階段型バネ定数で支えられた糸のたわみ問題に対応するソボレフ不等式の最良定数

山岸, 弘幸
東京都立産業技術高等専門学校

https://doi.org/10.15017/1832808

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 28AO-S6 (1), pp.53-60, 2017-03. 九州大学応用力学研究所

応用力学研究所研究集会報告 No.28AO-S6
「非線形波動研究の深化と展開」（研究代表者　辻本　諭）

Reports of RIAM Symposium No.28AO-S6

Deepening and expansion of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 3 - November 5, 2016

Article No. 09 (pp. 53 - 60)

階段型バネ定数で支えられた糸のたわみ問題に対応するソボレフ不等式の最良定数

山岸 弘幸（**Yamagishi Hiroyuki**）

（Received 2 December 2016; Accepted 21 February 2017）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2017

階段型バネ定数で支えられた 糸のたわみ問題に対応するソボレフ不等式の最良定数

都立産技高専　山岸弘幸（Hiroyuki Yamagishi）[1]

概 要

水平な天井からバネ定数 $q(x)$ のゴム膜で支えられた糸に，荷重密度 $f(x)$ を加えたときの糸のたわみ $u = u(x)$ は 2 階線形常微分方程式 $-u''(x) + q(x)u(x) = f(x)$ にしたがう．$q(x)$ は正の区間で a^2，負の区間で b^2 とした，階段型関数の場合を考えた．この様な糸のたわみの最大幅をポテンシャルエネルギーの定数倍で評価する不等式がソボレフ不等式であり，定数倍の内，最も小さい定数である最良定数を求めた．

1　はじめに

ソボレフの補題として知られるソボレフ不等式 [3] は，偏微分方程式の解の一意存在性や時間無限大での漸近挙動などを示す基本的な数式として重要な役割を果たしてきた．ソボレフ不等式の定数倍のうち最も小さい定数を最良定数，最良定数を達成する関数を最良関数と呼ぶ．一般に最良関数は，非線形固有値問題の解となるので，数値計算により近似的に求める場合を除き，陽に求めることは期待できない [6]．先行研究として，タレンティ [7] とマルチ [4] はシュワルツ対称化やハウスドルフ・ヤング不等式などの変分学的手法によりソボレフ不等式の最良定数を求めた．これに対して，渡辺らはヒルベルト空間での再生核を用いて最良定数を求めた [8]．亀高らはヒルベルト空間の境界条件から派生する境界値問題のグリーン関数とヒルベルト空間の再生核が同値な関数となることに着目し，n 次元空間でのソボレフ不等式の最良定数を求めた [2]．[2] の発展としては関数の定義域が境界をもつ場合に考察を進めるべきだが困難である．そこで空間 1 次元，つまり常微分方程式の境界値問題に限定して，棒のたわみ問題 [10]，$(-1)^M(d/dx)^{2M}$[9]，その離散版 [5] に対応するソボレフ不等式の最良定数を求めてきた．本稿は，糸のたわみ問題に対応するソボレフ不等式に焦点をあてる．

水平な天井から一様に分布したバネ定数 $q = a^2$ $(0 < a < \infty)$ のゴム膜で支えられた糸に，荷重密度 $f(x)$ を加えたときののたわみ $u = u(x)$ は 2 階線形常微分方程式 $-u'' + qu = f(x)$ をみたす．無限長の糸のグリーン関数（補題 1.1）に対応するソボレフ不等式の最良定数（定理 1.1）[1] と，半無限長の糸のグリーン関数（補題 1.2）に対応するソボレフ不等式の最良定数（定理 1.2）について述べる．

補題 1.1. 任意の有界連続関数 $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ に対し，境界値問題

$$\begin{cases} -u'' + a^2 u = f(x) & (-\infty < x < \infty) \\ u,\ u' \ :\ \text{bounded} & (-\infty < x < \infty) \end{cases}$$

はただ一つの解をもち，グリーン関数 $G(x, y)$ を用いて次の様に表示される．

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, y) f(y) dy \qquad (-\infty < x < \infty)$$

$$G(x, y) = \frac{1}{2a} e^{-a|x-y|} \qquad (-\infty < x, y < \infty)$$

定理 1.1. 任意の $u,\ u' \in L^2(-\infty,\infty)$ に対し，u によらない正定数 C があって，ソボレフ不等式

$$\left(\sup_{-\infty<y<\infty} |u(y)|\right)^2 \le C \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\,|\,u'(x)\,|^2 + a^2\,|\,u(x)\,|^2\,\Big] dx$$

が成り立つ．C のうち最良のものは，補題 1.1 のグリーン関数 $G(x,y)$ を用いて

$$C_0 = \sup_{-\infty<y<\infty} G(y,y) = G(y_0,y_0) = \frac{1}{2a}$$

である．y_0 は任意の実数である．上の不等式で C を C_0 で置き換えるとき，$u(x) = G(x,y_0)$ の定数倍で等号が成り立つ．

補題 1.2. 任意の有界連続関数 $f(x)$ $(0<x<\infty)$ に対し，境界値問題

$$\begin{cases} -u'' + a^2 u = f(x) & (0<x<\infty) \\ \begin{cases} u(0)=0 & \text{(D)} \\ u'(0)=0 & \text{(N)} \end{cases} \\ u,\ u' \ :\ \text{bounded} & (0<x<\infty) \end{cases}$$

はただ一つの解をもち，グリーン関数 $G(x,y)$ を用いて次の様に表示される．

$$u(x) = \int_0^{\infty} G(x,y) f(y) dy \qquad (0<x<\infty)$$

$$\left\{\begin{array}{ll} G(x,y) = \dfrac{1}{2a}\Big[e^{-a|x-y|} - e^{-a(x+y)}\Big] & \text{(D)} \\ G(x,y) = \dfrac{1}{2a}\Big[e^{-a|x-y|} + e^{-a(x+y)}\Big] & \text{(N)} \end{array}\right. \qquad (0<x,y<\infty)$$

定理 1.2. 任意の $u,\ u' \in L^2(0,\infty)$, $\left\{\begin{array}{ll} u(0)=0 & \text{(D)} \\ \text{none} & \text{(N)} \end{array}\right\}$ に対し，u によらない正定数 C があって，ソボレフ不等式

$$\left(\sup_{0\le y<\infty} |u(y)|\right)^2 \le C \int_0^{\infty} \Big[\,|\,u'(x)\,|^2 + a^2\,|\,u(x)\,|^2\,\Big] dx$$

が成り立つ．C のうち最良のものは，補題 1.2 のグリーン関数 $G(x,y)$ を用いて

$$C_0 = \sup_{0\le y<\infty} G(y,y) = \begin{cases} G(+\infty,+\infty) = \dfrac{1}{2a} & \text{(D)} \\ G(0,0) = \dfrac{1}{a} & \text{(N)} \end{cases}$$

である．上の不等式で C を C_0 で置き換えるとき，

$$u(x) = \begin{cases} \text{none} & \text{(D)} \\ G(x,0) & \text{(N)} \end{cases}$$

の定数倍で等号が成り立つ．

定理 1.1 と定理 1.2 のソボレフ不等式の工学的背景は次の通りである．糸のたわみ $u(x)$ の最大幅の 2 乗は，ポテンシャルエネルギーの正定数倍 C で上から評価される．定数 C のうち最良定数 C は，

糸のたわみのインパルス応答であるグリーン関数の対角線値の最大値である．等号を達成する関数もまた，インパルス応答のある断面で与えられる．

先行研究ではバネ定数を定数と考えてきたが，本稿ではバネ定数が位置に依存する関数 $q(x)$ として，最も簡単な階段型の場合を考える．本稿の構成は次の通りである．第 2 節で主定理を述べる．第 3 節で主定理に対応する糸のたわみ問題のグリーン関数について述べる．第 4 節ではグリーン関数がソボレフ空間とソボレフ内積で再生核となることを示し，第 5 節にて主定理の証明を行う．第 6 節は第 3 節で導いたグリーン関数と，補題 1.1 と 1.2 のグリーン関数の関係性を見る．

2 主定理

図 2.1 のように，バネ定数 $q(x)$ を正の区間で a^2，負の区間で b^2 とする．

$$q(x) = \begin{cases} b^2 & (-\infty < x < 0) \\ a^2 & (0 < x < \infty) \end{cases}$$

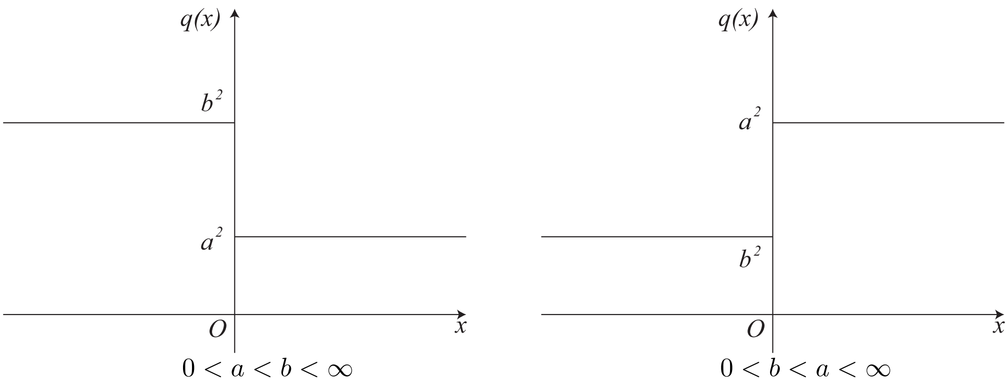


図 2.1. バネ定数 $q(x)$

ソボレフ空間 H，内積 $(\cdot,\cdot)_H$，エネルギー $\|\cdot\|_H$ を次式の様に導入する．

$$H = \left\{ u \,\middle|\, u,\ u' \in L^2(-\infty,\infty) \right\},$$

$$(u,v)_H = \int_{-\infty}^{\infty} \Big[u'(x)\,\overline{v}'(x) \ + \ q(x)\,u(x)\,\overline{v}(x) \Big] dx, \qquad \|\,u\,\|_H^2 = (u,u)_H$$

本稿の主定理は次の通りである

定理 2.1. 任意の $u \in H$ に対して u によらない正定数 C があって，ソボレフ不等式

$$\left(\sup_{-\infty<y<\infty} |u(y)| \right)^2 \le C\,\|u\|_H^2 \tag{2.1}$$

が成り立つ．C のうち最良のものは，補題 3.1 のグリーン関数 $G(x,y)$ を用いて次式で表される．

$$C_0 = \sup_{-\infty<y<\infty} G(y,y) = \begin{cases} G(+\infty,+\infty) = \dfrac{1}{2a} & (0 < a \le b) \\ G(-\infty,-\infty) = \dfrac{1}{2b} & (0 < b < a) \end{cases} \tag{2.2}$$

注意 2.1. 定理 2.1 の不等式 (2.1) で C を (2.2) の C_0 で置き換えるとき，等号を達成する関数は存在しない．しかし，ソボレフ汎関数

$$S(u) = \frac{\left(\sup_{-\infty<y<\infty} |u(y)|\right)^2}{\|u\|_H^2} \qquad (u \in H)$$

を導入するとき，補題 3.1 のグリーン関数 $G(x,y)$ を使って，次式をみたす関数列は存在する．

$$S(G(x,y_0)) \to \begin{cases} \dfrac{1}{2a} & (y_0 \to +\infty) \quad (0 < a \le b) \\ \dfrac{1}{2b} & (y_0 \to -\infty) \quad (0 < b < a) \end{cases}$$

このことは，定理 1.2 の (D) の場合も同様のことがいえる．

3 グリーン関数

定理 2.1 のソボレフ不等式の背景にある，階段型バネ定数をもつ糸のたわみの境界値問題を，次の補題で示す．

補題 3.1. 任意の有界連続関数 $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$ に対し，境界値問題

BVP

$$\begin{cases} -u'' + q(x)u = f(x) & (-\infty < x < \infty) \\ q(x) = \begin{cases} b^2 & (-\infty < x < 0) \\ a^2 & (0 < x < \infty) \end{cases} \\ u,\ u' \ :\ \text{bounded} & (-\infty < x < \infty) \\ u^{(i)}(+0) = u^{(i)}(-0) & (i = 0, 1) \end{cases}$$

はただ一つの解をもち，

$$u(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,y) f(y)\,dy \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{3.1}$$

となる．グリーン関数 $G(x,y)$ は次の様に表される．

$$G(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}\left[e^{-a|x-y|} + \dfrac{a-b}{a+b}e^{-a(x+y)}\right] & (0 < x, y < \infty) \\ \dfrac{1}{a+b}e^{-ax+by} & (-\infty < y < 0 < x < \infty) \\ \dfrac{1}{a+b}e^{bx-ay} & (-\infty < x < 0 < y < \infty) \\ \dfrac{1}{2b}\left[e^{-b|x-y|} - \dfrac{a-b}{a+b}e^{b(x+y)}\right] & (-\infty < x, y < 0) \end{cases} \tag{3.2}$$

補題 3.1 証明　解の一意性を示すことは，頁数の都合上省略する．本稿では解の存在性を示す．グリーン関数 (3.2) は，直接計算により次の性質 (3.3)~(3.8) をみたすことがわかる．

$$G(x,y)=G(y,x) \qquad (-\infty<x,y<\infty) \tag{3.3}$$

$$(-\partial_x^2+q(x))G(x,y)=0 \qquad (-\infty<x,y<\infty,\ x\neq y) \tag{3.4}$$

$$\partial_x^i G(x,y)\Big|_{y=x-0}-\partial_x^i G(x,y)\Big|_{y=x+0}=\begin{cases}0 & (i=0)\\ -1 & (i=1)\end{cases} \qquad (-\infty<x<\infty) \tag{3.5}$$

$$G(x,y)\Big|_{x=+0}=G(x,y)\Big|_{x=-0}=\frac{1}{a+b}\begin{cases}e^{-ay} & (0<y<\infty)\\ e^{by} & (-\infty<y<0)\end{cases} \tag{3.6}$$

$$\partial_x G(x,y)\Big|_{x=+0}=\partial_x G(x,y)\Big|_{x=-0}=\frac{1}{a+b}\begin{cases}b\,e^{-ay} & (0<y<\infty)\\ -a\,e^{by} & (-\infty<y<0)\end{cases} \tag{3.7}$$

$$G(x,y),\ \partial_x G(x,y)\ :\ \text{bounded} \quad (-\infty<x<\infty) \tag{3.8}$$

(3.1) の積分区間を 2 つにわけて，

$$u(x)=\int_{-\infty}^{x}G(x,y)f(y)dy+\int_{x}^{\infty}G(x,y)f(y)dy \qquad (-\infty<x<\infty)$$

とする．1 階導関数は (3.5) $(i=0)$ より

$$u'(x)=\int_{-\infty}^{x}\partial_x G(x,y)f(y)dy+\int_{x}^{\infty}\partial_x G(x,y)f(y)dy \qquad (-\infty<x<\infty)$$

となる．2 階導関数は (3.5) $(i=1)$ により

$$u''(x)=\int_{-\infty}^{x}\partial_x^2 G(x,y)f(y)dy+\int_{x}^{\infty}\partial_x^2 G(x,y)f(y)dy-f(x) \qquad (-\infty<x<\infty)$$

となる．(3.1) は，(3.4) から微分方程式 $-u''(x)+q(x)u(x)=f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ をみたし，(3.6) と (3.7) から接合条件 $u^{(i)}(+0)=u^{(i)}(-0)$ $(i=0,1)$ をみたし，(3.8) から u,u' の有界性をみたすことがわかる．(3.1) は BVP の解であることがわかる．■

補題 3.2 でソボレフ不等式の最良定数となるグリーン関数の対角成分の最大値を求める．

補題 3.2. グリーン関数の対角成分の最大値は次の通りである．

$$\sup_{-\infty<y<\infty}G(y,y)=\begin{cases}G(+\infty,+\infty)=\dfrac{1}{2a} & (0<a\leq b)\\[2ex] G(-\infty,-\infty)=\dfrac{1}{2b} & (0<b<a)\end{cases}$$

補題 3.2 証明　グリーン関数の対角成分は

$$G(y,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{2a}\left[1+\dfrac{a-b}{a+b}e^{-2ay}\right] & (0<y<\infty)\\[2ex] \dfrac{1}{2b}\left[1-\dfrac{a-b}{a+b}e^{2by}\right] & (-\infty<y<0)\end{cases}$$

その導関数は

$$\frac{d}{dy}G(y,y)=-\frac{a-b}{a+b}\left\{\begin{array}{ll}e^{-2ay} & (0<y<\infty)\\ e^{2by} & (-\infty<y<0)\end{array}\right\}\begin{cases}>0 & (0<a<b)\\ =0 & (b=a)\\ <0 & (0<b<a)\end{cases} \qquad (-\infty<y<\infty)$$

となり，補題 3.2 を得る．■

4　再生核

グリーン関数 $G(x,y)$ はヒルベルト空間 H と内積 $(\cdot,\cdot)_H$ で再生核となることを示す.

補題 4.1. 任意の $u \in H$ に対し，次式が成り立つ.

$$u(y) = (\, u(\cdot), G(\cdot,y)\,)_H \qquad (-\infty < y < \infty) \tag{4.1}$$

$$G(y,y) = (\, G(\cdot,y), G(\cdot,y)\,)_H = \|\, G(\cdot,y)\,\|_H^2 \qquad (-\infty < y < \infty) \tag{4.2}$$

補題 4.1 証明　$-\infty < y < \infty$ なる y を固定する毎に $v = v(x) = G(x,y)$ $(-\infty < x < \infty)$ とおく. $v \in H$ であり，$\overline{v} = v$ である．任意の $u \in H$ に対し，

$$(u,v)_H = \int_{-\infty}^{\infty} \Big[\Big(u(x)v'(x) \Big)' - u(x)v''(x) + q(x)u(x)v(x) \Big] dx =$$

$$u(x)v'(x) \left\{ \Big|_{x=-\infty}^{x=y-0} + \Big|_{x=y+0}^{x=\infty} \right\} + \left\{ \int_{-\infty}^{y} + \int_{y}^{\infty} \right\} u(x) \Big(-v''(x) + q(x)v(x) \Big) dx$$

が成り立つ．(3.4)，(3.5)$(i=1)$，(3.8) により (4.1) を得る．(4.2) は (4.1) で y $(-\infty < y < \infty)$ を固定する毎に $u(x) = G(x,y)$ とすればよい．補題 4.1 証明を終る. ■

5　ソボレフ不等式

本稿の主定理である定理 2.1 を証明する.

定理 2.1 証明　シュワルツ不等式で (4.1) の両辺を評価し (4.2) を使うと

$$|\, u(y)\,|^2 \leq \|\, G(\cdot,y)\,\|_H^2 \; \|\, u\,\|_H^2 = G(y,y)\, \|\, u\,\|_H^2$$

となる．ここで

$$C_0 = \sup_{-\infty<y<\infty} G(y,y) = G(y_0,y_0)$$

として，両辺の上限をとると，ソボレフ不等式

$$\left(\sup_{-\infty<y<\infty} |\, u(y)\,| \right)^2 \leq C_0 \,\|\, u\,\|_H^2$$

を得る．上の不等式で $u(x) = G(x,y_0) \in H$ を適用すると

$$\left(\sup_{-\infty<y<\infty} |\, G(y,y_0)\,| \right)^2 \leq C_0 \,\|\, G(\cdot,y_0)\,\|_H^2 = C_0^2$$

を得る．自明な不等式

$$C_0^2 = (G(y_0,y_0))^2 \leq \left(\sup_{-\infty<y<\infty} |\, G(y,y_0)\,| \right)^2$$

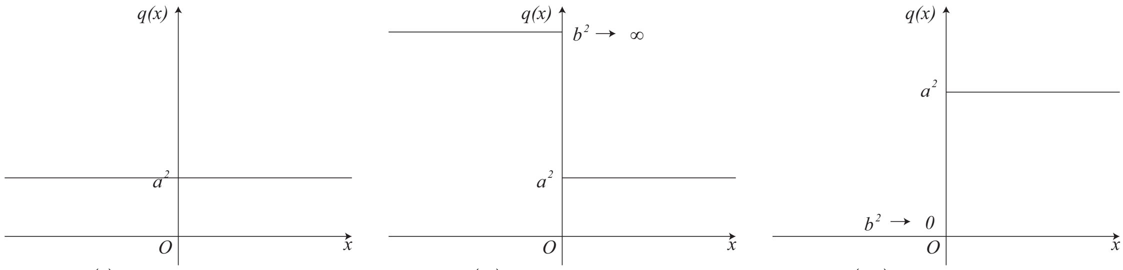
と組合わせると

$$\left(\sup_{-\infty<y<\infty} |\, G(y,y_0)\,| \right)^2 = C_0 \,\|\, G(x,y_0)\,\|_H^2 \tag{5.1}$$

となる．定理 2.1 証明を終る. ■

6　グリーン関数の関係

補題 3.1 の (3.2) で与えられるグリーン関数 $G(x, y)$ に対して，b の極限操作により，補題 1.1 と補題 1.2 のグリーン関数と一致する場合があることを述べる．次の図 6.1(i) は b を a，(ii) は b を $+\infty$，(iii) は b を 0 とした場合の，バネ定数を図示したものである．



(i) $0 < a = b < \infty$　　(ii) $0 < a < b = \infty$　　(iii) $0 = b < a < \infty$

図 6.1. バネ定数

図 6.1(i) の場合，$b \to a$ とするとグリーン関数 (3.2) は

$$G(x, y) = \frac{1}{2a} e^{-a|x-y|} \qquad (-\infty < x, y < \infty)$$

となり，補題 1.1 で示した無限長のグリーン関数と一致する．

図 6.1(ii) の場合，$b \to +\infty$ とするとグリーン関数 (3.2) は

$$G(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}\left[e^{-a|x-y|} - e^{-a(x+y)}\right] & (0 < x, y < \infty) \\ 0 & (\text{else}) \end{cases}$$

となる．$0 < x, y < \infty$ では補題 1.2(D) で示した半無限長でディリクレ境界条件のグリーン関数と一致する．

図 6.1(iii) の場合，$b \to +0$ とするとグリーン関数 (3.2) は

$$G(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a}\left[e^{-a|x-y|} + e^{-a(x+y)}\right] & (0 < x, y < \infty) \\ \dfrac{1}{a} e^{-ax} & (-\infty < y < 0 < x < \infty) \\ \dfrac{1}{a} e^{-ay} & (-\infty < x < 0 < y < \infty) \\ \dfrac{1}{2a}\left[2 - a|x-y| - a(x+y)\right] & (-\infty < x, y < 0) \end{cases}$$

となる．$0 < x, y < \infty$ では，補題 1.2(N) で示した半無限長でノイマン境界条件のグリーン関数と一致する．$G(x, y)$ $(-\infty < x, y < 0)$ の表示式は，(3.2) の $-\infty < x, y < 0$ において，指数関数をテイラー展開すると

$$2bG(x, y) = e^{-b|x-y|} - \frac{a-b}{a+b} e^{b(x+y)} =$$

$$1 - b|x-y| + \frac{1}{2}(b|x-y|)^2 + \cdots - \frac{a-b}{a+b}\left(1 + b(x+y) + \frac{1}{2}(b(x+y))^2 + \cdots\right) =$$

$$\frac{2b}{a+b} - b\left(|x-y| + \frac{a-b}{a+b}(x+y)\right) + \frac{1}{2}b^2\left(|x-y|^2 - \frac{a-b}{a+b}(x+y)^2\right) + \cdots$$

となり，$b \to 0$ とすれば $G(x,y)$ $(-\infty < x, y < 0)$ を得る．

謝辞

本研究は科研費基盤研究 (C)26400175, 15K04973 の助成を受けた．

参考文献

[1] Y. Kametaka, A. Nagai, K. Watanabe, K. Takemura and H. Yamagishi, *Giambelli's formula and the best constant of Sobolev inequality in one dimensional Euclidean space*, Sci. Math. Jpn. **e-2009** (2009), 621–635.

[2] Y. Kametaka, K. Watanabe and A. Nagai, *The best constant of Sobolev inequality in an n dimensional Euclidean space*, Proc. Japan Acad. **81** (2005) 57–60.

[3] 熊ノ郷準，偏微分方程式，共立出版，東京，1978.

[4] J. T. Marti, *Evaluation of the least constant in Sobolev's inequality for $H^1(0,s)$*, SIAM J. Numer. Anal. **20** (1983) 1239–1242.

[5] A. Nagai, Y. Kametaka, H. Yamagishi, K. Takemura and K. Watanabe, *Discrete Bernoulli polynomials and the best constant of discrete Sobolev inequality*, Funkcial. Ekvac. **51** (2008) 307–327.

[6] 鈴木貴，上岡友紀，偏微分方程式講義-半線形楕円型方程式入門-，培風館，東京，2005.

[7] G. Talenti, *The best constant of Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura. Appl. **110** (1976) 353–372.

[8] K. Watanabe, T. Yamada and W. Takahashi, *Reproducing Kernels of $H^m(a,b)$ $(m = 1,2,3)$ and Least Constants in Sobolev's Inequalities*, Appl. Anal. **82** (2003), 809–820.

[9] H. Yamagishi, Y. Kametaka, A. Nagai, K. Watanabe and K. Takemura, *Riemann zeta function and the best constants of five series of Sobolev inequalities*, RIMS Kokyuroku Bessatsu **B13** (2009) 125–139.

[10] 山岸弘幸，亀高惟倫，武村一雄，渡辺宏太郎，永井敦，弾性基盤上の張力をかけた棒のたわみの 2 点境界値問題と対応するソボレフ不等式の最良定数，日本応用数理学会論文誌，第 19 巻 第 4 号 (2009) 489–518.

[1] Tokyo Metropolitan College of Industrial Technology
1-10-40 Higashi-oi, Shinagawa Tokyo 140-0011, Japan
E-mail address: yamagisi@metro-cit.ac.jp