九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

Noncommutative Bass-Serre trees and their applications

長谷川, 慧

https://doi.org/10.15017/1866255

出版情報：九州大学, 2017, 博士（数理学）, 課程博士
バージョン：
権利関係：

KYUSHU UNIVERSITY

（様式３）

氏　　名　：長谷川　慧

論 文 名　：Noncommutative Bass-Serre trees and their applications
（非可換 Bass-Serre ツリーとその応用）

区　　分　：甲

論　文　内　容　の　要　旨

融合積は群論における基本的な構成法の一つであり，組み合わせ的な側面と幾何的な側面の両方を合わせ持つ.離散群の融合積はそれに付随する Bass-Serre ツリーと呼ばれるグラフへと作用し，このような作用はツリーへの群作用の基本的な例の一つであることが Bass-Serre 理論において知られている．本論文では，この Bass-Serre ツリーの類似を C*環に対して考察した.

C*環とは，ヒルベルト空間上の有界線形作用素の為す＊-演算で閉じた代数（多元環）で作用素ノルムについて完備なものを指す． C*環に対する融合積は，Voiculescu によって被約融合積が導入されており，離散群（特に自由群）との類似に基づいて，様々な研究がこれまでに行われてきた．一方で，上述のような幾何的な側面の類似は，これまで研究されてこなかったといえる.

群の融合積とその Bass-Serre ツリーへの作用を考えると，頂点集合と辺集合上の ℓ^2 空間への２つのユニタリ表現が得られる.ユニタリ表現に対応する C*環上の C*双加群（C*-correspondence）を考えることで，一般の被約融合積 C*環に対しても，Bass-Serre ツリーに対応する C*双加群の組が構成できる．この C*双加群を基にして，本論文の前半では，Bass-Serre ツリーのコンパクト化への作用，後半では Julg-Valette によるツリーへ作用する群の KK 理論に関する結果の類似を考察した.

離散群のツリー（より一般に一様に fine な双曲グラフ）への作用は，Bowditch コンパクト化への自己同相写像による作用を誘導する．このコンパクト化は，双曲群の Gromov 境界への作用の類似物と見なすことが出来，Adams による境界従順性の類似が小澤によって得られている．本論文の前半では，このコンパクト化への作用の類似を考察した．より厳密には，与えられた C*環の被約融合積に対して，群の融合積の Bass-Sere ツリーのコンパクト化への作用から定まる被約接合積に対応する C*環を構成した．得られた C*環は接合積の構造を持たない，つまり，コンパクト化上の連続関数環に対応する Cartan 部分環は一般に構成できないが，Cuntz-Pimsner 環としての構造をもつことを証明した．これは，自由群や有限群の融合積の Gromov 境界への作用から定まる接合積 C*環が Cuntz-Krieger 環の構造をもつという Spielberg と岡安による結果の類似とみることが出来る．特に Pimsner 環を用いることで，以下の定理を証明した.

<u>定理１</u>.
任意の被約融合積$(A,E)=(A_1,E_1)\star_D(A_2,E_2)$ に対して，A と $e_1+e_2=1$ を満たす射影 e_1 と e_2 で生成される C*環 $\Delta T(A,E)$ が存在し，次を満たす.

(i) $\Delta T(A,E)$ が核型（resp. 完全）であるための必要十分条件は，A_1 と A_2 が共に核型（resp. 完全）であることである．

(ii) D 上で一致する任意の表現 $\pi_i : A_i \to B(H)$, i=1,2 に対して，もし$B(H)$内の射影 p_1 と p_2で，

$$p_1 + p_2 = 1, \qquad p_i \pi_i(a) p_i = \pi_i\big(E_i(a)\big) p_i \quad (i = 1,2,\ a \in A)$$

を満たすものが存在するならば，π_1 と π_2 は $\Delta T(A,E)$ の表現 π で $\mathrm{a_i}$ $\pi(e_i) = p_i (i = 1,2)$ を満たすものに，一意的に拡張する．

これらの主張は作用の従順性に対応し，特に小澤によるコンパクト化への作用の特別な場合を拡張するものである．応用として，融合積 C*環に対する幾つかの重要な結果に対して，conceptual かつ簡単な証明を与えた．

本論文の後半では，融合積 C*環の K 理論を Bass-Serre ツリーのアイデアを用いて研究した． K 理論とは C*環を非可換位相空間とみたときの，コホモロジー理論に相当するものであり，K 群と呼ばれる不変量の計算は C*環論において基本的な問題である．自由群に対する Cuntz のアイデアを融合積 C*環に適用すると，被約融合積の K 群の計算は，（１）普遍融合積の K 群の計算（完全系列の証明）と（２）普遍融合積と被約融合積の KK 同値性の証明，という二つの問題に分けることが可能となる．後者（２）については，Germain による核型 C*環の自由積に対する結果と，彼の手法を発展させた私の修士課程における結果があるが，一般の核型 C*環に対して適応出来ないものである．一方で，群の設定では，上記（１）（２）の両方が，Julg-Valette と Pimsner の仕事で解決しており，そこではツリーへの作用が本質的な役割を果たしていた．

上述の Bass-Serre ツリーに対応する C*双加群を用いて Julg-Valette の構成を C*環の適応することで，次の定理を得た．

定理２．任意の高々加算個の可分 C*環の被約融合積は，その普遍融合積と自然に KK 同値である．

これは，（２）を完全に解決するものである．この結果は，二つの C*環の融合積に設定で Fima-Germain が独立に得ており，彼らの論文では，更に（１）に対応する KK 群の完全系列が得られている．

次に，定理１で構成した C*環 $\Delta T(A,E)$ の K 理論を考察した．定理２の証明で得られた議論を用いることで，A の $\Delta T(A,E)$ への埋め込みから誘導される K 群の間の射が単射であることが判る．一方で，$\Delta T(A,E)$ の Cuntz-Pimsner 環としての構造から定まる K 群の完全系列と組み合わせることで，Fima-Germain による KK 群の完全系列の別証明を与えた．この証明は直接的ではないが，KK 理論の深い事実に踏み込む必要がないという利点がある．系として，$\Delta T(A,E)$ が$A \oplus D$ と同型になることが判り，$\Delta T(A,E)$ の K 理論が条件付き期待値に依存しないこと，および K 理論的核型性が融合積で閉じることが系として従う．