

連立型反応拡散セル・オートマトンの進行波

村田, 実貴生
東京農工大学大学院工学研究院

<https://doi.org/10.15017/1832801>

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 28A0-S6 (1), pp.7-12, 2017-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.28AO-S6
「非線形波動研究の深化と展開」 (研究代表者 辻本 諭)

Reports of RIAM Symposium No.28AO-S6

Deepening and expansion of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 3 - November 5, 2016

Article No. 02 (pp. 7 - 12)

連立型反応拡散セル・オートマトンの 進行波

村田 実貴生 (MURATA Mikio)

(Received 13 January 2017; Accepted 6 March 2017)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2017

連立型反応拡散セル・オートマトンの進行波

東京農工大学大学院工学研究院 村田実貴生 (MURATA Mikio)

概要 多成分のセル・オートマトンの中で基本的と考えられるセル・オートマトンとして「連立型反応拡散セル・オートマトン」を提案し、エレメンタリー・セル・オートマトンとの関係を述べる。連立型反応拡散セル・オートマトンに現れる進行波について調査結果を報告する。

1 反応拡散セル・オートマトン

この章では、反応拡散セル・オートマトンのうちで基本的なものと考えられる各成分が2値のセル・オートマトンを定義し、エレメンタリー・セル・オートマトン (ECA) との関係について述べる。

1.1 1成分2値反応拡散セル・オートマトン

まず、1成分2値の反応拡散セル・オートマトンがどのようなものを説明する。

時間変数 n と空間変数 j をもつ従属変数を U_n^j とし、 $U_n^j \in \{0, 1\}$ とする。拡散を表す項は、反応拡散方程式のセル・オートマトン化のときと同様に $\{A_n^j\}_p = \max(A_n^{j+p}, A_n^{j-p})$ とする。 $u_0, u_1 \in \{0, 1\}$ として、セル・オートマトンのルールを

$$\begin{array}{ccc} \hline \hline \{U_n^j\}_p & 1 & 0 \\ \hline U_{n+1}^j & u_1 & u_0 \\ \hline \hline \end{array}$$

と定める。 $(u_1 u_0)_2$ を十進表記した数を u として、各ルールを「ルール $u(p)$ 」と書くことにする。 p を固定して考えるときには単に「ルール u 」とする。 p を固定したとき、ルールの数は4個ある。また $p = 1, 0$ のときは、以下のルール番号の ECA になる。

ルール	$p = 1$	$p = 0$
0	0	0
1	5	51
2	250	204
3	255	255

1.2 2成分2値反応拡散セル・オートマトン

2成分セル・オートマトンの中で次のルールで表されるものを2成分反応拡散セル・オートマトンと呼ぶことにしよう。

時間変数 n と空間変数 j をもつ従属変数を U_n^j, V_n^j とし、 $(U_n^j, V_n^j) \in \{0, 1\} \times \{0, 1\}$ とする。 $u_0, u_1, u_2, u_3, v_0, v_1, v_2, v_3 \in \{0, 1\}$ として、セル・オートマトンのルールを

$$\begin{array}{cccccc} \hline \hline \{U_n^j\}_p, \{V_n^j\}_q & 1, 1 & 1, 0 & 0, 1 & 0, 0 \\ \hline U_{n+1}^j & u_3 & u_2 & u_1 & u_0 \\ \hline V_{n+1}^j & v_3 & v_2 & v_1 & v_0 \\ \hline \hline \end{array}$$

と定める． $(u_3u_2u_1u_0)_2$ を十進表記した数を u , $(v_3v_2v_1v_0)_2$ を十進表記した数を v として，各ルールを「ルール $u-v$ (p, q)」と書くことにする． p, q を固定したとき，ルールの数は 256 個ある．なお，グレイ・スコットモデルの超離散化 [2] からはルール 8-7 と 8-2 が得られる．

2 成分セル・オートマトンを定義したが，本質的に 1 成分系になる場合を把握しておく．

ルール 0-*, 15-* のときは U は定値．ルール *-0, *-15 のときは V は定値．ルール 3-5, 3-10, 12-5, 12-10 のときは U は U のみから， V は V のみから決定．

ルール $u-u$ のとき，時刻 $n = 0$ から始めたとき， $U_1^j = V_1^j$ となる．したがって， $U_0^j = V_0^j$ を満たす初期値のみを考えることで 1 成分系へ簡約することができる．

$$\begin{array}{cccccc} \hline \hline \{U_n^j\}_p, \{U_n^j\}_q & 1, 1 & 1, 0 & 0, 1 & 0, 0 \\ \hline U_{n+1}^j & u_3 & u_2 & u_1 & u_0 \\ \hline \hline \end{array}$$

特に $p, q = 1, 0$ のときには，以下のルール番号の ECA になる．

ルール	$(p, q) = (1, 1)$	$(p, q) = (1, 0)$	$(p, q) = (0, 1)$	$(p, q) = (0, 0)$
0-0	0	0	0	0
1-1	5	1	1	51
2-2	0	4	50	0
3-3	5	5	51	51
4-4	0	50	4	0
5-5	5	51	5	51
6-6	0	54	54	0
7-7	5	55	55	51
8-8	250	200	200	204
9-9	255	201	201	255
10-10	250	204	250	204
11-11	255	205	251	255
12-12	250	250	204	204
13-13	255	251	205	255
14-14	250	254	254	204
15-15	255	255	255	255

ルール $u-(15-u)$ のとき，時刻 $n = 0$ から始めたとき， $V_1^j = \bar{U}_1^j = 1 - U_1^j$ となる．したがって， $V_0^j = \bar{U}_0^j$ を満たす初期値のみを考えることで 1 成分系へ簡約することができる．

$$\begin{array}{cccccc} \hline \hline \{U_n^j\}_p, \{\bar{U}_n^j\}_q & 1, 1 & 1, 0 & 0, 1 & 0, 0 \\ \hline U_{n+1}^j & u_3 & u_2 & u_1 & u_0 \\ \hline \hline \end{array}$$

特に $p, q = 1, 0$ のときには，以下のルール番号の ECA になる．

ルール	$(p, q) = (1, 1)$	$(p, q) = (1, 0)$	$(p, q) = (0, 1)$	$(p, q) = (0, 0)$
0-15	0	0	0	0
1-14	0	4	32	0
2-13	5	1	19	51
3-12	5	5	51	51
4-11	160	200	128	204
5-10	160	204	160	204
6-9	165	201	147	255
7-8	165	205	179	255
8-7	90	50	76	0
9-6	90	54	108	0
10-5	95	51	95	51
11-4	95	55	127	51
12-3	250	250	204	204
13-2	250	254	236	204
14-1	255	251	223	255
15-0	255	255	255	255

1.3 3成分2値反応拡散セル・オートマトン

3成分2値の反応拡散セル・オートマトンも定義することができる。

時間変数 n と空間変数 j をもつ従属変数を U_n^j, V_n^j, W_n^j とし, $(U_n^j, V_n^j, W_n^j) \in \{0, 1\} \times \{0, 1\} \times \{0, 1\}$ とする. $u_i, v_i, w_i \in \{0, 1\}$ とし, セル・オートマトンのルールを

$\{U_n^j\}_p, \{V_n^j\}_q, \{W_n^j\}_r$	1, 1, 1	1, 1, 0	1, 0, 1	1, 0, 0	0, 1, 1	0, 1, 0	0, 0, 1	0, 0, 0
U_{n+1}^j	u_7	u_6	u_5	u_4	u_3	u_2	u_1	u_0
V_{n+1}^j	v_7	v_6	v_5	v_4	v_3	v_2	v_1	v_0
W_{n+1}^j	w_7	w_6	w_5	w_4	w_3	w_2	w_1	w_0

と定める. $(u_7 u_6 u_5 u_4 u_3 u_2 u_1 u_0)_2$ を十進表記した数を u , $(v_7 v_6 v_5 v_4 v_3 v_2 v_1 v_0)_2$ を十進表記した数を v , $(w_7 w_6 w_5 w_4 w_3 w_2 w_1 w_0)_2$ を十進表記した数を w とし, 各ルールを「ルール $u-v-w(p, q, r)$ 」と書くことにする. p, q, r を固定して考えるときには「ルール $u-v-w$ 」と書くことにする. p, q, r を固定したとき, ルールの数は $16,777,216 (= 8^8)$ 個ある. ルール $u-u-(255-u)$ のとき, 時刻 $n=0$ から始めたとき, $V_1^j = U_1^j, W_1^j = \bar{U}_1^j$ となる. したがって, $V_0^j = U_0^j, W_0^j = \bar{U}_0^j$ を満たす初期値を考えることで1成分の系へ簡約することができる.

$\{U_n^j\}_p, \{U_n^j\}_q, \{\bar{U}_n^j\}_r$	1, 1, 1	1, 1, 0	1, 0, 1	1, 0, 0	0, 1, 1	0, 1, 0	0, 0, 1	0, 0, 0
U_{n+1}^j	u_7	u_6	u_5	u_4	u_3	u_2	u_1	u_0

特に, $p, q, r = 1, 0$ のときは, 以下のルール番号の ECA になる.

$(p, q, r) = (1, 1, 1)$	$(p, q, r) = (1, 1, 0)$	$(p, q, r) = (1, 0, 1)$	$(p, q, r) = (1, 0, 0)$
$(u_6 u_7 u_6 u_7 u_7 u_1 u_7 u_1)_2$	$(u_6 u_6 u_7 u_7 u_6 u_0 u_7 u_1)_2$	$(u_6 u_7 u_4 u_5 u_7 u_3 u_5 u_1)_2$	$(u_6 u_6 u_5 u_5 u_6 u_2 u_5 u_1)_2$
$(p, q, r) = (0, 1, 1)$	$(p, q, r) = (0, 1, 0)$	$(p, q, r) = (0, 0, 1)$	$(p, q, r) = (0, 0, 0)$
$(u_6 u_7 u_2 u_3 u_7 u_5 u_3 u_1)_2$	$(u_6 u_6 u_3 u_3 u_6 u_4 u_3 u_1)_2$	$(u_6 u_7 u_0 u_1 u_7 u_7 u_1 u_1)_2$	$(u_6 u_6 u_1 u_1 u_6 u_6 u_1 u_1)_2$

ECA $(u_6 u_7 u_4 u_5 u_7 u_3 u_5 u_1)_2$ や $(u_6 u_7 u_2 u_3 u_7 u_5 u_3 u_1)_2$ は左右対称なルールの一般形であるから，この簡約によりすべての左右対称な ECA が得られることが分かる．したがって，左右対称な ECA は連立型反応拡散セル・オートマトンで表せることになる．

2 進行解

この章では，2成分2値反応拡散セル・オートマトンの最も基本的な解である定常解と進行解を拡散比が等しい場合 $(p, q) = (1, 1)$ の場合と拡散比が異なる場合 $(p, q) = (1, 0)$ の場合について調べる．

(U_n^j, V_n^j) のとりうる4つの状態を $e_0 = (0, 0)$, $e_1 = (0, 1)$, $e_2 = (1, 0)$, $e_3 = (1, 1)$ とする． $\lim_{j \rightarrow -\infty} (U_n^j, V_n^j) = e_-$, $\lim_{j \rightarrow \infty} (U_n^j, V_n^j) = e_+$ である進行解を (e_-, e_+) -進行解と呼ぶことにする． $e_- \neq e_+$ である解はフロント解， $e_- = e_+$ である解はパルス解と呼ばれる． $(U_{n+1}^j, V_{n+1}^j) = (U_n^{j-1}, V_n^{j-1})$ である進行解を +1 進行解， $(U_{n+1}^j, V_{n+1}^j) = (U_n^{j+1}, V_n^{j+1})$ である進行解を -1 進行解と呼ぶことにする．

2.1 拡散比が等しい場合

$(p, q) = (1, 1)$ のときには，例えば以下のような定常解や進行解が存在する．なお，このとき $U_n^j \leftrightarrow V_n^j$ の変換で $(p, q) = (1, 1)$ の別のルールに移ることから，記載した以外のルールにも定常解や進行解が存在することがわかる．

(e_3, e_0) -+1 進行解：8-8, 8-10, 8-12, 8-14, 10-8, 10-10, 10-12, 10-14, 12-8, 12-10, 12-12, 12-14, 14-8, 14-10, 14-12, 14-14

U	...	1	1	0	0	...
V	...	1	1	0	0	...

(e_2, e_1) -+1 進行解：12-2, 12-3, 13-2, 13-3

U	...	1	1	0	0	...
V	...	0	0	1	1	...

(e_2, e_1) -定常解：4-2, 4-3, 5-2, 5-3

U	...	1	1	0	0	0	...
V	...	0	0	0	1	1	...

(e_2, e_2) -定常解：4-1, 4-3, 6-1, 6-3

U	...	1	1	0	0	0	1	1	...
V	...	0	0	0	1	0	0	0	...

2.2 拡散比が等しくない場合

$(p, q) = (1, 0)$ のときには，例えば以下のような定常解や進行解が存在する．なお，このとき $V_n^j \rightarrow \bar{V}_n^j$ の変換で $(p, q) = (1, 0)$ の別のルールに移ることから，記載した以外のルールにも定常解や進行解が存在することがわかる．

(e_3, e_0) -+1 進行解 : 12-12, 12-14, 14-12, 14-14

U	\dots	1	1	0	0	\dots
V	\dots	1	1	0	0	\dots

(e_3, e_0) -定常解 : 8-8, 8-10, 10-8, 10-10

U	\dots	1	1	0	0	\dots
V	\dots	1	1	0	0	\dots

(e_3, e_3) -定常解 : 8-8, 8-9, 8-10, 8-11, 9-8, 9-9, 9-10, 9-11, 10-8, 10-9, 10-10, 10-11, 11-8, 11-9, 11-10, 11-11

U	\dots	1	1	0	1	1	\dots
V	\dots	1	1	0	1	1	\dots

(e_0, e_0) -定常解 : 2-2, 2-10, 10-2, 10-10

U	\dots	0	0	1	0	0	\dots
V	\dots	0	0	1	0	0	\dots

(e_0, e_0) -+1 進行解 : 4-6

U	\dots	0	0	0	1	0	0	\dots
V	\dots	0	0	1	1	0	0	\dots

3 ルール 4-6(1,0) の解析

パルス進行解を持つ反応拡散セル・オートマトンは今回の調査対象の中ではルール 4-6(1,0) と 8-6(1,0) のみでこの両者は変数変換で移り合うことから、本質的に 1 種類のみである。図 1 は特徴的な初期値からの時間発展の様子である。右上は右に進行する連続するパルスの様子である。連

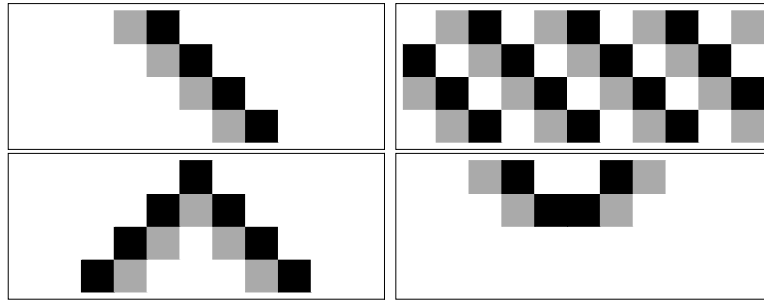


図 1: ルール 4-6(1,0) の時間発展。色は e_0 (白色), e_1 (灰色), e_4 (黒色)。

続するパルスの最小間隔は $j = 3$ であり, 不応期が $n = 3$ である。左下はパルスの発生, 右下は 2 つのパルスの衝突と消滅の様子である。

更に, ルール 4-6(1,0) について空間 2 次元の系も考えることができる。六角格子を採用する場合には $\{U_n^{j,k}\} = \max(U_n^{j+1,k}, U_n^{j-1,k}, U_n^{j,k+1}, U_n^{j,k-1}, U_n^{j+1,k+1}, U_n^{j-1,k-1})$ と定義して,

$\{U_n^{j,k}\}, V_n^{j,k}$	1, 1	1, 0	0, 1	0, 0
$U_{n+1}^{j,k}$	0	1	0	0
$V_{n+1}^{j,k}$	0	1	1	0

がルール表になる．この場合にはパルス波は生じず，ターゲットパターンが生じるセル・オートマトンになる．なお，四角格子の場合はムーア近傍を採用すれば同じようなターゲットパターンが

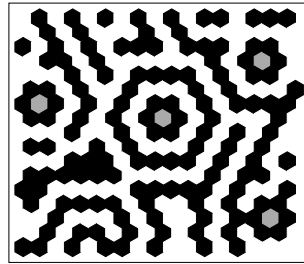


図 2: 六角格子版ルール 4-6(1,0) のつくるパターン．色は e_0 (白色), e_1 (灰色), e_4 (黒色)．

生じる．

まとめ

連立型反応拡散セル・オートマトンを定義し，基本的な解である定常解・進行解について調査した．2つの安定状態を結ぶ解であるフロント定常解・進行解については，2つの安定状態が境界で接するような初期値から時間発展をしたときに，境界から別の状態が生じない場合には何らかのフロント解となることがわかるので，双安定型の多くのルールの場合にフロント解が存在することがわかる．一方，パルス解については，パルスの形状を保つためにルールに条件がつき，特定のルールのセル・オートマトンがパルス解をもつことがわかる．特に，パルス進行解を持つものについては調査対象の反応拡散セル・オートマトンの中ではルール 4-6(1,0) と 8-6(1,0) のみでこの両者は変数変換で移り合うことから，本質的に1種類のみであった．なお，左右対称ルールのECAにはパルス進行解が存在しないことが示せる．パルス進行解を持つ反応拡散系としてはFitzHugh-南雲方程式が知られている [1]．現時点でFitzHugh-南雲方程式とルール 4-6 に超離散化等に対応がついているわけではないが，共にパルス進行解を持つということから，何らかの共通したメカニズムがあるのではないかと思いたい．それを明らかにするのは今後の課題である．

謝辞

本研究は JSPS 科研費 16K21024 の助成を受けたものです．

参考文献

- [1] S. P. Hastings, On the existence of homoclinic and periodic orbits for the Fitzhugh-Nagumo equation, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* **27** (1976), 123–134.
- [2] K. Matsuya and M. Murata, Spatial pattern of discrete and ultradiscrete Gray-Scott model, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* **20** (2015), 173–187.