非線形Schrödinger階層とAblowitz-Ladik階層の対数的時間発展による拡張

高崎, 金久
京都大学大学院人間・環境学研究科

https://doi.org/10.15017/18697

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 21ME-S7 (7), 2010-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

応用力学研究所研究集会報告 No.21ME-S7
「非線形波動研究の現状と将来 — 次の 10 年への展望」（研究代表者　矢嶋　徹）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.21ME-S7

Current and Future Research on Nonlinear Waves —
Perspectives for the Next Decade

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 19 - 21, 2009

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 7 (pp. 43-48)

非線形Schrödinger階層とAblowitz-Ladik階層の対数的時間発展による拡張

高崎 金久 (Takasaki Kanehisa)

（Received January 25, 2010）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2010

非線形 Schrödinger 階層と Ablowitz-Ladik 階層の 対数的時間発展による拡張

高崎金久（Kanehisa Takasaki）
京都大学大学院人間・環境学研究科

1 はじめに

Carlet, Dubrovin, Zhang は通常の１次元戸田階層に「対数的」時間発展を加えて「拡張戸田階層」を構成した [1]．Milanov はこの拡張戸田階層に対して双線形形式を与えた [2]．ところで，１次元戸田階層は非線形 Schrödinger（NLS）階層の Bäcklund 変換列（NLS-戸田階層）とも見なせる [3]．同様の意味で Ruijsenaars-戸田階層（RT 階層）は Ablowitz-Ladik（AL）階層と対応していることが知られている [4, 5, 6]．以下では，拡張戸田階層を NLS-戸田階層の言葉に翻訳したものが NLS 階層の 2 + 1 次元拡張に似ていることに注目し，その場合にならって双線形方程式が得られることを指摘する．こうして得られる双線形方程式は Milanov の双線形方程式を特別な場合として含んでいる．さらに AL 階層に対しても同様の結果を報告する．

2 拡張戸田階層から拡張 NLS-戸田階層へ

１次元戸田階層の Lax 表示　１次元戸田階層は差分型 Lax 作用素

$$\mathcal{L} = e^{\partial_s} + b(s) + c(s)e^{-\partial_s}$$

によって

$$\partial_{t_n}\mathcal{L} = [\mathcal{A}_n, \mathcal{L}], \quad \mathcal{A}_n = \frac{1}{2}(\mathcal{L}^n)_{\ge 0} - \frac{1}{2}(\mathcal{L}^n)_{<0} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

と Lax 表示される．ここで $(\quad)_{\ge 0}$ と $(\quad)_{<0}$ は e^{∂_s} に関する非負べき部分・負べき部分を表す．

Lax 作用素の対数　$\mathcal{L}$ に対して

$$\mathcal{L} = \mathcal{W}e^{\partial_s}\mathcal{W}^{-1} = \bar{\mathcal{W}}e^{-\partial_s}\bar{\mathcal{W}}^{-1}$$

という等式を満たす着付け（dressing）作用素

$$\mathcal{W} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} w_k e^{-k\partial_s}, \quad \bar{\mathcal{W}} = \sum_{k=0}^{\infty} \bar{w}_n e^{k\partial_s}$$

を導入すれば，$\mathcal{L}$ の対数 $\log\mathcal{L}$ を

$$\log\mathcal{L} = \frac{1}{2}\mathcal{W}\partial_s\mathcal{W}^{-1} - \frac{1}{2}\bar{\mathcal{W}}\partial_s\bar{\mathcal{W}}^{-1}$$

と定義することができる．この定義式は

$$\log\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\mathcal{W}}{\partial s}\mathcal{W}^{-1} + \frac{1}{2}\frac{\partial\bar{\mathcal{W}}}{\partial s}\bar{\mathcal{W}}^{-1}$$

と書き直せるが，ここには ∂_s が e^{∂_s} の形でのみ現れるので，$\log\mathcal{L}$ は（無限階ではあるが）とにかく差分作用素であることがわかる．

拡張戸田階層　１次元戸田階層の Lax 方程式系に $\mathcal{L}^n\log\mathcal{L}$ の生成する時間発展（対数的時間発展）の Lax 方程式系

$$\partial_{x_n}\mathcal{L} = [\mathcal{B}_n, \mathcal{L}], \quad \mathcal{B}_n = (\mathcal{L}^n\log\mathcal{L})_{\geq 0} - (\mathcal{L}^n\log\mathcal{L})_{<0} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

を付け加えて得られる階層（２系列の時間変数 $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots)$, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ をもつ）を拡張戸田階層という．

注意: Carlet らの本来の定義 [1] では $\mathcal{L}^n\log\mathcal{L}$ の代わりに $\mathcal{L}^n(\log\mathcal{L} - c_n)$ （$c_n = 1 + 1/2 + \cdots + 1/n$）を用いる．ここでは c_n を落としているが，可積分構造に関して本質的な違いはない．

波動函数と τ 函数　標準的な記号

$$\xi(\boldsymbol{t}, z) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n z^n, \quad [z] = (z, \frac{z^2}{2}, \frac{z^3}{3}, \ldots),$$

を導入する．拡張戸田階層の波動函数は

$$\Phi(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}, z) = \mathcal{W}z^{s+\xi(\boldsymbol{x},z)}e^{\xi(\boldsymbol{t},z)/2}, \quad \bar{\Phi}(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}, z) = \bar{\mathcal{W}}z^{s+\xi(\boldsymbol{x},z)}e^{-\xi(\boldsymbol{t},z^{-1})/2}$$

という形をもち（本来の１次元戸田階層における z^s が $z^{s+\xi(\boldsymbol{x},z)}$ に変わることに注意），補助線形方程式系

$$L\Phi = z\Phi, \quad \partial_{t_n}\Phi = \mathcal{A}_n\Phi, \quad \partial_{x_n}\Phi = \mathcal{B}_n\Phi,$$
$$L\bar{\Phi} = z^{-1}\bar{\Phi}, \quad \partial_{t_n}\bar{\Phi} = \mathcal{A}_n\bar{\Phi}, \quad \partial_{x_n}\bar{\Phi} = \mathcal{B}_n\bar{\Phi} \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

を満たす．τ 函数 $\tau(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ は波動函数を

$$\Phi(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}, z) = \frac{\tau(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} - [z^{-1}])}{\tau(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})}z^{s+\xi(\boldsymbol{x},z)}e^{\xi(\boldsymbol{t},z)/2},$$
$$\bar{\Phi}(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}, z) = \frac{\tau(s+1, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} + [z])}{\tau(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})}z^{s+\xi(\boldsymbol{x},z)}e^{-\xi(\boldsymbol{t},z^{-1})/2}$$

と表示するものとして導入される．τ 函数には $\boldsymbol{x}$ のみの函数 $e^{f(\boldsymbol{x})}$ を乗じる不定性 $\tau(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}) \to e^{f(\boldsymbol{t})}\tau(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ がある．

行列型波動函数と Lax 方程式系　スカラー値波動関数 $\Phi(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}, z), \bar{\Phi}(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}, z)$ から行列値波動函数

$$\Psi(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}, z) = W(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}, z)\,\mathrm{diag}(z^{s+\xi(\boldsymbol{x},z)}e^{\xi(\boldsymbol{t},z)/2},\ z^{-s-\xi(\boldsymbol{x},z)}e^{-\xi(\boldsymbol{t},z)/2})$$

をつくる．ここで $W(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})$ は

$$W(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}, z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\tau(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} - [z^{-1}])}{\tau(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})} & \dfrac{z^{-1}\tau(s+1, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} + [z^{-1}])}{\tau(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})} \\ \dfrac{z^{-1}\tau(s-1, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} - [z^{-1}])}{\tau(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})} & \dfrac{\tau(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t} + [z^{-1}])}{\tau(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t})} \end{pmatrix}$$

という行列である．$\Psi(s, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{t}, z)$ は以下の各方程式を満たすことがわかる．

(1) 代数的条件 $\det W(s,\boldsymbol{x},\boldsymbol{t},z)=1$

(2) 補助線形方程式系

$$e^{\partial_s}\Psi=L\Psi,\quad \partial_{t_n}\Psi=A_n\Psi,\quad \partial_{x_n}\Psi=z^n\partial_s\Psi+B_n\Psi\quad (n=1,2,\ldots),$$

ここで L,A_n,B_n は

$$\begin{aligned} L&=\begin{pmatrix} z-\partial_{t_1}\log\frac{\tau(s+1,\boldsymbol{t})}{\tau(s,\boldsymbol{t})} & -\frac{\tau(s+1,\boldsymbol{t})}{\tau(s,\boldsymbol{t})} \\ \frac{\tau(s,\boldsymbol{t})}{\tau(s+1,\boldsymbol{t})} & 0 \end{pmatrix},\\ A_n&=\left(W\operatorname{diag}(\frac{z^n}{2},-\frac{z^n}{2})W^{-1}\right)_{\geq 0},\quad B_n=-\left(z^n\partial_s W\cdot W^{-1}\right)_{\geq 0} \end{aligned}$$

という行列である（$\operatorname{diag}(a,b)$ は a,b を対角成分とする対角行列を表す）.

この補助線形方程式に対応して L は格子型 Lax 方程式系

$$\begin{aligned} &\partial_{t_n}L(s)=A_n(s+1)L(s)-L(s)A_n(s),\\ &\partial_{x_n}L(s)=z^n\partial_s L(s)+B_n(s+1)L(s)-L(x)B_n(s)\quad (n=1,2,\ldots) \end{aligned}$$

（s 依存性のみを強調している）を満たす．また A_n,B_n は零曲率方程式を満たす．特に，A_1,A_n,B_n が満たす零曲率方程式は

$$[\partial_{t_n}-A_n,\ \partial_{t_1}-A_1]=0,\quad [\partial_{x_n}-z^n\partial_s-B_n,\ \partial_{t_1}-A_1]=0$$

という形になるが，前者はNLS階層の零曲率方程式に他ならない（L のLax方程式はそのBäcklund変換列が満たす方程式と見なせる）後者はNLS階層の $2+1$ 次元拡張 [7, 8] の方程式に似ている．$2+1$ 次元拡張では s とは独立な空間変数 y が用意されていて，$z^n\partial_s$ の代わりに $z^n\partial_y$ が現れる．

双線形方程式 NLS 階層の $2+1$ 次元拡張の場合 [8] にならって波動函数とその逆行列に対して

$$\oint\frac{dz}{2\pi i}z^k\Psi(s'-\xi(\boldsymbol{b},z),\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{t}',z)\Psi(s-\xi(\boldsymbol{a},z),\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a},\boldsymbol{t},z)^{-1}=0\quad (k\geq 0)$$

（$s,s',\boldsymbol{x},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{t},\boldsymbol{t}'$ は任意の値をとる）という双線形方程式を導くことができる．これから τ 函数に対する双線形方程式

$$\begin{aligned} &\oint\frac{dz}{2\pi i}z^{k+s'-s}e^{\xi(\boldsymbol{t}'-\boldsymbol{t},z)/2}\tau(s'-\xi(\boldsymbol{b},z),\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{t}'-[z^{-1}])\\ &\qquad\qquad\times\tau(s-\xi(\boldsymbol{a},z),\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a},\boldsymbol{t}+[z^{-1}])\\ =&\oint\frac{dz}{2\pi i}z^{k+s-s'-2}e^{\xi(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t}',z)/2}\tau(s'+1-\xi(\boldsymbol{b},z),\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b},\boldsymbol{t}'+[z^{-1}])\\ &\qquad\qquad\times\tau(s-1-\xi(\boldsymbol{a},z),\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a},\boldsymbol{t}-[z^{-1}])\quad (k\geq 0) \end{aligned}$$

が得られる．これは Milamov が拡張戸田階層に対して与えた双線形方程式 [2]（じつは証明が間違っているようである）を特別な場合として含んでいる．

3 Ablowitz-Ladik 階層

ここでは Vekslerchik [9] による AL 階層の定式化に従って話を進める．

Lax 方程式系　AL 階層は 2 系列の時間変数 $\boldsymbol{t} = (t_1, t_2, \ldots)$, $\bar{\boldsymbol{t}} = (\bar{t}_1, \bar{t}_2, \ldots)$ をもち，2×2 行列 $L = \begin{pmatrix} \zeta & q(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}}) \\ r(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}}) & \zeta^{-1} \end{pmatrix}$（$\zeta$ はスペクトルパラメータである）に対する格子型 Lax 方程式系

$$\begin{aligned} \partial_{t_n} L(s) &= A_n(s+1)L(s) - L(s)A_n(s), \\ \partial_{\bar{t}_n} L(s) &= \bar{A}_n(s+1)L(s) - L(s)\bar{A}_n(s) \quad (n = 1, 2, \ldots) \end{aligned}$$

で定義される．$A_n = A_n(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta)$, $\bar{A}_n = \bar{A}_n(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta)$ はそれぞれ ζ, ζ^{-1} の多項式からなる行列で，対角成分が ζ の偶函数，非対角成分が ζ の奇函数である．具体的な形は後で述べる．

波動函数　補助線形問題

$$e^{\partial_s}\Psi = L\Psi, \quad \partial_{t_n}\Psi = A_n\Psi, \quad \partial_{\bar{t}_n}\Psi = \bar{A}_n\Psi \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

に対して 2 種類の 2×2 行列値波動函数

$$\begin{aligned} \Psi(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta) &= W(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta)\,\mathrm{diag}(\zeta^s e^{\xi(\boldsymbol{t},\zeta^2)}, \zeta^{-s}e^{\xi(\bar{\boldsymbol{t}},\zeta^{-2})}), \\ \bar{\Psi}(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta) &= \bar{W}(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta)\,\mathrm{diag}(\zeta^s e^{\xi(\bar{\boldsymbol{t}},\zeta^{-2})}, \zeta^{-s}e^{\xi(\boldsymbol{t},\zeta^2)}) \end{aligned}$$

が導入される．$W(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta)$ と $\bar{W}(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta)$ はそれぞれ ζ^{-1}, ζ の整級数からなる行列であり，ζ に関して $A_n, \bar{A}_n$ と同様の奇偶性をもち，代数的条件

$$\det W(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta) = \det \bar{W}(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta) = \frac{\tau(s+1,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})}{\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})}$$

を満たす．

$A_n, \bar{A}_n$ の構造　一般に $A_n, \bar{A}_n$ と同様の奇偶性をもつ Laurent 級数の行列 $A = \begin{pmatrix} \alpha(\zeta) & \beta(\zeta) \\ \gamma(\zeta) & \delta(\zeta) \end{pmatrix}$ に対して $(A)_\pm$ を

$$(A)_+ = \begin{pmatrix} (\alpha)_{\geq 0} & (\beta)_{\geq 1} \\ (\gamma)_{\geq 1} & (\delta)_{\geq 2} \end{pmatrix}, \ (A)_- = \begin{pmatrix} (\alpha)_{\leq -2} & (\beta)_{\leq -1} \\ (\gamma)_{\leq -1} & (\delta)_{\leq 0} \end{pmatrix}$$

と定義する．行列要素に対する $(\quad)_{\geq k}$, $(\quad)_{\leq k}$ はそれぞれ ζ^j $(j \geq k)$, ζ^j $(j \leq k)$ の部分を取り出すことを意味する．この記号を用いれば，$A_n, \bar{A}_n$ は $W, \bar{W}$ によって

$$A_n = \bigl(W\,\mathrm{diag}(\zeta^{2n}, 0)W^{-1}\bigr)_+, \quad \bar{A}_n = \bigl(\bar{W}\,\mathrm{diag}(\zeta^{-2n}, 0)\bar{W}^{-1}z\bigr)_-$$

と表せる．

τ 函数　3 個の τ 函数 $\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})$, $\sigma(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})$, $\bar{\sigma}(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})$ が

$$\begin{aligned} W(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\tau(s,\boldsymbol{t}-[\zeta^{-2}],\bar{\boldsymbol{t}})}{\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})} & -\dfrac{\zeta^{-1}\sigma(s+1,\boldsymbol{t}+[\zeta^{-2}],\bar{\boldsymbol{t}})}{\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})} \\ \dfrac{\zeta^{-1}\bar{\sigma}(s,\boldsymbol{t}-[\zeta^{-2}],\bar{\boldsymbol{t}})}{\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})} & \dfrac{\tau(s+1,\boldsymbol{t}+[\zeta^{2}],\bar{\boldsymbol{t}})}{\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})} \end{pmatrix}, \\ \bar{W}(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta) &= \begin{pmatrix} \dfrac{\tau(s+1,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}}-[\zeta^2])}{\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})} & \dfrac{\zeta\sigma(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}}+[\zeta^2])}{\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})} \\ -\dfrac{\zeta\bar{\sigma}(s+1,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}}-[\zeta^2])}{\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})} & \dfrac{\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}}+[\zeta^2])}{\tau(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

という等式を満たすものとして導入される．

双線形方程式　行列型波動函数 $\Psi(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta)$ は双線形方程式に相当する方程式として

$$\Psi(s',\boldsymbol{t}',\bar{\boldsymbol{t}}',\zeta)\Psi(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta)^{-1}=\bar{\Psi}(s',\boldsymbol{t}',\bar{\boldsymbol{t}}',\zeta)\bar{\Psi}(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta)^{-1}$$

を満たす．これは通常の Riemann-Hilbert 問題の形をしているが,

$$\oint\frac{dz}{2\pi i}z^k\Psi(s',\boldsymbol{t}',\bar{\boldsymbol{t}}',\zeta)\Psi(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta)^{-1}=\oint\frac{dz}{2\pi i}z^k\bar{\Psi}(s',\boldsymbol{t}',\bar{\boldsymbol{t}}',\zeta)\bar{\Psi}(s,\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta)^{-1}\quad(k\in\mathbf{Z})$$

という形に書き直せば，すでに述べた拡張 NLS-戸田階層の双線形方程式と同類である．また，Vekslerchik が $\tau,\sigma,\bar{\sigma}$ に対して与えた函数等式 [9] もこの方程式の中に含まれている．

4　拡張 Ablowitz-Ladik 階層：AL 階層に対数的時間発展を導入する

対数的時間発展　新たに 2 系統の時間変数 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots)$, $\bar{\boldsymbol{x}}=(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\ldots)$ を用意し，NLS-戸田階層の拡張にならって $\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}$ の時間発展に関する補助線形方程式系

$$\partial_{x_n}\Psi=\zeta^{2n}\partial_s\Psi+B_n\Psi,\quad \partial_{\bar{x}_n}\Psi=\zeta^{-2n}\partial_s\Psi+\bar{B}_n\Psi\quad(n=1,2,\ldots)$$

を追加する．ここで

$$B_n=-\left(\zeta^{2n}\partial_sW\cdot W^{-1}\right)_+,\quad \bar{B}_n=-\left(\zeta^{-2n}\partial_s\bar{W}\cdot\bar{W}^{-1}\right)_-.$$

$(\quad)_\pm$ の意味は $A_n,\bar{A}_n$ の表示式の場合と同じである．$B_n,\bar{B}_n$ はそれぞれ ζ,ζ^{-1} の多項式からなる行列であり，ζ に関して $A_n,\bar{A}_n$ と同じ奇偶性をもつ．なお，s とは独立な空間変数 y を導入して $\zeta^{\pm2n}\partial_s$ を $\zeta^{\pm2n}\partial_y$ に置き換えれば，AL 階層の $2+1$ 次元拡張が得られる．

これらの時間発展の導入に伴って 2 種類の波動函数 $\Psi,\bar{\Psi}$ は

$$\begin{aligned}\Psi(s,\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta)&=W(s,\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta)\\&\quad\times\mathrm{diag}(\zeta^{s+\xi(\boldsymbol{x},\zeta^2)+\xi(\bar{\boldsymbol{x}},\zeta^{-2})}e^{\xi(\boldsymbol{t},\zeta^2)},\zeta^{-s-\xi(\boldsymbol{x},\zeta^2)-\xi(\bar{\boldsymbol{x}},\zeta^{-2})}e^{\xi(\bar{\boldsymbol{t}},\zeta^{-2})}),\\\bar{\Psi}(s,\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta)&=\bar{W}(s,\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta)\\&\quad\times\mathrm{diag}(\zeta^{s+\xi(\boldsymbol{x},\zeta^2)+\xi(\bar{\boldsymbol{x}},\zeta^{-2})}e^{\xi(\bar{\boldsymbol{t}},\zeta^{-2})},\zeta^{-s-\xi(\boldsymbol{x},\zeta^2)-\xi(\bar{\boldsymbol{x}},\zeta^{-2})}e^{\xi(\boldsymbol{t},\zeta^2)})\end{aligned}$$

という形に変わる（ζ^s が $\zeta^{s+\xi(\boldsymbol{x},\zeta^2)+\xi(\bar{\boldsymbol{x}},\zeta^{-2})}$ に置き換わる）．$W,\bar{W}$ の満たす代数的条件は変わらない：

$$\det W(s,\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{t}},\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta)=\det\bar{W}(s,\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta)=\frac{\tau(s+1,\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})}{\tau(s,\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}},\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}})}$$

また，$\tau,\sigma,\bar{\sigma}$ による $W,\bar{W}$ の表示式も変わらない．

双線形方程式　$\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{x}}$ に関する時間発展は 2+1 次元拡張と類似する構造をもつ．このことから，波動函数に対する函数等式型方程式

$$\begin{aligned}&\Psi(s'-\xi(\boldsymbol{b},\zeta^2)-\xi(\bar{\boldsymbol{b}},\zeta^{-2}),\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b},\bar{\boldsymbol{x}}+\bar{\boldsymbol{b}},\boldsymbol{t}',\bar{\boldsymbol{t}}',\zeta)\\&\qquad\times\Psi(s-\xi(\boldsymbol{a},\zeta^2)-\xi(\bar{\boldsymbol{a}},\zeta^{-2}),\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a},\bar{\boldsymbol{x}}+\bar{\boldsymbol{a}},\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta)^{-1}\\&=\bar{\Psi}(s'-\xi(\boldsymbol{b},\zeta^2)-\xi(\bar{\boldsymbol{b}},\zeta^{-2}),\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b},\bar{\boldsymbol{x}}+\bar{\boldsymbol{b}},\boldsymbol{t}',\bar{\boldsymbol{t}}',\zeta)\\&\qquad\times\bar{\Psi}(s-\xi(\boldsymbol{a},\zeta^2)-\xi(\bar{\boldsymbol{a}},\zeta^{-2}),\boldsymbol{x}+\boldsymbol{a},\bar{\boldsymbol{x}}+\bar{\boldsymbol{a}},\boldsymbol{t},\bar{\boldsymbol{t}},\zeta)^{-1}\end{aligned}$$

（$s,s',\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\bar{\boldsymbol{a}},\bar{\boldsymbol{b}},\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\boldsymbol{t},\boldsymbol{t}',\bar{\boldsymbol{t}},\bar{\boldsymbol{t}}$ は任意の値をとる）が得られる．さらにこれから $\tau,\sigma,\bar{\sigma}$ に対する双線形方程式が得られる．

5　まとめと展望

- 拡張戸田階層は 1 次元戸田階層に対数的時間発展の系列を付け加えたものである．これを 2×2 行列形式に書き直して拡張 NLS-戸田階層を得た．
- 拡張 NLS-戸田階層は NLS 階層の $2+1$ 次元拡張と似た構造をもつ．そのことを手がかりにして波動函数と τ 函数に対する双線形方程式を導いた．これは Milanov の主張を別の形で確かめたことになる．
- 拡張 NLS-戸田階層にならって AL 階層の対数的時間発展による拡張（拡張 AL 階層）を構成し，波動函数と τ 函数に対する双線形方程式を導いた．
- 以上の結果はベクトル値の場合（ベクトル値 NLS 階層）などにも一般化できるだろう．

参考文献

[1] G. Carlet, B. Dubrovin, Y. Zhang, The extended Toda hierarchy, Moscow Math. J. **4** (2004), 313–332.

[2] T. Milanov, Hirota quadratic equations for the extended Toda hierarchy, Duke. Math. J. **138** (2008), 161–178.

[3] A.P.E. ten Kroode and M.J. Bergvelt, The homogeneous realization of the basic representation of $A_1^{(1)}$ and the Toda lattice, Lett. Math. Phys. **12** (1986), 139–147.

[4] S. Kharchev, A. Mironov and A. Zhedanov, Faces of relativistic Toda chain, Int. J. Mod. Phys. **A12** (1997), 2675–2724.

[5] Yu.B. Suris, A note on the integrable discretization of the nonlinear Schrödinger equation, Inverse Problems **13** (1997), 1121–1136.

[6] T. Sadakane, Ablowitz-Ladik Hierarchy and 2-component Toda Lattice Hierarchy, J. Phys. A: Math. Gen. **36** (2003), 87–97.

[7] I.A.B. Strachan, A new family of integrable models in $(2+1)$-dimensions associated with Hermitian symmetric spaces, J. Math. Phys. **33** (1992), 2477–2482.

[8] S. Kakei, T. Ikeda and K. Takasaki, Hierarchy of $(2+1)$-dimensional nonlinear Scrödinger equations, self-dual Yang-Mills equation, and toroidal Lie algebras, Ann. Henri Poincaré **3** (2002), 817–845.

[9] V.E. Vekslerchik, Functional representation of the Ablowitz-Ladik hierarchy, J. Phys. A: Math. Gen. **31** (1998), 1087–1099; ditto II, J. Nonlin. Math. **9** (2002), 157–180.