2成分KP階層に由来する高階パンルヴェ方程式

鈴木, 貴雄
神戸大学大学院理学研究科

https://doi.org/10.15017/18709

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 21ME-S7 (19), 2010-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.21ME-S7
「非線形波動研究の現状と将来 — 次の 10 年への展望」（研究代表者　矢嶋　徹）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.21ME-S7

Current and Future Research on Nonlinear Waves — Perspectives for the Next Decade

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 19 - 21, 2009

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 19 (pp. 128-133)

2 成分KP 階層に由来する高階パンルヴェ方程式

鈴木 貴雄 (SUZUKI Takao)

（Received January 26, 2010）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2010

2成分KP階層に由来する高階パンルヴェ方程式

神戸大学理学研究科　鈴木 貴雄　(Takao SUZUKI)

概 要

本研究では, 2 成分 KP 階層から相似簡約と呼ばれる簡約操作によって, 新しい高階パンルヴェ型常微分方程式を導く. この方程式は, $2n$ 階ハミルトン系として記述され, $A^{(1)}_{2n+1}$ 型アフィン・ワイル群対称性を持つ.

1 序文

パンルヴェ方程式は, 超幾何函数・楕円函数に続く「新しい特殊函数」を定義する非線形常微分方程式として導入された. 20 世紀初め, フランスの数学者 P.Painlevé とその弟子の B.O.Gambier は上記の純粋数学的な動機のもと, 2 階の有理的な常微分方程式で「動く特異点は極のみ」であるものの分類を行った. その結果として, 最終的に 6 つのパンルヴェ方程式が得られた.

ところで, パンルヴェ方程式（及びその解であるパンルヴェ超越函数）を高階化しようとする試みは, 方程式の発見当初から存在した. しかし, 20 世紀初めの時点では高階の方程式を発見するための有効な手段がなく, 結局その試みが成功するのは 20 世紀終りのことであった. その端緒となったのは, KdV 方程式とパンルヴェ方程式との関係を明らかにした Ablowitz-Segur の結果 [1] であり, これを応用して様々な高階パンルヴェ方程式がソリトン方程式から導かれた [4, 5].

本研究は, 先達の結果を更に発展させて多成分変形 KP 階層を系統的に調べることで, 高階パンルヴェ方程式のあるリストを提出することを目的としている. そして現在までに得られた中で最も重要な結果が, 次の新しい $2n$ 階ハミルトン系の提出である[1]:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{1.1}$$

ここで, ハミルトニアンは次で与えられる.

$$t(t-1)H = \sum_{i=1}^{n} H_{\mathrm{VI}}(q_i, p_i; a_i, b_i, c_i, d_i) + \sum_{1\leq i<j\leq n} (q_i - 1)(q_j - t)\left\{(q_i p_i + \alpha_{2i-1})p_j + p_i(p_j q_j + \alpha_{2j-1})\right\}, \tag{1.2}$$

ただし

$$a_i = \sum_{j=i}^{n} \alpha_{2j}, \quad b_i = \sum_{j=0}^{i-1} \alpha_{2j}, \quad c_i = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{2j+1} - \alpha_{2i-1} - \eta, \quad d_i = \alpha_{2i-1}\eta,$$

であり, 定数パラメータの間には, 関係式 $\sum_{i=0}^{2n+1} \alpha_i = 1$ が存在する. また, $H_{\mathrm{VI}}(q, p; a, b, c, d)$ はパンルヴェ VI 方程式のハミルトニアンで, 具体的には次の形で与えられる[2].

$$H_{\mathrm{VI}}(q, p; a, b, c, d) = q(q-1)(q-t)p^2 - \{(a-1)q(q-1) + bq(q-t) + c(q-1)(q-t)\}p + dq.$$

2 2成分変形KP階層

本節では, まず論文 [2] の手法に従って 2 成分変形 KP 階層を $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 行列の枠組みで定式化し, 次にその 2 種類の簡約操作 — 周期簡約および相似簡約 — について述べる.

[1] これは笹野祐輔氏による D 型パンルヴェ方程式 [8] とは異なるものと思われる. 少なくとも $n = 2$ の場合には対応するフックス型方程式が異なる [7].

[2] 従って, 今回得られた方程式系はある意味で P_{VI} 階層と呼べるものになっている.

無限個の独立変数 $t_{i,1}, t_{i,2}$ $(i \in \mathbb{N})$ に依存する $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 行列型の未知函数 W を, 次のように定める:

$$W = I + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i \in \mathbb{Z}} w_{i-1,j} E_{i,i} \bar{\Lambda}^j, \quad \bar{\Lambda} = \sum_{i \in \mathbb{Z}} E_{i,i-1},$$

ただし $E_{i,j}$ は行列単位とする. また, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 行列 Λ_1, Λ_2 を

$$\Lambda_k = \sum_{i \in \mathbb{Z}} E_{k+2i,k+2i+2} \quad (k = 1, 2),$$

と定める. これらの行列を用いて, **佐藤方程式**と呼ばれる次の偏微分方程式系を定式化する:

$$\partial_{i,k}(W) = B_{i,k} W - W \Lambda_k^i \quad (i \in \mathbb{N}; k = 1, 2), \tag{2.1}$$

ただし $\partial_{i,k} = \partial / \partial t_{i,k}$ とし, 従属変数の行列 $B_{i,k}$ は $W \Lambda_k^i W^{-1}$ の上三角部分[3]とする. 佐藤方程式 (2.1) の微分両立条件が変形 2 成分 KP 階層

$$[\partial_{i,k} - B_{i,k}, \partial_{j,l} - B_{j,l}] = 0 \quad (i, j \in \mathbb{N}; k, l = 1, 2), \tag{2.2}$$

を与える. ブラケット積は行列の交換子積で $[X, Y] = XY - YX$ と定義する.

行列 W に対して次の $(n+1, n+1)$ 周期条件を課す.

$$w_{i+2n+2,j} = w_{i,j} \quad (i, j \in \mathbb{Z}).$$

この時, 佐藤方程式 (2.1) は $(2n+2)$ 次正方行列による偏微分方程式系

$$\partial_{i,k}(W) = B_{i,k} W - W \Lambda_k^i \quad (i \in \mathbb{N}; k = 1, 2), \tag{2.3}$$

に書き直せる. ここで, W は変数 z を用いて次のように表される:

$$W = I + \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{2n+2} w_{i-1,j} E_{i,i} \bar{\Lambda}^j, \quad \bar{\Lambda} = z^{-1} E_{1,2n+2} + \sum_{i=2}^{2n+2} E_{i,i-1},$$

ただし $E_{i,j}$ は $(2n+2)$ 次行列単位とする. また, Λ_1, Λ_2 は

$$\Lambda_1 = \sum_{i=1}^{n} E_{2i-1,2i+1} + z E_{2n+1,1}, \quad \Lambda_2 = \sum_{i=1}^{n} E_{2i,2i+2} + z E_{2n+2,2},$$

と表される. このような周期条件の下で, 未知函数 W は独立変数 $t_{(2n+2)i,k}$ $(i \in \mathbb{N}; k = 1, 2)$ に依存しないことを注意しておく. 周期簡約を課された佐藤方程式 (2.3) の微分両立条件は

$$[\partial_{i,k} - B_{i,k}, \partial_{j,l} - B_{j,l}] = 0 \quad (i, j \in \mathbb{N}; k, l = 1, 2), \tag{2.4}$$

となる[4].

スペクトル変数 z についての微分作用素を

$$\vartheta(X) = nz \frac{d}{dz} X + \left[\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2}(n - 2i + 2)(E_{2i-1,2i-1} + E_{2i,2i}), X \right],$$

と定めて, これを用いて佐藤方程式 (2.3) に更に次の簡約条件を課す:

$$\vartheta(W) = \sum_{k=1}^{2} \sum_{i=1}^{\infty} i t_{i,k} \partial_{i,k}(W) + [\rho H_1, W], \quad H_1 = \sum_{i=1}^{2n+2} (-1)^{i-1} E_{i,i}, \tag{2.5}$$

[3] ここでは対角成分も含む.

[4] これは, $A_{2n+1}^{(1)}$ 型ドリンフェルト・ソコロフ階層 [3] のうち, 分割 $(n+1, n+1)$ に付随するものと等価である.

ただし ρ は独立変数 $t_{i,k}$ には依存しないパラメータとする．2 つの方程式系 (2.3), (2.5) の微分両立条件はザハロフ・シャバト方程式系

$$[\vartheta - M, \partial_{i,k} - B_{i,k}] = 0 \quad (i \in \mathbb{N}; k = 1, 2), \quad M = \sum_{k=1}^{2} \sum_{i=1}^{\infty} i t_{i,k} B_{i,k} + \rho H_1, \tag{2.6}$$

で表される．本稿では以降, 2 つの方程式系 (2.4), (2.6) の組を**相似簡約**と呼ぶこととする[5].

3　高階パンルヴェ方程式の導出

本節では, 相似簡約から高階パンルヴェ方程式 (1.1), (1.2) を導く．今回求めたい方程式は常微分方程式なので, まずは時間変数を $t_{1,2} = 1$, $t_{i,1} = t_{i,2} = 0$ $(i \geq 2)$ と特殊化する．この時, 相似簡約は方程式系

$$\partial_{1,1}(M) = \vartheta(B_{1,1}) + [B_{1,1}, M], \quad M = t_{1,1} B_{1,1} + B_{1,2} + \rho H_1, \tag{3.1}$$

と等価である．ここで, 行列 $B_{1,1}, M$ は

$$\begin{aligned} B_{1,1} &= \sum_{i=1}^{2n+2} u_{i,1} E_{i,i} + x_{0,1} z E_{2n+2,1} + \sum_{i=1}^{2n+1} x_{i,1} E_{i,i+1} + \Lambda_1, \\ M &= \sum_{i=1}^{2n+2} (\kappa_i - \kappa_{i-1}) E_{i,i} + \varphi_0 z E_{2n+2,1} + \sum_{i=1}^{2n+1} \varphi_i E_{i,i+1} + t_{1,1}\Lambda_1 + \Lambda_2, \end{aligned}$$

と表される．なお, $\kappa_1, \ldots, \kappa_{2n+2}$ は時間変数 $t_{1,1}$ に依存しない定数パラメータとなることを注意しておく[6].
以降, 式の簡略化のために次の記号を用いる:

$$u_{i+2n+2,1} = u_{i,1}, \quad x_{i+2n+2,1} = x_{i,1}, \quad \varphi_{i+2n+2} = \varphi_i, \quad \kappa_{i+2n+2} = \kappa_i.$$

これらの従属変数を用いて, 方程式系 (3.1) は具体的に次のように書き下される:

$$\begin{aligned} \partial_{1,1}(\varphi_{2i-2}) &= -(u_{2i-3,1} - 2u_{2i-2,1} + u_{2i-1,1})\varphi_{2i-2} + x_{2i-2,1}(\kappa_{2i-2} - 2\kappa_{2i-2} + \kappa_{2i-1} + 1), \\ \partial_{1,1}(\varphi_{2i-1}) &= -(u_{2i-2,1} - 2u_{2i-1,1} + u_{2i,1})\varphi_{2i-1} + x_{2i-1,1}(\kappa_{2i-2} - 2\kappa_{2i-1} + \kappa_{2i}), \end{aligned} \tag{3.2}$$

ただし $i = 1, \ldots, n+1$;

$$\begin{aligned} & t_{1,1} x_{2i-2,1} - x_{2i,1} - \varphi_{2i-2} = 0, \quad x_{2i-1,1} - t_{1,1} x_{2i+1,1} + \varphi_{2i+1} = 0, \\ & u_{2i-,1} - u_{2i,1} - u_{2i+1,1} + u_{2i+2,1} - x_{2i,1}\varphi_{2i+1} + x_{2i+1,1}\varphi_{2i} = 0, \\ & t_{1,1}(u_{2i-2,1} - u_{2i-1,1} - u_{2i,1} + u_{2i+1,1}) - x_{2i-1,1}\varphi_{2i} + x_{2i,1}\varphi_{2i-1} + \kappa_{2i-1} - \kappa_{2i+1} = 0, \end{aligned} \tag{3.3}$$

ただし $i = 1, \ldots, n+1$.

上記の方程式系をハミルトン系として表すための鍵となるのが, $B_{1,1}, M$ と佐藤方程式の変数行列 W との関係である[7]．すなわち B_1 は $W\Lambda_1 W^{-1}$ の, M は $W(\rho H_1 + t_1\Lambda_1 + \Lambda_2)W^{-1}$ のそれぞれ上三角部分[8]となるので, その事実を利用する．具体的には, それぞれの変数の間に次の関係式が存在する:

$$\begin{aligned} & u_{2i} - u_{2i-1} = -\frac{1}{2} w_{2i-1} w_{2i} + w_{2i-1,1}, \quad u_{2i+1} - u_{2i} = \frac{1}{2} w_{2i+1} w_{2i+2} + w_{2i+1,1}, \\ & x_{2i} = -w_{2i-1}, \quad x_{2i+1} = w_{2i+2}, \end{aligned}$$

[5] 本稿では周期簡約条件を課した後に相似簡約条件を課したが, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 行列のまま相似簡約条件を課すことも可能である．
[6] 方程式 (3.1) から自然に従う．
[7] なぜこれで上手くいくかの理論的な背景はまだ不明である．
[8] ここでの上三角の意味は, z の正ベキの項および定数項の上三角部分である

ただし $i=0,\dots,n$;

$$\kappa_{2i}-\kappa_{2i-1}=-\frac{t_1}{2}w_{2i-1}w_{2i}+t_1w_{2i-1,1}+\frac{1}{2}w_{2i}w_{2i+1}+w_{2i,1},$$
$$\kappa_{2i+1}-\kappa_{2i}=-\frac{1}{2}w_{2i}w_{2i+1}+w_{2i,1}+\frac{t_1}{2}w_{2i+1}w_{2i+2}+t_1w_{2i+1,1}+\rho_1,$$
$$\varphi_{2i}=-t_1w_{2i-1}+w_{2i+1},\quad \varphi_{2i+1}=-w_{2i}+t_1w_{2i+2},$$

ただし $i=0,\dots,n$. これらの関係式を詳しく調べることで, 次の補題が得られる.

補題 3.1. 行列 B_1 および M の各成分は, 従属変数 w_{2i+1},φ_{2i+1} $(i=0,\dots,n)$ によって次のように表される:

$$u_{2i}-u_{2i+1}=-\sum_{j=0}^{n}\frac{t_1^{j-1}}{t_1^{n+1}-1}w_{2i+1}\varphi_{2i+2j+1}+\frac{1}{t_1}(\rho+\kappa_{2i}-\kappa_{2i+1}),$$
$$u_{2i+1}-u_{2i+2}=\sum_{j=0}^{n}\frac{t_1^{j}}{t_1^{n+1}-1}w_{2i+1}\varphi_{2i+2j+3},\quad x_{2i}=-w_{2i-1},\quad x_{2i+1}=\sum_{j=0}^{n}\frac{t_1^{j}}{t_1^{n+1}-1}\varphi_{2i+2j+3},$$
$$\varphi_{2i}=-t_1w_{2i-1}+w_{2i+1},$$

ただし $i=1,\dots,n+1$.

補題 3.1 のおかげで, 方程式系 (3.2), (3.3) は $2n+2$ 個の従属変数 w_{2i+1},φ_{2i+1} $(i=0,\dots,n)$ を持つ常微分方程式系として表される[9]. なお, w_{2i+1} と φ_{2j} との間の関係式は逆にも解けることを注意しておく. すなわち

$$w_{2i+1}=-\sum_{j=0}^{n}\frac{t_1^{j}}{t_1^{n+1}-1}\varphi_{2i-2j}\quad(i=0,\dots,n).$$

ハミルトン系表示を与えるために, 行列 M についてのポワソン構造[10]を論文 [6] に従って

$$\{\varphi_{2i},\varphi_{2i+1}\}=-(n+1),\quad \{\varphi_{2i+1},\varphi_{2i+2}\}=-(n+1)t_1\quad(i=0,\dots,n),$$

と導入する. これにより次の結果が得られる.

定理 3.2. $2n+2$ 個の従属変数 w_{2i+1},φ_{2i+1} $(i=0,\dots,n)$ によるポワソン構造

$$\{\varphi_{2i+1},w_{2j+1}\}=(n+1)\delta_{i,j}\quad(i,j=0,\dots,n),$$

の下で, 相似簡約 (3.1) は次の $2n+2$ 階ハミルトン系として表される:

$$\partial_1(w_{2i+1})=\{H,w_{2i+1}\},\quad \partial_1(\varphi_{2i+1})=\{H,\varphi_{2i+1}\}\quad(i=0,\dots,n),\tag{3.4}$$

ただし, ハミルトニアンは次で与えられる:

$$\begin{aligned}(n+1)H=&-\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2t_1}(w_{2i+1}\varphi_{2i+1}-\rho_1-\kappa_{2i}+\kappa_{2i+1})w_{2i+1}\varphi_{2i+1}+\sum_{i=0}^{n}\frac{t_1^{n}}{t_1^{n+1}-1}(\kappa|\alpha_{2i+1}^{\vee})w_{2i+1}\varphi_{2i+1}\\&-\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{t_1^{j-1}}{t_1^{n+1}-1}w_{2i+1}\{w_{2i+1}\varphi_{2i+1}-(\kappa|\alpha_{2i+1}^{\vee})\}\varphi_{2i+2j+1}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

これらの従属変数は, 更に関係式

$$\sum_{i=0}^{n}w_{2i+1}\varphi_{2i+1}=-\sum_{i=0}^{n}(\rho_1+\kappa_{2i}-\kappa_{2i+1}),\tag{3.6}$$

を満たす.

[9]実はこれらの変数は, 行列 W および M の z^0 の項の係数である.
[10]Kostant-Kirillov 構造と呼ばれるものと等価である

ハミルトン系 (3.4), (3.5) は正準座標によるハミルトン系に書き換えられる. 関係式 (3.6) から

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n} d\varphi_{2i+1}\wedge dw_{2i+1} &= \sum_{i=0}^{n-1} d\varphi_{2i+1}\wedge dw_{2i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} d\frac{w_{2i+1}\varphi_{2i+1}}{w_{2n+1}}\wedge dw_{2n+1}\\ &= \sum_{i=0}^{n-1} d(w_{2n+1}\varphi_{2i+1})\wedge d\frac{w_{2i+1}}{w_{2n+1}},\end{aligned}$$

とシンプレクティック構造が得られるので

$$q_i = \frac{w_{2i-1}}{t_1^i w_{2n+1}},\quad p_i = \frac{t_1^i w_{2n+1}\varphi_{2i-1}}{n+1}\quad (i=1,\dots,n), \tag{3.7}$$

と正準座標を取ることが出来る. この時, ポワソン構造

$$\{p_i, q_j\} = \delta_{i,j}\quad (i,j=1,\dots,n),$$

で与えられる. ここでパラメータを

$$\alpha_i = \frac{(\kappa|\alpha_i^\vee)}{n+1}\quad (i=0,\dots,2n+1),\quad \eta = \sum_{j=0}^{n}\frac{\rho_1+\kappa_{2j}-\kappa_{2j+1}}{n+1},$$

と取り直し, 独立変数の変換 $t = t_{1,1}^{-(n+1)}$ を施すことで, 最終的に次の結果が得られる.

系 3.3. (3.7) で定義された正準変数 q_i, p_i $(i=1,\dots,n)$ は, 高階パンルヴェ方程式 (1.1), (1.2) を満たす. この時, 従属変数 w_{2n+1} は微分方程式

$$\begin{aligned}t(t-1)\frac{d}{dt}\log w_{2n+1} &= -\sum_{i=1}^{n}\{(q_i-1)(q_i-t)p_i+\alpha_{2i-1}q_i\}\\ &\quad -\alpha_{2n+1}+\frac{nt+n+2}{n+1}\eta+\sum_{i=0}^{n}\frac{n-2i}{2n+2}(\alpha_{2i-1}+\alpha_{2i})(t-1),\end{aligned}$$

を満たす.

4　アフィン・ワイル群対称性

本節では, 高階パンルヴェ方程式 (1.1), (1.2) のアフィン・ワイル群対称性[11]について述べる.

佐藤方程式 (2.3) および相似簡約条件 (2.5) の下で, 次のゲージ変換を考える:

$$r_0(W) = (I+\gamma_0 z^{-1}E_{1,2n+2})W,\quad r_i(W) = (I+\gamma_i E_{2i+1,2i})W\quad (i=1,\dots,2n+1),$$

ただし

$$\gamma_{2i} = -\frac{1+\kappa_{2i-1}-2\kappa_{2i}+\kappa_{2i+1}}{\varphi_{2i}},\quad \gamma_{2i+1} = -\frac{\kappa_{2i}-2\kappa_{2i+1}+\kappa_{2i+2}}{\varphi_{2i+1}}\quad (i=0,\dots,n).$$

このゲージ変換から, 高階パンルヴェ方程式の対称群が導かれる.

定理 4.1. ハミルトン系 (3.4), (3.5), (3.6) は, 以下で与えられる双有理変換 $r_0,\dots,r_{2n+1}$ の下で不変である:

$$\begin{aligned}r_{2i}(w_{2j+1}) &= w_{2j+1},\\ r_{2i}(\varphi_{2j+1}) &= \varphi_{2j+1}+\frac{(\kappa|\alpha_{2i}^\vee)\{t_1w_{2i-1}-w_{2i+1},\varphi_{2j+1}\}}{(n+1)(t_1w_{2i-1}-w_{2i+1})},\\ r_{2i+1}(w_{2j+1}) &= w_{2j+1}+\frac{(\kappa|\alpha_{2i+1}^\vee)\{\varphi_{2i+1},w_{2j+1}\}}{(n+1)\varphi_{2i+1}},\\ r_{2i+1}(\varphi_{2j+1}) &= \varphi_{2j+1},\end{aligned} \tag{4.1}$$

[11]項数の都合上, アフィン・ワイル群の定義については省略する.

ただし $i, j = 0, \ldots, n$;

$$r_i(\kappa_j) = \kappa_j + (\kappa|\alpha_i^\vee) \quad (i, j = 0, \ldots, 2n+1). \tag{4.2}$$

更に, 双有理変換群 $\langle r_0, \ldots, r_{2n+1} \rangle$ は $A_{2n+1}^{(1)}$ 型アフィン・ワイル群と同型である.

系 4.2. 高階パンルヴェ方程式 (1.1), (1.2) は, 以下で与えられる双有理正準変換 $r_0, \ldots, r_{2n+1}$ の下で不変である:

$$\begin{aligned}
&r_0(q_j) = q_j, \quad r_0(p_j) = p_j - \frac{\alpha_0}{q_1 - 1}\{p_j, q_1\}, \\
&r_{2i-1}(q_j) = q_j + \frac{\alpha_{2i-1}}{p_i}\{p_i, q_j\}, \quad r_{2i-1}(p_j) = p_j \quad (i = 1, \ldots, n), \\
&r_{2i}(q_j) = q_j, \quad r_{2i}(p_j) = p_j - \frac{\alpha_{2i}}{q_i - q_{i+1}}\{p_j, q_i - q_{i+1}\} \quad (i = 1, \ldots, n-1), \\
&r_{2n}(q_j) = q_j, \quad r_{2n}(p_j) = p_j - \frac{\alpha_{2n}}{q_n - t}\{p_j, q_n\}, \\
&r_{2n+1}(q_j) = q_j + \frac{\alpha_{2n+1} q_j}{\sum_{j=1}^n q_j p_j + \eta}, \quad r_{2n+1}(p_j) = p_j - \frac{\alpha_{2n+1} p_j}{\sum_{j=1}^n q_j p_j + \eta},
\end{aligned}$$

ただし $j = 1, \ldots, n$;

$$r_i(\alpha_j) = \alpha_j - a_{i,j}\alpha_i \quad (i, j = 0, \ldots, 2n+1).$$

参考文献

[1] M. J. Ablowitz and H. Segur; Exact linearization of a Painlevé transcendent, Phys. Rev. Lett. **38** (1977) 1103-1106.

[2] M. J. Bergvelt and A. P. E. ten Kroode, Partitions, vertex operator constructions and multi-component KP equations, Pacific J. Math., **171** (1995) 23-88.

[3] V. G. Drinfel'd and V. V. Sokolov, Lie algebras and equations of Korteweg-de Vries type, J. Sov. Math. **30** (1985) 1975-2036.

[4] P. R. Gordoa, N. Joshi and A. Pickering, On a generalized 2 + 1 dispersive water wave hierarchy, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **37** (2001) 327?347.

[5] M. Noumi and Y. Yamada, Higher order Painlevé equations of type $A_l^{(1)}$, Funkcial. Ekvac. **41** (1998), 483-503.

[6] M. Noumi and Y. Yamada, Birational Weyl group action arising from a nilpotent Poisson algebra, in Physics and Combinatorics 1999, Proceedings of the Nagoya 1999 International Workshop, ed. A.N.Kirillov, A.Tsuchiya and H.Umemura, (World Scientific, 2001) 287-319.

[7] H. Sakai; *private communication.*

[8] Y. Sasano; Higher order Painlevé equations of type $D_l^{(1)}$, RIMS Koukyuroku **1473** (2006) 143-163.