番号付き・運搬車付き箱玉系の有限戸田表現

前田, 一貴
関西学院大学理工学部

https://doi.org/10.15017/1832800

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 28AO-S6 (1), pp.1-6, 2017-03. 九州大学応用力学研究所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.28AO-S6
「非線形波動研究の深化と展開」（研究代表者　辻本　諭）

Reports of RIAM Symposium No.28AO-S6

Deepening and expansion of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu Universiy,
Kasuga, Fukuoka, Japan, November 3 - November 5, 2016

Article No. 01 (pp. 1 - 6)

番号付き・運搬車付き箱玉系の有限戸田表現

前田 一貴（MAEDA Kazuki）

（Received 13 January 2017; Accepted 11 February 2017）

Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2017

番号付き・運搬車付き箱玉系の有限戸田表現

関西学院大学理工学部　前田一貴　(Maeda Kazuki)

概　要　玉に番号がついており，かつ運搬車容量に制限のある箱玉系に対する有限戸田表現を与える．関連して，従来知られていたルールとは異なる番号付き・運搬車付き箱玉系の類似物も得られたので，これについても報告する．

1　はじめに

箱玉系およびその拡張系は，非自励離散 KP 格子の簡約系の超離散化によって得られる一連のソリトン・セル・オートマトンである [4]．これらの方程式が各箱の玉の数を従属変数としているのに対し（流体力学でいうところの Euler 表現），拡張のない最も簡単な場合には各玉列と空箱列の長さを従属変数として方程式を与えることもでき（Lagrange 表現の「微分」に相当），ちょうど有限格子境界条件の超離散戸田格子になることが知られている．本稿ではこれを箱玉系の**有限戸田表現**とよぶことにする．

これまでに筆者は，箱玉系の拡張系に対する有限戸田表現を与えることを試みてきた．運搬車付き箱玉系に対しては，非自励超離散戸田格子によって有限戸田表現が与えられることを筆者らが明らかにした [2]．一方，別の拡張である番号付き箱玉系に対しては，超離散ハングリー戸田格子によって有限戸田表現が与えられることがわかっていた．本研究ではこの 2 つの拡張を組み合わせた番号付き・運搬車付き箱玉系の有限戸田表現を与えることを目標とした．

所望の方程式は非自励化された超離散ハングリー戸田格子となるのが自然であると予想された．本研究では直交多項式のスペクトル変換（＝双線型方程式の母体）の両立条件として非自励離散戸田格子が得られるという理論 [3] を再考のうえ，まず双直交多項式と非自励離散 2 次元戸田格子 [5] に対して類似の理論を展開した．「非自励離散 2 次元戸田格子は双線型方程式と積の恒等式の集まりにより時間発展方程式が与えられる」という観点を徹底することで必然的に減算なしの時間発展方程式が得られる枠組みを構築し，その簡約系として非自励離散ハングリー戸田格子の減算なし時間発展方程式を導出するという方針をとった．この結果，2 種類の超離散ハングリー戸田格子の非自励化が得られ，片方は所望の拡張の有限戸田表現，もう片方はこれまで未知の拡張の有限戸田表現となっていることがわかった．本稿では以上の結果について，特に簡約後の議論に絞って簡潔にまとめる．

2　$(M,1)$ 双直交多項式とそのスペクトル変換理論

$k, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ を離散時間とし，各時刻毎に定まる多項式空間上の線型汎関数 $\mathscr{L}^{(k,t_1,t_2)}: \mathbb{C}[z] \to \mathbb{C}$ を考える．n 次モニック多項式の列 $\{\phi_n^{(k,t_1,t_2)}(z)\}_{n=0}^{\infty}, \{\psi_n^{(k,t_1,t_2)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ は，ある正整数 M があって，関係式

$$\mathscr{L}^{(k,t_1,t_2)}[\phi_m^{(k,t_1,t_2)}(z)\psi_n^{(k,t_1,t_2)}(z^M)] = h_n^{(k,t_1,t_2)}\delta_{m,n}, \quad h_n^{(k,t_1,t_2)} \neq 0, \quad \delta_{m,n}\text{: Kronecker delta},$$
$$m, n = 0, 1, 2, \ldots, \quad (2.1)$$

を満たすとき，$\mathscr{L}^{(k,t_1,t_2)}$ に関するモニック **$(M,1)$ 双直交多項式**と本稿ではよぶことにする．

$(M,1)$ 双直交関係式 (2.1) は

$$\mathscr{L}^{(k,t_1,t_2)}[z^{mM}\phi_n^{(k,t_1,t_2)}(z)] = \mathscr{L}^{(k,t_1,t_2)}[z^m\psi_n^{(k,t_1,t_2)}(z^M)] = h_n^{(k,t_1,t_2)}\delta_{m,n},$$
$$n = 0,1,2,\dots, \quad m = 0,1,\dots,n, \quad (2.2)$$

と同値であることに注意する．$M = 1$ のときはよく知られたモニック直交多項式になる．

線型汎関数の時間発展を，任意の $k, t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$ と $m = 0,1,2,\dots$ に対して

$$\mathscr{L}^{(k+1,t_1,t_2)}[z^m] = \mathscr{L}^{(k,t_1,t_2)}[z^{m+1}], \quad (2.3a)$$
$$\mathscr{L}^{(k,t_1+1,t_2)}[z^m] = \mathscr{L}^{(k,t_1,t_2)}[(z + s_1^{(t_1)})z^m], \quad \mathscr{L}^{(k,t_1,t_2+1)}[z^m] = \mathscr{L}^{(k,t_1,t_2)}[(z^M + s_2^{(t_2)})z^m] \quad (2.3b)$$

で導入する．ここで，$s_1^{(t_1)}, s_2^{(t_2)} \in \mathbb{C}$ はそれぞれ t_1, t_2 毎に選ぶパラメータであり，任意の n に対して $\phi_n^{(k,t_1,t_2)}(-s_1^{(t_1)}) \neq 0$，$\psi_n^{(k,t_1,t_2)}(-s_2^{(t_2)}) \neq 0$ と仮定する．モーメントを

$$\mu_m^{(t_1,t_2)} := \mathscr{L}^{(0,t_1,t_2)}[z^m], \quad m = 0,1,2,\dots,$$

で定めると，(2.3) より

$$\mathscr{L}^{(k,t_1,t_2)}[z^m] = \mu_{k+m}^{(t_1,t_2)},$$
$$\mu_m^{(t_1+1,t_2)} = \mu_{m+1}^{(t_1,t_2)} + s_1^{(t_1)}\mu_m^{(t_1,t_2)}, \quad \mu_m^{(t_1,t_2+1)} = \mu_{m+M}^{(t_1,t_2)} + s_2^{(t_2)}\mu_m^{(t_1,t_2)}$$

が成り立つ．双直交関係式 (2.2) と Cramer の公式より，モニック $(M,1)$ 双直交多項式は

$$\phi_0^{(k,t_1,t_2)}(z) = 1, \quad \phi_n^{(k,t_1,t_2)}(z) = \frac{1}{\tau_n^{(k,t_1,t_2)}}\begin{vmatrix} \mu_k^{(t_1,t_2)} & \mu_{k+M}^{(t_1,t_2)} & \cdots & \mu_{k+(n-1)M}^{(t_1,t_2)} & 1 \\ \mu_{k+1}^{(t_1,t_2)} & \mu_{k+1+M}^{(t_1,t_2)} & \cdots & \mu_{k+1+(n-1)M}^{(t_1,t_2)} & z \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mu_{k+n-1}^{(t_1,t_2)} & \mu_{k+n-1+M}^{(t_1,t_2)} & \cdots & \mu_{k+n-1+(n-1)M}^{(t_1,t_2)} & z^{n-1} \\ \mu_{k+n}^{(t_1,t_2)} & \mu_{k+n+M}^{(t_1,t_2)} & \cdots & \mu_{k+n+(n-1)M}^{(t_1,t_2)} & z^n \end{vmatrix},$$

$$\psi_0^{(k,t_1,t_2)}(z) = 1, \quad \psi_n^{(k,t_1,t_2)}(z) = \frac{1}{\tau_n^{(k,t_1,t_2)}}\begin{vmatrix} \mu_k^{(t_1,t_2)} & \mu_{k+M}^{(t_1,t_2)} & \cdots & \mu_{k+(n-1)M}^{(t_1,t_2)} & \mu_{k+nM}^{(t_1,t_2)} \\ \mu_{k+1}^{(t_1,t_2)} & \mu_{k+1+M}^{(t_1,t_2)} & \cdots & \mu_{k+1+(n-1)M}^{(t_1,t_2)} & \mu_{k+1+nM}^{(t_1,t_2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \mu_{k+n-1}^{(t_1,t_2)} & \mu_{k+n-1+M}^{(t_1,t_2)} & \cdots & \mu_{k+n-1+(n-1)M}^{(t_1,t_2)} & \mu_{k+n-1+nM}^{(t_1,t_2)} \\ 1 & z & \dots & z^{n-1} & z^n \end{vmatrix},$$
$$n = 1,2,3,\dots,$$

$$\tau_0^{(k,t_1,t_2)} := 1, \quad \tau_n^{(k,t_1,t_2)} := |\mu_{k+i+jM}^{(t_1,t_2)}|_{0\le i,j\le n-1}, \quad n = 1,2,3,\dots,$$

とモーメントを成分に持つ行列式で表すことができる．さらに，線型汎関数の時間発展 (2.3) に対応して $\{\phi_n^{(k,t_1,t_2)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ も時間発展し，$n = 0,1,2,\dots$ について次の関係式が成り立つことが示される[*1]：

$$z\phi_n^{(k+1,t_1,t_2)}(z) = \phi_{n+1}^{(k,t_1,t_2)}(z) + q_n^{(k,t_1,t_2)}\phi_n^{(k,t_1,t_2)}(z), \quad (2.4a)$$
$$\phi_{n+1}^{(k-M,t_1,t_2)}(z) = \phi_{n+1}^{(k,t_1,t_2)}(z) + e_n^{(k-M,t_1,t_2)}\phi_n^{(k,t_1,t_2)}(z), \quad (2.4b)$$
$$(z + s_1^{(t_1)})\phi_n^{(k,t_1+1,t_2)}(z) = \phi_{n+1}^{(k,t_1,t_2)}(z) + \tilde{q}_n^{(k,t_1,t_2)}\phi_n^{(k,t_1,t_2)}(z), \quad (2.4c)$$
$$\phi_{n+1}^{(k,t_1,t_2-1)}(z) = \phi_{n+1}^{(k,t_1,t_2)}(z) + \tilde{e}_n^{(k,t_1,t_2-1)}\phi_n^{(k,t_1,t_2)}(z), \quad (2.4d)$$

[*1] $\{\psi_n^{(k,t_1,t_2)}(z)\}_{n=0}^{\infty}$ に関してもこれらと「双対な」関係式が成り立つが，本稿では割愛する．

ただし，

$$
\begin{aligned}
q_n^{(k,t_1,t_2)} &= -\frac{\phi_{n+1}^{(k,t_1,t_2)}(0)}{\phi_n^{(k,t_1,t_2)}(0)} = \frac{\tau_n^{(k,t_1,t_2)}\tau_{n+1}^{(k+1,t_1,t_2)}}{\tau_{n+1}^{(k,t_1,t_2)}\tau_n^{(k+1,t_1,t_2)}}, \quad \tilde{q}_n^{(k,t_1,t_2)} = -\frac{\phi_{n+1}^{(k,t_1,t_2)}(-s_1^{(t_1)})}{\phi_n^{(k,t_1,t_2)}(-s_1^{(t_1)})} = \frac{\tau_n^{(k,t_1,t_2)}\tau_{n+1}^{(k,t_1+1,t_2)}}{\tau_{n+1}^{(k,t_1,t_2)}\tau_n^{(k,t_1+1,t_2)}},\\
e_n^{(k,t_1,t_2)} &= \frac{\mathscr{L}^{(k,t_1,t_2)}[z^{(n+1)M}\phi_{n+1}^{(k,t_1,t_2)}(z)]}{\mathscr{L}^{(k+M,t_1,t_2)}[z^{nM}\phi_n^{(k+M,t_1,t_2)}(z)]} = \frac{\tau_{n+2}^{(k,t_1,t_2)}\tau_n^{(k+M,t_1,t_2)}}{\tau_{n+1}^{(k,t_1,t_2)}\tau_{n+1}^{(k+M,t_1,t_2)}},\\
\tilde{e}_n^{(k,t_1,t_2)} &= \frac{\mathscr{L}^{(k,t_1,t_2)}[z^{nM}(z^M+s_2^{(t_2)})\phi_{n+1}^{(k,t_1,t_2)}(z)]}{\mathscr{L}^{(k,t_1,t_2+1)}[z^{nM}\phi_n^{(k,t_1,t_2+1)}(z)]} = \frac{\tau_{n+2}^{(k,t_1,t_2)}\tau_n^{(k,t_1,t_2+1)}}{\tau_{n+1}^{(k,t_1,t_2)}\tau_{n+1}^{(k,t_1,t_2+1)}}.
\end{aligned}
$$

これら (2.4) は直交多項式に対するスペクトル変換（Christoffel 変換，Geronimus 変換）[3] の一般化であり，$M=1$ のときは直交多項式に対する変換そのものになる．

3 非自励離散ハングリー戸田格子の減算なし時間発展方程式の導出

二重対角行列

$$
\begin{aligned}
R^{(k,t_1,t_2)} &:= \left(q_j^{(k,t_1,t_2)}\delta_{i,j}+\delta_{i+1,j}\right)_{0\le i,j\le\infty}, \quad L^{(k,t_1,t_2)} := \left(e_j^{(k,t_1,t_2)}\delta_{i,j+1}+\delta_{i,j}\right)_{0\le i,j\le\infty},\\
\tilde{R}^{(k,t_1,t_2)} &:= \left(\tilde{q}_j^{(k,t_1,t_2)}\delta_{i,j}+\delta_{i+1,j}\right)_{0\le i,j\le\infty}, \quad \tilde{L}^{(k,t_1,t_2)} := \left(\tilde{e}_j^{(k,t_1,t_2)}\delta_{i,j+1}+\delta_{i,j}\right)_{0\le i,j\le\infty},
\end{aligned}
$$

およびベクトル

$$
\boldsymbol{\phi}^{(k,t_1,t_2)}(z) := \left(\phi_i^{(k,t_1,t_2)}(z)\right)_{0\le i\le\infty}
$$

を用いると，スペクトル変換 (2.4) は

$$
\begin{aligned}
z\boldsymbol{\phi}^{(k+1,t_1,t_2)}(z) &= R^{(k,t_1,t_2)}\boldsymbol{\phi}^{(k,t_1,t_2)}(z), \quad \boldsymbol{\phi}^{(k-M,t_1,t_2)}(z) = L^{(k-M,t_1,t_2)}\boldsymbol{\phi}^{(k,t_1,t_2)}(z),\\
(z+s_1^{(t_1)})\boldsymbol{\phi}^{(k,t_1+1,t_2)}(z) &= \tilde{R}^{(k,t_1,t_2)}\boldsymbol{\phi}^{(k,t_1,t_2)}(z), \quad \boldsymbol{\phi}^{(k,t_1,t_2-1)}(z) = \tilde{L}^{(k,t_1,t_2-1)}\boldsymbol{\phi}^{(k,t_1,t_2)}(z)
\end{aligned}
$$

と書ける．これらの両立条件として

$$
R^{(k,t_1+1,t_2)}\tilde{R}^{(k,t_1,t_2)} = \tilde{R}^{(k+1,t_1,t_2)}R^{(k,t_1,t_2)}, \quad L^{(k,t_1+1,t_2)}\tilde{R}^{(k+M,t_1,t_2)} = \tilde{R}^{(k,t_1,t_2)}L^{(k,t_1,t_2)}, \tag{3.1a}
$$

$$
\tilde{L}^{(k+1,t_1,t_2)}R^{(k,t_1,t_2+1)} = R^{(k,t_1,t_2)}\tilde{L}^{(k,t_1,t_2)}, \quad \tilde{L}^{(k,t_1,t_2)}L^{(k,t_1,t_2+1)} = L^{(k,t_1,t_2)}\tilde{L}^{(k+M,t_1,t_2)}, \tag{3.1b}
$$

を得る．(3.1a), (3.1b) から，それぞれ関係式

$$
\begin{aligned}
L^{(k,t_1+1,t_2)}R^{(k+M-1,t_1+1,t_2)}\dots R^{(k,t_1+1,t_2)}\tilde{R}^{(k,t_1,t_2)} &= \tilde{R}^{(k,t_1,t_2)}L^{(k,t_1,t_2)}R^{(k+M-1,t_1,t_2)}\dots R^{(k,t_1,t_2)},\\
\tilde{L}^{(k,t_1,t_2)}L^{(k,t_1,t_2+1)}R^{(k+M-1,t_1,t_2+1)}\dots R^{(k,t_1,t_2+1)} &= L^{(k,t_1,t_2)}R^{(k+M-1,t_1,t_2)}\dots R^{(k,t_1,t_2)}\tilde{L}^{(k,t_1,t_2)}
\end{aligned}
$$

の成立がわかる．つまり，

- (3.1a) により t_1-方向の時間発展
  $\{q_n^{(k,t_1,t_2)},\dots,q_n^{(k+M-1,t_1,t_2)},e_n^{(k,t_1,t_2)}\}_{n=0}^{\infty} \mapsto \{q_n^{(k,t_1+1,t_2)},\dots,q_n^{(k+M-1,t_1+1,t_2)},e_n^{(k,t_1+1,t_2)}\}_{n=0}^{\infty}$ が，
- (3.1b) により t_2-方向の時間発展
  $\{q_n^{(k,t_1,t_2)},\dots,q_n^{(k+M-1,t_1,t_2)},e_n^{(k,t_1,t_2)}\}_{n=0}^{\infty} \mapsto \{q_n^{(k,t_1,t_2+1)},\dots,q_n^{(k+M-1,t_1,t_2+1)},e_n^{(k,t_1,t_2+1)}\}_{n=0}^{\infty}$ が，

それぞれ定まっている．ここで，もしパラメータが恒等的に $s_1^{(t_1)}=0$, $s_2^{(t_2)}=0$ ならば，(3.1) は単に自励の離散ハングリー戸田格子

$$
L^{(t+1)}R^{(t+M)} = R^{(t)}L^{(t)}
$$

になることに注意する．この意味で，本稿では (3.1) を**非自励離散ハングリー戸田格子**とよぶ．

減算を含まない時間発展方程式を与えるために，次の新しい変数を導入する：

$$a_n^{(k,t_1,t_2)} := \tilde{q}_n^{(k,t_1,t_2)} - q_n^{(k,t_1,t_2)}, \qquad b_n^{(k,t_1,t_2)} := \tilde{q}_n^{(k+M,t_1,t_2)} - e_n^{(k,t_1,t_2)},$$
$$d_n^{(k,t_1,t_2)} := q_n^{(k,t_1,t_2+1)} - \tilde{e}_n^{(k,t_1,t_2)}, \quad f_n^{(k,t_1,t_2)} := e_n^{(k,t_1,t_2+1)} - \tilde{e}_n^{(k+M,t_1,t_2)}.$$

スペクトル変換 (2.4) 同士の差をとることにより，これらの変数は関係式

$$(z + s_1^{(t_1)})\phi_n^{(k,t_1+1,t_2)}(z) = z\phi_n^{(k+1,t_1,t_2)}(z) + a_n^{(k,t_1,t_2)}\phi_n^{(k,t_1,t_2)}(z), \tag{3.2a}$$
$$(z + s_1^{(t_1)})\phi_n^{(k,t_1+1,t_2)}(z) = \phi_{n+1}^{(k-M,t_1,t_2)}(z) + b_n^{(k-M,t_1,t_2)}\phi_n^{(k,t_1,t_2)}(z), \tag{3.2b}$$
$$z\phi_n^{(k+1,t_1,t_2)}(z) = \phi_{n+1}^{(k,t_1,t_2-1)}(z) + d_n^{(k,t_1,t_2-1)}\phi_n^{(k,t_1,t_2)}(z), \tag{3.2c}$$
$$\phi_{n+1}^{(k-M,t_1,t_2)}(z) = \phi_{n+1}^{(k,t_1,t_2-1)}(z) + f_n^{(k-M,t_1,t_2-1)}\phi_n^{(k,t_1,t_2)}(z) \tag{3.2d}$$

を満たすことがわかる．これより，各変数の行列式による表示を得る：

$$a_n^{(k,t_1,t_2)} = s_1^{(t_1)}\frac{\tau_n^{(k,t_1,t_2)}\tau_n^{(k+1,t_1+1,t_2)}}{\tau_n^{(k,t_1+1,t_2)}\tau_n^{(k+1,t_1,t_2)}}, \quad b_n^{(k,t_1,t_2)} = \frac{\tau_{n+1}^{(k,t_1+1,t_2)}\tau_n^{(k+M,t_1,t_2)}}{\tau_{n+1}^{(k,t_1,t_2)}\tau_n^{(k+M,t_1+1,t_2)}},$$
$$d_n^{(k,t_1,t_2)} = \frac{\tau_n^{(k,t_1,t_2+1)}\tau_{n+1}^{(k+1,t_1,t_2)}}{\tau_{n+1}^{(k,t_1,t_2)}\tau_n^{(k+1,t_1,t_2+1)}}, \qquad f_n^{(k,t_1,t_2)} = s_2^{(t_2)}\frac{\tau_{n+2}^{(k,t_1,t_2)}\tau_n^{(k+M,t_1,t_2+1)}}{\tau_{n+1}^{(k,t_1,t_2+1)}\tau_{n+1}^{(k+M,t_1,t_2)}}.$$

(2.4a), (2.4b), (2.4c), (3.2a), (3.2b) の両立条件として，t_1-方向の減算なし時間発展方程式

$$\tilde{q}_n^{(k+j,t_1,t_2)} = q_n^{(k+j,t_1,t_2)} + a_n^{(k+j,t_1,t_2)}, \quad \tilde{q}_n^{(k+M,t_1,t_2)} = b_n^{(k,t_1,t_2)} + e_n^{(k,t_1,t_2)}, \tag{3.3a}$$
$$q_n^{(k+j,t_1+1,t_2)} = q_n^{(k+j,t_1,t_2)}\frac{\tilde{q}_n^{(k+j+1,t_1,t_2)}}{\tilde{q}_n^{(k+j,t_1,t_2)}}, \qquad b_{n+1}^{(k,t_1,t_2)} = b_n^{(k,t_1,t_2)}\frac{\tilde{q}_{n+1}^{(k,t_1,t_2)}}{\tilde{q}_n^{(k+M,t_1,t_2)}}, \tag{3.3b}$$
$$a_{n+1}^{(k+j,t_1,t_2)} = a_n^{(k+j,t_1,t_2)}\frac{\tilde{q}_n^{(k+j+1,t_1,t_2)}}{\tilde{q}_n^{(k+j,t_1,t_2)}}, \qquad e_n^{(k,t_1+1,t_2)} = e_n^{(k,t_1,t_2)}\frac{\tilde{q}_{n+1}^{(k,t_1,t_2)}}{\tilde{q}_n^{(k+M,t_1,t_2)}} \tag{3.3c}$$

が出る．ただし，境界条件は

$$a_0^{(k+j,t_1,t_2)} = s_1^{(t_1)}, \quad b_0^{(k,t_1,t_2)} = q_0^{(k,t_1,t_2)} + s_1^{(t_1)} \tag{3.3d}$$

であり，計算は $j = 0, 1, \ldots, M-1$ および $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して行う．

(2.4a), (2.4b), (2.4d), (3.2c), (3.2d) の両立条件として，t_2-方向の減算なし時間発展方程式

$$q_n^{(k+j,t_1,t_2+1)} = d_n^{(k+j,t_1,t_2)} + \tilde{e}_n^{(k+j,t_1,t_2)}, \quad e_n^{(k,t_1,t_2+1)} = f_n^{(k,t_1,t_2)} + \tilde{e}_n^{(k+M,t_1,t_2)}, \tag{3.4a}$$
$$d_{n+1}^{(k+j,t_1,t_2)} = d_n^{(k+j,t_1,t_2)}\frac{q_{n+1}^{(k+j,t_1,t_2)}}{q_n^{(k+j,t_1,t_2+1)}}, \qquad f_{n+1}^{(k,t_1,t_2)} = f_n^{(k,t_1,t_2)}\frac{e_{n+1}^{(k,t_1,t_2)}}{e_n^{(k,t_1,t_2+1)}}, \tag{3.4b}$$
$$\tilde{e}_n^{(k+j+1,t_1,t_2)} = \tilde{e}_n^{(k+j,t_1,t_2)}\frac{q_{n+1}^{(k+j,t_1,t_2)}}{q_n^{(k+j,t_1,t_2+1)}}, \qquad \tilde{e}_{n+1}^{(k,t_1,t_2)} = \tilde{e}_n^{(k+M,t_1,t_2)}\frac{e_{n+1}^{(k,t_1,t_2)}}{e_n^{(k,t_1,t_2+1)}} \tag{3.4c}$$

が出る．ただし，境界条件は

$$d_0^{(k+j,t_1,t_2)} = q_0^{(k+j,t_1,t_2)}, \quad f_0^{(k,t_1,t_2)} = \frac{e_0^{(k,t_1,t_2)}s_2^{(t_2)}}{\prod_{j=0}^{M-1} q_0^{(k+j,t_1,t_2)} + s_2^{(t_2)}}, \quad \tilde{e}_0^{(k,t_1,t_2)} = \frac{e_0^{(k,t_1,t_2)}\prod_{j=0}^{M-1} q_0^{(k+j,t_1,t_2)}}{\prod_{j=0}^{M-1} q_0^{(k+j,t_1,t_2)} + s_2^{(t_2)}} \tag{3.4d}$$

であり，計算は $j = 0, 1, \ldots, M-1$ および $n = 0, 1, 2, \ldots$ に対して行う．

なお，t_2-方向の式 (3.4) は，福田ら [1] によって帯行列のシフト付き固有値計算アルゴリズムとして導出されている漸化式と本質的に同一のものである．

4　番号付き・運搬車付き箱玉系の有限戸田表現

(3.3) を $q_n^{(k+j,t_1,t_2)} = \mathrm{e}^{-Q_n^{(k+j,t_1,t_2)}/\epsilon}$ などの変数変換と $\epsilon \to +0$ により超離散化すると，非自励超離散ハングリー戸田格子の t_1-方向の時間発展方程式

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_n^{(k+j,t_1,t_2)} &= \min(Q_n^{(k+j,t_1,t_2)}, A_n^{(k+j,t_1,t_2)}), & \tilde{Q}_n^{(k+M,t_1,t_2)} &= \min(B_n^{(k,t_1,t_2)}, E_n^{(k,t_1,t_2)}),\\
Q_n^{(k+j,t_1+1,t_2)} &= Q_n^{(k+j,t_1,t_2)} - \tilde{Q}_n^{(k+j,t_1,t_2)} + \tilde{Q}_n^{(k+j+1,t_1,t_2)}, & B_{n+1}^{(k,t_1,t_2)} &= B_n^{(k,t_1,t_2)} - \tilde{Q}_n^{(k+M,t_1,t_2)} + \tilde{Q}_{n+1}^{(k,t_1,t_2)},\\
A_{n+1}^{(k+j,t_1,t_2)} &= A_n^{(k+j,t_1,t_2)} - \tilde{Q}_n^{(k+j,t_1,t_2)} + \tilde{Q}_n^{(k+j+1,t_1,t_2)}, & E_n^{(k,t_1+1,t_2)} &= E_n^{(k,t_1,t_2)} - \tilde{Q}_n^{(k+M,t_1,t_2)} + \tilde{Q}_{n+1}^{(k,t_1,t_2)}
\end{aligned}$$

を得る．ただし，境界条件は

$$A_0^{(k+j,t_1,t_2)} = S_1^{(t_1)}, \quad B_0^{(k,t_1,t_2)} = \min(Q_0^{(k,t_1,t_2)}, S_1^{(t_1)}).$$

同様に (3.4) を超離散化すると，非自励超離散ハングリー戸田格子の t_2-方向の時間発展方程式

$$\begin{aligned}
Q_n^{(k+j,t_1,t_2+1)} &= \min(D_n^{(k+j,t_1,t_2)}, \tilde{E}_n^{(k+j,t_1,t_2)}), & E_n^{(k,t_1,t_2+1)} &= \min(F_n^{(k,t_1,t_2)}, \tilde{E}_n^{(k+M,t_1,t_2)}),\\
D_{n+1}^{(k+j,t_1,t_2)} &= D_n^{(k+j,t_1,t_2)} - Q_n^{(k+j,t_1,t_2+1)} + Q_{n+1}^{(k+j,t_1,t_2)}, & F_{n+1}^{(k,t_1,t_2)} &= F_n^{(k,t_1,t_2)} - E_n^{(k,t_1,t_2+1)} + E_{n+1}^{(k,t_1,t_2)},\\
\tilde{E}_n^{(k+j+1,t_1,t_2)} &= \tilde{E}_n^{(k+j,t_1,t_2)} - Q_n^{(k+j,t_1,t_2+1)} + Q_{n+1}^{(k+j,t_1,t_2)}, & \tilde{E}_{n+1}^{(k,t_1,t_2)} &= \tilde{E}_n^{(k+M,t_1,t_2)} - E_n^{(k,t_1,t_2+1)} + E_{n+1}^{(k,t_1,t_2)}
\end{aligned}$$

を得る．ただし，境界条件は

$$\begin{aligned}
D_0^{(k+j,t_1,t_2)} = Q_0^{(k+j,t_1,t_2)}, \quad F_0^{(k,t_1,t_2)} &= E_0^{(k,t_1,t_2)} + \max\left(0, S_2^{(t_2)} - \sum_{j=0}^{M-1} Q_0^{(k+j,t_1,t_2)}\right),\\
\tilde{E}_0^{(k,t_1,t_2)} &= E_0^{(k,t_1,t_2)} + \max\left(0, \sum_{j=0}^{M-1} Q_0^{(k+j,t_1,t_2)} - S_2^{(t_2)}\right).
\end{aligned}$$

以下では N をある正整数として，有限格子境界条件 $E_{N-1}^{(k,t_1,t_2)} = +\infty$ を追加で課すことにする．さらに $k = 1$ と固定し，

- $Q_n^{(j,t_1,t_2)}$：時刻 (t_1, t_2) における n 番目の玉列を構成する j 番の玉の数，
- $E_n^{(1,t_1,t_2)}$：時刻 (t_1, t_2) における n 番目の空箱列の長さ

として，非自励超離散ハングリー戸田格子が（箱容量 1 の）箱玉系の時間発展を定めるとみなす．例として $M = 3, N = 3$ とし，適当な初期条件から計算すると次頁の図 1，図 2 のようになる． 図の右側が非自励超離散ハングリー戸田格子の各変数の値で，左側が対応する箱玉系の状態である（n で n 番の玉が入った箱，. で空箱を表す）．3 つのソリトンが走る様子が観察できる．

ここで，目標としていた番号付き・運搬車付き箱玉系のルールを復習しよう．

- 無限個の箱が左から右へ 1 列に並んでおり，1 から M の番号がついた有限個の玉がそのうちのいくつかの箱に入っている．以下では簡潔に書くため，空は 0 番の玉とみなす．
- 時刻 t から $t+1$ への時間発展は，容量 $S^{(t)}$（最初に 0 番の玉を $S^{(t)}$ 個積む）の運搬車が左から右へ 1 回走って，各箱の前で次の動作をすることで定まる：
  - 箱に入っている玉の番号を j とするとき，箱に入っている玉と運搬車に積まれている「$j+1$ を最小とする順序で最も小さな番号」の玉とを交換する．ただし，$j+1$ を最小とする順序は $\mathbb{Z}/(M+1)\mathbb{Z}$ で考える．例えば $M = 3$ で，箱に入っている玉の番号が 1 ならば順序は $2 < 3 < 0 < 1$ である．

$Q_0^1\ Q_0^2\ Q_0^3\ E_0^1\ Q_1^1\ Q_1^2\ Q_1^3\ E_1^1\ Q_2^1\ Q_2^2\ Q_2^3$

```
t1= 0: .1222333...11223...133............................ 1 3 3 3 2 2 1 3 1 0 2
t1= 1: ..1122233....11233..223........................... 2 3 2 4 2 1 2 2 0 2 1
t1= 2: ....1122233....12233112........................... 2 3 2 4 1 2 2 0 2 1 0
t1= 3: ......1122233...1122..1333........................ 2 3 2 3 2 2 0 2 1 0 3
t1= 4: ........1122233...1133.2223....................... 2 3 2 3 2 0 2 1 0 3 1
t1= 5: ..........1122233...22311123...................... 2 3 2 3 0 2 1 0 3 1 1
t1= 6: ............1122233.112...12333................... 2 3 2 1 2 1 0 3 1 1 3
t1= 7: ..............112223..1333.12223.................. 2 3 1 2 1 0 3 1 1 3 1
t1= 8: ................112233.2223.11123................. 2 2 2 1 0 3 1 1 3 1 1
t1= 9: ..................1122311223...12333.............. 2 2 1 0 2 2 1 3 1 1 3
t1=10: ....................112..122333.122233............ 2 1 0 2 1 2 3 1 1 3 2
t1=11: ......................133.122223.111223........... 1 0 2 1 1 4 1 1 3 2 1
t1=12: .......................223.111123...122333........ 0 2 1 1 4 1 1 3 1 2 3
t1=13: .......................112.....12333.1222233...... 2 1 0 5 1 1 3 1 1 4 2
t1=14: .........................133....12223.1112223..... 1 0 2 4 1 3 1 1 3 3 1
t1=15: ..........................223....11123...1122333.. 0 2 1 4 3 1 1 3 2 2 3
```

図 1　t_1-方向の時間発展例．全ての t_1 で $S_1^{(t_1)} = 2$ としている．Q_n^j, E_n^j はそれぞれ $Q_n^{(j,t_1,0)}, E_n^{(j,t_1,0)}$ の略記．

$Q_0^1\ Q_0^2\ Q_0^3\ E_0^1\ Q_1^1\ Q_1^2\ Q_1^3\ E_1^1\ Q_2^1\ Q_2^2\ Q_2^3$

```
t2= 0: .1222333...11223...133............................ 1 3 3 3 2 2 1 3 1 0 2
t2= 1: .......1222333..1122..1333........................ 1 3 3 2 2 2 0 2 1 0 3
t2= 2: .............1222333112...12333.................... 1 3 3 0 2 1 0 3 1 1 3
t2= 3: ...................122311223...123333............. 1 2 1 0 2 2 1 3 1 1 4
t2= 4: .......................223..11123...1223333....... 0 2 1 2 3 1 1 3 1 2 4
t2= 5: ..........................223....11123....1223333. 0 2 1 4 3 1 1 4 1 2 4
```

図 2　t_2-方向の時間発展例．全ての t_2 で $S_2^{(t_2)} = 6$ としている．Q_n^j, E_n^j はそれぞれ $Q_n^{(j,0,t_2)}, E_n^{(j,0,t_2)}$ の略記．

ルールを踏まえて例の図を見ると，t_2-方向の時間発展がちょうど番号付き・運搬車付き箱玉系と対応しているように見える．この対応は一般に成立することが示されるが，詳細は割愛する．

一方，t_1-方向の時間発展は次のようなルールになっている．

- 時刻 t から $t+1$ への時間発展は，初期状態での 0 番の「書き換え可能回数」を 0，それ以外の番号の「書き換え可能回数」をそれぞれ $S^{(t)}$ とするオートマトンが左から右へ 1 回走って，各箱の前で次の動作をすることで定まる：
  - 箱に入っている玉の番号を j とするとき，もし j 番の書き換え可能回数が 1 以上ならば，箱に入っている玉の番号を $j-1$ に書き換え，j 番の書き換え可能回数を -1 し，$j-1$ 番の書き換え可能回数を $+1$ する．ただし，番号の計算は $\mathbb{Z}/(M+1)\mathbb{Z}$ で考える．

非自励離散 KP 格子の簡約系を超離散化することでこのルールの箱玉系の時間発展方程式を導出できる．$U_n^{(j,t)}$ を時刻 t における n 番目の箱に入っている j 番の玉の数，$V_n^{(j,t)}$ を時刻 t から $t+1$ への時間発展でオートマトンが n 番目の箱の前に来たときの j 番の書き換え可能回数とすると，

$$
\begin{aligned}
U_n^{(j,t+1)} &= U_n^{(j,t)} - \min(U_n^{(j,t)}, V_n^{(j,t)}) + \min(U_n^{(j+1,t)}, V_n^{(j+1,t)}),\\
V_{n+1}^{(j,t)} &= V_n^{(j,t)} - \min(U_n^{(j,t)}, V_n^{(j,t)}) + \min(U_n^{(j+1,t)}, V_n^{(j+1,t)}).
\end{aligned}
$$

ただし，$j \in \mathbb{Z}/(M+1)\mathbb{Z}$ であり，$n \to -\infty$ で $U_n^{(0,t)} = 1, V_n^{(0,t)} = 0$，$U_n^{(j,t)} = 0, V_n^{(j,t)} = S^{(t)}$ $(j = 1, 2, \ldots, M)$ とする．

参考文献

[1] A. Fukuda, Y. Yamamoto, M. Iwasaki, E. Ishiwata and Y. Nakamura, *Error analysis for matrix eigenvalue algorithm based on the discrete hungry Toda equation*, Numer. Algorithms **61** (2012), 243–260.

[2] K. Maeda and S. Tsujimoto, *Box-ball systems related to the nonautonomous ultradiscrete Toda equation on the finite lattice*, JSIAM Lett. **2** (2010), 95–98.

[3] V. Spiridonov and A. Zhedanov, *Discrete Darboux transformations, the discrete-time Toda lattice, and the Askey-Wilson polynomials*, Methods Appl. Anal. **2** (1995), 369–398.

[4] 時弘哲治，箱玉系の数理，朝倉書店，2010．

[5] 辻本諭，離散戸田格子系列と直交多項式について，数理解析研究所講究録 **1280** (2002), 11–18．