九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

期間構造モデルの離散化の試み

佐藤, 亜理沙
立教大学大学院理学研究科

筧, 三郎
立教大学理学部

https://doi.org/10.15017/1832820

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 28AO-S6 (1), pp.119-124, 2017-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.28AO-S6
「非線形波動研究の深化と展開」（研究代表者　辻本　諭）

Reports of RIAM Symposium No.28AO-S6

Deepening and expansion of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 3 - November 5, 2016

Article No. 19 (pp. 119 - 124)

期間構造モデルの離散化の試み

佐藤 亜理沙（SATO Arisa），筧 三郎（KAKEI Saburo）

（Received 31 January 2017; Accepted 17 March 2015）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2017

期間構造モデルの離散化の試み

立教大学大学院理学研究科　佐藤 亜理沙 （Sato, Arisa)
立教大学理学部　筧 三郎 （Kakei, Saburo)

概要

金利の期間構造モデルにおいて，Vasicek モデル，CIR モデルなどといったアフィン型モデルは基本的であり，多く利用されてきた．このクラスのモデルでは，対応する微分方程式がリッカチ型になるため，厳密解を明示的に求めることができる．本研究では，時間を離散化したモデルにおいて，同様の考察を試みる．

1　はじめに

数理ファイナンスの研究において，2 項モデルをはじめとするする離散モデルが広く利用されている．例えばヨーロピアンオプションの価格付においても，連続時間モデルに基づいた Black-Scholes 理論 [1] に対し，離散時間モデル (2 項モデル) に基づく Cox-Ross-Rubinstein 理論がある [2].

本稿の目的は，金利の期間構造に対するアフィン型モデルに対して，対応する離散モデルの構築を試みることである．まずは準備として，債券金利の期間構造についてまとめておく [3].

債券は，次の 2 種類に分類できる．

割引債： 額面金額から一定金額差し引いた価格で発行され，満期に額面金額が戻る債券.

利付債：発行時から満期を迎えるまで定期的に利子を受け取れる債券.

金利の期間構造とは，債券の利回りと満期までの残存期間との間にみられる関係を示すものである．満期 T で価格 1 もらえる割引債の時刻 t での価格を $P(t,T)$, 割引債 P の時刻 t から T までの平均利子率 (イールド) を $Y(t,T)$ とおく．すなわち，$P(t,T)e^{(T-t)Y(t,T)}$=1 であり，$Y(t,T)$ は

$$Y(t,T) = -\frac{\log P(t,T)}{T-t} \tag{1.1}$$

と表される．横軸に T(現在からの残存期間)，縦軸に $Y(0,T)$ をとって描いたグラフがイールドカーブである．

節を改めて，割引債価格の数理モデルについて紹介していく．

2　割引債価格の数理モデル (連続時間)

まずは連続時間の場合に，文献 [4] に従って，割引債価格を記述する偏微分方程式を導出する．時刻 t における瞬間的な利子率 $r(t)$ およびマネー・マーケット・アカウント $B(t)$ を次で定める:

$$r(t) = \lim_{T\to t} Y(t,T), \quad B(t) = \exp\left(\int_0^t r(s)ds\right).$$

この $B(t)$ は微分方程式 $\dfrac{dB(t)}{B(t)} = rdt$ を満たすことを注意しておく．ここで，瞬間的な利子率 $r(t)$ に次の仮定をおく:

仮定 1　r は次の確率微分方程式モデルに従うとする:

$$dr = \mu(r,t)dt + \sigma(r,t)dZ \quad (Z(t) \text{ は標準ブラウン運動}).$$

さらに，割引債の価格について，次の仮定をおく:

仮定 2　満期 T の割引債の時刻 $t(< T)$ における価格は r により決まる．(これを $P(r,t,T)$ と表す．)

以下では，満期の異なる 2 つの割引債を利用して，割引債価格の満たす偏微分方程式を導出する．満期が T_1, T_2 の割引債の価格を，それぞれ $P_1 = P(r,t,T_1)$, $P_2 = P(r,t,T_2)$ とおく．これらを用いて，次のポートフォリオ W を作成する:

$$W(t) = \alpha(t)P_1 + \beta(t)P_2 \quad (\alpha(t), \beta(t) \in \mathbb{R}). \tag{2.1}$$

資金が自己充足的であるとの仮定 $(d\alpha(t)P_1 + d\beta(t)P_2 = 0)$ の下では，

$$dW(t) = \alpha(t)dP_1 + \beta(t)dP_2 \tag{2.2}$$

となる．さらに，$P_j = P(r,t,T_j)$ (j=1,2) に対して “伊藤の公式” を用いると，

$$\frac{dP_j}{P_j} = \mu_j(t)dt + \sigma_j(t)dZ \tag{2.3}$$

となる．ただし，μ_j, σ_j は以下のように定義した:

$$\mu_j(t) = P_j^{-1}\left(\mu\frac{\partial P_j}{\partial r} + \frac{\partial P_j}{\partial t} + \frac{\sigma^2\partial^2 P_j}{2\partial t^2}\right), \quad \sigma_j(t) = P_j^{-1}\sigma\frac{\partial P_j}{\partial r}. \tag{2.4}$$

(2.3) を (2.2) に用いると，次が得られる:

$$\frac{dW}{W} = \{\omega\mu_1 + (1-\omega)\mu_2\}dt + \{\omega\sigma_1 + (1-\omega)\sigma_2\}dZ \quad \left(\text{ただし，}\ \omega = \frac{\alpha_1 P_1}{\alpha P_1 + \beta P_2}\ \text{とした}\right). \tag{2.5}$$

ここで，次の重要な仮定を置く．

仮定 3　ポートフォリオ $W(t)$ は，$B(t)$ と同じ形の微分方程式 $\dfrac{dW}{W} = rdt$ を満たす．

この仮定では，ポートフォリオ $W(t)$ の挙動が，標準財 $B(t)$ と一致することを要請しており，Black-Scholes 理論 [1] における「裁定機会は存在しない」という仮定と対応する．その意味で，ここでの導出過程も無裁定価格理論の枠組みの中での議論である．

仮定 3 の下では

$$\omega\mu_1 + (1-\omega)\mu_2 = r, \quad \omega\sigma_1 + (1-\omega)\sigma_2 = 0 \tag{2.6}$$

であるので，

$$\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r}{\sigma_2} =: \lambda \tag{2.7}$$

は，満期 T によらずに決まる（“リスク・プレミアム”）．(2.7) に (2.4) を代入して整理すると，$P = P_1$, P_2 が次の **“期間構造方程式”** を満たすことがわかる:

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \tilde{\mu}\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = rP \qquad (\tilde{\mu} = \mu - \lambda\sigma). \tag{2.8}$$

この偏微分方程式の解が，求めたい割引債の価格を与える．

偏微分方程式 (2.8) の明示的な解を得るために，$P(r,t)$, $\tilde{\mu}(r,t)$, $\sigma(r,t)$ として次のものを考える (“アフィン・モデル”) [3]:

$$P(r,t) = \exp\left[a(t) + b(t)r\right], \tag{2.9}$$

$$\tilde{\mu}(r,t) = \alpha_1(t) + \alpha_2(t)r, \quad \sigma^2(r,t) = \beta_1 + \beta_2(t)r. \tag{2.10}$$

これらを (2.8) に代入して，r^0, r^1 の係数をそれぞれ比較すると，

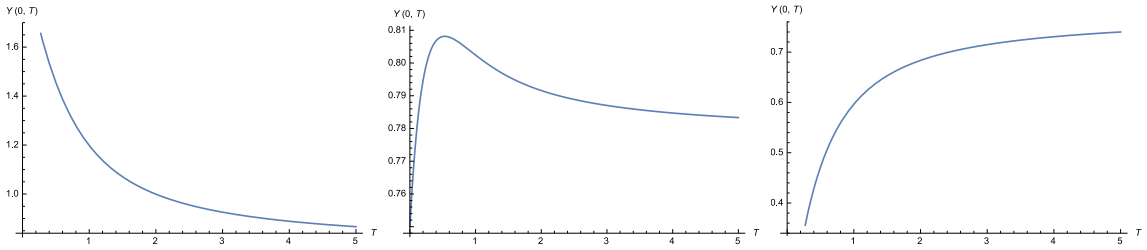
$$\begin{cases} b'(t) = -\alpha_2(t)b(t) - \dfrac{1}{2}\beta_2(t)b(t)^2 + 1, \\ a'(t) = -\alpha_1(t)b(t) - \dfrac{1}{2}\beta_1(t)b(t)^2, \end{cases} \tag{2.11}$$

というリッカチ型の方程式が得られる．

さらに特別な場合として，$\alpha_1 = K\bar{\theta}$, $\alpha_2 = -K$, $\beta_1 = \sigma^2$, $\beta_2 = 0$ (K, $\bar{\theta}$, σ は正の定数) という場合を考える (Vasicek モデル)．このとき，境界条件 $a(T) = b(T) = 0$ の下での (2.11) の解より $Y(t,T)$ の表式が導かれる．特に，現時刻 $t = 0$ におけるイールド $Y(0,T)$ は，次のように与えられる:

$$Y(0,T) = \left(\bar{\theta} - \frac{\sigma^2}{2K^2}\right) + \frac{1 - e^{-kT}}{Tk}\left(r - \bar{\theta} + \frac{3\sigma^2}{4K^2} - \frac{\sigma^2 e^{-KT}}{4K^2}\right).$$

以下は，$\bar{\theta} = 1$, $\sigma = 2$, $K = 3$ の場合のイールドカーブのグラフである．



$r = 2$ (単調減少)　　$r = 0.75$　　$r = 0.1$ (単調増加)

このように Vasicek モデルでは，期間構造方程式 (2.8) の解，および対応するイールドを書き下ろすことができる。他にも Cox-Ingersoll-Ross (CIR) モデルでは，解を明示的に求めることができる [3, 4]。この「解を明示的に書き下すことができる」という性質を保ったままで離散化を行うことが，次節以降の目標である。

3　割引債の価格モデル (離散時間)

ここからは離散時間モデルを考察する (cf. [5])．離散時間の集合を $\{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots, N\}$ とし，満期 N で価格 1 もらえる割引債の時刻 n での価格を $P(n,N)$，時刻 n における瞬間的な利子率を r_n とおく．r_n に対して次のような仮定をおく．

仮定 4　r_n は次の確率差分方程式モデルに従うとする:

$$r_{n+1} - r_n = \hat{\mu}(r,n) + \hat{\sigma}(r,n)\xi_n. \tag{3.1}$$

ただし，確率変数列 $\{\xi_n\}_{n=0,1,\ldots,N-1}$ に対して，次のように定める:

$$\xi_n = \begin{cases} +1 & (\text{時刻 } n \text{ から } n+1 \text{ にかけて，利率が上がる場合}), \\ -1 & (\text{時刻 } n \text{ から } n+1 \text{ にかけて，利率が下がる場合}). \end{cases}$$

仮定 4 より，時刻 $n+1$ での瞬間的な利子率 r_{n+1} は次のように表される:

$$r_{n+1} = \begin{cases} r^u_{n+1} := r_n + \hat{\mu}(r,n) + \hat{\sigma}(r,n) & (\xi_n = +1 \text{ のとき}), \\ r^d_{n+1} := r_n + \hat{\mu}(r,n) - \hat{\sigma}(r,n) & (\xi_n = -1 \text{ のとき}). \end{cases}$$

次に，割引債の価格 $P(n,N)$ と瞬間的な利子率 r_n の間に仮定をおく．

仮定 5　満期 N の割引債の時刻 $n(< N)$ における価格は r_n により決まると仮定し，$P_n = P(r_n, n, N)$ とおく．

$P^u_{n+1} := P(r^u_{n+1}, n+1, N)$，$P^d_{n+1} := P(r^d_{n+1}, n+1, N)$ とすると，

$$P_{n+1} = \frac{P^u_{n+1} + P^d_{n+1}}{2} + \frac{P^u_{n+1} - P^d_{n+1}}{2}\xi_n$$

となり，$\Delta P_n := P_{n+1} - P_n$ とおくと，

$$\begin{aligned} \frac{\Delta P_n}{P_n} &= \underbrace{\left(\frac{P^u_{n+1} + P^d_{n+1}}{2P_n} - 1\right)}_{=:\mu_{j,n}} + \underbrace{\frac{P^u_{n+1} - P^d_{n+1}}{2P_n}\xi_n}_{=:\sigma_{j,n}} \\ &= \mu_{j,n} + \sigma_{j,n}\xi_{j,n} \end{aligned} \tag{3.2}$$

となる (以下でも，Δ は n に関する前進差分を表すものとする)．満期が N_1,N_2 の割引債の時刻 n での価格をそれぞれ $P_{1,n}$,$P_{2,n}$ とおき，次のポートフォリオ W_n を作成する (ただし，$P_{1,n} = P(r_n, n, N_1), P_{2,n} = P(r_n, n, N_2)$ である):

$$W_n = \alpha_n P_{1,n} + \beta_n P_{2,n}.$$

資金が自己充足的あるとの仮定 ($(\Delta\alpha_n)P_{1,n+1} + (\Delta\beta_n)P_{2,n+1} = 0$) の下では，

$$\Delta W_n = \alpha_n \Delta P_{1,n} + \beta_n \Delta P_{2,n}$$

となる．したがって，

$$\frac{\Delta W_n}{W_n} = \{\omega_n\mu_{1,n} + (1-\omega_n)\mu_{2,n}\} + \{\omega_n\sigma_{1,n} + (1-\omega_n)\sigma_{2,n}\}\xi_n \quad \left(\omega_n := \frac{\alpha_n P_{1,n}}{\alpha_n P_{1,n} + \beta_n P_{2,n}}\right).$$

ここで，次の重要な仮定をおく．

仮定 6　ポートフォリオ W_n は，差分方程式 $\dfrac{\Delta W_n}{W_n} = r_n$ を満たす．

この仮定は，連続時間における Black-Scholes 理論 [1] における「裁定機会は存在しない」とすることと対応しており，その意味で，ここでの導出過程も無裁定価格理論の枠組みの中での議論である．

仮定 6 の下では

$$\omega_n\mu_{1,n} + (1-\omega_n)\mu_{2,n} = r_n, \quad \omega_n\sigma_{1,n} + (1-\omega_n)\sigma_{2,n} = 0$$

であるので，

$$\frac{\mu_{1,n}-r_n}{\sigma_{1,n}}=\frac{\mu_{2,n}-r_n}{\sigma_{2,n}}=:\lambda_n \tag{3.3}$$

は，満期 N によらずに決まる．(3.3) に (3.2) の $\mu_{j,n}$, $\sigma_{j,n}$ $(j=1,2)$ を代入して整理すると，$P_n=P_{1,n}$, $P_{2,n}$ が次の **“離散期間構造方程式”** を満たすことがわかる:

$$(1-\lambda_n)P^u_{n+1}+(1+\lambda_n)P^d_{n+1}-2(1+r_n)P_n=0. \tag{3.4}$$

4　離散期間構造方程式の解の考察

偏差分方程式 (3.4) の明示的な解を得るために，

$$P_n(r)=a_n+b_nr \tag{4.1}$$

という形のものを考えてみる．更に，(3.1) の $\hat{\mu}(r,n)$, $\hat{\sigma}(r,n)$, および (3.3) の λ_n について，次の形を仮定する:

$$\hat{\mu}(r,n)=\alpha_{1,n}+\alpha_{2,n}r,\quad \hat{\sigma}(r,n)=\beta_{1,n}+\beta_{2,n}r,\quad \lambda_n=\gamma_{1,n}+\gamma_{2,n}r. \tag{4.2}$$

これらを (3.4) に代入して，r^0,r^1,r^2 の係数をそれぞれ比較すると，

$$\begin{aligned}
r^2 &: \quad 0=\gamma_{r,n}\beta_{2,n}b_{n+1}+b_n,\\
r^1 &: \quad b_{n+1}(1+\alpha_{2,n})=(\gamma_{2,n}\beta_{1,n}+\gamma_{1,n}\beta_{2,n})b_{n+1}+a_n+b_n,\\
r^0 &: \quad a_{n+1}+\alpha_{1,n}b_{n+1}=\gamma_{1,n}\beta_{1,n}b_{n+1}+a_n
\end{aligned}$$

という漸化式が得られる．これらは，条件

$$(1+\alpha_{2,n}-\gamma_{2,n}\beta_{1,n}-\gamma_{1,n}\beta_{2,n}+\beta_{2,n}\gamma_{2,n})(1+\beta_{2,n+1}\gamma_{2,n+1})=\beta_{2,n+1}\gamma_{2,n+1}(\alpha_{1,n}-\gamma_{1,n}\beta_{1,n}) \tag{4.3}$$

の下で次の解を持つ：

$$b_n=b_0\prod_{j=0}^{n-1}(-\beta_{2,j}\gamma_{2,j})^{-1}, \tag{4.4}$$

$$a_n=(1+\alpha_{2,n}-\gamma_{2,n}\beta_{1,n}-\gamma_{1,n}\beta_{2,n}+\beta_{2,n}\gamma_{2,n})b_{n+1}. \tag{4.5}$$

境界条件 $P(r,N,N)=1$ を満たすように，$a_N=1$，$b_N=0$ となる解を求めたい．しかし，(4.4) の形の b_n においては，$b_N=0$ とすると任意の $n(=0,1,\cdots N)$ で $b_n=0$ となってしまう．すなわち，この解は価格式として適切ではない．

[参考]　関係式 (4.3) において，$u_n:=\beta_{2,n}\gamma_{2,n}$, $\tilde{\beta}_n:=\dfrac{\beta_{1,n}}{\beta_{2,n}}$, $\tilde{\gamma}_n:=\dfrac{\gamma_{1,n}}{\gamma_{2,n}}$ とおくと，

$$(1+\alpha_{2,n})+(1-\tilde{\beta}_n-\tilde{\gamma}_n)u_n+(1-\alpha_{1,n}+\alpha_{2,n})u_{n+1}+(1-\tilde{\beta}_n)(1-\tilde{\gamma}_n)u_nu_{n+1}=0$$

と書き換えられる．さらに条件 $\alpha_{1,n}-\alpha_{2,n}-\tilde{\beta}_n-\tilde{\beta}_n-\tilde{\gamma}_n=2$ を要請すれば，広田による差分リッカチ方程式 [6]

$$\Delta u_n=a_n+b_n(u_n+u_{n+1})+c_nu_nu_{n+1}=0$$

と一致する．

5　まとめと今後の課題

本論文では，無裁定価格理論の枠組みで，離散時間での期間構造モデルを提案した．得られた偏差分方程式の特殊解を求めることはできたが，債券価格として満たすべき境界条件を満足させることはできていない．したがって，境界条件を満たす解を見つけ出すことが今後の課題である．指数関数型の解の差分化として，例えば，現在，$P(r,n)=\prod_{j=0}^{n}\frac{1+(a_j+b_jr_j)}{1-(a_{j+1}+b_{j+1}r_j)}$ などが考えられるが，現在のところは満足のいく結果までは，残念ながら得られていない．

連続時間のアフィンモデルの場合には，Vasicek モデル，Cox-Ingersoll-Ross (CIR) モデルなどの特殊な例において，$P(r,t)$ が明示的に与えられている．連続極限で Vasicek モデルの解，CIR モデルの解に収束するような，離散時間モデルの解を見つけることも，今後に向けての重要な課題である．

謝辞

多くの有益なコメントをいただいた査読者の方に感謝いたします．

参考文献

[1] F. Black and M. Scholes, The pricing of options and corporate liabilities, *J. Pol. Econ.* **81** (1973), 637–654.

[2] J.C. Cox, S.A. Ross, M. Rubinstein, Option pricing: A simplified approach, *J. Fin. Econ.* **7** (1979) 229–263.

[3] 木島正明，期間構造モデルと金利デリバティブ，朝倉書店，1999 年.

[4] D.J. Bolder, Affine term-structure models: theory and imprementation, *Bank of Canada Working Paper*, No. 2001-15.

[5] 藤田岳彦，ランダムウォークと確率解析 — ギャンブルから数理ファイナンスへ，日本評論社，2008 年.

[6] 広田良吾，差分方程式講義 – 連続より離散へ –，臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ **8**，サイエンス社，2000 年.