互作用を表す二次元 BO(2dBO) 方程式

$$\frac{\partial}{\partial X} \left(\frac{\partial u}{\partial T} + 6u \frac{\partial u}{\partial X} + \mathcal{H} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} \right] \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} = 0, \quad \mathcal{H}[u] \equiv \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(X')}{X' - X} dX' \quad (1)$$

を調べる。(P は主値積分)。これは、Benjamin-Ono(BO) 方程式 [4, 5] に従うソリトンの二次元相互作用を記述する方程式である。空間一次元についての BO 方程式は可積分性を持ち、N ソリトン解などの詳細が明らかにされている [6]。また、この方程式について同じ振幅の孤立波同士の相互作用は [7] によって調べられ、KP 方程式の解との定性的な類似点と相違点が明らかになっている¹。

その一方、振幅の異なる孤立波同士の相互作用はこれまで調べられていない。Tsuiji and Oikawa [7]において、この理由は数値計算での境界条件に関する技術的な困難であった。しかし、最近 Navier-Stokes 方程式の数値計算に対して提案された方法 (window method [9]) を適用することによって、この困難が解決できることがわかった。本研究では、[7] の発展として、BO 方程式に従う孤

¹BO 方程式及び他の幾つかの方程式について、同じ振幅を持つ孤立波同士の相互作用が [8] でまとめられている。

立波同士が異なる振幅を持つ場合での二次元相互作用を調べる。KP 方程式の振幅が異なる場合に見られた結果が他の方程式でも見られるかを調べることが本研究の目的である。なお，2dBO 方程式の基礎方程式からの導出については，[7] を参照されたい。

2 数値計算法

数値解析の結果について述べる前に，その手法について述べる。計算領域として $L_X \times L_Y$ の長方形の領域を考える。空間微分は擬スペクトル法を用いている。時間発展は Crank-Nicholson 法で定式化し，非線形項の計算では反復法を用いている。計算点は X 方向に 8192 点， Y 方向に 1024 点を取っている。格子間隔は両方向で 0.1，時間間隔は 0.005 としている。

境界条件は， X, Y 方向共に周期境界条件である。注意すべき点は，領域内の孤立波は Y 方向の境界 ($Y = \pm L_Y/2$) の外まで伸びている，という設定で計算している事である。そのままでは周期境界条件を満たしていないため，対策として window method を用いている。window method は Y 方向の境界で 0 となるような窓関数を従属変数に作用させて変換し，新しい従属関数に関する方程式を作り，それを解く方法である。変換後の従属変数は，両端で 0 となるため周期境界条件を満たす。なお変換前の従属変数は，境界付近の孤立波は定常進行波解である事を用いて得られる。

初期条件は，以下の式で表す。

$$u = \frac{a_1 \delta_1^2}{(X + \Omega Y)^2 + \delta_1^2}, \quad \text{for } -L_Y/2 \leq Y \leq 0,$$

$$u = \frac{a_2 \delta_2^2}{(X - \Omega Y)^2 + \delta_2^2}, \quad \text{for } 0 \leq Y \leq L_Y/2, \quad \delta_i \equiv \frac{2}{3a_i}.$$

これは，2dBO 方程式の定常進行孤立波解を二つ組み合わせたものであり，実際の波形は後述の図 1 左図に示されている。 Ω は孤立波の進行方向を表すパラメーターであり，ここでは簡単のため，それぞれの波で絶対値が等しい場合を考えた。

3 数値計算の結果

以下の結果で，それぞれの孤立波の振幅は $a_1 = 0.5, a_2 = 1.0$ としている。

最初に $\Omega = 3$ の結果を図 1 に示す。二つの孤立波は初期状態 (a) から X の正の向き（以後この方向を前方と考える）に伝播しつつ， $Y = 0$ に向かって伝播するため，領域の中心部で相互作用し始め，後方へと相互作用後に形成される孤立波が伸び始める。波動が定常に伝播する状態では，直線的に伸びる二本の孤立波の重ね合わせの状態となっている。このような相互作用は，振幅が同じ場合において， Ω が比較的大きな値（孤立波同士の進行方向のずれが大きい）場合に見られるものと同様であり，KP 方程式の同種の計算でも，同様な重ね合わせのパターンを見ることができる。

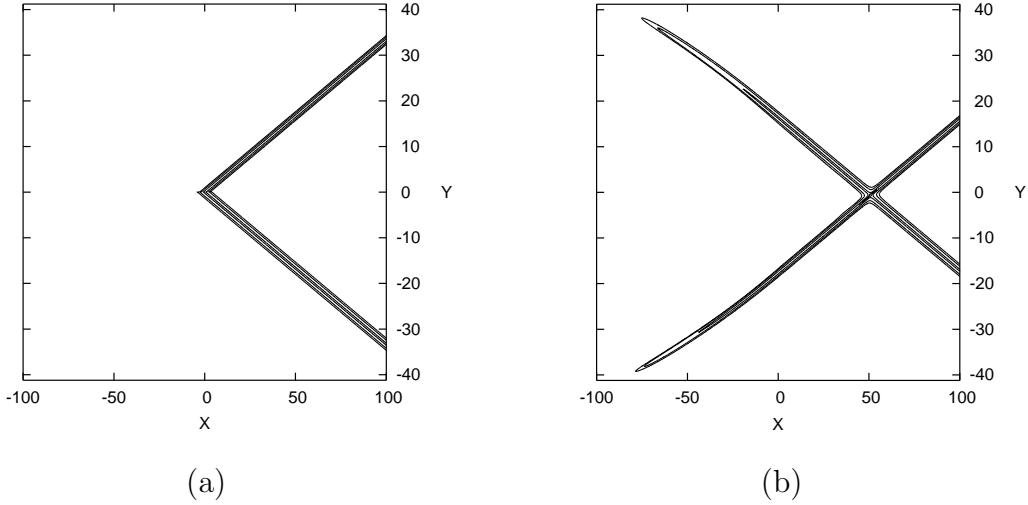


図 1: $\Omega = 3$ での二つの孤立波の相互作用。 (a) $T = 0$, (b) $T = 5$ 。

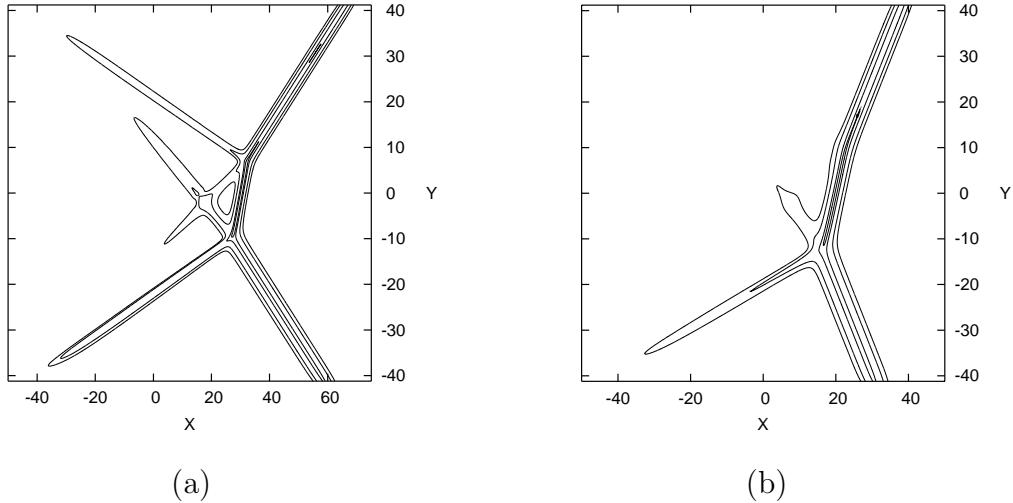


図 2: 漸近状態とみなせる時刻 ($T = 10$) での相互作用の波形。 (a) $\Omega = 1.0$, (b) $\Omega = 0.5$ 。

次に $\Omega = 1$ の結果を図 2(a) に示す。この場合相互作用する場所において、2 本の入射波とは違った方向に伸びる大振幅の孤立波（以後で stem と呼ぶ）が形成される。その一方、後方へと相互作用後に形成される孤立波が stem の両端に 2 本ずつ合計 4 本見られ、それぞれが stem と入射波の交点から伸びている。このような stem が現れる相互作用は、振幅が同じ場合において Ω が比較的小さな値の場合に見られるものと対応付けられる。KP 方程式での同種の計算と比較すると、後方外側に（入射波の後ろ側へ）伸びている波は、KP 方程式の相互作用でも見られる。しかし、後方内側に（stem の後ろ側の空間へ）伸びている波は、2dBO 方程式での相互作用に特有なものである。この特徴は、対称な初期条件の場合 [7] でも見られたが、非対称な初期条件においても同様であることが、この計算結果より明らかになった。

ここまで二例は、対称な初期条件の場合の結果に対応するものがある。しかし、次に示す

$\Omega = 0.5$ の例では非対称性が本質的であり，その結果を図 2(b) に示す。この場合は，大きな振幅を持つ入射波の後方には顕著な波が生成されない。反対に小さな振幅を持つ入射波の後ろには， $\Omega = 1.0$ の場合と同様に，外側に延びる孤立波と内側に小さな 2 次的な波が見られる。このような著しく非対称な特徴をもつ結果は，対称な初期条件での結果に対応するものが見られない。相互作用する部分に目を向けると， $\Omega = 1.0$ の場合と同様に，振幅と方向が入射波と異なる stem が生成・伝播していく。注目すべき点として，大きな振幅を持つ入射波と stem との違いは，振幅・方向ともわずかである。なお，図の等高線では見えない非常に小さな波が，大きな振幅を持つ入射波と stem との交点から出ている。しかしその波は，反対側の交点から出ている孤立波や 2 次的な波と対応しているのか，それとも全く違った相互作用なのかは。現時点では分かっていない。

4 まとめ

振幅の異なる非対称な BO ソリトンの相互作用を，初期値問題を数値的に解くことで調べた。漸近状態とみなせる状態において，対称な場合に見られた

- 重ねあわせに近いパターンが現れる相互作用
- stem とその両端に後方にできる波がそれぞれ 2 本生成・伝播する相互作用

の他に

- stem の片側にのみ顕著な波ができる相互作用

が見られた。現在，二つのソリトンの振幅比・角度を様々にとり，相互作用のパラメーター依存性を調べている。その結果を KP 方程式についての解析結果と調べ，類似点や相違点を明らかにすることが，今後の課題である。

参考文献

- 1) Kodama Y., Oikawa, M., and Tsuji, H., J. Phys. A 42(2009) 312001(9pp).
- 2) Chakravarty, S. and Kodama, Y., Stud. Appl. Math 123 (2009) 83-151.
- 3) Miles, J. W., J. Fluid Mech. 79(1977), 171-179.
- 4) Benjamin, T. B., J. Fluid Mech. 29(1967), 559-592.
- 5) Ono, H., J. Phys. Soc. Japan 39(1975), 1082-1091.
- 6) Matsuno, Y., "Bilinear Transformation Method", Academic Press, Orlando(1984).
- 7) Tsuji, H. and Oikawa M., Fluid Dyn. Res., 29(2001) 251-267.
- 8) Oikawa, M. and Tsuji, H., Fluid Dyn. Res., 38(2006) 868-898.
- 9) Schlatter, P., Adams, N.A. and Kleiser, L., J. Comp. Phys., 206(2005) 505-535.