

# Study on Computational Algebraic Geometry : Computing the Frobenius on sheaf cohomology and its applications

工藤, 桃成

<https://doi.org/10.15017/1866254>

---

出版情報 : 九州大学, 2017, 博士 (機能数理学), 課程博士  
バージョン :  
権利関係 :

氏 名 : 工藤 桃成

論 文 名 : Study on Computational Algebraic Geometry: Computing the Frobenius on sheaf cohomology and its applications

(計算代数幾何学に関する研究 -層コホモロジー上のフロベニウスの計算とその応用-)

区 分 : 甲

### 論 文 内 容 の 要 旨

本論文では、代数幾何学における代数多様体のコホモロジー群と関連する不変量の計算方法についての研究と、「超特別曲線」と呼ばれる特殊な代数曲線の数え上げを行っている各章の概要は次の通りである。尚、第 1、2、6 章はそれぞれ序論、準備、結論と今後の課題である。

第 3 章では接続層のコホモロジー群の次元の計算アルゴリズムとして現在までに知られている 2 手法を説明し、計算速度・空間使用量などを比較することで各手法の特徴を述べている。1 つ目の手法は局所双対性を基礎とし、Eisenbud、Smith、丸山正樹氏らにより多項式環上のグレブナー基底の応用として提案された。2 つ目の手法は Bernstein-Gel'fand-Gel'fand 対応を基礎としており、Eisenbud-Fløystad-Schreyer により提案された。1 つ目が多項式環上の加群の自由分解計算に基づくのに対し、2 つ目は外積代数上のそれに基づく。Eisenbud et al. は接続層の Tate 分解を外積代数上の計算により構成的に与え、その Betti 図式にコホモロジー群の次元が現れることを示した。これにより、最悪指数時間とされる多項式環上のグレブナー基底計算を回避し、比較的に高速とされる外積代数上のグレブナー基底計算によって、コホモロジー群の次元の高速計算を実現している。

第 4 章では代数多様体のコホモロジー群へのフロベニウス作用を計算するアルゴリズムを提案している。これまでの研究では、超楕円曲線などの特定の場合に対してフロベニウス作用の計算手法が提案され、その高速化が行われてきた。しかし一般の代数多様体について、コホモロジー群へのフロベニウス作用を記号的に計算する手法を与えるには、フロベニウス作用と整合的になるようなコホモロジー群の基底を構成することなどに困難性があった。具体的には、コホモロジー群の計算に必要な開被覆の取り方は一意的でなく、代数多様体の定義方程式や定義体に依存するため、与えられた代数多様体ごとに開被覆とその開被覆上でのコホモロジー群の基底を適切に選ぶ必要があった。そこで本章では、一般の代数多様体に対し、(1) 埋め込む射影空間におけるフロベニウス作用と可換になるような別の代数多様体の構成と、(2) 射影空間上でフロベニウス作用と整合的となるコホモロジー群の基底を構成できたことで、一般の代数多様体に対してフロベニウス作用を計算するアルゴリズムを与えることに成功した。これはコホモロジー群へのフロベニウス作用の構成的定義を与えたことに相当する。また、代数多様体が完全交叉である場合の高速化も行っている。

第 5 章では超特別曲線の数え上げを行っている。超特別曲線はその Jacobian が閉体上で超特異楕円曲線の直積となる曲線として定義される。種数が 3 以下の超特別曲線は、Abel 多様体などの理論主体の手法によって研究されてきた。一方で種数が 4 以上の場合、種数と標数がある関係を満たすなどの特定の場合を除き、超特別曲線の数え上げに関する結果は得られていなかった。この原因

としては、種数が 4 以上の場合は主偏極 Abel 多様体のモジュライの次元と曲線のモジュライの次元が一致せず、Abel 多様体の理論が上手く機能しなかったことなどが考えられる。

そこで本章ではまず、超特別曲線の数え上げ問題をある計算問題に帰着させ、これを解くアルゴリズムを構成している。具体的には、第 4 章で与えたフロベニウス作用の計算手法の系を用いることで、超特別曲線の数え上げは、「候補となる曲線の定義方程式は有限個であり、それらの係数がある代数関係式を満たし、かつ非特異なものを全て列挙すれば十分」であることを示した。

しかし計算総数は標数  $p=5$  の場合でさえ  $5^{(30)}$  個以上もの量であり、現実的な時間での計算は困難だと考えられた。これを解消するため、候補となる定義式の係数を変数とみなし、超特別性の条件から得られる関係式を代数方程式と捉え、その高速求解を行うことで計算総数・時間の大幅な削減を試みた。さらに、曲線の同型変換によって変数の個数を削減した。具体的には、種数 4 の曲線は二次・三次形式により定義されるので、二次形式の固定群の作用により三次式を簡略化することで、変数の個数を 30 から 10 まで削減した。加えて、変数のうち一部には具体的な値を代入する求解法を二重に扱う「ダブルハイブリッド法」というアイデアを提案し、実時間（約 10 日間）での数え上げに成功した。なお、本章の主定理は横浜国立大学の原下秀士氏との共同結果である。