

## 超離散Somos-4, 5 方程式の初期値問題の解法

中田, 庸一  
東京大学大学院数理科学研究科

<https://doi.org/10.15017/1832803>

---

出版情報 : 応用力学研究所研究集会報告. 28A0-S6 (1), pp.19-24, 2017-03. 九州大学応用力学研究所  
バージョン :  
権利関係 :

応用力学研究所研究集会報告 No.28AO-S6  
「非線形波動研究の深化と展開」 (研究代表者 辻本 諭)

Reports of RIAM Symposium No.28AO-S6

*Deepening and expansion of nonlinear wave science*

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,  
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 3 - November 5, 2016

Article No. 04 (pp. 19 - 24)

# 超離散 Somos-4, 5 方程式の 初期値問題の解法

中田 庸一 (NAKATA Yoichi)

(Received 17 January 2017; Accepted 9 February 2017)



Research Institute for Applied Mechanics  
Kyushu University  
March, 2017

# 超離散 Somos-4, 5 方程式の初期値問題の解法

東京大学大学院数理科学研究科  
附属数理科学連携基盤センター  
生物医学と数学の融合拠点 (iBMath)  
中田 庸一 (NAKATA Yoichi)

## 概要

Somos sequence のうちいくつかは解が係数が正の Laurent 多項式で表されるという性質を持つ。その超離散対応物のうち超離散 Somos-4 および Somos-5 方程式についてその解は初期値の区分線形関数として表されるが、それを凸多角形と対応させ方程式による時間発展を凸多角形間の演算として記述することにより、任意の初期値に対する一般解を計算する方法を得、具体的に書き下すことができた。

## 1 イントロダクション

離散方程式における可積分性とは何かという問題に対し、解を初期値の式として表したときの代数的な性質に着目するアプローチが近年なされている。これはクラスター代数 [1] と離散方程式の可積分性が関連づけられる事がわかってきた [2] ことに端を発するもので、多くの離散可積分方程式の解が初期値を変数とする Laurent 多項式で表される [3] だけではなく、その Laurent 多項式が既約でありかつ互いに素であることが分かった [4]。

では離散方程式におけるこれらの結果が超離散系においてどのように実現されるのだろうか。解が Laurent 多項式で表されるということは、その超離散化は  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$  の線形関数  $F_i$  を用いて

$$\max_{i=1, \dots, m} (F_i(\mathbf{A})) \quad (1)$$

の形で表せることを意味する。しかしこのような性質を持つ超離散方程式には発展により解を計算する過程において一般に  $-\max$  の項が存在してしまう。そのため離散方程式の解を計算する過程で行う約分に相当する操作により、このような項を消去しなければ (1) のような形にはならない。

我々はこのような計算を可能にするメカニズムが凸多面体同士の Minkowski 和の逆操作として理解出来ることを発見した [5]。さらに 2次元の凸多面体 (凸多角形) の場合については凸多面体の Minkowski 和を簡単に計算するアルゴリズムを用いることで、超離散 Somos-4, 5 方程式についてその初期値問題の厳密解を与えた。以下ではその概要について説明する。

## 2 Key idea

例として以下の差分方程式を考えてみる。

$$f_n f_{n-2} = f_{n-1}^2 + 1 \quad (n \geq 2). \quad (2)$$

この方程式は  $A_N$ -型のクラスター代数のクラスター変数の変異と関連があり, その解は Laurent 多項式で表されることが知られている [6]. この方程式を超離散化したものは

$$F_n + F_{n-2} = 2 \max(F_{n-1}, 0) \quad (n \geq 2). \quad (3)$$

となる. この初期値問題の解を (3) を発展させることで計算してみよう. まず,  $F_2, F_3$  は計算過程に  $-\max$  が存在しないため明らかに (1) の形を満たし,  $F_0 = A, F_1 = B$  とすると

$$F_2 = 2 \max(B, 0) - A = \max(-A + 2B, -A) \quad (4)$$

$$F_3 = 2 \max(2B, 0, A) - 2A - B = \max(-2A + B, -2A - B, -A - B) \quad (5)$$

と記述される.  $F_4$  から  $-\max$  の計算が発生し

$$F_4 = 2 \max(4B, 0, 2A, 2A + B) - 2 \max(B, 0) - 3A - 2B \quad (6)$$

となるが,  $\max$  の中身はよく見ると

$$\begin{aligned} \max(4B, 0, 2A, 2A + B) &= \max(4 \max(B, 0), 2A + \max(B, 0)) \\ &= \max(3 \max(B, 0), 2A) + \max(B, 0) \\ &= \max(3B, 0, 2A) + \max(B, 0) \end{aligned} \quad (7)$$

と分解できることから

$$F_4 = 2 \max(3B, 0, 2A) - 3A - 2B = \max(-3A + 4B, -3A - 2B, A - 2B). \quad (8)$$

となり, やはり (1) の形になることが分かる. しかし  $F_5$  は

$$F_5 = 2 \max(6B, 0, 4A, 3A + 2B) - 2 \max(2B, 0, A) - 4A - 3B \quad (9)$$

となるが, この式の形から先ほどのような眼力で (1) の形に帰着させる方法を見いだすことは難しい. 場合分けを行った結果をまとめることで最終的に

$$F_5 = 2 \max(4B, 0, 3A) - 4A - 3B = \max(-4A + 5B, -4A - 3B, 2A - 6B). \quad (10)$$

と書き直すことができ, 確かに (1) の形になることが分かる. しかしこの先の  $F_n$  も同様に計算しようとする,  $\max$  の具体的な中身を評価して場合分けをしなければならないことになる. 統一的方法で  $F_n$  を計算する方法はないだろうか.

ここで  $F_5$  の形から

$$\max(4B, 0, 3A) + \max(2B, 0, A) = \max(6B, 0, 4A, 3A + 2B). \quad (11)$$

という関係が恒等的に成り立っている事が分かる. この式の左辺を展開すると

$$\max(4B, 0, 3A) + \max(2B, 0, A) = \max(6B, 4B, A + 4B, 2B, 0, A, 3A + 2B, 3A, 4A). \quad (12)$$

となるが, これと (11) の右辺を比較すると  $4B, A + 4B, 2B, A, 3A$  が  $\max$  の中に余分にあることが分かる. よってこれらが  $\max$  として現れない事, すなわち  $\max(6B, 0, 4A, 3A + 2B)$  以下であることが示されればよい. ここで  $A + 4B$  について

$$A + 4B = \frac{1}{4} \times 4A + \frac{2}{3} \times 6B + \frac{1}{12} \times 0 \quad (13)$$

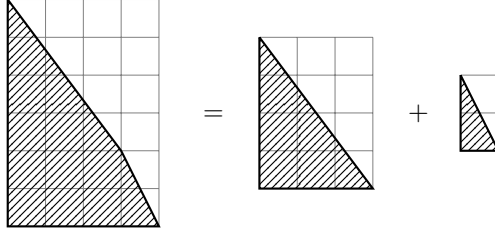


図 1: 等式 (11) の凸多角形による表現.

という関係が恒等的に成り立っていることに注目する. すなわち  $A+4B$  は  $4A, 6B, 0$  の加重平均として表されていることから,  $\max(4A, 6B, 0)$  以下であるということが分かる (他の最大として現れないものも加重平均として表せることは明らかである). この議論を一般化すると,  $V = \{(\alpha_i, \beta_i)\}_{i=1}^N \subset \mathbf{R}^2$  とし,  $V_e \subset V$  を  $V$  の極点 ( $V$  の凸包の頂点) とするとき,

$$\max_{(\alpha, \beta) \in V} (\alpha A + \beta B) = \max_{(\alpha, \beta) \in V_e} (\alpha A + \beta B) \quad (14)$$

の関係が成り立っていることが分かる. さらに関数の集合  $\mathcal{F} = \{f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R} \mid f(A, B) = \max_{(\alpha, \beta) \in V} (\alpha A + \beta B), V \subset \mathbf{R}^2 \text{ は有限集合}\}$  の元と  $\mathbf{R}^2$  内の凸多角形の間には一対一対応がある事もわかる.

では  $\mathcal{F}$  の元を凸多角形に置き換えたとき, それらの間の  $\max, +$  演算は凸多角形のレベルではどのような演算に対応しているのか, 簡単な計算から以下のことが分かる.

**命題 1**  $F, G \in \mathcal{F}$  とし,  $X \in \mathcal{F}$  に対応する凸多角形を  $\mathcal{P}(X)$  とすると, 以下が言える.

- $\mathcal{P}(\max(F, G))$  は  $\mathcal{P}(F)$  と  $\mathcal{P}(G)$  の和集合の凸包.
- $\mathcal{P}(F + G)$  は  $\mathcal{P}(F)$  と  $\mathcal{P}(G)$  の Minkowski 和. □

max-plus 代数では自然に定義できる  $F - G$  は凸多角形の演算としては必ずしも定義できない事に注意する.

この命題により原理的には max-plus の計算を凸多角形の演算として置き換えられることが分かった. しかし具体的に和集合や Minkowski 和を求める際に定義に基づいて凸包を計算し, どの極点が残るのかを評価することは容易ではない. しかし平面凸多角形の Minkowski 和に関しては, その辺ベクトルに着目することで簡単に計算することが可能である.

**命題 2** ([7])  $P, Q$  を  $\mathbf{R}^2$  内の凸多角形として,  $E(X)$  を  $X$  の辺ベクトルの集合とする. このとき  $E(P + Q)$  は以下のアルゴリズムによって得られる:

- $E(P) = \{e_i\}_{i=1}^n, E(Q) = \{\tilde{e}_j\}_{j=1}^m$  を偏角の順に並べる.
- $i = 1$  および  $j = 1$  から以下の手続きを  $i > n$  もしくは  $j > m$  になるまで繰り返す.
- $e_i$  と  $\tilde{e}_j$  偏角を比較する.
  - $\arg e_i > \arg \tilde{e}_j$  ならば  $e_i$  を  $E(P + Q)$  に追加し,  $i \mapsto i + 1$  とする.
  - $\arg e_i < \arg \tilde{e}_j$  ならば  $\tilde{e}_j$  を  $E(P + Q)$  に追加し,  $j \mapsto j + 1$  とする.
  - $\arg e_i = \arg \tilde{e}_j$  ならば  $e_i + \tilde{e}_j$  を  $E(P + Q)$  に追加し,  $i \mapsto i + 1$  および  $j \mapsto j + 1$  とする.

- もし  $i > n$  となったら,  $\tilde{e}_j, \dots, \tilde{e}_m$  を全て  $E(P + Q)$  に加える.
- もし  $j > m$  となったら,  $e_i, \dots, e_n$  を全て  $E(P + Q)$  に加える. □

この手順を逆にたどることで Minkowski 和の逆操作が構成出来る. 即ち凸多角形  $Q$  および  $R$  が与えられるとき  $R = P + Q$  となる  $P$  が存在するかどうかを判定し, 存在するならば  $E(P)$  を求めることが可能である.

図 1 は恒等式 (11) を凸多角形の Minkowski 和として表したものである. この例では Minkowski 和の定義, および命題 2 の方法による計算法の結果と一致していることが容易に確かめられる.

最後に方程式 (3) の一般解を求めておこう. 上記の凸多角形による議論を用いることで  $n \geq 2$  について恒等式

$$\max(0, nA, (n+1)) + \max(0, (n-2)A, (n-1)B) = \max(0, 2(n-1)A, 2nB, nA + (n-1)B) \quad (15)$$

が成り立つことは容易に示される. これを用いることで, 一般解  $F_n$  は初期値  $A, B$  を用いて

$$F_n = 2 \max((n-1)B, 0, (n-2)A) - (n-1)A - (n-2)B \quad (n \geq 2) \quad (16)$$

と表すことが出来る.

### 3 超離散 Somos-4 方程式

超離散 Somos-4 方程式の初期値問題は以下で与えられる:

$$F_n + F_{n-4} = \max(F_{n-1} + F_{n-3}, 2F_{n-2}) \quad (n \geq 4) \quad (17)$$

$$F_0 = A, F_1 = B, F_2 = C, F_3 = D \quad (A, B, C, D \in \mathbb{R}). \quad (18)$$

(17) はゲージ変換  $F_n \mapsto F_n + a + bn$  ( $a, b \in \mathbb{R}$ ) に対して不変なのでゲージをうまくとることで一般性を失うことなく  $A = B = 0$  とできる. したがって解は  $(C, D)$  の 2 変数で表され,  $\max$  が表す図形も平面凸多角形となる.

この問題に対し先ほどの例と同様の手法を適用することで以下の結論を得る.

**定理 3** 超離散 Somos-4 の初期値問題について  $n \geq 8$  の解は以下の形で表される:

$$F_n = -\nu_n C - \nu_{n-1} D + \max_{(\gamma, \delta) \in V_n} (\gamma C + \delta D). \quad (19)$$

ただし  $\nu_n$  は方程式 (17) の初期値  $C = -1, D = 0$  としたときの解で以下で表される:

$$\nu_{8k} = 8 \frac{k(k-1)}{2} + 1 \quad \nu_{8k+1} = k + 8 \frac{k(k-1)}{2} \quad (20)$$

$$\nu_{8k+2} = 2k + 8 \frac{k(k-1)}{2} \quad \nu_{8k+3} = 3k + 8 \frac{k(k-1)}{2} \quad (21)$$

$$\nu_{8k+4} = 4k + 8 \frac{k(k-1)}{2} - 1 \quad \nu_{8k+5} = 5k + 8 \frac{k(k-1)}{2} \quad (22)$$

$$\nu_{8k+6} = 6k + 8 \frac{k(k-1)}{2} \quad \nu_{8k+7} = 7k + 8 \frac{k(k-1)}{2} \quad (23)$$

また  $V_n$  は

$$V_{8k} = \left\{ \left(0, 6k + 16\frac{k(k-1)}{2}\right), \left(0, 4k + 8\frac{k(k-1)}{2}\right), \left(8k + 16\frac{k(k-1)}{2}, 0\right), \left(9k + 24\frac{k(k-1)}{2}, 0\right) \right\} \quad (24)$$

$$V_{8k+1} = \left\{ \left(0, 8k + 16\frac{k(k-1)}{2}\right), \left(0, 5k + 8\frac{k(k-1)}{2}\right), \left(10k + 16\frac{k(k-1)}{2}, 0\right), \left(12k + 24\frac{k(k-1)}{2}, 0\right) \right\} \quad (25)$$

$$V_{8k+2} = \left\{ \left(0, 10k + 16\frac{k(k-1)}{2}\right), \left(0, 6k + 8\frac{k(k-1)}{2}\right), \left(12k + 16\frac{k(k-1)}{2}, 0\right), \left(15k + 24\frac{k(k-1)}{2}, 0\right) \right\} \quad (26)$$

$$V_{8k+3} = \left\{ \left(0, 12k + 16\frac{k(k-1)}{2}\right), \left(0, 7k + 8\frac{k(k-1)}{2}\right), \left(14k + 16\frac{k(k-1)}{2}, 0\right), \left(18k + 24\frac{k(k-1)}{2}, 0\right) \right\} \quad (27)$$

$$V_{8k+4} = \left\{ \left(0, 14k + 16\frac{k(k-1)}{2} + 1\right), \left(0, 8k + 8\frac{k(k-1)}{2} + 1\right), \left(16k + 16\frac{k(k-1)}{2} + 2, 0\right), \right. \\ \left. \left(21k + 24\frac{k(k-1)}{2} + 2, 0\right), \left(2, 14k + 16\frac{k(k-1)}{2}\right) \right\} \quad (28)$$

$$V_{8k+5} = \left\{ \left(0, 16k + 16\frac{k(k-1)}{2} + 2\right), \left(0, 9k + 8\frac{k(k-1)}{2} + 2\right), \left(1, 9k + 8\frac{k(k-1)}{2} + 1\right), \right. \\ \left. \left(18k + 16\frac{k(k-1)}{2} + 3, 0\right), \left(24k + 24\frac{k(k-1)}{2} + 3, 0\right) \right\} \quad (29)$$

$$V_{8k+6} = \left\{ \left(0, 18k + 16\frac{k(k-1)}{2} + 3\right), \left(0, 10k + 8\frac{k(k-1)}{2} + 2\right), \left(20k + 16\frac{k(k-1)}{2} + 4, 0\right), \right. \\ \left. \left(27k + 24\frac{k(k-1)}{2} + 4, 0\right), \left(27k + 24\frac{k(k-1)}{2} + 3, 1\right) \right\} \quad (30)$$

$$V_{8k+7} = \left\{ \left(0, 20k + 16\frac{k(k-1)}{2} + 4\right), \left(0, 11k + 8\frac{k(k-1)}{2} + 3\right), \left(22k + 16\frac{k(k-1)}{2} + 6, 0\right), \right. \\ \left. \left(30k + 24\frac{k(k-1)}{2} + 7, 0\right), \left(1, 20k + 16\frac{k(k-1)}{2} + 4\right) \right\} \quad (31)$$

□

証明はまず  $\nu_n$  について帰納法を用いて証明し、その後  $F_n$  について同じく帰納的に両辺に対応する凸多角形が等しいことを示していけばよい。ここで多角形  $V_{8k}$  の辺ベクトルはそれぞれベクトル  $(0, -1)$ ,  $(2, -1)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(-3, 2)$  と偏角が同じであることに注意する。残りの多角形についても、同様に上記のベクトルと同じ偏角であるものを含んでいることが分かる。辺ベクトルの傾きが  $k$  によらない簡単な形になることから凸多角形の和集合を考えたとき、どの点が凸包の極点になるのかということが比較的容易に判定することが可能になる。

超離散 Somos-5 方程式

$$F_n + F_{n-5} = \max(F_{n-1} + F_{n-4}, F_{n-2} + F_{n-3}) \quad (n \geq 5) \quad (32)$$

$$F_0 = A, F_1 = B, F_2 = C, F_3 = D, F_4 = E \quad (A, B, C, D, E \in \mathbb{R}) \quad (33)$$

についても同様に適切にゲージ変換を行うことで  $A = B = C = 0$  とすることができ、一般解は  $D$  と  $E$  の関数となることから、同様に凸多角形として置き換えることで厳密な解を与えることが可能である。

## 4 まとめ

我々は  $\max(\dots)$  の形の関数が凸多角形に一対一対応し、それらの間の  $\max, +$  演算がそれぞれ凸多角形の演算として解釈できることを利用することで、超離散 Somos-4, 5 方程式の初期値問題についてその厳密解を与えた。

この方法は  $\max$  の式を忠実に置き換えているので、 $\max$ -plus 代数で発生している問題点もまた忠実に再現している点に注意する。例えば  $P = \max(B, A, B + 2A, A + 2B)$ ,  $Q = \max(0, 2A, 2A + 2B, 2B)$  としたとき  $\max(P, Q)$  において  $P$  の寄与はなくなるが、凸多角形のレベルで見たときには  $P$  は  $Q$  に含まれてしまい  $P$  と  $Q$  の和集合において  $P$  の幾何的性質はなくなっている。

その一方忠実であるため、対応する凸多面体をより高次のものにより高い自由度を持つ初期値問題への応用は原理的に可能である。しかしながら、その場合どのようにして凸多面体の計算を行うかという点が問題として残っている点には注意しなければならない。

## 5 謝辞

本研究は国立研究開発法人日本医療研究開発機構 (AMED) 研究開発施設共用等促進費補助金 (創薬等ライフサイエンス研究支援基盤事業) 「生命動態システム科学推進拠点事業」の助成を受けたものである。

## 参考文献

- [1] S. Fomin and A. Zelevinsky. Cluster Algebras I: Foundations. *J. Amer. Math. Soc.*, 15, 497–529, 2002.
- [2] N. Okubo. Discrete integrable systems and cluster algebras. *RIMS Kokyuroku Bessatsu.*, B41, 25–42, 2013.
- [3] R. Inoue, O. Iyama, A. Kuniba, T. Nakanishi and J. Suzuki. Periodicities of T and Y systems. *Nagoya Math. J.*, 197, 59–174, 2010.
- [4] M. Kanki, J. Mada, T. Mase and T. Tokihiro. Irreducibility and co-primeness as an integrability criterion for discrete equations *J. Phys. A: Math. Theor.*, 47:465204, 2014.
- [5] Y. Nakata. The solution to the initial value problem for the ultradiscrete Somos-4 and 5 equations. arXiv:1701.04262, 2017.
- [6] P. Caldero and A. Zelevinsky Laurent expansions in cluster algebras via quiver representations. *Mosc. Math. J.*, 6:411–429, 2006.
- [7] I. Z. Emiris and E. P. Tsigaridas. Minkowski decomposition of convex lattice polygons. *Algebraic Geometry and Geometric Modeling* 217–236, 2006.