跡公式と定常KdV階層の完全積分可能性

松島, 正知
同志社大学大学院工学研究科

大宮, 眞弓
同志社大学生命医科学部

https://doi.org/10.15017/18695

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 21ME-S7 (5), 2010-03. Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University

応用力学研究所研究集会報告 No.21ME-S7
「非線形波動研究の現状と将来 — 次の 10 年への展望」（研究代表者　矢嶋　徹）
共催　九州大学グローバル COE プログラム
「マス・フォア・インダストリ教育研究拠点」

Reports of RIAM Symposium No.21ME-S7
Current and Future Research on Nonlinear Waves — Perspectives for the Next Decade
Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 19 - 21, 2009

Co-organized by
Kyushu University Global COE Program
Education and Research Hub for Mathematics - for - Industry

Article No. 5 (pp. 29-34)

跡公式と定常KdV階層の完全積分可能性

松島 正知 (Matsushima Masatomo), 大宮 眞弓 (OHMIYA Mayumi)

(Received February 1, 2010)

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2010

跡公式と定常 KdV 階層の完全積分可能性

同志社大学大学院工学研究科　松島正知 (Masatomo Matsushima)
同志社大学生命医科学部　大宮眞弓 (Mayumi Ohmiya)

1. はじめに

本報告書は、まず、Deift-Trubowitz が証明した 1 次元 Schrödinger 作用素

$$H(u) = -\frac{d^2}{dx^2} + u(x)$$

に対する跡公式 [1]、[2]

$$\sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j f_j(x)^2 = 1 \tag{1}$$

に注目した。ここに $f_j(x)$ は作用素 $H(u)$ の何らかの固有関数である。以後、本報告書中では、この跡公式 (1) を有限型 Deift-Trubowitz 跡公式とよぶことにする。具体的には、急減少無反射ポテンシャルおよび、周期的有限帯ポテンシャルに対して (1) が成り立つ事が知られている。

そして、有限型 Deift-Trubowitz 跡公式 (1) から、ベクトル空間の基底の変換公式だけで、ポテンシャル $u(x)$ は、n 次定常 KdV 方程式

$$\frac{d}{dx}\left(Z_{n+1}(u) - \sum_{j=1}^{n} c_j Z_j(u)\right) = 0 \tag{2}$$

を満たす事が示される。これは、有名な Novikov の定理の別証明になっている。また、この定理により、高階定常 KdV 方程式 (2) を代数幾何的ポテンシャル [3] を特徴付ける微分方程式として位置づけることが可能となる。

次に、高階定常 KdV 方程式 (2) の完全積分可能性を第一積分を代数的に構成することにより示す。第一積分を構成するため、スペクトル型 M 関数の構成、および、その一般化を行う。

2. さまざまなポテンシャルに対する跡公式

$u(x)$ が急減少ポテンシャルの場合の跡公式は、$-\eta_j^2, j = 1, 2, \cdots, n$ を離散スペクトルとして

$$\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{k} r_{\pm}(k) f_{\pm}(x,k)^2 dk + 2\sum_{j=1}^{n} \frac{c_{\pm j}}{\eta_j} f_{\pm}(x, i\eta_j)^2 + f_{\pm}(x,0)^2 = 1 \tag{3}$$

である。ここで、(3) 式の $r_{\pm}(k)$ は S-マトリックスの要素で反射係数、$c_{\pm j}$ は正規比例数、$f_{\pm}(x,\lambda)$ は左右 Jost 解である。

無反射 $r_{\pm}(k) = 0$ の場合は、

$$\sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j f_j(x)^2 = 1 \tag{4}$$

になる。ここで、(4) 式の $f_j(x)$ は $H(u)$ の 2 乗可積分な固有関数である。

他方、$u(x)$ が周期的ポテンシャルの跡公式は、

$$\sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j g_j(x)^2 = 1 \tag{5}$$

である。(5) 式の $g_j(x)$ は $H(u)$ の周期固有関数である。不安定帯が有限個を除いて一点に縮退する、いわゆる、有限帯ポテンシャルの場合は、

$$\sum_{j=0}^{n} \varepsilon_j g_j(x)^2 = 1 \tag{6}$$

になる。

このように、(4) 式と (6) 式より、急減少無反射ポテンシャルと周期的有限帯ポテンシャルに対して、有限型 Deift-Trubowitz 跡公式 (1) が成り立つことが分かる。

3. n 次定常 KdV 方程式と Novikov の定理

定理 1. n を自然数として、作用素 $H(u)$ に対して、$n+1$ 個の互いに相異なる固有値 $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \cdots,\lambda_n$ と対応する固有関数 $f_0(x),\ f_1(x),\ \cdots,f_n(x)$, および零でない定数 $\varepsilon_0,\ \varepsilon_1,\ \cdots,\varepsilon_n$ が存在して、有限型 Deift-Trubowitz 跡公式

$$\sum_{j=0}^{n}\varepsilon_j f_j(x)^2 = 1$$

が成立するならば、定数 $c_1,\ c_2,\ \cdots,c_n$ が存在して、ポテンシャル $u(x)$ は n 次定常 KdV 方程式

$$\frac{d}{dx}\left(Z_{n+1}(u)-\sum_{j=1}^{n}c_jZ_j(u)\right)=0$$

を満たす。逆もまた成立する。

これは跡公式を用いる事により、ベクトル空間の基底の変換だけで示す事ができる。詳しい証明は、近刊の [3] を参照されたい。

この方法は、Novikov の定理 [4] の別証明となっている。また、この定理より、n 次定常 KdV 方程式 (2) を代数幾何的ポテンシャルを特徴付ける微分方程式として位置づけることが可能になった。

4. KdV 多項式

$Z_n(u)$ を、Λ-作用素と呼ばれる形式的擬微分作用素

$$\Lambda(u)=\left(\frac{d}{dx}\right)^{-1}\left(\frac{1}{2}u'+u\frac{d}{dx}-\frac{1}{4}\frac{d^3}{dx^3}\right)$$

を用いて、漸化式

$$Z_n(u)=\Lambda(u)Z_{n-1}(u),\qquad Z_0(u)=1 \tag{7}$$

で定義する。(7) 式の解は微分多項式である。$Z_n(u)$ を n 次 KdV 多項式とよぶことにする。詳しくは [3] を参考されたい。

最初のいくつかを載せておく。

$$Z_1(u)=\frac{1}{2}u,\quad Z_2(u)=-\frac{1}{8}u''+\frac{3}{8}u^2$$
$$Z_3(u)=\frac{1}{32}u^{(4)}-\frac{5}{16}uu''-\frac{5}{32}(u')^2+\frac{5}{16}u^3$$

5. M 関数

定義 1. n 次代数幾何的ポテンシャル $u(x)$ に対して、

$$Z_{n+1}(u)-\sum_{j=0}^{n}c_jZ_j(u)=0 \tag{8}$$

を基本関係式と呼ぶ。定数 c_0、c_1、$\cdots$、c_n を特性係数とよぶ。また、$n+1$ 次多項式

$$\Omega(\lambda)=\lambda^{n+1}-\sum_{j=0}^{n}c_j\lambda^j$$

を特性多項式という。

基本関係式 (8) に対して、

$$M(x) = Z_n(u(x)) - \sum_{j=1}^{n} c_j Z_{j-1}(u(x)) \tag{9}$$

で定義される関数を $u(x)$ に対する M 関数という。この関数 (9) は、基本関係式 (8) の添字を 1 つずらしたものである。

$M(x)$ に漸化作用素 $\Lambda(u)$ を作用させると、基本関係式より、

$$\Lambda(u)M(x) = Z_{n+1}(u) - \sum_{j=1}^{n} c_j Z_j(u) = c_0 Z_0(u) \tag{10}$$

が成立する。等式 (10) の両辺を x で微分すると、$c_0Z_0(u)$ は定数なので、

$$\frac{d}{dx}\Lambda(u)M(x) = \left(\frac{1}{2}u' + u\frac{d}{dx} - \frac{1}{4}\frac{d^3}{dx^3}\right)M(x) = 0 \tag{11}$$

が成立する。式 (11) は、Appell-Lindemann 方程式とよばれる。

6. Appell-Lindemann の補題

補題 1. 関数 $v(x)$、$u(x)$ は微分可能な関数とする。$y = f_1(x)$、$y = f_2(x)$ が 2 階線形常微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} = v(x)\frac{dy}{dx} + u(x)y$$

の解の基本系ならば、

$$g_1(x) = f_1(x)^2,\ g_2(x) = f_1(x)f_2(x),\ g_3(x) = f_2(x)^2$$

で定義される関数 $z = g_1(x)$、$z = g_2(x)$、$z = g_3(x)$ は 3 階線形常微分方程式

$$\frac{d^3z}{dx^3} = 3v(x)\frac{d^2z}{dx^2} + (4u(x) - 2v(x)^2 + v'(x))\frac{dz}{dx} + (2u'(x) - 4v(x)u(x))z$$

の解の基本系である。特に $v(x) \equiv 0$ ならば 3 階線形常微分方程式

$$\frac{d^3z}{dx^3} = 4u(x)\frac{dz}{dx} + 2u'(x)z$$

の解の基本系である。

この補題より、$M(x)$ を解の基本形で書き表すと、

$$M(x) = \alpha_1 f_1(x)^2 + \alpha_2 f_1(x)f_2(x) + \alpha_3 f_2(x)^2 \quad (\exists\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

になり、この 2 次形式の完全平方可能条件は、

$$\triangle = \alpha_2^2 - 4\alpha_1\alpha_3 = 0 \tag{12}$$

となる。式 (12) を $M(x)$ を使って書き換えると

$$\triangle = M'(x)^2 - 2M(x)M''(x) + 4u(x)M(x)^2 = 0 \tag{13}$$

になる。式 (13) は、x に依存しているようにみえる。しかし、x で微分すると、

$$\frac{d}{dx}\triangle = -2M(x)(M'''(x) - 2u'(x)M(x) - 4u(x)M'(x)) = 0$$

より、式 (13) は、x に依存しないことが判る。

ちなみに、$\triangle = 0$ のとき、$y = \sqrt{M(x)}$ は、

$$\frac{d^2y}{dx^2} = u(x)y$$

の解となる。

7. スペクトル M 関数

KdV 多項式に関する次の展開定理が成立する。

定理 2. 係数 $\alpha_j^{(m)}$、$j=0,1,\cdots,m$ を次の漸化式で定める。

$$\alpha_j^{(m)}=\begin{cases}1, & j=m\\ \alpha_{j-1}^{(m-1)}+\alpha_j^{(m-1)}, & j=1,2,\cdots,m-1\\ \dfrac{(2m)!}{2^{2m}(m!)^2}, & j=0\\ \alpha_0^{(0)}=1. & j=m=0\end{cases}$$

すると、展開公式

$$Z_m(u(x)-\lambda)=\sum_{j=0}^{m}(-1)^{m-j}\alpha_j^{(m)}\lambda^{m-j}Z_j(u(x)) \tag{14}$$

が成立する。

$u(x)$ が n 次代数幾何的ポテンシャルならば、$u(x)-\lambda$ も n 次代数幾何的ポテンシャルであるので、$j=0$、$\cdots$、n に対して λ の $n-j+1$ 次多項式 $a_j(\lambda)$ を

$$a_j(\lambda)=-\alpha_j^{(n+1)}\lambda^{n-j+1}+\sum_{k=j}^{n}\alpha_j^{(k)}c_k\lambda^{k-j} \tag{15}$$

で定めると、

$$Z_{n+1}(u(x)-\lambda)=\sum_{j=0}^{n}a_j(\lambda)Z_j(u(x)-\lambda)$$

が成立する。(16) 式は $u(x)-\lambda$ の基本関係式である。(15) で定義される λ の多項式 $a_j(\lambda)$ がその特性係数である。詳しい証明は [3] を参照されたい。

(14) 式と (16) 式より、スペクトル型 M 関数を、

$$M(x,\lambda)=Z_n(u(x)-\lambda)-\sum_{j=1}^{n}a_j(\lambda)Z_{j-1}(u(x)-\lambda)$$

で定義する。また、スペクトル型 M 関数も、M 関数と同様に Appell-Lindemann 方程式の解であるので、(13) より、

$$\triangle(\lambda)=M_x(x,\lambda)^2-2M(x,\lambda)M_{xx}(x,\lambda)+4(u(x)-\lambda)M(x,\lambda)^2 \tag{16}$$

が成立する。これもまた、x に依存しない。

ちなみに、$\triangle(\lambda_0)=0$ のとき、$y=\sqrt{M(x,\lambda_0)}$ は、

$$\frac{d^2y}{dx^2}=(u(x)-\lambda_0)y$$

の解となる。

8. 一般化 M 関数と第一積分の構成

λ の多項式 $p_j(\lambda)$ を

$$p_j(\lambda)=\begin{cases}\lambda^{n-j}-\displaystyle\sum_{k=j+1}^{n}c_k\lambda^{k-j-1} & (j=0,1,\cdots,n-1)\\ \quad 1, \qquad (j=n)\end{cases} \tag{17}$$

で定義する。

(17) より、$v(x)$ を任意の有理形関数、λ をスペクトル変数として、$v(x)$ に関する一般化 M 関数を

$$\tilde{M}(x,\lambda;v) = Z_n(v(x)) + \sum_{j=0}^{n-1} p_j(\lambda) Z_j(v(x))$$

で定義する。一般化 M 関数は、スペクトル型 M 関数と同じ形をしているが、$v(x)$ は、あくまでも任意の有理形関数に対して考えたものなので、スペクトル型 M 関数とは、別物である。

関数 $v(x)$ の微分多項式 $M_k(v(x))$、$k=0,1,2,\cdots,n+1$ を次で定義する。

$$M_k(v(x)) = \begin{cases} Z_{n-k+1}(v(x)) - \displaystyle\sum_{j=k}^{n} c_j Z_{j-k}(v(x)),\ k=0,1,2,\cdots,n \\ Z_0(v(x)) = 1,\ k=n+1 \end{cases} \tag{18}$$

すると、

$$\tilde{M}(x,\lambda;v) = \sum_{k=1}^{n+1} M_k(v)\lambda^{k-1}$$

が成立する。さらに、

$$\frac{d}{dx}\Lambda(v)M_k(v(x)) = \frac{d}{dx}M_{k-1}(v(x)), \quad (k=1,2,\cdots,n+1)$$

が成立する。詳しい証明は、[3] 参照のこと。

したがって、(16) 式より、有理形関数 $v(x)$ と n 次定常 KdV 方程式 (2) に対して定まる関数 $\tilde{\triangle}(x,\lambda;v)$ を、

$$\tilde{\triangle}(x,\lambda;v) = \tilde{M}_x(x,\lambda;v)^2 - 2\tilde{M}(x,\lambda;v)M_{xx}(x,\lambda;v) + 4(v(x)-\lambda)\tilde{M}(x,\lambda;v)^2 \tag{19}$$

で定義して、積分生成多項式とよぶことにする。

積分生成多項式 (19) を微分すると

$$\frac{d}{dx}\tilde{\triangle}(x,\lambda;v) = 8\tilde{M}(x,\lambda;v)\frac{d}{dx}M_0(v(x))$$

である。

積分生成多項式は、(18) より、

$$\tilde{\triangle}(x,\lambda;v) = -4\lambda^{2n+1} + \sum_{j=0}^{2n+1} I_j(v(x))\lambda^j \tag{20}$$

が成立する。積分生成多項式 (20) の係数 $I_j(v(x))$、$j=0,1,\cdots,2n$ は $v(x)$ の微分多項式で、n 次定常 KdV 方程式の第一積分になる。

ここで、

$$8\tilde{M}(x,\lambda;v)\frac{d}{dx}M_0(v(x)) = 8\left(\sum_{k=1}^{n+1} M_k(v(x))\lambda^{k-1}\right)\frac{d}{dx}M_0(v(x))$$

であるから、これは n 次の多項式である。そこで積分生成多項式 $\tilde{\Delta}(x,\lambda;v)$ を次のように分解する。

$$\tilde{\triangle}_1(x,\lambda;v) = \sum_{j=n+1}^{2n+1} I_j(v)\lambda^j \qquad \tilde{\triangle}_2(x,\lambda;v) = \sum_{j=0}^{n} I_j(v)\lambda^j$$

それぞれ微分すると、

$$\frac{d}{dx}\tilde{\triangle}_1(x,\lambda;v) = 0$$

$$\frac{d}{dx}\tilde{\triangle}_2(x,\lambda;v) = 8\tilde{M}(x,\lambda;v)\frac{d}{dx}M_0(v)$$

になる。したがって、積分生成多項式 $\tilde{\Delta}(x,\lambda;v)$ は $2n+1$ 次多項式だが、最高次から $n+1$ 次 までの係数は、無条件に定数である。

それに対して、n 次の係数は、

$$I_n(v(x)) = 8M_0(v(x)) = 8\left(Z_{n+1}(v(x)) - \sum_{j=0}^{n} c_j Z_j(v(x))\right)$$

である。また、$n-1$ 次以下は、

$$I_j(v(x)) = 8\int M_{j+1}(v(x))\frac{d}{dx}M_0(v(x))dx,\ j = 0,1,2,\cdots,n-1$$

である。以上のことより

$$I_j(v(x)) = 8\int M_{j+1}(v(x))\frac{d}{dx}M_0(v(x))dx,\ j = 0,1,\cdots,n$$

は、n 次定常 KdV 方程式の非自明な第一積分であり、$I_0,\cdots,I_n$ は関数的に独立な包合的な第一積分である。また、n 次定常 KdV 方程式は自由度 $n+1$ のハミルトン系に同値である。例えば、[5] を参照のこと

したがって、n 次定常 KdV 方程式は, リュウビルの意味で完全積分可能であることが判る。

9. まとめ

本報告書に述べていることは、すでにある程度、証明されている事実である。しかし、既出してるものに比べ、今回の結果には利点がある。

(1) 完全に初等代数的であるため、計算が平易である。

(2) 公式

$$I_j(v) = 8\int M_{j+1}(v)\frac{d}{dx}M_0(v)dx$$

により、第一積分が計算可能である

(3) 第一積分になるメカニズムがはっきり判る。このことは、他のオペレーターへの一般化の可能性を示している。

参考文献

[1] P. Deift, E. Trubowitz ; An identity among squares of eigenfunctions,Comm. Pure Appl. Math., Vol. 34, pp. 713-717, 1981.

[2] H. P. McKean, E. Trubowitz ; Hill's operator and hyperelliptic function theory in the presence of infinitely many branch points, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 29, pp. 143-226, 1976.

[3] 大宮眞弓；可積分系とスペクトル　ー古典解析入門、あるいは Darboux の夢への旅ー (近刊)

[4] B. A. Dubrovin, V. B. Matveev, S. P. Novikov ; Non-linear equations of Korteweg-de Vries type, finite-zone linear operators, and Abelian varieties, Russian Math. Surveys Vol.31, pp. 59–146, 1976.

[5] M.Ohmiya；Trace formulae and completely integrable Hamiltonians. Differential equations and mathematical physics AMS/IP Studies in Advanced Math., Vol.16, pp.307-321, 2000.