

Study on Computational Algebraic Geometry : Computing the Frobenius on sheaf cohomology and its applications

工藤, 桃成

<https://doi.org/10.15017/1866254>

出版情報 : 九州大学, 2017, 博士 (機能数理学), 課程博士
バージョン :
権利関係 :

氏 名	工藤 桃成			
論 文 名	Study on Computational Algebraic Geometry: Computing the Frobenius on sheaf cohomology and its applications (計算代数幾何学に関する研究 -層コホモロジー上のフロベニウスの計算とその応用-)			
論文調査委員	主 査	九州大学	准教授	安田 雅哉
	副 査	立教大	教授	横山 和弘
	副 査	横浜国立大学大学院	准教授	原下 秀士
	副 査	富士通研究所	主管研究員	下山 武司

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本論文では、(1) 代数幾何学における射影代数多様体上のコホモロジー群と関連する不変量の計算アルゴリズムについての研究と、(2) 超特別曲線と呼ばれる特殊な代数曲線の定義方程式の全探索に関する研究を行っている。

(1) に関して、射影多様体上の接続層のコホモロジー群の次元計算に対して、Eisenbud や Smith から提案のコホモロジー群の局所双対性を利用した手法と Eisenbud-Fløystad-Schreyer によって提案された Bernšteĭn-Gel'fand-Gel'fand 対応と呼ばれる圏同値を利用した手法の 2 つの既存アルゴリズムが知られている。本論文では、これら 2 つの既存アルゴリズムを数式処理 MAGMA 上で実装し計算速度・空間使用量の 2 つの観点から比較を行うことで、それぞれの計算手法の特徴を解析している。本解析により、射影代数多様体のコホモロジー計算時において、高速かつ少ない空間使用量で計算可能とするアルゴリズムの選択が可能となり、計算代数の分野における実用的な研究結果であると認められる。また、正標数の体上の射影代数多様体の性質を解析する上で重要な役割を果たすフロベニウス写像がある。本論文では、コホモロジー群上のフロベニウス作用によって得られる表現行列を計算するアルゴリズムを示している。これまでの研究では、楕円曲線や超楕円曲線などの特定の代数多様体上のコホモロジー群のフロベニウス作用の計算に関する結果が一部知られていた。これら従来の計算では、代数多様体の開被覆の選択やフロベニウス作用と整合性がある開被覆上でのコホモロジー群の基底の取り方が、定義体や定義方程式に依存していたため、一般の代数多様体に適用可能とする汎用アルゴリズムへの拡張が困難であった。本論文では、完全体上の代数多様体に対し、埋め込まれる射影空間におけるフロベニウス作用と可換となる代数多様体の構成法を示すと共に、フロベニウス作用と整合性がある射影空間上のコホモロジー群の基底を具体的に与えることで、一般の射影代数多様体に適用可能な汎用的な計算アルゴリズムを示している。本アルゴリズムにより、射影代数多様体上のコホモロジー群のフロベニウス作用計算が可能となり、代数幾何学の研究進展における計算ツールとして今後利用されることが期待される。

(2) の研究テーマで扱う超特別曲線はその Jacobian が閉体上で超特異楕円曲線の直積となる曲線として定義される。代数幾何符号において、高い誤り訂正率を実現するために有理点を最も多く持つ最大曲線がよく利用される。最大曲線は超特別曲線であることが知られており、(2) の研究による超特別曲線の全探索により、代数幾何符号で利用する最大曲線を見つけることが可能となる。超特別曲線に関するこれまでの研究では、Abel 多様体などの理論によって、種数が 3 以下の曲線の

存在性・非存在性が伊吹山知義氏、桂利行氏、橋本喜一郎氏らにより示されていた。本論文では、種数が 4 の場合の結果を示している。本論文の主な手法として、種数が 4 を持つ代数曲線モデルを具体的に与え、その曲線モデルが超特別曲線となる判定条件を与えた。より具体的には、代数曲線の定義方程式の係数がある関係式を満たすときに限り超特別曲線となることを利用して、超特別曲線の全探索問題を多変数多項式上の連立代数方程式の求解問題に帰着させた。さらに、帰着した連立代数方程式を効率的に解くため、変数変換を施すことで変数の個数を大幅に削減させると共に、変数の一部に具体的な数値を代入する混合型求解法を提案することで、標数 $p=5, 7$ の有限体上で種数 4 を持つ超特別曲線の全探索に成功している。本結果は、これまでの理論研究と計算代数における手法を巧みに組み合わせた先駆的な研究結果である。

以上の結果は、計算代数と代数幾何学の両分野において価値ある業績と認められる。よって、本研究者は博士（機能数理学）の学位を受ける資格があるものと認める。