

離散可積分系によるNewell-Whitham モデルの時間差 分化とその解

鈴木, 大庸
法政大学大学院理工学研究科

磯島, 伸
法政大学理工学部

<https://doi.org/10.15017/1832809>

出版情報：応用力学研究所研究集会報告．28A0-S6 (1), pp.61-66, 2017-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：



応用力学研究所研究集会報告 No.28AO-S6
「非線形波動研究の深化と展開」 (研究代表者 辻本 諭)

Reports of RIAM Symposium No.28AO-S6

Deepening and expansion of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 3 - November 5, 2016

Article No. 10 (pp. 61 - 66)

離散可積分系による Newell-Whitham モデルの時間差分 化とその解

鈴木 大庸 (SUZUKI Kouyo), 磯島 伸 (ISOJIMA Shin)

(Received 15 January 2017; Accepted 9 March 2017)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2017

離散可積分系による Newell-Whitham モデル の時間差分化とその解

法政大学大学院理工学研究科 鈴木 大庸 (Kouyo Suzuki)

法政大学理工学部 磯島 伸 (Shin Isojima)

概要

金井らによる先行研究で, ある交通流モデルの方程式と, 可積分方程式である modified Korteweg-de Vries 方程式の対比により, 時間離散 mKdV 方程式を利用した交通流モデルの時間差分化が提出済である. 本研究では, 遅延微分方程式 Newell-Whitham (NW) モデルと可積分である Lotka-Volterra 方程式 (Kac-van Moerbeke 系) との対比に注目し, NW モデルの時間差分化を提案する. また, 得られた離散時間モデルの厳密解についても議論する.

1 はじめに

交通流は, 待ち行列や流体力学など様々な視点からモデル化されている. その中で, 粒子 (車) が限定された方向に衝突や追越しをせずに動き, かつ非対称に相互作用する 1 次元系にモデル化されるものを車追従モデルと呼ぶ (図 1 参照). 1990 年に Whitham によって示された, Newell-Whitham (NW) モデル [1] はその 1 つである. このモデルに対し, 金井, 土谷によって双線形形式を用いた厳密解 [2] が示された. しかし, 現在に至るまで, 時間離散化や超離散化の研究がなされていなかった. 本稿では, [3] の手法を用いて, NW モデルを可積分系と関連付け, その時間離散化を提案する. さらに, 特殊解の導出およびそのグラフの描画を行い, 交通流モデルとしての妥当性を検討する.

2 NW モデルの時間差分化

2.1 NW モデル

時刻 t での, n 番目の車の位置を $x_n(t)$, 先行する $n+1$ 番目の車との車間距離を

$$h_n(t) := x_{n+1} - x_n \quad (1)$$

とする. そして, 車間距離 h に対して最適な速度を返す函数 $V(h)$ (最適速度 (OV) 函数) を導入し, 交通流モデルとして遅延時間を τ とする遅延微分方程式 [1][4]

$$\dot{x}_n(t + \tau) = V(h_n(t)) \quad (2)$$

を考える. 特に,

$$V(h) = V_0[1 - \exp(-(\alpha/V_0)(h - L))] \quad (0 < \alpha) \quad (3)$$

の場合 (図 2 参照) を NW モデルと呼ぶことにする. ここで V_0 は最大速度, L は最小車間距離を意味し, α は $h = L$ における微分係数である.

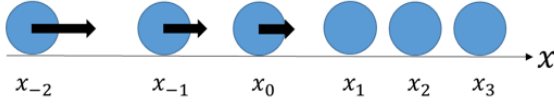


図 1 車が追い越さず, 衝突しない一車線交通

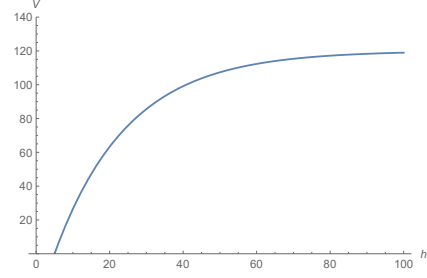


図 2 $V = 120, L = 5, \alpha = 6$ の NW モデルの OV 関数

2.2 NW モデルと離散可積分系

NW モデルを車間距離 h のみを用いた形

$$\dot{h}_n(t + \tau) = V(h_{n+1}(t)) - V(h_n(t)) \quad (4)$$

に書き換える. ここで,

$$s_n(t) = \frac{\alpha}{V_0}(h_n(t) - L) \quad (5)$$

と変換すると

$$\frac{1}{\alpha} \dot{s}_n(t + \tau) = -e^{-s_{n+1}} + e^{-s_n} \quad (6)$$

となる. さらに, 変数変換

$$e^{-s_n} = S_n \quad (7)$$

によって

$$\frac{1}{\alpha} \dot{S}(t) = S_n(t) \{S_{n+1}(t - \tau) - S_n(t - \tau)\} \quad (8)$$

となる.

NW モデルについては, 交通流と類似した系である格子系で, なおかつ可積分である Kac-van Moerbeke (KvM) 系

$$\dot{R}_j = -e^{-R_{j-1}} + e^{-R_{j+1}}, \quad R_j = R_j(T) \quad (9)$$

と対比することにより厳密解を求めることができる [1][4]. ここで KvM 系に NW モデルと同様の
変数変換

$$e^{-R_j} = u_j \quad (10)$$

を施すと,

$$\dot{u}_j + u_j(u_{j-1} - u_{j+1}) = 0, \quad u_j = u_j(T) \quad (11)$$

と Lotka-Volterra (LV) 方程式に変形できる. (8) と (11) はそれぞれ進行波

$$\begin{aligned} S(\phi) &= S_n(t), \quad \phi = \frac{\alpha}{\tau}t + 2\alpha n \\ u(\Phi) &= u_j(T), \quad \Phi = \frac{1}{\tau}T + \alpha j \end{aligned} \quad (12)$$

を仮定すれば同じ方程式

$$\frac{1}{\tau} \dot{S}(\phi) = S(\phi) \{S(\phi + \alpha) - S(\phi - \alpha)\} \quad (13)$$

$$\frac{1}{\tau} \dot{u}(\Phi) = u(\Phi) \{u(\Phi + \alpha) - u(\Phi - \alpha)\}$$

に帰着されるため, 解の一部を共有することがわかり, 独立変数の関係

$$t = \frac{T}{\alpha}, \quad n = \frac{j}{2} \quad (14)$$

がわかる.

2.3 全離散 NW モデル

全離散 LV 方程式 [5] は

$$\frac{v_j^{\tilde{T}+1}}{v_j^{\tilde{T}}} = \frac{1 + \delta v_{j+1}^{\tilde{T}}}{1 + \delta v_{j-1}^{\tilde{T}+1}} \quad (15)$$

で与えられる. これを利用して全離散 NW モデルを導く.

まず, $S_n(t)$ の時間離散化を $K_n^{\tilde{t}} = \frac{1}{\alpha} S_n(\gamma \tilde{t})$ ($t = \gamma \tilde{t}$) とする. (12) 式から

$$S_n(t - \tau) = S_{n-\frac{1}{2}}(t) \quad (16)$$

が成り立ち, その離散類似として

$$K_n^{\tilde{t}-m} = K_{n-\frac{1}{2}}^{\tilde{t}}, \quad m = \frac{\tau}{\gamma} \quad (m \text{ は正の整数}) \quad (17)$$

を仮定する. また, 半離散での進行波の仮定を比較することで

$$\begin{aligned} K_n^{\tilde{t}} &= v_j^{\tilde{T}} \\ \tilde{t} &= \frac{\tilde{T}}{\alpha}, \quad n = \frac{j}{2} \end{aligned} \quad (18)$$

という関係がわかり, 時間差分間隔は $\gamma = \delta/\alpha$ とするのが妥当である.

$$\begin{aligned} v_j^{\tilde{T}+1} &= K_n^{\tilde{T}+\frac{1}{\alpha}}, \quad v_j^{\tilde{T}} = K_n^{\tilde{T}} \\ v_{j+1}^{\tilde{T}} &= K_{n+\frac{1}{2}}^{\tilde{T}} = K_{n+1}^{\tilde{T}-m}, \quad v_{j-1}^{\tilde{T}+1} = K_{n-\frac{1}{2}}^{\tilde{T}+\frac{1}{\alpha}} = K_n^{\tilde{T}+\frac{1}{\alpha}-m} \end{aligned} \quad (19)$$

であるから全離散 NW モデル

$$\frac{K_n^{\tilde{T}+\frac{1}{\alpha}}}{K_n^{\tilde{T}}} = \frac{1 + \alpha\gamma K_{n+1}^{\tilde{T}-m}}{1 + \alpha\gamma K_n^{\tilde{T}+\frac{1}{\alpha}-m}} \quad (20)$$

を得る. 独立変数が整数値をとるために $\alpha = 1/l$ ($l \in \mathbb{N}$) とする. (20) 式は連続極限 $\gamma \rightarrow 0, K_n^{\tilde{T}} = (1/\alpha)S_n(\gamma\tilde{t})$ とすれば (8) 式に帰着できる. さらに, (17) 式から

$$K_{n+1}^{\tilde{T}-m} = K_n^{\tilde{T}+m} \quad (21)$$

と変形されるので, (20) 式は常差分方程式

$$\frac{K_n^{\tilde{T}+\frac{1}{\alpha}}}{K_n^{\tilde{T}}} = \frac{1 + \alpha\gamma K_n^{\tilde{T}+m}}{1 + \alpha\gamma K_n^{\tilde{T}+\frac{1}{\alpha}-m}} \quad (22)$$

に書き換えることもできる.

3 全離散 NW モデルの厳密解

よく知られているように全離散 LV 方程式 (15) 式において,

$$v_j^{\tilde{T}} = \frac{f_{j+2}^{\tilde{T}} f_{j-1}^{\tilde{T}+1}}{f_{j+1}^{\tilde{T}} f_j^{\tilde{T}+1}} \quad (23)$$

と変換すると双線形形式

$$f_{j+1}^{\tilde{T}+1} f_j^{\tilde{T}} - f_{j+1}^{\tilde{T}} f_j^{\tilde{T}+1} = \delta (f_{j+2}^{\tilde{T}} f_{j-1}^{\tilde{T}+1} - f_{j+1}^{\tilde{T}+1} f_j^{\tilde{T}}) \quad (24)$$

が得られる [5]. 1 ソリトン解は

$$f_j^{\tilde{T}} = 1 + e^{kj - \omega\tilde{T}}, \quad \omega = \log \left(\frac{1 + \delta(1 + e^{-k})}{1 + \delta(1 + e^k)} \right) \quad (25)$$

で与えられる. ここで, (18) 式から

$$g_n^{\tilde{T}} = f_j^{\tilde{T}} = 1 + e^{2kn - \alpha\Omega\tilde{t}}, \quad \Omega = \log \left(\frac{1 + \alpha\gamma(1 + e^{-k})}{1 + \alpha\gamma(1 + e^k)} \right) \quad (26)$$

を考える. また, (17) 式から関係式

$$g_n^{\tilde{T}-m} = g_{n-\frac{1}{2}}^{\tilde{T}} \quad (27)$$

を仮定すると

$$m = -\frac{k}{\alpha\Omega} \quad (28)$$

を得る. よって, 進行波の速さは $|\alpha\Omega/2k| = 1/(2m)$ である.

$$\begin{aligned} f_{j+2}^{\tilde{T}} &= f_{2n+2}^{\tilde{T}} = g_{n+1}^{\tilde{T}}, & f_{j-1}^{\tilde{T}+1} &= f_{2n-1}^{\alpha\tilde{T}+1} = g_{n-\frac{1}{2}}^{\tilde{T}+\frac{1}{\alpha}} = g_n^{\tilde{T}-m+\frac{1}{\alpha}} \\ f_{j+1}^{\tilde{T}} &= f_{2n+1}^{\tilde{T}} = g_{n+\frac{1}{2}}^{\tilde{T}} = g_{n+1}^{\tilde{T}-m}, & f_j^{\tilde{T}+1} &= f_{2n}^{\alpha\tilde{T}+1} = g_n^{\tilde{T}+\frac{1}{\alpha}} \end{aligned} \quad (29)$$

であるから, (23) 式より

$$K_n^{\tilde{T}} = \frac{g_{n+1}^{\tilde{T}} g_n^{\tilde{T}-m+\frac{1}{\alpha}}}{g_{n+1}^{\tilde{T}-m} g_n^{\tilde{T}+\frac{1}{\alpha}}} \quad (30)$$

は (20) 式の厳密解となる. この解はソリトン解の特殊化により得られるため $|n| \rightarrow \infty$ のとき $K_n^{\tilde{T}} \rightarrow 1$ を満たしている. なお, $g_n^{\tilde{T}}$ が満たす双線形形式は

$$g_{n+1}^{\tilde{T}-m+\frac{1}{\alpha}} g_n^{\tilde{T}} - g_{n+1}^{\tilde{T}-m} g_n^{\tilde{T}+\frac{1}{\alpha}} = \alpha\gamma \left(g_{n+1}^{\tilde{T}} g_n^{\tilde{T}-m+\frac{1}{\alpha}} - g_{n+1}^{\tilde{T}-m+\frac{1}{\alpha}} g_n^{\tilde{T}} \right) \quad (31)$$

である.

4 数値シミュレーション

厳密解 (30) 式の特別な場合として $g = \text{定数}$, $K_n^{\tilde{T}} = 1$ という定数解が得られる. 非自明な解について以下に述べる. (26) 式と (28) 式より, α, γ, m を与えると k は特定の値に定まる. すなわち, k は

$$\left(\frac{e^k + \alpha\gamma e^k + \alpha\gamma}{e^k + \alpha\gamma e^k + \alpha\gamma e^{2k}} \right)^{\alpha m} = \frac{1}{e^k} \quad (32)$$

を満たさねばならない. 任意の α, γ, m に対し $k = 0$ は (32) 式を満たす. また, ある k が (32) 式を満たせば $-k$ も満たす. 一般に複素数解 k が存在し得るが, このとき解 $K_n^{\tilde{T}}$ は複素数値をとり, 交通流モデルの解として妥当ではない.

α, γ, m の値を適当に与え, 数値的に実数解 k を求めて厳密解のグラフを描いてみる. 図 3, 4 は $\alpha = 1$ でプロット範囲が $-10 \leq \tilde{t} \leq 10, -5 \leq n \leq 5$ の場合である.

図 5, 6 は $\alpha = 1/2$ でプロット範囲が $-10 \leq \tilde{t} \leq 10, -5 \leq n \leq 5$ の場合である.

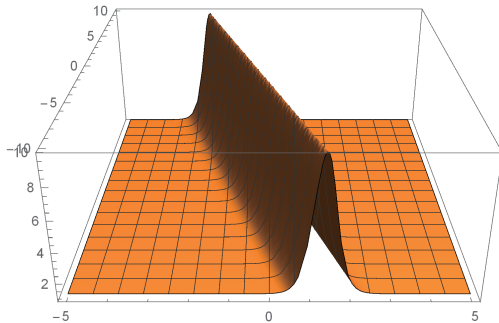


図 3 $\gamma = 0.1, m = 3, k \cong 2.88$

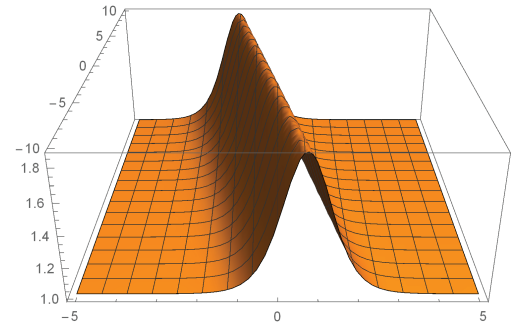


図 4 $\gamma = 0.1, m = 5, k \cong 1.25$

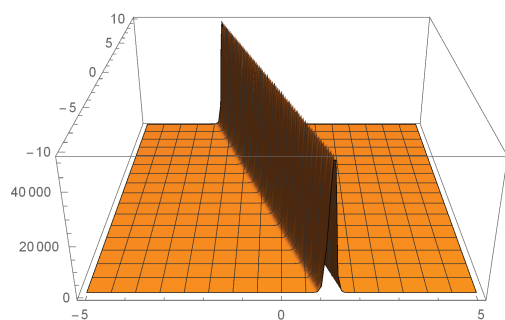


図 5 $\gamma = 0.05, m = 3, k \cong 11.13$

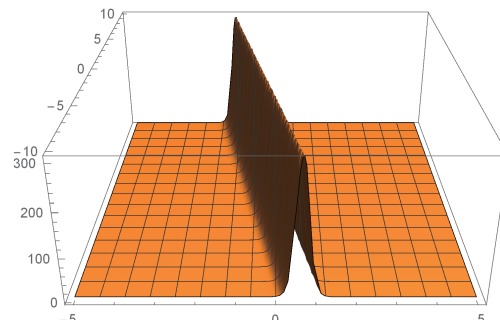


図 6 $\gamma = 0.05, m = 5, k \cong 6.03$

図 3～図 6 から, 1 ソリトン解のグラフになっており, 車間距離の分布が後方へ伝わる様子を表していることが分かる. また, 遅延 m を大きくすることによって, 進行波の速さが小さくなることがグラフの概形から読み取れる.

5 まとめ

本稿では, 進行波解を共有することから, NW モデルは LV 方程式と対比でき, 可積分系と関連付けることによって NW モデルの全離散類似と 1 ソリトン解に対応する厳密解を求めることができた. この厳密解はソリトンパラメータ k が特定の値に制限され自由度がないが, N ソリトン解に対応する厳密解を求めることは課題の 1 つである. 一方, [2] で従属変数を 2 つ用いた双線形形式による半離散系の厳密解が示されており, その解は自由パラメータを 1 つ持つ. このことから, 離散系においても自由パラメータを持つ解を導出できると考えられるため, これを実際に導出し, 交通流モデルとして妥当な解を与えるパラメータの条件を調べる必要がある. 今後, 超離散化を行うとともに, 適切な境界条件の下でのコンピューター上での計算, シミュレーションによって, 交通流モデルとしての解析を行うことが課題となる.

参考文献

- [1] G.B.Whitham, Proc. R. Soc. London Ser. A428 (1990) 49.
- [2] M.Kanai and Y.Tutiya, J. Phys. Soc. Jpn.76 (2007) 083002.
- [3] M.Kanai, S.Isojima, K.Nishinari and T.Tokihiro, Phys. Rev. E, 79 (2009) 056108.
- [4] 金井政宏, 杉山雄規, 『時間遅れ最適速度モデルの厳密解について』, Proceedings of the Symposium on Simulation of Traffic Flow, 13 (2007).
- [5] 中村佳正 編, 『可積分系の応用数理』, 裳華房 (2000).