

Rattleback dynamics and its reversal time of rotation

近藤, 洋一郎

<https://doi.org/10.15017/1866252>

出版情報 : 九州大学, 2017, 博士 (理学), 課程博士
バージョン :
権利関係 :

氏 名 : 近藤 洋一郎

論 文 名 : Rattleback dynamics and its reversal time of rotation
(ラトルバックのダイナミクスおよびその反転時間の解析)

区 分 : 甲

論 文 内 容 の 要 旨

ラトルバック,あるいはセルトと呼ばれる玩具のダイナミクスを解析した。ラトルバックは半楕円体状の剛体とみなせる玩具で,コマのように回して遊ぶ。一方方向にはスムーズに回るが,逆方向に回すと短軸まわりの振動(ピッチング)が成長して回転が止まり,反対方向に回りだす。この反直感的な振る舞いの原因は,完全に対称な半楕円体と違ってラトルバックの慣性主軸と主曲率方向がわずかにずれていることにある。このため振動が不安定化し,その振動が0ではない鉛直方向の平均トルクを生み反転がおこる。スムーズに回っているように見える回転方向でも,長軸回りのおそい振動(ローリング)が不安定化し逆向きのトルクを与えるが,通常は反転がおこる前に散逸によって止まってしまう。

本研究では,ラトルバックを特徴付ける量として,鉛直方向の角速度として定義した「スピン」の符号が反転するまでにかかる時間(反転時間)に注目し,滑りおよび散逸がない条件のもとで理論解析および数値シミュレーションを行った。

まず,先行研究[A. Garcia and M. Hubbard, Proc. R. Soc. Lond. A, Vol. 418, pp. 165-197 (1988)]による反転時間の理論を再構成した。彼らは線形化した運動方程式をもとに,微小な振動が生む平均トルクとその振動エネルギーとの比をカップリングの強さを表す無次元量「非対称トルク係数」として導入し,ラトルバックのダイナミクスを調べた。本研究によって,この非対称トルク係数が単純な形,すなわち底面の主曲率の差,水平方向の主慣性モーメントの逆数の差,慣性主軸と主曲率方向のずれの角度の2倍の正弦,およびピッチングとローリングの固有振動数(ピッチ周波数とロール周波数)の比のみの関数,の4つから構成されることがわかった。さらに,ピッチングとローリングが生むトルクが常に逆方向であることのより簡潔な証明を得た。

このトルク係数を用いて,ローリングとピッチングの振動エネルギーおよびスピンの3変数でダイナミクスを記述し,Garcia and Hubbardによる反転時間の表式を導いた。反転時間がトルク係数によって特徴づけられることから,(i)トルク係数の比,あるいは回転方向による反転時間の比は,ピッチ周波数とロール周波数の比の2乗のみで与えられることがわかった。さらに,(ii)密度一定で静的安定な半楕円体では常にピッチ周波数がロール周波数よりも大きいため,これに近い形状のラトルバックでは,ピッチングとスピンのカップリングがローリングとスピンのカップリングよりも非常に強くなり,結果回転方向による反転時間に大きな違いがでることを示した。また,(iii)この周波数比は慣性パラメータよりも形状パラメータである曲率に強く依存することを示し,可能な曲率パラメータの極限でのトルク係数の表式を得た。

以上の理論解析を,運動方程式の数値シミュレーションと比較した。まず,主慣性モーメントと主曲率,および軸のずれの角度を別々に指定できるラトルバックのモデルとして「シェルダンベル

モデル(shell-dumbbell model)」を構成した。このモデルを用いて、典型的なラトルバックがとり得るパラメータの範囲内でパラメータをランダムにとってシミュレーションを行った結果、(i)初期スピンエネルギーが初期の振動エネルギーより十分に大きく、かつ初期スピン速度が重力加速度と重心の高さで決まる時間スケールよりも十分に小さいときに、Garcia-Hubbard 式は非常によく数値シミュレーション結果と一致することがわかった。初期スピン速度が大きい場合、あるいはトルク係数が1より非常に小さい場合、ローリングによる反転が起こらない場合があり、その場合(i)鉛直な定常回転、(ii)スピンの振動が観察された。(i)に関しては、パラメータによって決まるある閾値よりもスピンの大きい場合、定常解である鉛直な回転が微小な摂動に対して安定化することが Bondi によって示されており、その理論とシミュレーションは整合的であった。(ii)に関して、多くの場合スピンは周期的に振動するが、ローリングのトルク係数が非常に小さく初期スピンが大きい場合に、スピンのカオス的振動が観察された。これらの現象は、非ホロノミックな拘束条件がある保存系においてアトラクターおよびカオス的振る舞いが観察される例として興味深い結果である。

理論解析によって得られたスピンおよび振動エネルギーのダイナミクスは周期的な振る舞いを示すが、シミュレーションの結果、2回目以降の反転周期が1回目より短い場合、あるいは2回目以降がカオス的な軌道になる場合があった。詳細な解析は今後の課題であるが、ローリングの復元力が弱い場合に理論における微小振幅の仮定が満たされず、結果周期的な軌道からずれるという仮説を立て、いくつかのパラメータ例で検証を行った。