

## 箱と玉の両方に番号が付いた箱玉系について

福田, 亜希子  
芝浦工業大学システム理工学部

山本, 有作  
電気通信大学大学院情報数理工学研究科

岩崎, 雅史  
京都府立大学生命環境学部

石渡, 恵美子  
東京理科大学理学部

他

<https://doi.org/10.15017/1832813>

---

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 28A0-S6 (1), pp.87-92, 2017-03. 九州大学応用力学研究所  
バージョン：  
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.28AO-S6  
「非線形波動研究の深化と展開」 (研究代表者 辻本 諭)

Reports of RIAM Symposium No.28AO-S6

*Deepening and expansion of nonlinear wave science*

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,  
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 3 - November 5, 2016

Article No. 14 (pp. 87 - 92)

# 箱と玉の両方に番号が付いた箱玉系について

福田 亜希子 (FUKUDA Akiko), 山本 有作 (YAMAMOTO Yusaku), 岩崎 雅史 (IWASAKI Masashi), 石渡 恵美子 (ISHIWATA Emiko), 中村 佳正 (NAKAMURA Yoshimasa)

(Received 15 January 2017; Accepted 28 February 2017)



Research Institute for Applied Mechanics  
Kyushu University  
March, 2017

# 箱と玉の両方に番号が付いた箱玉系について

芝浦工業大学システム理工学部	福田 亜希子 (FUKUDA Akiko)
電気通信大学大学院情報理工学研究科	山本 有作 (YAMAMOTO Yusaku)
京都府立大学生命環境学部	岩崎 雅史 (IWASAKI Masashi)
東京理科大学理学部	石渡 恵美子 (ISHIWATA Emiko)
京都大学大学院情報学研究科	中村 佳正 (NAKAMURA Yoshimasa)

## 概要

番号付き箱玉系として、玉に番号を付けて区別した箱玉系および箱に番号を付けて区別した箱玉系が知られている。本報告では、それらの番号付き箱玉系の拡張として、玉と箱の両方に番号を付けて区別する新たな箱玉系を定義し、その保存量について議論する。

## 1 はじめに

箱玉系は一直線上に並べられた複数個の箱を玉が移動する様子を捉えた力学系の総称である [4]。移動規則が異なる複数種の玉を考え、番号を付けることで玉の種類を区別すると、番号付き箱玉系の 1 つが得られる [5]。この玉に番号が付いた箱玉系の運動方程式は

$$\begin{cases} Q_k^{(n+M)} = \min \left( \sum_{i=1}^k Q_i^{(n)} - \sum_{i=1}^{k-1} Q_i^{(n+M)}, E_k^{(n)} \right), & k = 1, 2, \dots, m, \\ E_k^{(n+1)} = Q_{k+1}^{(n)} + E_k^{(n)} - Q_k^{(n+M)}, & k = 1, 2, \dots, m-1, \\ E_0^{(n)} \equiv +\infty, & E_m^{(n)} \equiv +\infty \end{cases} \quad (1.1)$$

で与えられる。ここで、 $Q_k^{(n)}$  は時刻  $n$  において左から  $k$  番目の連続する玉に含まれる番号 1 の玉の個数、 $E_k^{(n)}$  は時刻  $n$  において  $k$  番目と  $k+1$  番目の連続する玉の間にある空き箱の個数を表す。運動方程式 (1.1) は I 型離散ハングリー戸田方程式の超離散版と見なすこともできる [5]。なお、離散ハングリー戸田方程式として I 型と II 型の 2 種類が知られている。一方、玉ではなく、箱に番号が付いた箱玉系の運動方程式は

$$\begin{cases} Q_k^{(n+1)} = \min \left( \sum_{i=1}^k Q_i^{(n)} - \sum_{i=1}^{k-1} Q_i^{(n+1)}, E_k^{(n)} \right), & k = 1, 2, \dots, m, \\ E_k^{(n+M)} = Q_{k+1}^{(n)} + E_k^{(n)} - Q_k^{(n+1)}, & k = 1, 2, \dots, m-1, \\ E_0^{(n)} \equiv +\infty, & E_m^{(n)} \equiv +\infty \end{cases} \quad (1.2)$$

で与えられ、運動方程式 (1.2) は II 型の離散ハングリー戸田方程式の超離散化から導かれる [2]。もちろん、運動方程式 (1.2) で捉えられる箱玉系では番号を付けることで区別された複数種の箱が並ぶ。

本稿では、玉に番号が付いた箱玉系と箱に番号が付いた箱玉系を拡張し、箱と玉の両方に番号が付いた箱玉系を提案する。I 型および II 型の離散ハングリー戸田方程式が含まれる拡張型離散ハングリー戸田方程式は逆固有値問題の研究において導入されているが [1]、この拡張型離散ハングリー戸田方程式の超離散化を通じて箱と玉の両方に番号が付いた箱玉系を導く。また、新たに得られた箱玉系の保存量についても触れるが、拡張型離散ハングリー戸田方程式の保存量に対する議論から始める。

本稿の構成は以下の通りである。第 2 節では、拡張型離散ハングリー戸田方程式について説明した後、拡張型離散ハングリー戸田方程式を超離散化する。続く第 3 節では、拡張型離散ハングリー戸田方程式の超

離散版が運動方程式と見なせる箱と玉の両方に番号が付いた箱玉系を定義する。第4節では、箱のみに番号が付いた箱玉系の場合 [3] に倣い、箱と玉の両方に番号が付いた箱玉系の保存量について議論し、最後に第5節でまとめを述べる。

## 2 拡張型超離散ハングリー戸田方程式

本節では、拡張型離散ハングリー戸田方程式について説明した後に超離散化を施す。[1] によると2つの自然数  $M, N$  が含まれる離散力学系

$$\begin{cases} q_k^{(n+M)} + e_{k-1}^{(n+N)} = q_k^{(n)} + e_k^{(n)}, & k = 1, 2, \dots, m, \\ q_k^{(n+M)} e_k^{(n+N)} = q_{k+1}^{(n)} e_k^{(n)}, & k = 1, 2, \dots, m-1 \end{cases} \quad (2.1)$$

が拡張型離散ハングリー戸田方程式である。ちなみに、離散2次元戸田方程式

$$\begin{cases} q_k^{(s,t+1)} + e_{k-1}^{(s+1,t)} = q_k^{(s,t)} + e_k^{(s,t)}, & k = 1, 2, \dots, m, \\ q_k^{(s,t+1)} e_k^{(s+1,t)} = q_{k+1}^{(s,t)} e_k^{(s,t)}, & k = 1, 2, \dots, m-1 \end{cases}$$

において  $q_k^{(s,t)} \mapsto q_k^{(sN+tM)}$  および  $e_k^{(s,t)} \mapsto e_k^{(sN+tM)}$  のように上付き添え字を変換すると

$$\begin{cases} q_k^{(sN+(t+1)M)} + e_{k-1}^{((s+1)N+tM)} = q_k^{(sN+tM)} + e_k^{(sN+tM)}, & k = 1, 2, \dots, m, \\ q_k^{(sN+(t+1)M)} e_k^{((s+1)N+tM)} = q_{k+1}^{(sN+tM)} e_k^{(sN+tM)}, & k = 1, 2, \dots, m-1 \end{cases}$$

が得られ、 $n = sN + tM$  とすると拡張型離散ハングリー戸田方程式 (2.1) と一致する。つまり、離散2次元戸田方程式の簡約からも拡張型離散ハングリー戸田方程式 (2.1) は導かれる。

拡張型離散ハングリー戸田方程式 (2.1) の第1式は第2式を繰り返し用いると

$$q_k^{(n+M)} = \frac{\prod_{j=1}^k q_j^{(n)}}{\prod_{j=1}^{k-1} q_j^{(n+M)}} + e_k^{(n)} \quad (2.2)$$

と変形できる。(2.2) と (2.1) の第2式に対して  $q_k^{(n)} \mapsto \exp(-Q_k^{(n)}/\varepsilon)$ ,  $e_k^{(n)} \mapsto \exp(-E_k^{(n)}/\varepsilon)$  のように変換し、両辺の対数をとって  $\varepsilon$  をかけ、 $\varepsilon \rightarrow +0$  とすると

$$\begin{cases} Q_k^{(n+M)} = \min \left( \sum_{i=1}^k Q_i^{(n)} - \sum_{i=1}^{k-1} Q_i^{(n+M)}, E_k^{(n)} \right), & k = 1, 2, \dots, m, \\ E_k^{(n+N)} = Q_{k+1}^{(n)} + E_k^{(n)} - Q_k^{(n+M)}, & k = 1, 2, \dots, m-1, \\ E_0^{(n)} \equiv +\infty, & E_m^{(n)} \equiv +\infty \end{cases} \quad (2.3)$$

が得られる。(2.3) を拡張型超離散ハングリー戸田方程式と呼ぶことにする。

## 3 運動規則

本節では、拡張型離散ハングリー戸田方程式 (2.1) が運動方程式となるような箱と玉の両方に番号が付いた箱玉系を定義する。基本的な箱玉系と同じように、無限個の箱を一直線上に並べる。1つの箱には1つの玉しか入らず、玉の個数は有限個とする。ここで、玉と箱の種類は番号で区別され、 $M$  種類の玉と  $N$  種類の箱があるとする。ここで、 $M$  と  $N$  は互いに素であると仮定する。また、玉の番号によらず、連続する玉がなす列をソリトンと呼ぶことにする。

時刻  $n$  において箱と玉の番号を、以下の4つの条件がみたされるように定める。

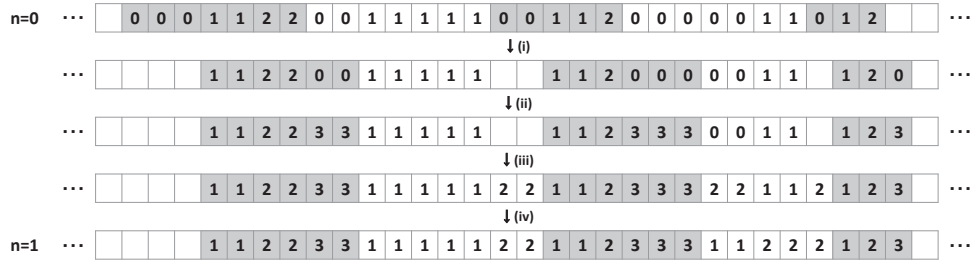


図1 箱と玉の両方に番号が付いた箱玉系における時刻  $n = 0$  から  $n = 1$  までの時間発展例 ( $M = 3$ ,  $N = 2$ ). 灰色のセルは玉がある箱でセル内の番号はその玉の番号, 白色のセルは空き箱でセル内の番号はその箱の番号を表す.

- (a) 全ての玉は番号をもち, その番号は  $n, n + 1, \dots, n + M - 1$  のいずれかである.
- (b) 各ソリトンを構成する玉の列は  $n, n + 1, \dots, n + M - 1$  の番号をもつ玉がいずれも 1 個以上あり, 左からそれらの番号が昇順になるように並ぶ.
- (c) ソリトンとソリトンの間にある全ての箱は番号をもち, その番号は  $n, n + 1, \dots, n + N - 1$  のいずれかである. ソリトンとソリトンに挟まれない箱は番号をもたない.
- (d) 隣り合うソリトンの間には  $n, n + 1, \dots, n + N - 1$  の番号をもつ箱がいずれも 1 個以上あり, 左からそれらの番号が昇順になるように並ぶ.

時刻が  $n$  から  $n + 1$  へ 1 進むとき, 玉の移動と玉の番号の書き換えおよび箱の番号の書き換えを以下のよう

- (i) 番号が  $n$  の玉は左から順に最も近くにある番号が  $n$  の空き箱あるいは番号をもたない空き箱に移動する.
- (ii) 移動した番号が  $n$  の玉の番号を  $n + M$  に変更する.
- (iii) (i),(ii) の操作後に番号が  $n$  の空き箱はその番号を  $n + N$  に変更し, 玉が抜けた空き箱はその番号を  $n + N$  とする. ただし, 左端の玉より左にある箱には番号を付けない.
- (iv) 隣り合うソリトンの間の空き箱はそれらの番号が昇順になるように並べ替える.

図1は (i)~(iv) に従って時刻を  $n = 0$  から  $n = 1$  へ進めたときの変化を表した例である. また, (i)~(iv) を繰り返して  $n = 0$  から  $n = 13$  へ時間発展させた例を図2に示す. 図1と図2より時刻を進めても (a)~(d) の条件がみたされることが分かる.

時刻  $n$  において (a)~(d) の条件がみたされると仮定する. このとき, (b) よりどのソリトンにも全種類の玉が含まれ, (d) より, ソリトンとソリトンの間にある空き箱の列にも全種類の箱があることに注意する. (i) より左から  $k$  番目のソリトンに含まれる番号が  $n$  の玉は  $k$  番目と  $k + 1$  番目のソリトンに挟まれた箱のうち左端の番号が  $n$  の箱あるいは番号なしの空き箱に移動し, (ii) よりその番号が  $n + M$  に変わる. 時刻  $n$  において番号が  $n + 1, n + 2, \dots, n + M - 1$  の玉は移動しないので, 時刻  $n + 1$  において各ソリトンには番号が  $n + 1, n + 2, \dots, n + M$  の玉が含まれる. つまり, 時刻  $n + 1$  において, (a) と (b) の条件がみたされる. 時刻  $n$  における  $k$  番目と  $k + 1$  番目のソリトンの間にある空き箱に着目すると,  $k + 1$  番目のソリトンには番号が  $n$  の玉は必ず含まれ, (iii) より, 玉が抜けた箱および番号が  $n$  の空き箱はそれらの番号が  $n + N$  に変化する. 時刻が  $n$  から  $n + 1$  に進む際に, 番号が  $n + 1, n + 2, \dots, n + N - 1$  の箱はその個数が変化しないので, 時刻  $n + 1$  において番号が  $n + 1, n + 2, \dots, n + N$  の箱が存在する. よって,



このとき、拡大行列  $B^{(n)}$  の固有値は  $A^{(n)}$  の固有値の 5 乗根と一致するので、 $B^{(n)}$  の固有多項式の係数もまた拡張型離散ハンダリ-戸田方程式 (2.1) の保存量である。  $B^{(n)}$  に対して行と列の適切な置換と  $q_k^{(n+i-1)} = U_{(k-1)(M+N)+i}^{(n)}$ ,  $e_k^{(n+i-1)} = U_{k(M+N)-i+1}^{(n)}$  のように変数変換を施すと、 $B^{(n)}$  は以下のように相似変形される。

$$\hat{B}^{(n)} := PB^{(n)}P^\top = \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & U_1^{(n)} \\ 0 & 0 & 0 & U_2^{(n)} \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots \\ 1 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & U_{5m-2}^{(n)} \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{N=2} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{M=3} \end{pmatrix}.$$

ただし、 $P^\top = P^{-1}$  である。例えば、 $m = 2$  ならば  $\hat{B}^{(n)}$  の固有多項式  $f_\lambda(\hat{B}^{(n)}) = \det(\lambda I - \hat{B}^{(n)})$  は  $U_k^{(n)}$  の上付き添え字を省略すると以下のように展開される。

$$f_\lambda(\hat{B}^{(n)}) = \lambda^{10} - (U_1U_2U_3 + U_1U_3U_5 + U_2U_3U_4 + U_2U_4U_6 + U_3U_4U_5 + U_3U_5U_7 + U_4U_5U_6 + U_4U_6U_8 + U_5U_6U_7 + U_6U_7U_8)\lambda^5 + U_1U_2U_3U_6U_7U_8.$$

また、 $m = 3$  ならば  $f_\lambda(\hat{B}^{(n)})$  の展開式は以下ようになる。

$$\begin{aligned} f_\lambda(\hat{B}^{(n)}) = & \lambda^{15} - (U_1U_2U_3 + U_1U_3U_5 + U_2U_3U_4 + U_2U_4U_6 + U_3U_4U_5 + U_3U_5U_7 + U_4U_5U_6 \\ & + U_4U_6U_8 + U_5U_6U_7 + U_5U_7U_9 + U_6U_7U_8 + U_6U_8U_{10} + U_7U_8U_9 + U_7U_9U_{11} \\ & + U_8U_9U_{10} + U_8U_{10}U_{12} + U_9U_{10}U_{11} + U_9U_{11}U_{13} + U_{10}U_{11}U_{12} + U_{11}U_{12}U_{13})\lambda^{10} \\ & + (U_1U_2U_3U_6U_7U_8 + U_1U_2U_3U_6U_8U_{10} + U_1U_2U_3U_7U_8U_9 + U_1U_2U_3U_7U_9U_{11} \\ & + U_1U_2U_3U_8U_9U_{10} + U_1U_2U_3U_8U_{10}U_{12} + U_1U_2U_3U_9U_{10}U_{11} + U_1U_2U_3U_9U_{11}U_{13} \\ & + U_1U_2U_3U_{10}U_{11}U_{12} + U_1U_2U_3U_{11}U_{12}U_{13} + U_1U_3U_5U_6U_8U_{10} + U_1U_3U_5U_8U_9U_{10} \\ & + U_1U_3U_5U_8U_{10}U_{12} + U_1U_3U_5U_9U_{10}U_{11} + U_1U_3U_5U_9U_{11}U_{13} + U_1U_3U_5U_{10}U_{11}U_{12} \\ & + U_1U_3U_5U_{11}U_{12}U_{13} + U_2U_3U_4U_7U_8U_9 + U_2U_3U_4U_7U_9U_{11} + U_2U_3U_4U_8U_9U_{10} \\ & + U_2U_3U_4U_8U_{10}U_{12} + U_2U_3U_4U_9U_{10}U_{11} + U_2U_3U_4U_9U_{11}U_{13} + U_2U_3U_4U_{10}U_{11}U_{12} \\ & + U_2U_3U_4U_{11}U_{12}U_{13} + U_2U_4U_6U_7U_9U_{11} + U_2U_4U_6U_9U_{10}U_{11} + U_2U_4U_6U_9U_{11}U_{13} \\ & + U_2U_4U_6U_{10}U_{11}U_{12} + U_2U_4U_6U_{11}U_{12}U_{13} + U_3U_4U_5U_8U_9U_{10} + U_3U_4U_5U_8U_{10}U_{12} \\ & + U_3U_4U_5U_9U_{10}U_{11} + U_3U_4U_5U_9U_{11}U_{13} + U_3U_4U_5U_{10}U_{11}U_{12} + U_3U_4U_5U_{11}U_{12}U_{13} \\ & + U_3U_5U_7U_8U_{10}U_{12} + U_3U_5U_7U_{10}U_{11}U_{12} + U_3U_5U_7U_{11}U_{12}U_{13} + U_4U_5U_6U_9U_{10}U_{11} \\ & + U_4U_5U_6U_9U_{11}U_{13} + U_4U_5U_6U_{10}U_{11}U_{12} + U_4U_5U_6U_{11}U_{12}U_{13} + U_4U_6U_8U_9U_{11}U_{13} \\ & + U_4U_6U_8U_{11}U_{12}U_{13} + U_5U_6U_7U_{10}U_{11}U_{12} + U_5U_6U_7U_{11}U_{12}U_{13} + U_6U_7U_8U_{11}U_{12}U_{13})\lambda^5 \\ & - U_1U_2U_3U_6U_7U_8U_{11}U_{12}U_{13}. \end{aligned}$$

同様に展開すると、任意の  $m$  に対する固有多項式  $f_\lambda(\hat{B}^{(n)})$  は  $\lambda$  の  $5m$  次多項式になり、 $\lambda^{5(m-k)}$  の項以外は含まれない。 $\lambda^{5(m-k)}$  の係数  $C_{5(m-k)}$  は次のように具体的に表現できる。

$$C_{5(m-k)} = \sum_{(i_1, j_1, \dots, i_k, j_k) \in \Phi_k} \prod_{\ell=1}^k (U_{i_\ell}^{(n)} U_{i_\ell + j_\ell}^{(n)} U_{i_\ell + 2j_\ell}^{(n)}), \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad (4.1)$$

$$\begin{aligned}\Phi_k = \{ & (i_1, j_1, \dots, i_k, j_k) | 1 \leq i_1, i_k + 2j_k \leq 5m - 2, j_\ell \in \{1, 2\}, \ell = 1, 2, \dots, k, \\ & j_{\ell-1} = 1 \text{ のとき } i_\ell \geq i_{\ell-1} + 5, \ell = 2, 3, \dots, k, \\ & j_{\ell-1} = 2, j_\ell = 1 \text{ のとき } i_\ell \geq i_{\ell-1} + 7, \ell = 2, 3, \dots, k, \\ & j_{\ell-1} = j_\ell = 2 \text{ のとき } i_\ell = i_{\ell-1} + 5 \text{ または } i_\ell \geq i_{\ell-1} + 7, \ell = 2, 3, \dots, k\}.\end{aligned}$$

言い換えると (4.1) は拡張型離散ハングリー戸田方程式 (2.1) の保存量である。よって, (4.1) を超離散化すると

$$\mathcal{C}_{5(m-k)} = \min_{(i_1, j_1, \dots, i_k, j_k) \in \Phi_k} \sum_{\ell=1}^k (W_{i_\ell}^{(n)} + W_{i_\ell + j_\ell}^{(n)} + W_{i_\ell + 2j_\ell}^{(n)})$$

が得られ, これが箱と玉の両方に番号が付いた箱玉系の保存量である。ただし,

$$\begin{aligned}W_{(k-1)(M+N)+i}^{(n)} &= Q_k^{(n+i-1)}, \quad k = 1, 2, \dots, m, \quad i = 1, 2, \dots, M, \\ W_{k(M+N)-i+1}^{(n)} &= E_k^{(n+i-1)}, \quad k = 1, 2, \dots, m-1, \quad i = 1, 2, \dots, N\end{aligned}$$

である。短い方から  $k$  番目のソリトンの長さを  $L_k$  とすると, この保存量  $\mathcal{C}_{5(m-k)}$  は十分時刻が進んだ際の  $L_1 + L_2 + \dots + L_k$  と一致する。

## 5 まとめ

本報告では, 拡張型離散ハングリー戸田方程式の超離散版に対応する箱玉系として, 箱と玉の両方に番号が付いた箱玉系を定義した。また, 拡張型離散ハングリー戸田方程式の保存量に対する超離散化から 2 種類の箱と 3 種類の玉で構成される箱玉系の保存量を導出した。なお, 拡張型離散ハングリー戸田方程式の時間発展が相似変形を与える行列の固有多項式に着目し, 拡張型離散ハングリー戸田方程式の保存量を明らかにした点も本報告の成果である。箱と玉の種類が任意である場合の保存量や散乱規則の解明については今後の課題である。

## 参考文献

- [1] K. Akaiwa, Y. Nakamura, M. Iwasaki, A. Yoshida, K. Kondo, An arbitrary band structure construction of totally nonnegative matrices with prescribed eigenvalues, Numer. Algor., DOI 10.1007/s11075-016-0231-7.
- [2] 柿崎 苑美, 福田 亜希子, 石渡 恵美子, 山本 有作, 岩崎 雅史, 中村 佳正, 箱に番号が付いた新しい箱玉系について, 九州大学応力学研究所研究集会「非線形波動研究の拡がり」研究集会報告, **25AO-S2** (2014), 121–126.
- [3] S. Kakizaki, A. Fukuda, Y. Yamamoto, M. Iwasaki, E. Ishiwata, Y. Nakamura, Conserved quantities of the integrable discrete hungry systems, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S (DCDS-S), **8** (2015), 889–899.
- [4] D. Takahashi, J. Satsuma, A soliton cellular automaton, J. Phys. Soc. Jpn., **59** (1990), 3514–3519.
- [5] T. Tokihiro, A. Nagai, J. Satsuma, Proof of solitonical nature of box and ball systems by means of inverse ultra-discretization, Inverse Probl., **15** (1999), 1639–1662.