Noncommutative Bass-Serre trees and their applications

長谷川, 慧

https://doi.org/10.15017/1866255

出版情報：九州大学, 2017, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：

（様式６－２）

氏　　　名	長谷川　慧
論　文　名	Noncommutative Bass-Serre trees and their applications （非可換 Bass-Serre ツリーとその応用）
論文調査委員	主　査　　九州大学大学院数理学研究院　准教授　植田　好道 副　査　　九州大学大学院数理学研究院　　教授　綿谷　安男 副　査　　九州大学大学院数理学研究院　准教授　増田　俊彦

論　文　審　査　の　結　果　の　要　旨

作用素環の典型例は、離散群の群環を完備化することにより得られる。離散群の研究は幾何学に由来する新たな考え方を導入することにより格段に深化した。その結果として離散群の群環の完備化として得られる作用素環の研究も非常に深いレベルに達した。しかしながら、作用素環は離散群から得られるものに限らない。ゆえに、離散群から得られる作用素環に限った研究の発展は最良と言えない。他方で、離散群論は作用素環論に対して示唆的で、離散群論の考え方を基に作用素環に対する新たな理論の構築を試みるのは、作用素環論の研究者にとって研究の指導原理の一つであろう。

１９７０年代に生まれた離散群に対する理論に Bass—Serre 理論と呼ばれるものがある。大雑把にはツリーと呼ばれるグラフ（幾何的な対象と捉える）への適当な作用を基に離散群を調べる理論である。そこでの典型例は融合積と呼ばれる離散群に対する一般的構成法であり、この構成法により得られる離散群は一般的に非可換性が極めて高い。また融合積は、位相幾何学の基本群の研究で極めて自然に現れる。

一般的に言って、作用素環論は「無限次元性」と「非可換性」の克服が醍醐味とされる。特に、「非可換性」の克服がより重要かつ困難である。ゆえに、非可換性の高い離散群から得られる作用素環の研究は極めて重要で、融合積群から得られる作用素環は様々な観点から深く研究されている。さらに、ここ２０年強は、作用素環（C*-環、フォンノイマン環の二種有り）の融合積として整理され、一般的な視点からの研究が進んでいる。

離散群の群環から C*-環を得るには、その完備化として重要なものが二種類ある。一つはどのような完備化にも全射準同型を持つ一番大きい完備化の普遍群 C*-環であり、もう一つは正則表現を用いて完備化した縮約群 C*-環である。これらが同型になるのは考察の離散群が従順な場合に限る。ゆえに、融合積群の普遍群 C*-環と縮約群 C*-環は一般に同型ではない。しかしながら、１９８０年代初頭の Cuntz の仕事に始まる研究により融合積群の普遍群 C*-環の K-群と縮約群 C*-環の K-群が自然な同型を持つことが解明された。この事実は K–群の計算で極めて本質的な役割を果たす。なお、そこで鍵となったのが融合積群のツリーへの作用、すなわち、Bass—Serre 理論であった。

抽象的な C*-環に対しても普遍融合積 C*-環と縮約融合積 C*-環というものが導入され、１９９０

年代から研究されている。これらは融合積群の普遍群 C*-環、縮約群 C*-環を自然に一般化したものになっている。すると自然な発想として、融合積 C*-環に対する Bass—Serre 理論というべきものが期待される。しかし、これは簡単ではない。なぜなら、ツリーへの群の作用を抽象的な C*-環の言葉でどう解釈すればよいか全く明らかではないからである。群 C*-環に対する研究成果から、融合積 C*-環に対しては、その普遍版と縮約版の KK-理論的な同値性（KK-同値性）がいつでも成り立つことが期待された。しかし、Bass—Serre 理論の不在が本質的な障害となって証明できずにいた。実際、１９９０年代後半に E. Germain が特別な条件下で自由積（融合積の特別なもの）に対して解決したが、Bass—Serre 理論を避けた議論であり、融合積への一般化はできなかった。長谷川氏は本学位論文で、抽象的な C*-環から出発して、それらの融合積に付随する非可換 Bass—Serre ツリーと呼ぶべきものをうまく定式化した。それに基づき、普遍融合積 C*-環と縮約融合積 C*-環の間の KK-同値性を証明した。

さらに重要なのは、非可換 Bass—Serre ツリーに対する一般論を構築したことである。離散群の解析的な性質は適切な空間への作用を用いて捕まえることができるというのは一種の指導原理である。この指導原理に基づけば、非可換 Bass—Serre ツリーに対しても、そのコンパクト化とそこへの融合積 C*-環の「作用」と言うべきものが期待される。長谷川氏はこれを適当な C*-環として定式化し、ある Cuntz—Pimsner 環への具体的な同型を与えた。新しい数学的対象を調べる際、できるだけ具体的な方法で、より扱いやすい別の数学的対象に表現するのは極めて重要で、Cuntz—Pimsner 環はまさに扱いやすい C*-環の典型である。すなわち、ある種の非可換 Bass—Serre ツリーの「表現論」を展開したと言えよう。また、融合積群の Bass—Serre ツリーへの作用が従順であることの必要かつ十分条件は、各融合積因子群が従順性を有することである。非可換 Bass—Serre ツリーへの「作用」が Cuntz—Pimsner 環で表現できることはこの現象の一般化と見なすべきことである。

先に述べた普遍融合積 C*-環と縮約融合積 C*-環の間の KK-同値性の確立以外にも、本学位論文で長谷川氏が展開した非可換 Bass—Serre ツリーの理論の応用は多い。実際、長谷川氏は、完全 C*-環同士の縮約融合積 C*-環が完全になるという Dykema の定理に始まり、KK-群に対する完全系列まで、ほぼすべての融合積 C*-環に対して知られた重要な命題を統一的かつ概念的に再証明した。これらの命題はそれぞれ独立の研究者達により独立な手法で得られたものであり、長谷川氏の理論がそれらを著しく短いページ数で統合したことは真に喜ばしい。また、非可換 Bass—Serre ツリーの応用は今後も期待される。

以上の結果は、作用素環、特に C*-環の理論において、極めて斬新な手法を構築し、その一つの応用として融合積 C*-環の K-理論に関する懸案を解いた。これは作用素環論において価値ある業績と認められる。

よって、本研究者は博士（数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。