九州大学学術情報リポジトリ
Kyushu University Institutional Repository

可積分確率過程に現れる対称関数

竹山, 美宏
筑波大学数理物質系

https://doi.org/10.15017/1832805

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 28AO-S6 (1), pp.31-38, 2017-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

KYUSHU UNIVERSITY

応用力学研究所研究集会報告 No.28AO-S6
「非線形波動研究の深化と展開」（研究代表者　辻本　諭）

Reports of RIAM Symposium No.28AO-S6

Deepening and expansion of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 3 - November 5, 2016

Article No. 06 (pp. 31 - 38)

可積分確率過程に現れる対称関数

竹山 美宏（**TAKEYAMA Yoshihiro**）

（Received 13 January 2017; Accepted 14 March 2017）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2017

可積分確率過程に現れる対称関数

筑波大学 数理物質系 竹山 美宏 (Yoshihiro Takeyama)
Graduate School of Pure and Applied Sciences, University of Tsukuba.

種々の量が具体的に計算できるという意味で「可積分」な確率モデルの研究が, 近年ひろく行われている ([1, 2] およびこれらに引用されている文献を参照していただきたい). 数学的な観点から見たとき, これらのモデルの構成・解析においては, 従来の表現論や特殊関数論, 組合せ論のある種の変形のようなものが使われている.

本稿では, Sasamoto-Wadati [5] によって導入された可積分確率過程である q-boson ゼロレンジ過程の拡張と見なされる二つのモデルを題材として, これらに現れる新たな特殊関数を紹介する. 以下では関数の定義と, それが確率モデルのどのような量として現れるかに焦点を絞って概説する. 数学的な背景としては, アフィンヘッケ代数の変形と見なされる非可換代数の表現論や, 量子アフィン代数の表現論があるのだが, この点については言及しない. 引用した文献を参照していただきたい.

1. 連続時間マルコフ連鎖の一般論

確率的な時間発展をする系を考える. この系において起こりうるすべての状態を考えて集合 $\mathcal{S}$ をつくる. たとえば, q-boson ゼロレンジ過程は 1 次元格子上をボゾン粒子が動く系である (粒子数は保存される). このモデルにおけるひとつの状態とは, 1 次元格子上の粒子の配置である (図 1). 各サイトには整数で番号をつける. このとき, それぞれ粒子がいるサイトの番号を大きい方から並べると, 整数の単調減少列ができる. たとえば, 図 1 の状態には $(3, 2, 2, 2, 1, -1, -1)$ という列が対応する. この対応は一対一である. よって, q-boson ゼロレンジ過程の状態すべてのなす集合 $\mathcal{S}$ は, 粒子数が k の場合には

$$\mathcal{S} = \{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbb{Z}^k \,|\, x_1 \geq \cdots \geq x_k\}$$

と実現される.

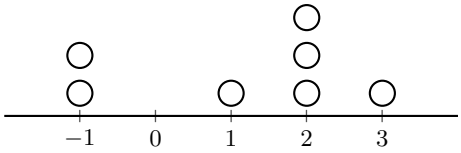


図 1. q-boson ゼロレンジ過程における状態

一般論に戻る. 系のあり得る状態すべてをあつめた集合 $\mathcal{S}$ を状態空間と呼ぶ. 確率的な時間発展をもつ系の時刻 t における状態を $X(t)$ で表す. これは状態空間 $\mathcal{S}$ に値を取る確率変数である. いま, 時刻 t において状態 x であるという条件の下で, 微小時間 Δt の後に状態 y である確率が, 次の形に表されると仮定する.

$$\mathbb{P}(X(t + \Delta t) = y \,|\, X(t) = x) = \delta_{xy} + q(x, y)\Delta t + o(\Delta t) \qquad (\Delta t \downarrow 0)$$

このとき, 1 次の係数 $q(x, y)$ を, 状態 x から状態 y への推移率という.

初期状態 (時刻 $t = 0$ における状態)x を指定したときの, 系の物理量の時間発展は以下のように記述される. 系の物理量は, それぞれの状態に対応する何らかの数値であるから, 状態空間 $\mathcal{S}$ 上の関数と見なせる. そこで, $\mathcal{S}$ 上の関数 f をひとつとり, 関数 $F(t, x)$ を次で定める.

$$F(t, x) = \mathbb{E}[f(X(t)) \,|\, X(0) = x]$$

partially supported by JSPS KAKENHI Grand Number 26400106.

これは, 時刻 0 における状態が x であるという条件の下で, 時刻 t での物理量 f の期待値である. このとき, 次の関係式が成り立つ.

$$F(0,x)=f(x),\quad \frac{d}{dt}F(t,x)=\sum_{y(\neq x)}q(x,y)\,(F(t,y)-F(t,x)) \tag{1.1}$$

二番目の微分方程式が物理量 f の期待値の時間発展を記述する. そこで, $\mathbb{S}$ 上の関数に働く線形作用素 $\mathcal{H}$ を

$$(\mathcal{H}h)(x)=\sum_{y(\neq x)}q(x,y)\,(h(y)-h(x)) \tag{1.2}$$

で定め, これを連続時間マルコフ連鎖 $(X(t))_{t\geq 0}$ の生成作用素と呼ぶ.

生成作用素 $\mathcal{H}$ の固有関数が十分たくさん構成できれば, 初期値問題 (1.1) は次のようにして (原理的には) 解ける. 生成作用素 $\mathcal{H}$ の固有関数の族 $\{\phi_z(x)\}_z$ (ただし z は固有関数が含むパラメータ) が得られたとし, ϕ_z の固有値を e_z とする. 関数 f が $f(x)=\displaystyle\int c_z\phi_z(x)\,dz$ と固有関数の重ね合わせとして表されるとき, 関数 $F(t,x)$ を

$$F(t,x)=\int \exp(te_z)c_z\phi_z(x)\,dz$$

で定める. このとき $F(0,x)=f(x)$ であり, $\mathcal{H}\phi_z=e_z\phi_z$ より

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(t,x)&=\int e_z\exp(te_z)c_z\phi_z(x)\,dz=\int \exp(te_z)c_z(\mathcal{H}\phi_z)(x)\,dz\\&=\sum_{y(\neq x)}q(x,y)\int\exp(te_z)c_z(\phi_z(y)-\phi_z(x))\,dz\\&=\sum_{y(\neq x)}q(x,y)\,(F(t,y)-F(t,x))\end{aligned}$$

となる. よって関数 $F(t,x)$ は初期値問題 (1.1) の解である.

以下では, q-boson ゼロレンジ過程の拡張である次の二つの可積分確率過程において, その生成作用素の固有関数として現れる新しい特殊関数を紹介する.

- q-Hahn ゼロレンジ過程 [4, 7]
- 多種粒子 q-boson ゼロレンジ過程 [8]

この特殊関数は, いずれの場合も多変数対称関数である Schur 関数の拡張と見なされる. なお, 上の二つのモデルを含む拡張が, 量子アフィン代数の表現論を用いて Kuniba-Mangazeev-Maruyama-Okado によって構成されている [3].

2. q-Hahn ゼロレンジ過程に現れる固有関数

2.1. Schur 関数とその変形.

Schur 関数の定義を復習しよう. 単調減少する非負整数の組 $(\lambda_1,\dots,\lambda_k)$ $(\lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_k\geq 0)$ を分割という. 分割 $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_k)$ に対して, $z_1,\dots,z_k$ を変数とする関数 S_λ を次で定め, この関数 S_λ を Schur 関数と呼ぶ.

$$S_\lambda(z_1,\dots,z_k)=\frac{\det\left(z_j^{\lambda_i+k-i}\right)_{i,j=1}^{k}}{\det\left(z_j^{k-i}\right)_{i,j=1}^{k}}$$

たとえば

$$S_{3,0}(z_1,z_2)=\frac{\begin{vmatrix}z_1^{3+1}&z_2^{3+1}\\z_1^{0+0}&z_2^{0+0}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}z_1^1&z_2^1\\z_1^0&z_2^0\end{vmatrix}}=\frac{z_1^4-z_2^4}{z_1-z_2}=z_1^3+z_1^2z_2+z_1z_2^2+z_2^3 \tag{2.1}$$

である.

Schur 関数は次のようにも表される.

$$S_\lambda(z_1,\dots,z_k)=\mathrm{Sym}\left(\prod_{1\le i<j\le k}\frac{z_i}{z_i-z_j}\prod_{i=1}^{k}z_i^{\lambda_i}\right)$$

ここで Sym は $z_1,\dots,z_k$ に関する対称化を表す. たとえば, $\lambda=(3,0)$ のときの右辺は

$$\mathrm{Sym}\left(\frac{z_1}{z_1-z_2}(z_1^3z_2^0)\right)=\frac{z_1}{z_1-z_2}z_1^3+\frac{z_2}{z_2-z_1}z_2^3=\frac{z_1^4-z_2^4}{z_1-z_2}$$

となって, これは $S_{3,0}(z_1,z_2)$ に等しい.

通常, Schur 関数を考えるときは $z_1,\dots,z_k$ を主変数, $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_k)$ をパラメータとして扱う. しかし, 可積分確率過程との関係を考えるときには, 役割を逆にして, $z_1,\dots,z_k$ をパラメータ, $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_k)$ を (整数値を取る) 主変数と見た方がよい. そこで, パラメータの組 $\vec{z}=(z_1,\dots,z_k)$ をもつ関数 $S_{\vec{z}}(x_1,\dots,x_k)$ を改めて次で定義する.

$$S_{\vec{z}}(x_1,\dots,x_k)=\mathrm{Sym}\left(\prod_{1\le i<j\le k}\frac{z_i}{z_i-z_j}\prod_{i=1}^{k}z_i^{x_i}\right)$$

(ただし Sym は $z_1,\dots,z_k$ に関する対称化). そして, $S_{\vec{z}}$ を集合

$$(\mathbb{Z}^k)_+=\left\{(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{Z}^k\,|\,x_1\ge\cdots\ge x_k\right\}$$

上の関数と見なす ($x_1,\dots,x_k$ は負の値をとっても構わない). この集合 $(\mathbb{Z}^k)_+$ は q-boson ゼロレンジ過程の状態空間と同じであることに注意しておく.

以上の設定において, Schur 関数 $S_{\vec{z}}$ の変形 $\Phi_{\vec{z}}$ を次で定義する.

$$\Phi_{\vec{z}}(x_1,\dots,x_k)=\mathrm{Sym}\left(\prod_{1\le i<j\le k}\frac{z_i-q\,z_j}{z_i-z_j}\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{\alpha z_i+\beta}{\gamma z_i+\delta}\right)^{x_i}\right)$$

ただし, Sym は $z_1,\dots,z_k$ に関する対称化で, $q,\alpha,\beta,\gamma,\delta$ はパラメータである. $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ に同じ定数を掛けても, 関数 $\Phi_{\vec{z}}$ は不変であるので, 次の関係式が成り立つとしても一般性を失わない.

$$q=1-\alpha\delta+\beta\gamma$$

可積分確率過程との関係を見るときには, この正規化をしておく必要があるので, 以下では q が上式によって定まる値であるとする. この条件の下で, 関数 $\Phi_{\vec{z}}$ において $\beta=\gamma=0,\alpha=\delta=1$ とすれば, Schur 関数 $S_{\vec{z}}$ が復元される.

2.2. **q-Hahn ゼロレンジ過程.** q-Hahn ゼロレンジ過程は, Povolotsky [4] によって 1 次元格子上の離散時間マルコフ連鎖として導入されたものである. 以下で考えるのはその連続時間極限にあたるモデルであるが, これも「q-Hahn ゼロレンジ過程」と呼ぶことにする.

Sasamoto-Wadati の q-boson ゼロレンジ過程は, 1 次元格子上を粒子が動くモデルである. q-boson ゼロレンジ過程においては, 一度に動ける粒子は 1 個だけであるが, これを同時に複数個の粒子が動く推移も許すように拡張したのが q-Hahn ゼロレンジ過程である.

q-Hahn ゼロレンジ過程の状態空間 $\mathcal{S}$ は, q-boson ゼロレンジ過程と同じく $(\mathbb{Z}^k)_+$ である. $(\mathbb{Z}^k)_+$ の要素 $x=(x_1,\dots,x_k)$ に対して, k 個の粒子を番号 $x_1,\dots,x_k$ のサイトに置いた状態を対応させることにより, $(\mathbb{Z}^k)_+$ の要素と 1 次元格子上の k 個のボゾン粒子の配置 (状態) を同一視する.

q-Hahn ゼロレンジ過程において, 状態 x からの推移としてあり得るのは, ある一つのサイトから 1 個以上の粒子が左隣のサイトに移動した状態のみである. このとき, 動いた粒子がもとにいたサイトの粒子の個数を c とし, 動いた粒子の個数を a とするとき, この推移の推移率は次で与えられる.

$$\frac{s^{a-1}}{[a]}\prod_{p=0}^{a-1}\frac{[c-p]}{1+s[c-1-p]}$$

ただし, 非負整数 n について $[n]=(1-q^n)/(1-q)$ と定める. s と q は q-Hahn ゼロレンジ過程のもつパラメータで

$$s\geq 0,\qquad 0<q<1$$

であるとする. たとえば, 図 2 に示した状態 x から y への推移を考える. この推移では粒子が 5 個あるサイトから 3 個の粒子が動いているから, 推移率は $c=5, a=3$ のときの値で

$$q(x,y)=\frac{s^2}{[3]}\frac{[5]}{1+s[4]}\frac{[4]}{1+s[3]}\frac{[3]}{1+s[2]}$$

である.

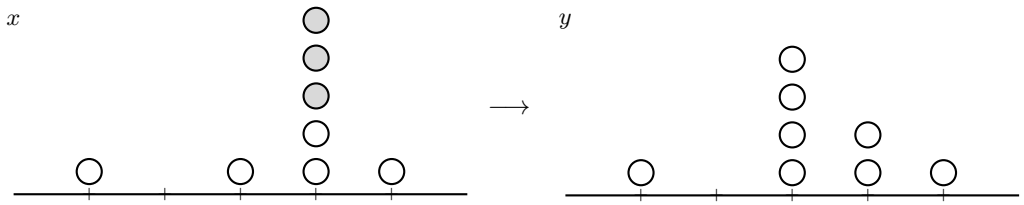


図 2. q-Hahn ゼロレンジ過程における推移の例

以上で定めた推移率から, 状態空間 $\mathcal{S}=(\mathbb{Z}^k)_+$ 上の関数に働く生成作用素が (1.2) によって定まる. この作用素はパラメータ s,q によって定まるので, $\mathcal{H}(s,q)$ と表すことにする.

前項で導入した Schur 関数の変形 $\Phi_{\vec{z}}$ は, 集合 $(\mathbb{Z}^k)_+$ 上の関数であった. この集合 $(\mathbb{Z}^k)_+$ は, q-Hahn ゼロレンジ過程の状態空間 $\mathcal{S}$ でもあるので, $\Phi_{\vec{z}}$ は $\mathcal{S}$ 上の関数と見なせる. この同一視の下で, 次のことが成り立つ.

Theorem 2.1. [7] $\alpha=\gamma$ のとき, 関数 $\Phi_{\vec{z}}$ は q-Hahn ゼロレンジ過程の生成作用素 $\mathcal{H}(\alpha\beta, 1-\alpha\delta+\beta\gamma)$ の固有関数である.

3. 多種 q-BOSON ゼロレンジ過程の固有関数

3.1. 多種 q-boson ゼロレンジ過程. Sasamoto-Wadati の q-boson ゼロレンジ過程は, 一種類のボゾン粒子が動く確率過程であった. 以下では, これを多種類の粒子が動く系に拡張したモデルを考える.

正の整数 r をひとつ取って固定する. 多種 q-boson ゼロレンジ過程は, 1 から r までのいずれかの番号が書かれたボゾン粒子が, 1 次元格子上を確率的に動く系である. それぞれの番号の粒子の個数は保存されるので, 番号 a の粒子の個数を k_a で表し $(a=1,2,\dots,r)$, $k=\sum_{a=1}^r k_a$ とする. k は粒子すべての個数である. 1 次元格子の上に番号 a の粒子を k_a 個並べた配置を考える. 図 3 に, $r=5$ で $(k_1,k_2,k_3,k_4,k_5)=(2,4,2,1,1)$ の場合の配置の例を示す.

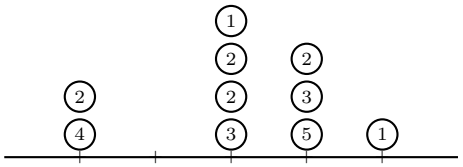


図 3. 多種 q-boson ゼロレンジ過程における状態

番号 $1,2,\dots,r$ の粒子がそれぞれ $k_1,k_2,\dots,k_r$ 個配置された状態全体のなす集合を $\mathcal{S}_{k_1,\dots,k_r}$ とする. この集合が多種 q-boson ゼロレンジ過程の状態空間である.

推移率は以下のように定義される. 多種 q-boson ゼロレンジ過程は $0 < q < 1$ の範囲にあるパラメータ q をもつ. 粒子はどれか一つだけが左隣りのサイトに動く. 動いた粒子の番号を b とし, その粒子のいるサイトにおける番号 p の粒子の個数を m_p とすると $(p = 1, 2, \ldots, r)$, 推移率は

$$\frac{1-q^{m_b}}{1-q} q^{m_{b+1}+\cdots+m_r}$$

で与えられる. たとえば, 図 4 の推移においては, 動く粒子のサイトには同じ番号 2 の粒子が 2 個, それより大きい番号の粒子が 1 個あるので, 推移率は

$$\frac{1-q^2}{1-q} q^1$$

である.

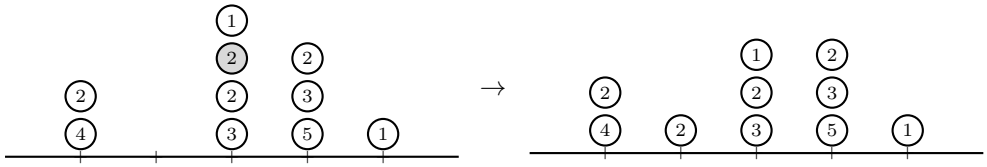
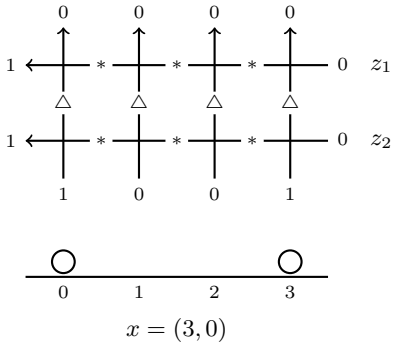


図 4. 多種 q-boson ゼロレンジ過程における推移の例

この推移率から, 状態空間 $\mathcal{S}_{k_1,\ldots,k_r}$ 上の関数に働く生成作用素が (1.2) によって定まる. この生成作用素に対する固有関数は, 次項で述べるように状態和を使って構成できる.

3.2. **Schur 関数の状態和表示.** Schur 関数 $S_{\vec{z}}(x)$ は状態和表示と呼ばれる組み合わせ論的な表示をもつ. 例として, $k = 2$ の場合に $x = (3, 0)$ における $S_{\vec{z}}(x)$ の状態和表示を書き下す.

図 5 を見ていただきたい. まず, $x = (3, 0)$ に対応する粒子の配置を下に描き, 各サイトの上に縦方向の矢印を描く. そして, 全体の粒子の個数と同じだけの横方向の矢印を描き, それぞれの矢印に上からパラメータ z_1, z_2 を割り当てる. 矢印の周囲には以下のように整数を書く. 上と右の境界にはすべて 0 を, 左の境界には 1 を, そして, 下の境界には各サイトにある粒子の個数を書く. $x = (3, 0)$ のときは, 番号 3 と 0 のサイトにそれぞれ粒子が 1 個あるので, 縦方向の矢印の下端に $1, 0, 0, 1$ と記入する. k と $x = (x_1, \ldots, x_k)$ が一般の場合には, 縦方向の矢印を $(x_1 - x_k + 1)$ 本, 横方向の矢印を k 本ひいて, 上と同様の境界条件をおく.

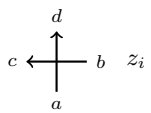


$x = (3, 0)$

図 5. Schur 関数の状態和表示

以上の境界条件の下で, 各交点のまわりの $*$ の位置 (横方向の矢印上) には 0 か 1 を, △ の位置 (縦方向の矢印上) には非負整数を置く. ただし, 各交点において

$$a + b = c + d$$



となるようにする. この条件を満たすように $*$ と $\triangle$ に整数を記入したパターンを配置と呼ぶ.

それぞれの配置に対して, パラメータ $\vec{z}=(z_1,\dots,z_k)$ の単項式を以下のように定める. 各交点の左にある数に応じて, その交点における重みを次で定める.

ただし z_i はその交点が乗っている横方向の矢印に割り当てられたパラメータである. そして, すべての交点での重みの積を取って, パラメータ $\vec{z}$ の単項式を定める. 図 6 に, $k=2, x=(3,0)$ の場合のすべての配置と対応する単項式を列挙した.

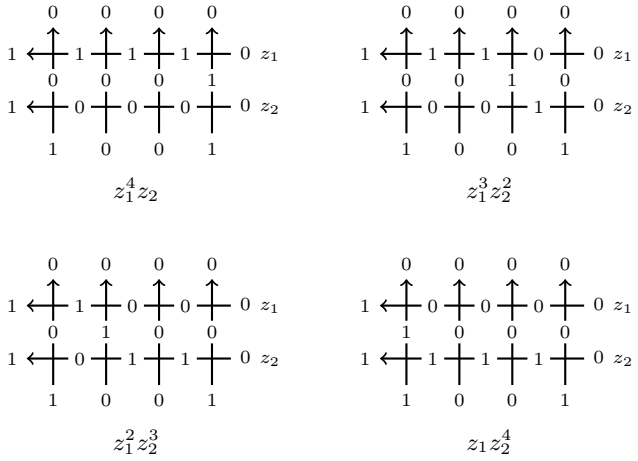


図 6. $S_{\vec{z}}(3,0)$ の状態和

このようにして得られた単項式の和を $C_{\vec{z}}(x)$ で表し, x における状態和と呼ぶ. 図 6 の例では

$$C_{\vec{z}}(3,0) = z_1^4 z_2 + z_1^3 z_2^2 + z_1^2 z_2^3 + z_1 z_2^4$$

である.

このとき, 次の等式が成り立つ.

$$S_{\vec{z}}(x_1,\dots,x_k) = \left(\prod_{i=1}^k z_i\right)^{x_k-1} C_{\vec{z}}(x_1,\dots,x_k)$$

上の表示を本稿では Schur 関数の状態和表示とよぶ[1]. たとえば, $k=2, x=(3,0)$ のとき右辺は

$$(z_1 z_2)^{-1} C_{\vec{z}}(3,0) = z_1^3 + z_1^2 z_2 + z_1 z_2^2 + z_2^3$$

となって, たしかに Schur 関数 (2.1) と一致する.

3.3. **状態和の多種粒子拡張.** 多種粒子 q-boson ゼロレンジ過程の生成作用素の固有関数は, 前項で述べた Schur 関数の状態和表示と同様の方法により構成できる.

多種粒子 q-boson ゼロレンジ過程の場合は, 粒子の配置 x と, 以下で述べる条件を満たす数ベクトル $\vec{\nu}$ をひとつ決めるごとに, 状態和 $C_{\vec{z},\vec{\nu}}(x)$ が定まる. 多種粒子 q-boson ゼロレンジ過程においては, 各番号の粒子の個数が保存される. そこで, 番号 $1,2,\dots,r$ の粒子の個数をそれぞれ $k_1,k_2,\dots,k_r$ とするとき, $\vec{\nu}=(\nu_1,\dots,\nu_k)$ (ただし $k=\sum_{a=1}^r k_a$) は, k_1 個の 1, k_2 個の 2, …, k_r 個の r を並べ換えてできる数ベクトルである.

例として, ボゾン粒子が 2 種類で, 状態 x が図 7 の場合を考える. この場合は番号 1 の粒子が 2 個, 番号 2 の粒子が 1 個あるので, $1,1,2$ の並び換え ν_1,ν_2,ν_3 をひとつ固定する.

[1]この表示は Schur 関数の tableau 表示と呼ばれるものと等価である. tableau 表示についてはたとえば [6] に解説がある.

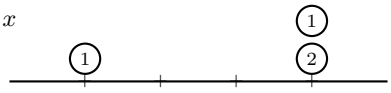


図 7. 状態 x

Schur 関数の場合と同様に, 各サイトの上に縦方向の矢印を書き, 全粒子の個数 3 と同じだけの横方向の矢印を書く. そして, 縦方向の矢印の上には非負整数の組 (m_1, m_2) を, 横方向の矢印の上には $0, 1, 2$ のいずれかを, 次の条件を満たすように置いていく.

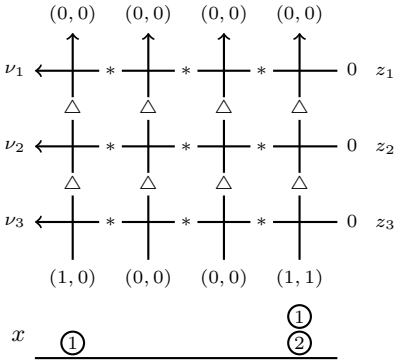


図 8. 状態和の多種粒子拡張

まず, 境界を次で定める. 横方向の矢印の右端にはすべて 0 を置き, 左端には最初に固定した ν_1, ν_2, ν_3 を置く. 縦方向の矢印の上端にはすべて $(0, 0)$ を置き, 下端には状態 x に対応させて次のデータをおく. すなわち, 各サイトにある番号 a の粒子の個数を m_a とするとき $(a = 1, 2)$, そのサイトに対応する矢印の下に (m_1, m_2) を置く.

残りの $*$ と $\triangle$ の部分には, 各交点において図 9 の 8 つのパターンのいずれかとなるように, $0, 1, 2$ および非負整数の組を置く. 図 9 にはそれぞれのパターンの重みも記してある.

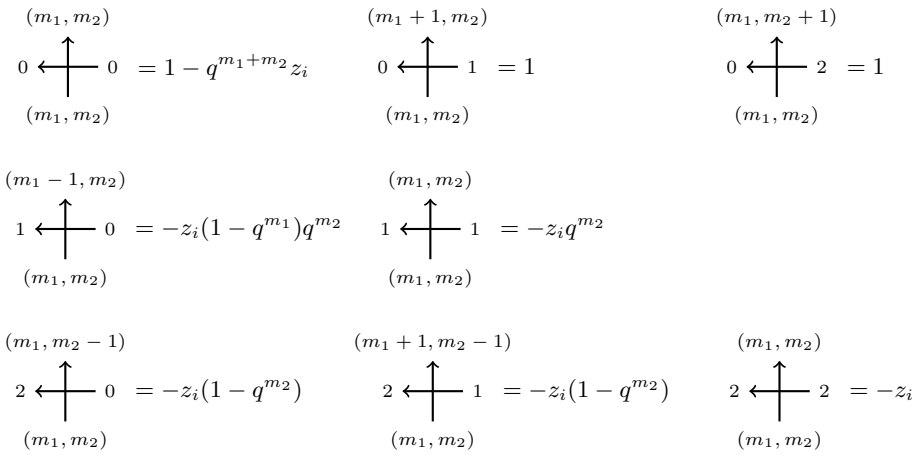


図 9. 各交点での重み (粒子が 2 種類の場合)

図 9 に定めた重みによって, Schur 関数の場合と同様に, 状態 x と数ベクトル $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ を決めるごとに状態和が定まる. これを $C_{\vec{z},\vec{\nu}}(x)$ で表す.

ここまでは粒子が二種類の場合の例を述べたが, 一般の場合も同様である. ボゾン粒子の種類が r である場合には, k_1 個の 1, k_2 個の 2, …, k_r 個の r を並び換えてできる数ベクトル $\vec{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_k)$ と, 状態 $x \in \mathcal{S}_{k_1,\ldots,k_r}$ が与えられるごとに, 状態和 $C_{\vec{z},\vec{\nu}}(x)$ が定まる.

まず, 図 8 と同様に, 各サイトの上に縦方向の矢印を書き, 横方向の矢印を k 本書く. 縦方向の矢印の上には r 個の非負整数の組 $(m_1, \ldots, m_r)$ を, 横方向の矢印の上には $0, 1, \ldots, r$ のいずれかを置く. 境界の定め方は図 8 の場合と同様である. 各交点において許されるパターンと, 対応する重みは図 10 の通りである.

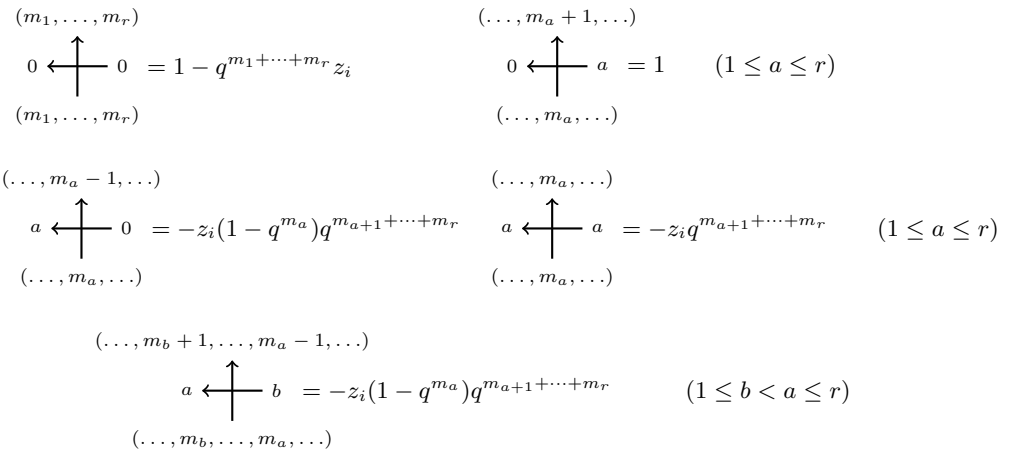


図 10. 各交点での重み (一般の場合)

この重みから定まる状態和を $C_{\vec{z},\vec{\nu}}(x)$ とする. このとき, 次のことが成り立つ.

Theorem 3.1. [9] $\mathcal{S}_{k_1,\ldots,k_r}$ 上の関数 $\Psi_{\vec{z},\vec{\nu}}$ を次で定める.

$$\Psi_{\vec{z},\vec{\nu}}(x) = \prod_{i=1}^{k} \frac{(-z_i)^{M'-1}}{(1-z_i)^M} C_{\vec{z},\vec{\nu}}(x)$$

ただし, M は状態 x において右端の粒子がいるサイトの番号で, M' は左端の粒子がいるサイトの番号である. このとき, $\Psi_{\vec{z},\vec{\nu}}$ は多種粒子 q-boson ゼロレンジ過程の生成作用素の固有関数である.

Remark 3.2. 原論文 [9] においては, 関数 $\Psi_{\vec{z},\vec{\nu}}$ を多成分 q-ボゾン代数の行列要素として定義している. この定義を組合せ論的に解釈し直して得られる状態和表示をここでは紹介した.

References

[1] Borodin, A. and Gorin, V., Lectures on integrable probability, *Probability and statistical physics in St. Petersburg*, 155–214, Proc. Sympos. Pure Math., **91**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2016.

[2] Borodin, A. and Petrov, L., Lectures on integrable probability: stochastic vertex models and symmetric functions, preprint, arXiv:1605.01349.

[3] Kuniba, A., Mangazeev, V. V., Maruyama, S. and Okado, M., Stochastic R matrix for $U_q(A_n^{(1)})$, *Nuclear Phys. B* **913** (2016), 248–277.

[4] Povolotsky, A. M., On the integrability of zero-range chipping models with factorized steady states, *J. Phys. A*, **46** (2013), no. 46.

[5] Sasamoto, T. and Wadati, M., Exact results for one-dimensional totally asymmetric diffusion models, *J. Phys. A* **31** (1998), no. 28, 6057–6071.

[6] 鈴木淳史, 現代物理数学への招待, 臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ 47, 2006.

[7] Takeyama, Y., A deformation of affine Hecke algebra and integrable stochastic particle system, *J. Phys. A*, **47** (2014), no. 46, 465203.

[8] Takeyama, Y., Algebraic construction of multi-species q-Boson system, preprint, arXiv:1507.02033.

[9] Takeyama, Y., On the eigenfunctions for the multi-species q-Boson system, preprint, arXiv:1606.00578.