

1D ASEP&KPZ

笹本, 智弘
千葉大学大学院理学研究科数学・情報数理学科

<https://doi.org/10.15017/18708>

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 21ME-S7 (18), 2010-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

バージョン：

権利関係：



応用力学研究所研究集会報告 No.21ME-S7

「非線形波動研究の現状と将来 — 次の 10 年への展望」 (研究代表者 矢嶋 徹)

共催 九州大学グローバル COE プログラム

「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.21ME-S7

*Current and Future Research on Nonlinear Waves —
Perspectives for the Next Decade*

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 19 - 21, 2009

Co-organized by

Kyushu University Global COE Program

Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 18 (pp. 118-127)

1D ASEP & KPZ

笹本 智弘 (SASAMOTO Tomohiro)

(Received January 30, 2010)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2010

1D ASEP & KPZ

千葉大学理学研究科 数学・情報数理 笹本智弘 (SASAMOTO Tomohiro)

概 要

1 次元非対称単純排他過程 (ASEP) と KPZ 方程式・普遍性クラスに関する基本事項について概説し、最近の関連研究についても言及する。また格子上の KPZ 方程式についても説明する。

1 はじめに

1 次元格子上を多数の粒子が体積排除の相互作用の下で非対称なランダムウォークをするモデルを非対称単純排他過程という。英語では asymmetric simple exclusion process, 略して ASEP という。非線型性と揺らぎを持つひとつのミニマルモデルであり、理論面からも渋滞学等への応用面からも活発に研究されている。マクロに見た場合の粒子密度 $u(x, t)$ は Burgers 方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \frac{\lambda_0}{2} \frac{\partial}{\partial x} u^2 + v_0 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u$$

に従うことが知られており、非線型波動方程式とも関係が深い。また非平衡統計力学のモデルとして相転移現象や揺らぎの性質に興味を持たれている。

ASEP の著しい特徴は厳密解を得ることが出来ることであり、すでに種々の解析手法が開発され、定常状態やダイナミクスについて多くの結果が得られている。これは方法論的には ASEP が可積分系の一種であることによる。ASEP はマスター方程式

$$\frac{d}{dt} |P\rangle = -H |P\rangle$$

で定式化することが出来る。ただしここで $|P\rangle$ は系がある粒子配位を持つ確率を並べたベクトル、 H は粒子配位の間の遷移率行列である。ASEP の場合は H が 1 次元量子スピン鎖 (XXZ 模型) のハミルトニアン

$$H_{XXZ} = \sum_j \left[\sigma_j^x \sigma_{j+1}^x + \sigma_j^y \sigma_{j+1}^y + \Delta \sigma_j^z \sigma_{j+1}^z \right]$$

を相似変換したのになっていることが知られている。XXZ 模型については多くの事が知られており、Bethe 仮説、量子群などによる莫大な研究の蓄積がある [1, 2]。特に $\Delta = 0$ の場合は Jordan-Wigner 変換により自由フェルミオンの問題となる。

ASEP は各サイトでの粒子の有無を界面の一部と対応させることにより界面成長のモデルとみなすことも出来る。その揺らぎの大きさは時間 t に関して $O(t^{1/3})$ 程度であるが、この指数は他の多くの界面成長モデルでも見られる普遍的なものである。Kardar-Parisi-Zhang は、界面成長を記述する次のような非線型確率偏微分方程式を提案した [3]:

$$\partial_t h(x, t) = \frac{1}{2} \lambda_0 (\partial_x h(x, t))^2 + v_0 \partial_x^2 h(x, t) + \sqrt{D_0} \xi(x, t).$$

ただし $h(x, t)$ は時刻 t , 位置 x での界面高さを表す。また ξ はガウシアンホワイトノイズである: $\langle \xi(x, t) \xi(x', t') \rangle = \delta(x - x') \delta(t - t')$ 。KPZ はこの方程式に繰り込み群のアイデアを適用し、その揺らぎの大きさが $O(t^{1/3})$ であることを示した。これは現在 KPZ 普遍性クラスと呼ばれる [4, 5]。 $u = \partial_x h$ は次の noisy Burgers 方程式を満たすことを注意しておく:

$$\partial_t u = \frac{1}{2} \lambda_0 \partial_x u^2 + v_0 \partial_x^2 u + \sqrt{D_0} \partial_x \xi. \quad (1.1)$$

ASEP は KPZ 普遍性クラスに属しているのだから, ASEP において適当なスケーリング極限をとることにより KPZ 普遍性クラスについて調べることが出来ることになる. 多少細かい点であるが, KPZ 方程式自体が KPZ 普遍性クラスを記述している訳では無いことを注意しておこう. KPZ 方程式は ASEP 等の格子モデルと比較して, 成長のメカニズムの各要素が分かりやすく分離しているという利点はあるが, あくまで有限の時間・空間で起こっている現象を記述する方程式であり, KPZ 普遍性クラスは長時間・長距離のスケーリング極限を取って初めて現れる. しかし KPZ 方程式自体はノイズにデルタ関数が入っていることに由来する特異性があり, 定義そのものが自明でなく, 今のところほとんど解析も進んでいない(最近定常系での指数が示された [6]). それで KPZ 普遍性クラスは現在のところ実際には ASEP 特に粒子が一方向のみに移動する TASEP のスケーリング極限によって定義されていると考えられる. KPZ 普遍性クラスをこのように理解するとすれば, 例えば KPZ 方程式が本当に KPZ 普遍性クラスに入っているか否かという問題が意味を持つ.

2 ASEP の定常状態

ASEP の定常状態について述べる. まず無限系においては, 2 つの系列がある [7]. 1 つは $\rho \in [0, 1]$ として各サイト独立に粒子がいる確率が ρ であるような測度 (Bernoulli 測度) である. 測度そのものは簡単で同時刻相関は trivial であるが, 0 でないカレント

$$J = (p - q)\rho(1 - \rho)$$

が流れており, 時間相関は全く非自明なものである. 無限系の定常状態のもう一つの系列は, 各サイト独立でサイト x における粒子のいる確率が $1/(1 + (q/p)^x)$ で与えられるもの, およびそれを平行移動して得られるものである. こちらは平均粒子密度は衝撃波型で非自明であるが, カレントは 0 となっている.

次に有限系の場合であるが, 定常状態の様子は境界条件によって大きく違う. 確率過程に関する基本事実として, 遷移率行列で移り合える粒子配位の同値類毎に一意的な定常状態があることが知られている. ASEP のダイナミクスにおいては粒子数 N が保存するので, 境界で粒子数の変化が起こらない限りは各粒子数毎に一意的な定常状態があることになる. 周期境界条件の場合は N 個の粒子がどこにいるか分からない状況が定常である. また closed(境界で粒子の出入りが無い) の場合, $U_q(sl_2)$ 対称性から決められる [8].

より面白いのは開放的境界条件の場合であり, 系の左右の端で粒子の出入りがあるとする. 粒子の出入りの率は $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とする. この場合は行列積の方法という方法を用いることにより厳密解を得ることが出来る [9](レビュー論文 [10]). これは系の大きさを L としサイト $j, 1 \leq j \leq L$ に粒子がいる (又はいない) ことを $\eta_j = 1$ (又は $\eta_j = 0$) で表すとき, 定常状態において系の粒子配位が $\eta_1, \dots, \eta_L$ で与えられる確率は

$$P(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_L) = \frac{1}{Z_L} \langle W | \prod_{j=1}^L (\eta_j D + (1 - \eta_j) E) | V \rangle \quad (2.1)$$

という形に与えられるというものである. ただしここで D, E は正方行列, $\langle W |, |V \rangle$ はそれぞれ行ベクトル, 列ベクトルであり, 以下の関係式を満たすとする:

$$DE - qED = D + E$$

$$\langle W | (\alpha E - \gamma D) = \langle W |$$

$$(\beta D - \delta E) | V \rangle = | V \rangle$$

(2.1) は, 1 次元 Ising 模型に対する転送行列と同じ形をしているが, 重要な違いがある. 1 次元 Ising 模型の場合の転送行列は 2×2 行列であり, 空間的な相関は固有値の比の対数で与えられ, 温度が 0 で無い限り指数関数的となるが, 行列 D, E の次元は一般に無限次元となりべき的な振舞を示すことが出来る. さらに $L \rightarrow \infty$ の熱力学極限を考えると境界パラメータの大きさによって相転移が起こることが示される. これは非平衡系における長距離相関や境界条件の重要性を示す例といえる. これらの表示を用いることにより揺らぎの性質特に大偏差についても詳しく調べる事が出来る [11]. カレント, 粒子密度プロファイルその他色々調べられる.

行列積の方法と他の数学との関係も興味深いものである. 粒子が両方向にホップする場合は Askey-Wilson 多項式 [12, 13] と関係する [14, 15]. 大きさ L の有限系でのカレントは $J = \frac{Z_{L-1}}{Z_L}$ で与えられる. Z_L は (2.1) に表れた規格化定数であるが, 次のような表示をもつ:

$$Z_L = \int_C \frac{dz}{4\pi i} \frac{((1+z)(1+z^{-1})/(1-q))^L (z^2, z^{-2}; q)}{(az, a/z, bz, b/z, cz, c/z, dz, d/z; q)}.$$

ただし C は適当な経路, $(a; q) = \prod_{j=0}^{\infty} (1 - aq^j)$, $(a_1, \dots, a_k; q) = \prod_{j=1}^k (a_j; q)$, また a, b, c, d は ASEP のパラメータ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, q$ によって決められる量である. この関係についてはその後も進展があり, Askey-Wilson 代数との関係 [16] や組合せ論的な解釈が議論されている [17, 18]. これらを使うことにより開放 ASEP に関するさらに詳細な情報が得られるかもしれない.

3 KPZ 普遍性クラス

次にダイナミクスについて述べる. イントロで述べたように, ASEP は界面成長模型とみなすことも出来, その長時間・長距離の振舞いは KPZ 普遍性クラスによって記述されるのでそれについて述べよう. シミュレーションでスケーリングを見るには, 例えば, 周期系の大きさを L として各時刻 t での界面揺らぎの標準偏差

$$w(L, t) = \left(\overline{(h(x, t) - \bar{h}(x, t))^2} \right)^{1/2}$$

を計算する. ただしここで $\bar{f}(x) = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^L f(j)$. 十分時間が経つと定常的な状況になり, $w \sim L^\alpha$ となる. α は定常状態における界面の荒さを表す指数で roughness exponent と呼ばれる. KPZ では $\alpha = 1/2$ であり, 定常界面がランダムウォーク的である事に対応する. 一方それほど時間が経っていないときは $w \sim t^\beta$ となる. β は界面揺らぎが大きくなっていく程度を表しており growth exponent と呼ばれる. イントロでも述べたように $\beta = 1/3$ で与えられ, KPZ がガウシアン的でなく非自明な振舞をする事を表している. 指数 $1/3$ は最初シミュレーションで見出されたが, 解析的には KPZ の繰り込み群解析で得られた. その後 ASEP に対する Bethe 仮説方程式の有限スケーリング解析を行うことにより exact に示され [19], さらに次節で述べるランダム行列の方法を用いて rigorous にも示された [20]. 最近はより一般のモデルに対しても適用出来る議論を用いてもこの値が得られつつある [21].

ここで KPZ スケーリングについて注意を一言. 上の $\alpha = 1/2, \beta = 1/3$ に対応して, 無限系での界面高さは

$$h(x = ct^{2/3}\zeta, t) \sim at + dt^{1/3}\xi \quad (3.1)$$

とスケールする. ただし a は界面のマクロな成長速度. 右辺の $t^{1/3}$ が $\beta = 1/3$ に対応し, ξ はスケールされた界面高さである. 一方左辺の $t^{2/3}$ は界面揺らぎが $t^{1/3}$ であることを思い出すと $\alpha = 1/2$ に対応している. 問題は c, d をどう決めるかであるが, 定常状態が分かっているならばこれらを求めることが出来るのである. 界面の傾きが ρ の時の成長速度を $v(\rho)$ とし, $\lambda_0 = v'(\rho)$ とおく. また界面荒

さを表す量として定常 2 点相関を空間的に足しあわせた量 $\chi = \sum_j S(j, 0)$ を導入する. これらは定常状態が分かっているならば計算出来る量である. このとき (3.1) 中の c, d は $c = (2\lambda_0^2 \chi)^{1/3}, d = \frac{1}{2} \lambda_0 \chi^2$ と与えられる [22].

4 ランダム行列理論

ランダム行列とは行列要素がランダムであるような行列である [23, 24]. 特に性質のよいものとして, GUE (Gaussian Unitary Ensemble) と呼ばれるものがある. これはエルミート行列のアンサンブルであり,

$$H = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} + iv_{12} & \cdots & u_{1N} + iv_{1N} \\ u_{12} - iv_{12} & u_{22} & \cdots & u_{2N} + iv_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1N} - iv_{1N} & u_{2N} - iv_{2N} & \cdots & u_{NN} \end{bmatrix}$$

において, 独立なパラメータが独立に $u_{jj} \sim N(0, 1/2)$ $u_{jk}, v_{jk} \sim N(0, 1/4)$ となっているようなものである.

GUE の大きな特徴は固有値の結合密度関数が行列式の形に書かれる事である. それを用いると最大固有値分布は

$$\mathbb{P}[\lambda_{\max} \leq t] = \frac{1}{Z_N} \int_{(-\infty, t]^N} \prod_{1 \leq j < k \leq N} (x_j - x_k)^2 \prod_{j=1}^N e^{-x_j^2/2} dx^N \quad (4.1)$$

のように N 重積分で表すことができる. これは GUE が自由フェルミオンと関係していることによる. ランダム行列理論はソリトン理論との関係も深い.

5 カレント揺らぎ

粒子が一方方向のみにホップする TASEP において, 初期時刻 $t = 0$ に原点の左側は粒子がびっしり埋まっており, 一方原点の右側には粒子がないという step 初期条件を考える. $N(t)$ を時刻 t において原点を超えた粒子数とする. 我々は $N(t)$ の確率的性質に興味がある. 界面の言葉でいうと, droplet の形に界面が成長する場合に相当する. Johansson は次の公式を示した [20].

$$\mathbb{P}[N(t) > N] = \frac{1}{Z_N} \int_{[0, t]^N} \prod_{1 \leq j < k \leq N} (x_j - x_k)^2 \prod_{j=1}^N e^{-x_j} dx^N \quad (5.1)$$

これを (4.1) と比較すると大変類似している. 実際 (5.1) はランダム行列理論における Laguerre ユニタリアンサンブル (LUE) の最大固有値の分布と同じ形である. ランダム行列理論における手法を用いることにより上記確率は Fredholm 行列式に書き直すことが出来る:

$$\mathbb{P}[N(t) > N] = \det(1 - K_{N2}) \quad (5.2)$$

ここで K_{N2} は次のように Laguerre 多項式を用いて表される.

$$K_{N2}(x, y) = N \frac{L_{N-1}(x)L_N(y) - L_{N-1}(y)L_N(x)}{x - y}.$$

ただし $L_n(x)$ は Laguerre 多項式. この事実を用いると漸近解析を行う事ができ, 次のような結果が得られる.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\frac{\frac{t}{4} - N(t)}{2^{-4/3} t^{1/3}} < s \right] = F_2(s)$$

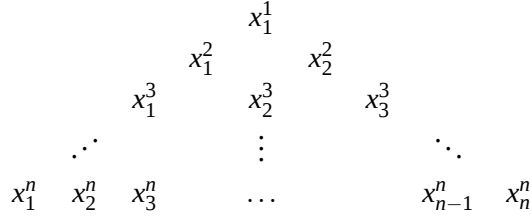


図 1: Gelfand-Tsetlin cone

ここで $F_2(s)$ は GUE Tracy-Widom(TW) 分布と呼ばれ, GUE の最大固有値の分布を記述し, 次のような表示を持つ.

$$F_2(s) = \det(1 - K_2).$$

ただし K_2 は Airy 核

$$K_2(x, y) = \frac{\text{Ai}(x)\text{Ai}'(y) - \text{Ai}(y)\text{Ai}'(x)}{x - y}$$

である.

(5.2) は KPZ 界面の揺らぎが GUE TW 分布で与えられることを示す. (5.1) は TASEP の問題が自由フェルミオンの問題となっていることを示している. イントロで述べたように ASEP の時間発展を記述する遷移率行列は XXZ 模型と関係しており, Jordan-Wigner 変換によってフェルミオンの問題に読みかえることが出来るが, その場合自由フェルミオンとなるのは $\Delta = 0$ の場合であり, TASEP は対応していないことを注意しておく.

最近 GUE TW 分布は界面成長の実験でも見られるようになった [25]. ある種の液晶において DSM1 と DSM2 という 2 種類の乱流状態があるが, DSM1 内における DSM2 の広がり KPZ 的な界面成長になっており, その分布が GUE TW 分布に従っていることが観察された. これまでも紙を燃やす際の界面やバクテリアコロニーでの研究はあったが, 今回の液晶系の実験は, 制御がしやすく同じ状況で何度も繰り返し行う事が出来るという利点があった. また今回の実験では χ, λ_0 を最初に決めることができ, GUE TW 分布との比較があいまいさなく出来た. そのため 2,3,4 次モーメントに比べ 1 次モーメント (平均) の収束が遅く, 実験で得られる分布は GUE TW をシフトした形のものであるというところまで確認された.

6 発展

6.1 LUE 表示

前節で述べた KPZ 界面の揺らぎに関する研究はその後大いに発展している. まず上記 LUE 表示 (5.1) を得る方法はいくつかある. 一つの方法は Schütz の行列式 [26] を用いる方法である [27]. より最近 Gelfand-Tsetlin cone 上の粒子ダイナミクスを考えることによりこの表式が得られることも示されている [28]. Gelfand-Tsetlin cone とは, $\mathbb{K}_n = \{(x^1, x^2, \dots, x^n) \in \mathbb{Z}^1 \times \mathbb{Z}^2 \times \mathbb{Z}^n : x_i^{k+1} \leq x_i^k \leq x_{i+1}^{k+1}\}$ を満たすような x_i^j の事である (下図). x_i^j に対するダイナミクスを次のように決める.

- 各粒子 $x_j^k, 1 \leq j \leq k, k \geq 1$ は右へ rate 1 でホップしようとする.
- もし $x_j^k(t) = x_j^{k-1}$ なら x_j^{k-1} に block される.
- もし $x_j^{k-1}(t) = x_{j+1}^k$ なら, x_j^{k-1} がジャンプするとき x_{j+1}^k は push される (同時にジャンプする).

このとき、各行の粒子達の位置は Charlier アンサンブルに関する。Charlier 多項式はポアソン分布 $\frac{x^k}{k!}e^{-t}$ に関して直交するような多項式で [12], Laguerre 多項式と関係する。一方 Gelfand-Tsetlin cone で右上のラインの粒子達のみに着目すると、それらの粒子の運動は他の粒子と関係なく、さらにダイナミクスは TASEP そのものとなっていることがわかる。よって、例えば step 初期条件の TASEP において N 番目の粒子の位置の確率的な性質は、 N 体の Charlier アンサンブルにおける一番右の粒子の運動が分かればよいことになり、これはランダム行列の世界のものであるから、行列式を用いた計算が進み、(5.1) も得ることが出来るのである。

なお今は TASEP なので格子上のダイナミクスを考えているが、拡散スケールングをとることで、GUE Dyson ブラウン運動を得ることも出来る [29].

6.2 境界条件・初期条件・多点・ASEP

他にも色々の拡張が得られている。まず無限系での step 以外の初期条件、境界条件が考えられている [22, 30]. 例えば無限系で粒子のいるサイトといないサイトが交互に連なっている alternating 初期条件の場合 (界面の言葉では flat 初期条件) は、カレントの揺らぎは GOE TW 分布 [31] で記述される。また、初期条件が ρ_-, ρ_+ の場合について一般化でき、開放境界条件の定常状態の場合と類似の相図が得られる。さらに $\rho_+ = \rho_- = \rho$ の場合を考えることにより、定常状態における 2 点相関を計算することも出来る [32, 33]. また半無限系においては密度 ρ でスタートし、原点で $\text{rate}\alpha$ の input がある場合を扱うことも出来、カレント揺らぎは GOE, GSE TW 分布 [31] で記述される。

さらに多点でのカレントの相関を見ることもでき、step の場合 Airy 過程と呼ばれる、GUE ダイソンブラウン運動の最大固有値の運動を表す過程で記述される [34]. 一方 alternating 初期条件の場合は Airy_1 過程と呼ばれる過程で記述される [35]. Airy_1 過程は定常で、各 1 点での分布が GOE TW 分布で与えられるので、一見 GOE ダイソンブラウン運動の最大固有値の運動を表していると予想されるが、実は別物であるという数値計算がある [36]. また一つの粒子に着目した場合 (tagged particle) の運動についても同じように扱うことが出来る [37].

これまでの 5,6 節の話はすべて TASEP に関するものであるが、最近 Tracy Widom が粒子が両方向にホップする ASEP に対しても結果を得ている。まず一つの粒子に着目した場合のその位置の確率分布を多重複素積分で表されることを見出し、実はそれが Fredholm 行列式の積分の形に書き直せる事を示し、その表示を用いて漸近解析を行うことにより、step 初期条件の時長時間極限でやはり GUE TW 分布が得られることを示した。現状 step より一歩進んで初期条件が ρ_-, ρ_+ の状況まで調べられており [38], さらに進展が期待される。KPZ 普遍性の観点からは現在考えられている長時間極限では TASEP と同じ結果が得られるはずであるが、同時に非対称性が小さくなる極限も取ることによりクロスオーバーについても調べられるはずである。手法の観点からの興味もあるが、TASEP の場合と比べ解の構造がよく見えていない。自由フェルミオンや量子群との関係がどのようになっているか、今後の研究が待たれる。

7 格子 KPZ

イントロでも述べたように KPZ 方程式は特異的であり、実際に取り扱うにはなんらかの regularization が必要である。ノイズの空間方向の相関を丸める (ガウス分布など特異性のない関数で置き換える) ことにより扱うことも出来るが、ここでは noisy Burgers 方程式 (1.1) を単純に空間に関し

て離散化して,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}u_j = & \frac{1}{6}\lambda_0(u_{j+1}^2 + u_j u_{j+1} - u_{j-1} u_j - u_{j-1}^2) \\ & + v_0(u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}) + D_0^{1/2}(\xi_j - \xi_{j-1}) \end{aligned}$$

という確率微分方程式を考える [39]. ここで $\{\xi_j\}$ は各 j について独立なホワイトノイズである. 非線型項の離散化の仕方に特徴があるが, このように選ぶと $\rho \in \mathbb{R}$ として

$$\prod_{j=1}^N \left\{ \frac{1}{Z} \exp[-(v_0/D_0)(u_j - \rho)^2] \right\} =: (\psi_{0,\rho}^N(u))^2$$

が定常状態であることを確認することが出来る. 他の離散化を取った場合もちろん長時間・長距離の性質は変わらないと考えられるが, このように定常状態を明示的に求めることが出来ないので, 以下のような解析を行う事は不可能となる. 定常状態が得られているので, 界面の成長速度 $v(\rho)$ と揺らぎの大きさ χ を

$$v(\rho) = \frac{\lambda_0}{6} \left(\frac{D_0}{v_0} + 3\rho^2 \right), \quad \chi = \frac{D}{2v_0}$$

と計算することが出来る. よって 3 節で述べたようにどのように変数をスケーリングすれば良いか係数まで含めて分かる. 以下 $\rho = 0$ とおく.

定常状態を用いて過程の生成作用素 L_N を

$$\psi_{0,0}^N L_N (\psi_{0,0}^N)^{-1} = -H_N$$

のように変換することが出来る. H_N はエルミートではないが, ここではハミルトニアンと呼ぶことにする. サイト j での生成・消滅演算子を

$$a_j = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}(\alpha u_j + \partial_j), \quad a_j^* = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}(\alpha u_j - \partial_j),$$

と定義する. ただし $\alpha = v_0/D_0$, $\partial_j = \frac{\partial}{\partial u_j}$. これらは $[a_i, a_j^*] = \delta_{ij}$ を満たす. $v_0 = 1$ また $\lambda = \frac{1}{3 \cdot 2^{3/2}} \alpha^{-1/2} \lambda_0$ とおくことにより, $L \rightarrow \infty$ でのハミルトニアンが

$$H = H_0 + \lambda(A^* - A)$$

ただし

$$\begin{aligned} H_0 &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} (a_{j+1} - a_j)^* (a_{j+1} - a_j) \\ A &= \sum_{j \in \mathbb{Z}} (a_j a_{j+1}^* a_{j+1} + a_j a_j a_{j+1}^* - a_j^* a_{j+1} a_{j+1} - a_j^* a_j a_{j+1}) \end{aligned}$$

と書ける事が分かる. つまり格子 KPZ 方程式は非線型相互作用を持つボソンの多体問題となった.

KPZ スケーリングでは定常 2 点関数は

$$S(j, t) \stackrel{t \rightarrow \infty}{\cong} \chi (2\lambda_0^2 \chi t^2)^{-1/3} f_{\text{KPZ}}((2\lambda_0^2 \chi t^2)^{-1/3} j)$$

のようにスケールすると予想される. ただし f_{KPZ} は KPZ 普遍性クラスの定常 2 点関数を記述する関数であり, 6.2 で述べたようにすでに TASEP の厳密解から計算されている. ラプラス変換することによりこれは

$$\langle \hat{g}^0, (\zeta + H)^{-1} \hat{g}^0 \rangle^0 \stackrel{\zeta \rightarrow 0}{\cong} 3^{-2/3} \Gamma(7/3) (\lambda^2 \zeta)^{-1/3} \int dx x^2 f_{\text{KPZ}}(x) \quad (7.1)$$

と等価であることを示せる. ただし $\hat{g}^0$ は Fock 空間のあるベクトル.

問題は $(\zeta + H)^{-1}$ をどう扱うかであるが, 非線型相互作用 A が Fock 空間の粒子を一つ減らし, A^* が一つ増やすという階層構造に注意すると, その n 次まで取るという近似をすることにより得られる量 b_n は (7.1) の左辺の上限・下限を与え, さらに $n \rightarrow \infty$ の極限で (7.1) の左辺に収束することが分かる. $n = 2, 3$ の場合を評価することにより growth 指数に関して $\frac{1}{4} \leq \beta \leq \frac{1}{2}$ という不等式を得ることが出来る. さらに relaxation time 近似と呼ばれる近似を採用すれば任意の n 次までの近似値を計算することが出来る. 結果は $\alpha_n = \frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \dots$ として

$$b_n \cong \frac{1}{2(9\lambda^2)^{\alpha_{n-1}}(2\zeta)^{\alpha_n}}$$

となる. $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1/3$ に注意すると

$$\langle \hat{g}^0, (\zeta + H)^{-1} \hat{g}^0 \rangle^0 = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \cong C \zeta^{-1/3}$$

となり, KPZ growth 指数 $1/3$ を得ることが出来る. 前の係数 C は KPZ2 点関数の 2 次モーメントについての情報も含んでいるがこちらは 0.3460 となり, TASEP の厳密解から計算された値 0.5105 とは 3 割程度異なっており, 近似を改良する方法が望まれる.

8 終わりに

本稿では, 1 次元 ASEP と KPZ 方程式についての基礎事項と最近の進展に関して概説した. 本稿では触れられなかった話題も多く, 例えば Bethe ansatz による開放系や多成分系の研究がある [40, 41]. ASEP 研究が始まってから 30 年以上, KPZ 方程式が提案されてから 20 年以上経つが, 未だに新たな事実が発見され続けており, 今後も発展が続くと思われる.

KPZ 方程式を研究するモチベーションの一つは, Navier-Stokes 方程式のようにより複雑な現象を示す非線型方程式の性質の解析に役立てたいということである. ASEP を解析する際に開発された手法はその大部分 ASEP に特化したものであるが, より一般の系に適用可能な手法が見出され, より複雑な系の理解が深まる事を期待している.

参考文献

- [1] M. Jimbo, T. Miwa. *Algebraic Analysis of Solvable Lattice Models*. Amer Mathematical Society, 1995.
- [2] V.E. Korepin, N.M. Bogoliubov, A.G. Izergin. *Quantum Inverse Scattering Method and Correlation Functions*. Cambridge University Press, 1997.
- [3] M. Kardar, G. Parisi and Y. C. Zhang. Dynamic scaling of growing interfaces. *Phys. Rev. Lett.*, 56:889–892, 1986.
- [4] A.L. Barabási and H.E. Stanley. *Fractal concepts in surface growth*. Cambridge University Press, 1995.
- [5] J. Krug and H. Spohn. Kinetic roughening of growing interfaces. In C. Godrèche, editor, *Solids far from Equilibrium: Growth, Morphology and Defects*, pages 479–582, 1992.

- [6] M. Balázs, J. Quastel, T. Seppäläinen. Scaling exponent for the Cole-Hopf solution of the KPZ/stochastic Burgers, arXiv:0909.4816.
- [7] T. M. Liggett. *Interacting Particle Systems*. Springer-Verlag, 1985; *Stochastic Interacting Systems: Contact, Voter, and Exclusion Processes*. Springer-Verlag, 1999.
- [8] G. Schütz S. Sandow. $Uq[SU(2)]$ -Symmetric driven diffusion. Dynamics given by generalized anisotropic Heisenberg linear chain. *Europhys. Lett.*, 26:7–12, 1994.
- [9] B. Derrida, M. R. Evans, V. Hakim, and V. Pasquier. Exact solution of a 1D exclusion model using a matrix formulation. *J. Phys. A*, 26:1493–1517, 1993.
- [10] R. A. Blythe, M. R. Evans. Nonequilibrium Steady States of Matrix Product Form: A Solver’s Guide . *J. Phys. A: Math. Theor.*, 40:R333–R441, 2007.
- [11] B. Derrida. Non-equilibrium steady states: fluctuations and large deviations of the density and of the current. *J. Stat. Mech.*, page P07023, 2007.
- [12] R. Koekoek and R. F. Swarttouw. The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q -analogue, math.CA/9602214.
- [13] R. A. Askey and J. A. Wilson. Some basic hypergeometric polynomials that generalize Jacobi polynomials. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 319:1–53, 1985.
- [14] M. Uchiyama, T. Sasamoto and M. Wadati. Asymmetric simple exclusion process with open boundaries and Askey-Wilson polynomials. *J. Phys. A*, 37:4985–5002, 2004.
- [15] T. Sasamoto. One-dimensional partially asymmetric simple exclusion process with open boundaries: Orthogonal polynomials approach. *J. Phys. A*, 32:7109–7131, 1999.
- [16] B. Aneva, M. Chaichian, P.P. Kulish. From Quantum Affine Symmetry to Boundary Askey-Wilson Algebra and Reflection Equation. *J.Phys.A*, 41:135201, 2008.
- [17] S. Corteel, L. Williams. Tableaux combinatorics for the asymmetric exclusion process and Askey-Wilson polynomials, arXiv:0910.1858.
- [18] M.R. Evans, P.A. Ferrari, K. Mallick. Matrix representation of the stationary measure for the multispecies. *J. Stat. Phys.*, 135:217–239, 2009.
- [19] L.-H. Gwa and H. Spohn. Six-vertex model, roughened surfaces, and an asymmetric spin Hamiltonian. *Phys. Rev. Lett.*, 68:725–728, 1992.
- [20] K. Johansson. Shape fluctuations and random matrices. *Comm. Math. Phys.*, 209:437–476, 2000.
- [21] M. Balazs, E. Cator, T. Seppäläinen. Cube root fluctuations for the corner growth model associated to the exclusion process. *E. J. Prob.*, 11:1094–1132, 2006.
- [22] M. Prähofer and H. Spohn. Current fluctuations for the totally asymmetric simple exclusion process. In V. Sidoravicius, editor, *In and out of equilibrium, vol. 51 of Progress in Probability*, pages 185–204, 2002.
- [23] M. L. Mehta. *Random Matrices*. Elsevier, 3rd edition, 2004.

- [24] M. Katori and T. Tanemura. Noncolliding brownian motion and determinantal process. *J. Stat. Phys.*, 129:1233–1277, 2007.
- [25] K.A. Takeuchi, M. Sano. Growing Interfaces of Liquid Crystal Turbulence: Universal Scaling and Fluctuations, arXiv:1001.5121.
- [26] G. M. Schütz. Exact solution of the master equation for the asymmetric exclusion process. *J. Stat. Phys.*, 88:427–445, 1997.
- [27] T. Nagao and T. Sasamoto. Asymmetric simple exclusion process and modified random matrix ensembles. *Nucl. Phys. B*, 699:487–502, 2004.
- [28] J. Warren and P. Windridge. Some examples of dynamics for Gelfand Tsetlin patterns. *E. J. Prob.*, 14:1745–1769, 2009.
- [29] J. Warren. Dyson’s brownian motions, intertwining and interlacing. *E. J. Prob.*, 12:573–590, 2007.
- [30] T. Sasamoto. Fluctuations of the one-dimensional asymmetric exclusion process using random matrix techniques. *J. Stat. Mech.*, page P07007, 2007.
- [31] C. A. Tracy and H. Widom. On orthogonal and symplectic matrix ensembles. *Comm. Math. Phys.*, 177:727–754, 1996.
- [32] M. Prähofer and H. Spohn. Exact scaling functions for one-dimensional stationary KPZ growth. *J. Stat. Phys.*, 115:255–279, 2004.
- [33] P. L. Ferrari and H. Spohn. Scaling limit for the space-time covariance of the stationary totally asymmetric simple exclusion process. *Comm. Math. Phys.*, 265:1–44, 2006.
- [34] M. Prähofer and H. Spohn. Scale Invariance of the PNG Droplet and the Airy Process. *J. Stat. Phys.*, 108:1071–1106, 2002.
- [35] A. Borodin, P. L. Ferrari, M. Prähofer, and T. Sasamoto. Fluctuation properties of the TASEP with periodic initial configuration. *J. Stat. Phys.*, 129:1055–1080, 2007.
- [36] F. Bornemann, P. L. Ferrari, M. Prähofer. The Airy₁ Process is not the Limit of the Largest Eigenvalue in GOE. *J. Stat. Phys.*, 133:405–415, 2008.
- [37] T. Imamura and T. Sasamoto. Dynamics of a tagged particle in the asymmetric exclusion process with the step initial condition. *J. Stat. Phys.*, 128:799–846, 2007.
- [38] C. A. Tracy and H. Widom. Formulas for ASEP with Two-Sided Bernoulli Initial Condition, arXiv:1001.4766.
- [39] T. Sasamoto and H. Spohn. superdiffusivity of the 1D lattice Kardar-Parisi-Zhang equation. *J. Stat. Phys.*, 137:917–935, 2009.
- [40] J. de Gier and F.H.L. Essler. Slowest relaxation mode of the partially asymmetric exclusion process with open boundaries. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 41:485002 (25pp), 2008.
- [41] C. Arita, A. Kuniba, K. Sakai, T. Sawabe. Spectrum in multi-species asymmetric simple exclusion process on a ring. *J. Phys. A: Math. Theor.*, 42:345002–373, 2009.