算術調和平均アルゴリズムとSakaki-Kakei方程式の一般解とその分類

近藤, 弘一
同志社大学理工学部

https://doi.org/10.15017/18717

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 21ME-S7 (27), 2010-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

応用力学研究所研究集会報告 No.21ME-S7
「非線形波動研究の現状と将来 — 次の 10 年への展望」（研究代表者　矢嶋　徹）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.21ME-S7

Current and Future Research on Nonlinear Waves —
Perspectives for the Next Decade

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 19 - 21, 2009

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 27 (pp. 179-184)

算術調和平均アルゴリズムと Sakaki-Kakei 方程式の一般解とその分類

近藤 弘一 (KONDO Koichi)

（Received January 25, 2010）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2010

算術調和平均アルゴリズムと Sakaki-Kakei 方程式の一般解とその分類

同志社大学理工学部　近藤 弘一　(KONDO Koichi)

概　要　Sakaki-Kakei は超幾何関数の関数等式より得られる保存則をもつ非可逆 2 次元離散力学系を 12 種類提出した．本論ではこのうち第 3, 5, 6 番目の方程式の一般解を求めることを目的とする．これらの方程式は，算術調和平均アルゴリズム，ロジスティック写像と関連することを明らかにする．

1　はじめに

論文 [1] では，超幾何関数の関数等式で表される保存量をもつ不可逆な 2 次元離散力学系を 12 種類提出している．簡単のため，論文出現順に SK-1, SK-2, $\cdots$, SK-12 と略することにする．これらの方程式は，[1] で示唆されているように，可解カオス系との関連が期待される．本論では，次の 3 個の方程式

$$\text{SK-3:}\quad a_{n+1}=\frac{(a_n+b_n)^2}{a_n-b_n},\quad b_{n+1}=\frac{4a_nb_n}{a_n-b_n}, \tag{1.1}$$

$$\text{SK-5:}\quad a_{n+1}=\frac{(2a_n-b_n)^2}{4a_n},\quad b_{n+1}=\frac{{b_n}^2}{4a_n}, \tag{1.2}$$

$$\text{SK-6:}\quad a_{n+1}=\frac{4a_n(a_n-b_n)^2}{(2a_n-b_n)^2},\quad b_{n+1}=\frac{-{b_n}^2(a_n-b_n)}{(2a_n-b_n)^2} \tag{1.3}$$

の解を，算術調和平均アルゴリズムと関連付けて導出する．

2　算術調和平均アルゴリズム

算術調和平均アルゴリズム（AHM）

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\quad b_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n} \tag{2.1}$$

は，初期値が $a_0>b_0>0$ のとき特殊解

$$a_n=\sqrt{a_0b_0}\coth(2^n\sigma),\quad b_n=\sqrt{a_0b_0}\tanh(2^n\sigma),\quad \sigma=\tanh^{-1}\sqrt{\frac{b_0}{a_0}} \tag{2.2}$$

をもつ．a_n, b_n は両方とも $\sqrt{a_0b_0}$ に 2 次収束する．また，初期値が $a_0>0, b_0<0$ のとき特殊解

$$a_n=\sqrt{a_0b_0}\cot(2^n\sigma),\quad b_n=-\sqrt{a_0b_0}\tan(2^n\sigma),\quad \sigma=\tanh^{-1}\sqrt{\frac{-b_0}{a_0}} \tag{2.3}$$

をもつ．a_n, b_n は可解カオスである [2, 3].

AHM は保存量

$$I_n=\frac{1}{\sqrt{a_nb_n}} \tag{2.4}$$

をもつ．(2.4) を用いて b_n を (2.1) より消去すると，

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right), \quad c = a_0 b_0 \tag{2.5}$$

と書ける．これは 2 次方程式 $f(x) = x^2 - c = 0$ に対するニュートン法

$$a_{n+1} = a_n - \frac{f(a_n)}{f'(a_n)} = a_n - \frac{{a_n}^2 - c}{2a_n} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{c}{a_n}\right) \tag{2.6}$$

と等しい．方程式 (2.5) の任意の初期値のときの一般解は，[3] において，3 重対角行列式を用いた解が既に求められている．本論では行列式解ではなく，それを式変形した

$$a_n = T_{2^n-1}(a_0 b_0; a_0), \quad b_n = \frac{a_0 b_0}{a_n}, \quad T_n(c;x) = \sqrt{c}\frac{(x+\sqrt{c})^{n+1} + (x-\sqrt{c})^{n+1}}{(x+\sqrt{c})^{n+1} - (x-\sqrt{c})^{n+1}} \tag{2.7}$$

を利用し議論を進める．(2.7) はさらに式変形すると，

$$a_n = (\phi^{-1} \circ x^{2^n} \circ \phi)(a_0), \quad \phi(x) = \frac{x+\sqrt{c}}{x-\sqrt{c}} \tag{2.8}$$

と書ける．(2.8) より，

$$a_{n+1} = (\phi^{-1} \circ x^2 \circ \phi)(a_n), \tag{2.9}$$

が成り立つ．(2.5) の AHM の 1 ステップの写像 $a_n \mapsto a_{n+1}$ は x^2 と共役である．

3 SK-5 の解

超幾何関数

$${}_2F_1(\alpha,\beta,\gamma;x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n x^n}{(\gamma)_n n!} = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^{\infty} t^{\gamma-\alpha-1}(t+1)^{\beta-\gamma}(t+1-x)^{-\beta}\, dt \tag{3.1}$$

は，関数等式

$${}_2F_1(\alpha,\beta,2\alpha;x) = \left(1-\frac{x}{2}\right)^{-\beta} {}_2F_1\left(\frac{\beta}{2}, \frac{\beta+1}{2}, \alpha+\frac{1}{2}; \left(\frac{x}{2-x}\right)^2\right) \tag{3.2}$$

をみたす．等式 (3.2) において，

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = 1, \quad x = \frac{b_n}{a_n} \tag{3.3}$$

とおいて，両辺を $\sqrt{a_n}$ で割ると，

$$\frac{1}{\sqrt{a_n}} {}_2F_1\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = \frac{2\sqrt{a_n}}{2a_n - b_n} {}_2F_1\left(\frac{{b_n}^2}{(2a_n-b_n)^2}\right) \tag{3.4}$$

となる．(3.4) の左辺を

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{a_n}} {}_2F_1\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \tag{3.5}$$

とおき，(3.4) の右辺が I_{n+1} となるように，$a_n, b_n, a_{n+1}, b_{n+1}$ に条件を定めると (1.2) の SK-5 が導出される．SK-5 は保存量 I_n をもつ離散力学系である．ちなみに，等式 (3.2) において，

$$\alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = 1, \quad x = 1 - \frac{b_n}{a_n}, \quad I_n = \frac{1}{a_n} {}_2F_1\left(1 - \frac{b_n}{a_n}\right) \tag{3.6}$$

とおくと (2.1) の AHM が導出される．

方程式 SK-5 の保存量は (3.5) のように超幾何関数 ${}_2F_1$ を用いて与えられる．(3.5) の ${}_2F_1$ のパラメータは，$\alpha = 1/2, \beta = 1, \gamma = 1$ である．このとき超幾何関数 ${}_2F_1$ の積分表示は積分可能であり，${}_2F_1$ は初等関数

$${}_2F_1\left(\frac{1}{2}, 1, 1; x\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \tag{3.7}$$

で書ける．よって，(3.5) は

$$I_n = \frac{1}{\sqrt{a_n - b_n}} \tag{3.8}$$

となる．(3.8) を用いて，(1.2) の b_n を消去すると，SK-5 は

$$a_{n+1} = \frac{(a_n + c)^2}{4a_n}, \quad c = a_0 - b_0 \tag{3.9}$$

と書ける．さらに，(3.9) において $a_n = (\tilde{a}_n)^2$ とおくと，

$$\tilde{a}_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\tilde{a}_n + \frac{c}{a_n}\right) \tag{3.10}$$

を得る．これは (2.5) の AHM に他ならない．SK-5 と AHM とは変換 $a_n = (\tilde{a}_n)^2$ により写りあう．

初期値が $a_0 > b_0 > 0$ のときは，SK-5 は特殊解

$$a_n = (a_0 - b_0)\coth^2(2^n\sigma), \quad b_n = (a_0 - b_0)(\coth^2(2^n\sigma) - 1), \quad \sigma = \tanh^{-1}\sqrt{1 - \frac{b_0}{a_0}} \tag{3.11}$$

をもつ．a_n は $a_0 - b_0$ へ, b_n は 0 へ 2 次収束する．

初期値が $b_0 > a_0 > 0$ のときは，SK-5 は特殊解

$$a_n = -(a_0 - b_0)\cot^2(2^n\sigma), \quad b_n = -(a_0 - b_0)(\cot^2(2^n\sigma) + 1), \quad \sigma = \tan^{-1}\sqrt{\frac{b_0}{a_0} - 1} \tag{3.12}$$

をもつ．a_n, b_n は可解カオスである．

任意の初期値に対しては，一般解として

$$a_n = (T_{2^n-1}(a_0 - b_0; \sqrt{a_0}))^2, \quad b_n = a_n - a_0 + b_0 \tag{3.13}$$

が求まる．一般解 (3.13) は

$$a_n = (\phi^{-1} \circ x^{2^n} \circ \phi)(a_0), \quad \phi(x) = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{c}}{\sqrt{x} - \sqrt{c}} \tag{3.14}$$

と書き換えられる．よって，写像 $a_n \mapsto a_{n+1}$ は x^2 と共役である．

4 SK-6 の解

SK-6 は，関数等式

$$ {}_2F_1\left(\frac{1}{2},1,1;x\right)=\frac{2-x}{2(1-x)}{}_2F_1\left(\frac{1}{2},1,1;\frac{x^2}{4(x-1)}\right) \tag{4.1}$$

において，保存量を

$$ I_n=\frac{1}{\sqrt{a_n}}{}_2F_1\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \tag{4.2}$$

とおいて導出される．ちなみに，(4.1) において，

$$ I_n=\frac{1}{a_n}{}_2F_1\left(1-\frac{b_n}{a_n}\right) \tag{4.3}$$

とすると，(2.1) の AHM において，a_n, b_n を入れ替えた方程式が導出される．

SK-6 の保存量 (4.2) は SK-5 の保存量 (3.5) と等しいので，SK-6 の保存量 (4.2) も SK-5 の保存量 (3.8) と同じ

$$ I_n=\frac{1}{\sqrt{a_n-b_n}} \tag{4.4}$$

となる．(4.4) を用いて (1.3) の b_n を消去し，さらに $a_n=(\tilde{a}_n)^2$ とおくと，

$$ \tilde{a}_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\tilde{a}_n+\frac{c^{-1}}{a_n}\right),\quad c=a_0-b_0 \tag{4.5}$$

を得る．これは (2.5) の AHM と等しい．

初期値が $a_0>0, b_0<0$ のときは，SK-6 は特殊解

$$ a_n=(a_0-b_0)\tanh^2(2^n\sigma),\quad b_n=(a_0-b_0)(\tanh^2(2^n\sigma)-1),\quad \sigma=\tanh^{-1}\sqrt{\frac{a_0}{a_0-b_0}} \tag{4.6}$$

をもつ．a_n は a_0-b_0 へ，b_n は 0 へ 2 次収束する．

初期値が $b_0>a_0>0$ のときは，SK-6 は特殊解

$$ a_n=-(a_0-b_0)\tan^2(2^n\sigma),\quad b_n=-(a_0-b_0)(\tanh^2(2^n\sigma)+1),\quad \sigma=\tan^{-1}\sqrt{\frac{a_0}{b_0-a_0}} \tag{4.7}$$

をもつ．a_n, b_n は可解カオスである．

任意の初期値に対しては，一般解として

$$ a_n=\left(T_{2^n-1}\left(\frac{1}{a_0-b_0};\frac{1}{\sqrt{a_0}}\right)\right)^{-2},\quad b_n=a_n-a_0+b_0 \tag{4.8}$$

が求まる．一般解 (4.8) は

$$ a_n=(\phi^{-1}\circ x^{2^n}\circ\phi)(a_0),\quad \phi(x)=\frac{1/\sqrt{x}+1/\sqrt{c}}{1/\sqrt{x}-1/\sqrt{c}} \tag{4.9}$$

と書き換えられる．よって，写像 $a_n\mapsto a_{n+1}$ は x^2 と共役である．

5　SK-3 の解

SK-3 は，関数等式

$$
{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{3}{4};x\right)=\frac{1-x}{(1+x)^2}{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4},\frac{3}{4};\frac{4x}{(1+x)^2}\right) \tag{5.1}
$$

において，保存量を

$$
I_n=\frac{1}{a_n}{}_2F_1\left(\frac{b_n}{a_n}\right) \tag{5.2}
$$

とすることで導出される．(5.2) の ${}_2F_1$ のパラメータは $\alpha=1/2,\beta=\gamma=3/4$ である．よって AHM, SK-5, SK-6 のときのパラメータとは異なる．しかしながら，パラメータ $\alpha=1/2,\beta=\gamma=3/4$ における ${}_2F_1$ のべき級数表示より，${}_2F_1$ は初等関数で書けて．(3.7) と同じとなる．よって，保存量 (5.2) は

$$
I_n=\frac{1}{\sqrt{a_n-b_n}} \tag{5.3}
$$

となる．(5.3) を用いて，(1.1) の b_n を消去すると，

$$
a_{n+1}=c^{-1}(2a_n-c)^2,\quad c=a_0-b_0 \tag{5.4}
$$

となる．さらに $a_n=c(1-\tilde{a}_n)$ とおくと，

$$
\tilde{a}_{n+1}=4\tilde{a}_n(1-\tilde{a}_n) \tag{5.5}
$$

を得る．これはロジスティック方程式であり，可解カオス系の代表例である．

初期値が $a_0>b_0>0$ のとき，SK-3 は特殊解

$$
a_n=(a_0-b_0)\cosh^2(2^n\sigma),\quad b_n=(a_0-b_0)\sinh^2(2^n\sigma),\quad \sigma=\tanh^{-1}\sqrt{\frac{b_0}{a_0}} \tag{5.6}
$$

をもつ．a_n,b_n は単調増加し，$+\infty$ に発散する．

初期値が $a_0>0,b_0<0$ のとき，SK-3 は特殊解

$$
a_n=(a_0-b_0)\cos^2(2^n\sigma),\quad b_n=-(a_0-b_0)\sin^2(2^n\sigma),\quad \sigma=\tan^{-1}\sqrt{\frac{-b_0}{a_0}} \tag{5.7}
$$

をもつ．a_n,b_n は可解カオスである．

SK-3 の方程式 (1.1) において，第 1 式の両辺を第 2 式の両辺でそれぞれ割ると

$$
\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\frac{(a_n+b_n)^2}{4a_nb_n} \tag{5.8}
$$

となる．$\tilde{a}_n=\sqrt{a_n/b_n}$ とおくと，

$$
\tilde{a}_{n+1}=\frac{1}{2}\left(\tilde{a}_n+\frac{1}{\tilde{a}_n}\right) \tag{5.9}
$$

を得る．これは AHM の $c=1$ の場合である．よって，SK-3 は任意の初期値に対して一般解

$$a_n = \frac{(a_0-b_0)T_{2^n-1}\left(1;\sqrt{\dfrac{a_0}{b_0}}\right)^2}{T_{2^n-1}\left(1;\sqrt{\dfrac{a_0}{b_0}}\right)^2-1}, \quad b_n = a_n - a_0 + b_0 \tag{5.10}$$

をもつ．(5.10) の a_n を書き下すと

$$a_n = \frac{a_0-b_0}{4}\left(\left(\frac{\sqrt{a_0}+\sqrt{b_0}}{\sqrt{a_0-b_0}}\right)^{2^n}+\left(\frac{\sqrt{a_0}-\sqrt{b_0}}{\sqrt{a_0-b_0}}\right)^{2^n}\right)^2 \tag{5.11}$$

と書ける．(5.11) をさらに書き換えると，

$$a_{n+1} = (\phi^{-1}\circ x^2\circ\phi)(a_n), \quad \phi(x) = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{x-c}}{\sqrt{x}-\sqrt{x-c}} \tag{5.12}$$

となる．写像 $a_n \mapsto a_{n+1}$ は x^2 と共役である．

参考文献

[1] 榊 武史，筧 三郎: “超幾何関数で表される不変量を持つ差分方程式”, 日本応用数理学会論文誌 **17** (2007), 455–462.

[2] 中村 佳正 編: 可積分系の応用数理，裳華房，2000, p. 201.

[3] K. Kondo, Y. Nakamura: “Determinantal solutions of solvable chaotic systems”, J. Comp. Appl. Math. **145** (2002), 361–372.