九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

一般化されたq-パンルヴェVI 方程式に付随する双線型関係式

鈴木, 貴雄
近畿大学理工学部

https://doi.org/10.15017/1832806

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 28AO-S6 (1), pp.39-44, 2017-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.28AO-S6
「非線形波動研究の深化と展開」（研究代表者　辻本　諭）

Reports of RIAM Symposium No.28AO-S6

Deepening and expansion of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 3 - November 5, 2016

Article No. 07 (pp. 39 - 44)

一般化された q-パンルヴェ VI 方程式に付随する双線型関係式

鈴木 貴雄（SUZUKI Takao）

（Received 6 January 2017; Accepted 3 March 2017）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2017

一般化された q-パンルヴェ VI 方程式に付随する双線型関係式

近畿大学 理工学部　鈴木 貴雄　(Takao SUZUKI)

概要

q-パンルヴェ VI 方程式 ([1]) の一般化として導入された $2n$ 階 q-差分方程式系 q-$P_{(n+1,n+1)}$ は, $A^{(1)}_{2n+1}$ 型拡大アフィン・ワイル群による対称性を持ち, また q-超幾何関数 ${}_{n+1}\phi_n$ によって記述される特殊解を持つ. 本稿では, この q-$P_{(n+1,n+1)}$ に付随する τ-関数の族を定式化し, それらの満たす双線型関係式を導く.

1　はじめに

論文 [6] において導入された q-$P_{(n+1,n+1)}$ は, 次の $2n$ 階 q-差分方程式系として表される[*1]:

$$f_i\overline{f}_i = qt\frac{F_iF_{i+1}\overline{g}_0(b_i-\overline{g}_i)(\overline{g}_i-a_{i+1})}{F_{n+1}F_1\overline{g}_i(qb_{n+1}-\overline{g}_0)(\overline{g}_0-a_1)}, \quad g_i\overline{g}_i = \frac{F_{i+1}G_i}{F_iG_{i+1}} \quad (i=1,\dots,n),$$

ただし $g_0g_1\dots g_n = q^{-\frac{n-2}{2}}t^{-1}$ とし, F_i, G_i $(i=1,\dots,n+1)$ は

$$F_i = \sum_{j=1}^{i-1} f_j + t\sum_{j=i}^{n} f_j + t,$$

$$G_i = \sum_{j=i}^{n}\prod_{k=i}^{j-1} b_ka_{k+1}\frac{\prod_{l=j+1}^{n} g_l}{\prod_{l=1}^{j-1} g_l}f_j + q^{\frac{n}{2}}t\prod_{k=i}^{n} b_ka_{k+1} + q^nt\sum_{j=1}^{i-1}\frac{b_{n+1}a_1\prod_{k=1}^{n} b_ka_{k+1}}{\prod_{k=j}^{i-1} b_ka_{k+1}}\frac{\prod_{l=j+1}^{n} g_l}{\prod_{l=1}^{j-1} g_l}f_j,$$

と与える. また, q-差分の作用を

$$\overline{x(t)} = x(qt), \quad \underline{x(t)} = x(q^{-1}t) \quad (t,q\in\mathbb{C};\ |q|<1),$$

と表すことにする. この方程式系は, $n=1$ のときに q-パンルヴェ VI 方程式と一致する.

本稿の目的は, q-$P_{(n+1,n+1)}$ に付随する τ-関数の族を定式化し, それらの満たす双線型関係式を導くことである.

2　対称形式

q-$P_{(n+1,n+1)}$ は当初, 論文 [5] において, 次の q-差分方程式系として導入された[*2]:

$$\begin{cases} x_{i-1}-x_i = \dfrac{b_{i-1}\underline{x_{i-1}}}{1+\underline{x_{i-1}}y_{i-1}} - \dfrac{a_i\underline{x_i}}{1+\underline{x_i}y_{i-1}} \\ \underline{y_{i-1}}-\underline{y_i} = \dfrac{a_iy_{i-1}}{1+\underline{x_i}y_{i-1}} - \dfrac{b_iy_i}{1+\underline{x_i}y_i} \end{cases} \quad (i=1,\dots,n+1),$$

ただし

$$b_0 = qb_{n+1}, \quad x_0 = tx_{n+1}, \quad y_0 = \frac{q}{t}y_{n+1},$$

とし, 従属変数は制約条件

$$\prod_{i=1}^{n+1} a_i\frac{1+\underline{x_i}y_i}{1+\underline{x_i}y_{i-1}} = q^{-\frac{n}{2}},$$

[*1] この方程式系は, q-ガルニエ系 ([4]) と本質的に等価であることが, 山田泰彦氏によって最近確認された. ただし, 独立変数とパラメーターの役割を適切に入れ替えることが必要となる. 詳しくは [3] を参照して欲しい. また, 津田照久氏によって導入された q-$P_{\rm VI}$ の一般化 ([7]) ともおそらく等価であるが, 証明はまだ出来ていない.

[*2] 以降, この方程式系を**対称形式**と呼ぶことにする. 対称形式は制約条件を 1 つ含むので, 見かけ上は $2n+1$ 階であるが, 実は可約で $2n$ 階の方程式系に帰着する

を満たすとする.

事実 1 ([6])**.** 対称形式の下で

$$f_i = t\frac{x_i - x_{i+1}}{tx_{n+1} - x_1}, \quad g_i = a_{i+1}\frac{\underline{x_{i+1}}(1+\underline{x_i}y_i)}{\underline{x_i}(1+\underline{x_{i+1}}y_i)} \quad (i = 1, \dots, n),$$

とおくと, これらの従属変数は q-$P_{(n+1,n+1)}$ を満たす.

双有理変換 $\sigma_0, \dots, \sigma_{2n+1}, \pi$ の対称形式への作用を, 次のように定める[*3]:

$$\sigma_{2j-2}(a_j) = b_{j-1}, \quad \sigma_{2j-2}(b_{j-1}) = a_j, \quad \sigma_{2j-2}(x_{j-1}) = x_{j-1}, \quad \sigma_{2j-2}(y_{j-1}) = y_{j-1} - \frac{b_{j-1} - a_j}{x_{j-1} - x_j},$$
$$\sigma_{2j-2}(a_i) = a_i, \quad \sigma_{2j-2}(b_{i-1}) = b_{i-1}, \quad \sigma_{2j-2}(x_{i-1}) = x_{i-1}, \quad \sigma_{2j-2}(y_{i-1}) = y_{i-1} \quad (i \neq j),$$

ただし $j = 1, \dots, n+1$,

$$\sigma_{2j-1}(a_j) = b_j \quad \sigma_{2j-1}(b_j) = a_j, \quad \sigma_{2j-1}(x_j) = x_j - \frac{a_j - b_j}{y_{j-1} - y_j}, \quad \sigma_{2j-1}(y_j) = y_j,$$
$$\sigma_{2j-1}(a_i) = a_i, \quad \sigma_{2j-1}(b_i) = b_i, \quad \sigma_{2j-1}(x_i) = x_i, \quad \sigma_{2j-1}(y_i) = y_i \quad (i \neq j),$$

ただし $j = 1, \dots, n+1$, 及び

$$\pi(a_i) = \frac{1}{q^{\rho_1}}b_i, \quad \pi(b_i) = \frac{1}{q^{\rho_1}}a_{i+1} \quad (i = 1, \dots, n), \quad \pi(a_{n+1}) = \frac{1}{q^{\rho_1}}b_{n+1}, \quad \pi(b_{n+1}) = \frac{1}{q^{\rho_1+1}}a_1,$$
$$\pi(x_i) = \frac{t^{\rho_1}}{q^{2\rho_1}}\underline{y_i}, \quad \pi(y_i) = \frac{q^{\rho_1}}{t^{\rho_1}}\underline{x_{i+1}} \quad (i = 1, \dots, n), \quad \pi(x_{n+1}) = \frac{t^{\rho_1}}{q^{2\rho_1}}\underline{y_{n+1}}, \quad \pi(y_{n+1}) = \frac{q^{\rho_1+1}}{t^{\rho_1+1}}\underline{x_1},$$
$$\pi(\rho_1) = -\rho_1 - \frac{1}{n+1}, \quad \pi(t) = \frac{q^2}{t},$$

ただし

$$q^{\rho_1} = (q^n a_1 b_1 \dots a_{n+1} b_{n+1})^{\frac{1}{n+1}},$$

とする[*4].

事実 2 ([5, 6])**.** 対称形式は上で定義された双有理変換 $\sigma_0, \dots, \sigma_{2n+1}, \pi$ の作用の下で不変である. また, 双有理変換のなす群 $\langle \sigma_0, \dots, \sigma_{2n+1}, \pi \rangle$ は $A^{(1)}_{2n+1}$ 型拡大アフィン・ワイル群と同型である[*5].

最後に, 超幾何関数解について簡単に述べておく.

事実 3 ([5])**.** 対称形式の下で $y_1 = \dots = y_{n+1} = 0$ 及び $a_1 \dots a_{n+1} = q^{-\frac{n}{2}}$ を仮定する. このとき, 従属変数の組 $(x_1, \dots, x_{n+1})$ はある線形 q-差分方程式系を満たし, その解はハイネの q-超幾何関数 ${}_{n+1}\phi_n$ によって記述される.

[*3] 従属変数 f_i, g_i に対する作用については, 論文 [6] を参照して欲しい.

[*4] 論文 [5] において q-ドリンフェルト・ソコロフ階層の相似簡約を定式化する際に与えられたパラメーター ρ_1 を $\tilde{\rho}_1$ と書き直すと, $\tilde{\rho}_1 = \frac{n+1}{2}\rho_1$ となっている. 同じ記号を使っているが微妙に異なるので注意して欲しい. なお, 論文 [5] における π の作用には誤りがあるので, 双有理変換の定義については全て論文 [6] を参照して欲しい.

[*5] 変換の積は合成によって $(\sigma_i\sigma_j)(\varphi) = \sigma_i(\sigma_j(\varphi))$ と定める.

3 τ-関数と双線型関係式

従属変数についての次の記号を導入する[*6]:

$$u_{2i}=1+\underline{x_i}y_i,\quad u_{2i+1}=\frac{a_{i+1}}{1+\underline{x_{i+1}}y_i},\quad \varphi_{2i}=x_i-x_{i+1},\quad \varphi_{2i+1}=y_i-y_{i+1}\quad (i=0,\dots,n).$$

また, 方程式の表記の簡略化のため, 必要に応じて次の記号を用いる:

$$u_{2i+2n+2}=u_{2i},\quad u_{2i+1+2n+2}=\frac{1}{q}u_{2i+1},\quad \varphi_{2i+2n+2}=\frac{1}{t}\varphi_{2i},\quad \varphi_{2i+1+2n+2}=\frac{t}{q}\varphi_{2i+1},$$
$$a_{i+n+1}=\frac{1}{q}a_i,\quad b_{i+n+1}=\frac{1}{q}b_i,\quad \tau_{2i+2n+2}=\frac{1}{t^{\frac{1}{2}}q^{\frac{i}{2}}}\tau_{2i},\quad \tau_{2i+1+2n+2}=\frac{1}{q^{\frac{i+1}{2}}}\tau_{2i+1},\quad \sigma_{i+2n+2}=\sigma_i.$$

定義 4. q-$P_{(n+1,n+1)}$ に付随する τ-関数を次のように導入する:

$$\frac{\tau_{2i-1}\underline{\tau_{2i}}}{\underline{\tau_{2i-1}}\tau_{2i}}=\frac{q^{\frac{1}{4}(\rho_1+\frac{1}{n+1})}}{b_i^{\frac{1}{2}}}u_{2i},\quad \frac{\tau_{2i}\underline{\tau_{2i+1}}}{\underline{\tau_{2i}}\tau_{2i+1}}=\frac{q^{\frac{1}{4}(\rho_1+\frac{1}{n+1})}}{a_{i+1}^{\frac{1}{2}}}u_{2i+1}\quad (i=0,\dots,n).$$

さらに, τ-関数に対する双有理変換 $\sigma_0,\dots,\sigma_{2n+1},\pi$ の作用を次のように定める[*7]:

$$\sigma_{2i-1}(\tau_{2i-1})=\frac{\varphi_{2i-1}}{(a_i-b_i)^{\frac{1}{2}}}\frac{\tau_{2i-2}\tau_{2i}}{\tau_{2i-1}},\quad \sigma_{2i-1}(\tau_j)=\tau_j\quad (i=0,\dots,n,\ j\neq 2i-1),$$
$$\sigma_{2i}(\tau_{2i})=\frac{\varphi_{2i}}{(b_i-a_{i+1})^{\frac{1}{2}}}\frac{\tau_{2i-1}\tau_{2i+1}}{\tau_{2i}},\quad \sigma_{2i}(\tau_j)=\tau_j\quad (i=0,\dots,n,\ j\neq 2i),$$
$$\pi(\tau_{2i-1})=\underline{t}^{\frac{1}{4}(-\rho_1-1+\frac{2i}{n+1})}\underline{\tau_{2i}},\quad \pi(\tau_{2i})=q^{-\frac{1}{4}\rho_1}\underline{t}^{\frac{1}{4}(\rho_1-1+\frac{2i+1}{n+1})}\underline{\tau_{2i+1}}\quad (i=0,\dots,n).$$

まず, 双有理変換に関する双線型関係式を導く. 前節で定めた双有理変換の作用は

$$\sigma_{2i}(\varphi_{2i-1})=\varphi_{2i-1}+\frac{b_i-a_{i+1}}{\varphi_{2i}},\quad \sigma_{2i}(\varphi_{2i+1})=\varphi_{2i+1}-\frac{b_i-a_{i+1}}{\varphi_{2i}},$$
$$\sigma_{2i}(\varphi_j)=\varphi_j\quad (j\neq 2i-1,2i+1),$$
$$\sigma_{2i+1}(\varphi_{2i})=\varphi_{2i}+\frac{a_{i+1}-b_{i+1}}{\varphi_{2i+1}},\quad \sigma_{2i+1}(\varphi_{2i+2})=\varphi_{2i+2}-\frac{a_{i+1}-b_{i+1}}{\varphi_{2i+1}},$$
$$\sigma_{2i+1}(\varphi_j)=\varphi_j\quad (j\neq 2i,2i+2),$$
$$\pi(\varphi_{2i})=q^{-\rho_1}\underline{t}^{\rho_1}\underline{\varphi_{2i+1}},\quad \pi(\varphi_{2i+1})=\underline{t}^{-\rho_1}\underline{\varphi_{2i+2}},$$

ただし $i=0,\dots,n,$ と書き換えられる. これに

$$\varphi_{2i-1}=(a_i-b_i)^{\frac{1}{2}}\frac{\tau_{2i-1}\sigma_{2i-1}(\tau_{2i-1})}{\tau_{2i-2}\tau_{2i}},\quad \varphi_{2i}=(b_i-a_{i+1})^{\frac{1}{2}}\frac{\tau_{2i}\sigma_{2i}(\tau_{2i})}{\tau_{2i-1}\tau_{2i+1}}\quad (i=0,\dots,n),$$

を代入して整理すると, 直ちに次の補題が得られる. なお, 以下では $\sigma_{i,j}=\sigma_i\sigma_j$ と表すことにする.

[*6] この記号は q-$P_{(n+1,n+1)}$ のラックス対に由来するものである. 詳しくは論文 [5] を参照して欲しい.

[*7] この作用は q-$P_{(n+1,n+1)}$ への作用と両立し, かつ $A^{(1)}_{2n+1}$ 型拡大アフィン・ワイル群の基本関係式を満たすように定めてある. ただし, 基本関係式のうち $\sigma_i^2=1$ だけは $\sigma_i^2(\tau_i)=\frac{\tau_i}{\sqrt{-1}}$ に変わる. また, ここでは $\sigma_{2i}((b_i-a_{i+1})^{\frac{1}{2}})=\sqrt{-1}(b_i-a_{i+1})^{\frac{1}{2}}$ 及び $\sigma_{2i+1}((a_{i+1}-b_{i+1})^{\frac{1}{2}})=\sqrt{-1}(a_{i+1}-b_{i+1})^{\frac{1}{2}}$ としている. なお, 回転対称性 π に関する基本関係式を満たす必要が無い場合は, 分母のパラメーターの項は外しても構わない.

補題 5. τ-関数は次の双線型関係式を満たす:

$$
\begin{aligned}
(a_i - a_{i+1})^{\frac{1}{2}}\, \sigma_{2i,2i-1}(\tau_{2i-1})\, \tau_{2i} &= (a_i - b_i)^{\frac{1}{2}}\, \sigma_{2i-1}(\tau_{2i-1})\, \sigma_{2i}(\tau_{2i}) + (b_i - a_{i+1})^{\frac{1}{2}}\, \tau_{2i-2}\, \tau_{2i+1},\\
(a_i - a_{i+1})^{\frac{1}{2}}\, \tau_{2i-1}\, \sigma_{2i-1,2i}(\tau_{2i}) &= (b_i - a_{i+1})^{\frac{1}{2}}\, \sigma_{2i-1}(\tau_{2i-1})\, \sigma_{2i}(\tau_{2i}) - (a_i - b_i)^{\frac{1}{2}}\, \tau_{2i-2}\, \tau_{2i+1},\\
(b_i - b_{i+1})^{\frac{1}{2}}\, \sigma_{2i+1,2i}(\tau_{2i})\, \tau_{2i+1} &= (b_i - a_{i+1})^{\frac{1}{2}}\, \sigma_{2i}(\tau_{2i})\, \sigma_{2i+1}(\tau_{2i+1}) + (a_{i+1} - b_{i+1})^{\frac{1}{2}}\, \tau_{2i-1}\, \tau_{2i+2},\\
(b_i - b_{i+1})^{\frac{1}{2}}\, \tau_{2i}\, \sigma_{2i,2i+1}(\tau_{2i+1}) &= (a_{i+1} - b_{i+1})^{\frac{1}{2}}\, \sigma_{2i}(\tau_{2i})\, \sigma_{2i+1}(\tau_{2i+1}) - (b_i - a_{i+1})^{\frac{1}{2}}\, \tau_{2i-1}\, \tau_{2i+2},
\end{aligned}
$$

ただし $i = 0, \dots, n$ である.

次に, q-差分に関する双線型関係式を導く. まず, 対称形式を

$$
\begin{aligned}
\varphi_{2i} &= (b_i - a_{i+1})\frac{\underline{x_i}}{u_{2i}} + \frac{u_{2i+1}\underline{\varphi_{2i}}}{u_{2i}}\\
&= \frac{b_i - a_{i+1}}{a_{i+1}} u_{2i+1}\underline{x_{i+1}} + \frac{b_i}{a_{i+1}}\frac{u_{2i+1}\underline{\varphi_{2i}}}{u_{2i}} \quad (i = 0, \dots, n),\\
\underline{\varphi_{2i+1}} &= \frac{a_{i+1} - b_{i+1}}{a_{i+1}} u_{2i+1} y_i + \frac{b_{i+1}}{a_{i+1}}\frac{u_{2i+1}\varphi_{2i+1}}{u_{2i+2}}\\
&= (a_{i+1} - b_{i+1})\frac{y_{i+1}}{u_{2i+2}} + \frac{u_{2i+1}\varphi_{2i+1}}{u_{2i+2}} \quad (i = 0, \dots, n),
\end{aligned}
$$

と書き直す. すると, $\underline{x_i}, y_i$ は τ-関数を用いて

$$
\begin{aligned}
q^{\frac{1}{4}(\rho_1 + \frac{1}{n+1})}(b_i - a_{i+1})^{\frac{1}{2}}\, \underline{x_i} &= \frac{b_i^{\frac{1}{2}}\, \underline{\tau_{2i}}\, \sigma_{2i}(\tau_{2i}) - a_{i+1}^{\frac{1}{2}}\, \tau_{2i}\, \sigma_{2i}(\underline{\tau_{2i}})}{\underline{\tau_{2i-1}}\, \tau_{2i+1}},\\
q^{-\frac{1}{4}(\rho_1 + \frac{1}{n+1})}(b_i - a_{i+1})^{\frac{1}{2}}\, \underline{x_{i+1}} &= \frac{a_{i+1}^{\frac{1}{2}}\, \underline{\tau_{2i}}\, \sigma_{2i}(\tau_{2i}) - b_i^{\frac{1}{2}}\, \tau_{2i}\, \sigma_{2i}(\underline{\tau_{2i}})}{\tau_{2i-1}\, \underline{\tau_{2i+1}}},\\
q^{-\frac{1}{4}(\rho_1 + \frac{1}{n+1})}(a_{i+1} - b_{i+1})^{\frac{1}{2}}\, y_i &= \frac{a_{i+1}^{\frac{1}{2}}\, \tau_{2i+1}\, \sigma_{2i+1}(\underline{\tau_{2i+1}}) - b_{i+1}^{\frac{1}{2}}\, \underline{\tau_{2i+1}}\, \sigma_{2i+1}(\tau_{2i+1})}{\tau_{2i}\, \underline{\tau_{2i+2}}},\\
q^{\frac{1}{4}(\rho_1 + \frac{1}{n+1})}(a_i - b_i)^{\frac{1}{2}}\, y_i &= \frac{b_i^{\frac{1}{2}}\, \tau_{2i-1}\, \sigma_{2i-1}(\underline{\tau_{2i-1}}) - a_i^{\frac{1}{2}}\, \underline{\tau_{2i-1}}\, \sigma_{2i-1}(\tau_{2i-1})}{\underline{\tau_{2i-2}}\, \tau_{2i}},
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ただし $i = 0, \dots, n$, と表すことができる. 次に, φ_i, u_i の定義より

$$
\varphi_{2i-1}\underline{x_i} = \frac{a_i}{u_{2i-1}} - u_{2i}, \quad \underline{\varphi_{2i}} y_i = u_{2i} - \frac{a_{i+1}}{u_{2i+1}} \quad (i = 0, \dots, n),
$$

であるから, これも同様にして $\underline{x_i}, y_i$ について解くと

$$
\begin{aligned}
q^{\frac{1}{4}(\rho_1 + \frac{1}{n+1})}(a_i - b_i)^{\frac{1}{2}}\, \underline{x_i} &= \frac{q^{\frac{1}{2}(\rho_1 + \frac{1}{n+1})} a_i^{\frac{1}{2}}\, \underline{\tau_{2i-2}}\, \tau_{2i} - b_i^{\frac{1}{2}}\, \tau_{2i-2}\, \underline{\tau_{2i}}}{\sigma_{2i-1}(\tau_{2i-1})\, \underline{\tau_{2i-1}}},\\
q^{\frac{1}{4}(\rho_1 + \frac{1}{n+1})}(b_i - a_{i+1})^{\frac{1}{2}}\, y_i &= \frac{b_i^{\frac{1}{2}}\, \tau_{2i-1}\, \underline{\tau_{2i+1}} - q^{\frac{1}{2}(\rho_1 + \frac{1}{n+1})} a_{i+1}^{\frac{1}{2}}\, \underline{\tau_{2i-1}}\, \tau_{2i+1}}{\tau_{2i}\, \sigma_{2i}(\underline{\tau_{2i}})},
\end{aligned}
\tag{2}
$$

ただし $i = 0, \dots, n$, が得られる. 上の式は $i = n + 1$ のときにも成り立つことを注意しておく. 関係式 (1) と (2) を比較すると τ-関数で閉じた式が得られる. それに補題 5 の結果を適用して整理することで, 広田・三輪型の双線型関係式が導かれる[*8].

[*8] さらに, 別の種類の双線形関係式が得られることを期待して, 関係式 (2) を定義 4 に代入して計算してみたが, これは今のところ上手く行っていない.

定理 6. τ-関数は次の双線型関係式を満たす:

$$
\begin{aligned}
&b_i^{\frac{1}{2}}(a_i-a_{i+1})^{\frac{1}{2}}\,\sigma_{2i,2i-1}(\tau_{2i-1})\,\underline{\tau_{2i}}\\
&=a_{i+1}^{\frac{1}{2}}(a_i-b_i)^{\frac{1}{2}}\,\sigma_{2i-1}(\tau_{2i-1})\,\sigma_{2i}(\underline{\tau_{2i}})+q^{\frac{1}{2}(\rho_1+\frac{1}{n+1})}a_i^{\frac{1}{2}}(b_i-a_{i+1})^{\frac{1}{2}}\,\underline{\tau_{2i-2}}\,\tau_{2i+1},\\
&b_i^{\frac{1}{2}}(a_i-a_{i+1})^{\frac{1}{2}}\,\tau_{2i-1}\,\sigma_{2i-1,2i}(\underline{\tau_{2i}})\\
&=a_i^{\frac{1}{2}}(b_i-a_{i+1})^{\frac{1}{2}}\,\sigma_{2i-1}(\tau_{2i-1})\,\sigma_{2i}(\underline{\tau_{2i}})-q^{\frac{1}{2}(\rho_1+\frac{1}{n+1})}a_{i+1}^{\frac{1}{2}}(a_i-b_i)^{\frac{1}{2}}\,\underline{\tau_{2i-2}}\,\tau_{2i+1},\\
&a_{i+1}^{\frac{1}{2}}(b_i-b_{i+1})^{\frac{1}{2}}\,\sigma_{2i+1,2i}(\underline{\tau_{2i}})\,\tau_{2i+1}\\
&=b_{i+1}^{\frac{1}{2}}(b_i-a_{i+1})^{\frac{1}{2}}\,\sigma_{2i}(\underline{\tau_{2i}})\,\sigma_{2i+1}(\tau_{2i+1})+q^{-\frac{1}{2}(\rho_1+\frac{1}{n+1})}b_i^{\frac{1}{2}}(a_{i+1}-b_{i+1})^{\frac{1}{2}}\,\tau_{2i-1}\,\underline{\tau_{2i+2}},\\
&a_{i+1}^{\frac{1}{2}}(b_i-b_{i+1})^{\frac{1}{2}}\,\underline{\tau_{2i}}\,\sigma_{2i,2i+1}(\tau_{2i+1})\\
&=b_i^{\frac{1}{2}}(a_{i+1}-b_{i+1})^{\frac{1}{2}}\,\sigma_{2i}(\underline{\tau_{2i}})\,\sigma_{2i+1}(\tau_{2i+1})-q^{-\frac{1}{2}(\rho_1+\frac{1}{n+1})}b_{i+1}^{\frac{1}{2}}(b_i-a_{i+1})^{\frac{1}{2}}\,\tau_{2i-1}\,\underline{\tau_{2i+2}},
\end{aligned}
$$

ただし $i=0,\dots,n$ である.

また, この議論を逆に辿れば, 定義 4, 補題 5 及び定理 6 から, 対称形式及びそれに対する双有理変換 $\sigma_0\dots,\sigma_{2n+1},\pi$ の作用を復元できることが分かる.

4 シュレジンガー変換, 格子上の τ-関数, 超幾何関数解

文献 [2] に従って, 所謂シュレジンガー変換を

$$T_i=\sigma_i\dots\sigma_1\pi\sigma_{2n+1}\dots\sigma_{i+1}\quad(i=0,\dots,2n+1),$$

によって定める[*9]. これらの変換は,

$$q^{\alpha_{2i}}=\frac{b_i}{a_{i+1}},\quad q^{\alpha_{2i+1}}=\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}\quad(i=0,\dots,n),$$

によって定められたパラメーターに対して,

$$T_i(\alpha_i)=\alpha_i+1,\quad T_i(\alpha_{i+1})=\alpha_{i+1}-1,\quad T_i(\alpha_j)=\alpha_j\quad(j\neq i,i+1),$$

と平行移動として作用する[*10]. また, 次の交換関係式を満たす[*11]:

$$T_iT_j=T_jT_i,\quad \sigma_iT_j=T_{(i-1,i)j}\sigma_i,\quad \pi T_j=T_{(0,1\dots,2n+1)j}\pi,$$

定理 6 の双線形関係式は,

$$
\begin{aligned}
&T_{2i-1}(\tau_{2i-1})=\underline{t}^{\frac{1}{4}(-\rho_1-1+\frac{2i}{n+1})}\underline{\tau_{2i}},\quad T_{2i}(\underline{\tau_{2i}})=q^{-\frac{1}{4}\rho_1}t^{\frac{1}{4}(\rho_1-1+\frac{2i+1}{n+1})}\tau_{2i+1},\\
&T_{2i}(\tau_{2i-1})=\underline{t}^{\frac{1}{4}(-\rho_1-1+\frac{2i}{n+1})}\sigma_{2i}(\underline{\tau_{2i}}),\quad T_{2i+1}(\underline{\tau_{2i}})=q^{-\frac{1}{4}\rho_1}t^{\frac{1}{4}(\rho_1-1+\frac{2i+1}{n+1})}\sigma_{2i+1}(\tau_{2i+1}),\\
&T_{2i}(\underline{\tau_{2i-2}})=q^{-\frac{1}{4}\rho_1}t^{\frac{1}{4}(\rho_1-1+\frac{2i-1}{n+1})}\sigma_{2i,2i-1}(\tau_{2i-1}),\quad T_{2i+1}(\tau_{2i-1})=\underline{t}^{\frac{1}{4}(-\rho_1-1+\frac{2i}{n+1})}\sigma_{2i+1,2i}(\underline{\tau_{2i}}),\\
&T_{2i}T_{2i-1}(\underline{\tau_{2i-2}})=q^{\frac{n-2i+2}{4(n+1)}}\underline{t}^{\frac{1}{2(n+1)}}\sigma_{2i-1,2i}(\underline{\tau_{2i}}),\quad T_{2i+1}T_{2i}(\tau_{2i-1})=q^{\frac{n-2i}{4(n+1)}}\sigma_{2i,2i+1}(\tau_{2i+1}),
\end{aligned}
$$

[*9] q-差分との交換関係は $T_i(\underline{\varphi})=\overline{T_i(\varphi)}$ となるので注意すること. これは, 回転対称性 π が独立変数に対して $\pi(t)=\frac{q^2}{t}$ と作用することに起因する.

[*10] このとき, パラメーターは関係式 $\alpha_0+\ldots+\alpha_{2n+1}=1$ を満たす.

[*11] $(i-1,i)$ と $(0,1\dots,2n+1)$ はそれぞれ互換と巡回置換を表す. なお, 添え字は全て $\mathbb{Z}/(2n+2)\mathbb{Z}$ の元だと考えて欲しい.

ただし $i=0,\dots,n$, を用いて次のように書き直すことが出来る[*12]:

$$
\begin{aligned}
&q^{\frac{\rho_1}{2}}\underline{t}^{\frac{1}{2(n+1)}}a_i^{\frac{1}{2}}(b_i-a_{i+1})^{\frac{1}{2}}\,\underline{\tau_{2i-2}}\,T_{2i}T_{2i-1}T_{2i-2}(\underline{\tau_{2i-2}})\\
&=b_i^{\frac{1}{2}}(a_i-a_{i+1})^{\frac{1}{2}}\,T_{2i}(\underline{\tau_{2i-2}})\,T_{2i-1}T_{2i-2}(\underline{\tau_{2i-2}})-a_{i+1}^{\frac{1}{2}}(a_i-b_i)^{\frac{1}{2}}\,T_{2i-1}(\underline{\tau_{2i-2}})\,T_{2i}T_{2i-2}(\underline{\tau_{2i-2}}),\\
&q^{-\frac{\rho_1}{2}}t^{-\frac{1}{2(n+1)}}b_i^{\frac{1}{2}}(a_{i+1}-b_{i+1})^{\frac{1}{2}}\,\tau_{2i-1}\,T_{2i+1}T_{2i}T_{2i-1}(\tau_{2i-1})\\
&=a_{i+1}^{\frac{1}{2}}(b_i-b_{i+1})^{\frac{1}{2}}\,T_{2i+1}(\tau_{2i-1})\,T_{2i}T_{2i-1}(\tau_{2i-1})-b_{i+1}^{\frac{1}{2}}(b_i-a_{i+1})^{\frac{1}{2}}\,T_{2i}(\tau_{2i-1})\,T_{2i+1}T_{2i-1}(\tau_{2i-1}),
\end{aligned}
$$

ただし $i=0,\dots,n$ である.

シュレジンガー変換を用いて, τ-関数は $\mathbb{Z}^{2n+2}$ 上に次のように定義される:

$$\tau_\nu=T_0^{\nu_0}\dots T_{2n+1}^{\nu_{2n+1}}(\tau_0),\quad \nu=(\nu_0,\dots,\nu_{2n+1})\in\mathbb{Z}^{2n+2}.$$

このとき, 任意の $\nu\in\mathbb{Z}^{2n+2}$ に対して,

$$\tau_\nu=\phi_\nu\tau_0^{1+\nu_{2n+1}-\nu_0}\tau_1^{\nu_0-\nu_1}\dots\tau_{2n+1}^{\nu_{2n}-\nu_{2n+1}},$$

となり, 因子 ϕ_ν は前節で定義した $\varphi_0,\dots,\varphi_{2n+1}$ の多項式となることが知られている[*13].

最後に q-超幾何関数 ${}_{n+1}\phi_n$ による特殊解について述べる. 特殊解の条件 $y_1=\dots=y_{n+1}=0$ を定義 4 の式に代入すると,

$$\frac{\tau_{2i}}{\tau_{2i}}=q^{\frac{1}{4}(\rho_1+\frac{1}{n+1})}b_i^{-\frac{1}{2}}\frac{\tau_{2i-1}}{\tau_{2i-1}},\quad \frac{\tau_{2i+1}}{\tau_{2i+1}}=q^{\frac{1}{4}(\rho_1+\frac{1}{n+1})}a_{i+1}^{\frac{1}{2}}\frac{\tau_{2i}}{\tau_{2i}}\quad (i=0,\dots,n),$$

であるから, $\tau_0=1$ とおくと,

$$\tau_{2i}=t^{-\frac{i}{2}(\rho_1+\frac{1}{n+1})-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{i-1}\alpha_{2j+1}},\quad \tau_{2i+1}=t^{-\frac{2i+1}{4}(\rho_1+\frac{1}{n+1})-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{i-1}\alpha_{2j+1}-\frac{1}{2}\log_q a_{i+1}}\quad (i=0,\dots,n),$$

が得られる[*14]. 従って, 後は因子 ϕ_ν を計算すれば, 任意の $\nu\in\mathbb{Z}^{2n+2}$ に対して特殊解に付随する τ_ν を具体的に与えることが出来る[*15].

参考文献

[1] M. Jimbo and H. Sakai, *A q-analog of the sixth Painlevé equation*, Let. Math. Phys. **38** (1996) 145–154.

[2] 野海正俊, すうがくの風景 *4* パンルヴェ方程式, (朝倉書店, 2000).

[3] H. Nagao and Y. Yamada, *Study of q-Garnier system by Padé method*, arXiv:1601.01099.

[4] H. Sakai, *A q-analog of the Garnier system*, Funkcial. Ekvac. **48** (2005) 237–297.

[5] T. Suzuki, *A q-analogue of the Drinfeld-Sokolov hierarchy of type A and q-Painlevé system*, AMS Contemp. Math. **651** (2015) 25–38.

[6] T. Suzuki, *A reformulation of the generalized q-Painlevé VI system with $W(A_{2n+1}^{(1)})$ symmetry*, J. Integrable Syst. **2** (2017) xyw017.

[7] T. Tsuda, *On an integrable system of q-difference equations satisfied by the universal characters: its Lax formalism and an application to q-Painlevé equations*, Comm. Math. Phys. **293** (2010) 347–359.

[*12] ここでは最初と 3 番目の式のみ記した. 残りの 2 つは, これらの式に双有理変換 $\sigma_0,\dots,\sigma_{2n+1}$ を作用させることで導かれる.

[*13] 詳しくは [2] などを参照して欲しい.

[*14] これは定理 6 の双線形関係式を満たす.

[*15] 行列式による明示公式が存在すると思われるが, これは今後の課題である.