# ダ・ヴィンチ・コード64

岩本, 誠一
九州大学大学院経済学研究院 : 経済工学部門

吉良, 知文
九州大学大学院数理学府博士後期課程

植野, 貴之
長崎県立大学経済学部

https://doi.org/10.15017/18236

出版情報：經濟學研究. 77 (1), pp.1-25, 2010-06-30. 九州大学経済学会

# ダ・ヴィンチ・コード64

岩　本　誠　一*
吉　良　知　文
植　野　貴　之

**概 要**

映画「ダ・ヴィンチ・コード」ではフィボナッチ数列の最初の 8 つが暗証番号【ダ・ヴィンチ・コード】として用いられていた。これまでは、ある自然な主問題とその双対問題を考えて、両問題の最適解を交互に編むとこの暗号が現れることを示し、その核心にはフィボナッチ相補双対性があることを導いた。

本論文ではもう一つの片割れとなる主問題を導入してその双対問題との間にはもう一つの双対性 — フィボナッチ・シフト双対性 — が成立することを示す。すなわち、主問題の最適解には【ダ・ヴィンチ・コード】が直接現れ、双対問題の最適解にはこのコードを 1 つシフトしたコードが現れる。さらに最適化の一階条件から 6 : 4 型のフィボナッチ分割が新たに導入され、両問題の最適解がこの分割によって得られることも示す。また、フィボナッチ数倍した拡大ラグランジュ乗数を用いて双対問題を導いている。4 変数問題についても、主と双対 および 反転主と反転双対 の 2 つの対の間にもフィボナッチ・シフト双対性が成り立っていることを示している。

## 1　はじめに

フィボナッチ数列は黄金比とともに古今東西「美と実用」に用いられてきている [1,2,6,8,23–26]。しかし、最適化分野では、フィボナッチ探索 [3,23] を除けば、あまり研究されていないようである。映画「ダ・ヴィンチ・コード」では最初の 8 つのフィボナッチ数が暗号として使われている [7]。これまではこの暗号に着目して最適化の双対理論を詳細に考えた [12–17]。そこではいわゆる制御過程に現れる最小化問題を主問題と捉え、その双対問題を導いて、主問題の最小点と双対問題の最大点を**交互に編む**と、ダ・ヴィンチ・コードが現れることを示した。さらに、その核心は「フィボナッチ**相補**双対性」であることを明らかにした。

本論文では、片割れとなるもう一つの主問題とその双対問題を導入して、主問題の最小点にダ・ヴィンチ・コードそのものが**直接**現れ、その双対問題の最大点にはダ・ヴィンチ・コードを 1 だけ**シフト**したコードが現れることを示す。これを「フィボナッチ・**シフト**双対性」という。

*本研究は、科学研究費補助金「平成 22 年度基盤研究 (C)」課題番号 22540144 の助成を受けた。

フィボナッチ**相補**双対性の最適解は主問題も双対問題も **4 : 6 型**フィボナッチ分割法によって得られていたが、本論文では新たに **6 : 4 型**を導入して、この型のフィボナッチ分割法によってフィボナッチ・**シフト**双対性を満たす最適解が得られることを示す[1]。

第 2 節では 8 変数の 2 次最小化（主）問題と最大化（双対）問題の対を導入している。第 3 節では、この最適解の間に後向きのフィボナッチ・シフト双対性があることを示している。また、主と双対の反転問題の間には前向きのフィボナッチ・シフト双対性を示している。第 4 節では、最適化の 1 階必要条件から 6 : 4 型のフィボナッチ条件を導き、この条件によって所与の区間を逐次分割している。すなわち、最適解がこの (6 : 4 型の) フィボナッチ分割によって容易に得られることがわかる。第 5 節では、主問題から双対問題を直接導いている。ここではいわゆるラグランジュ乗数を広義に考え、フィボナッチ数によって定数倍したものを双対変数としている。これが本論文の基本アイディアである。最後の第 6 節では、4 変数問題に対して主と双対の対およびその反転どうしの対に対してもフィボナッチ・シフト双対性が成立していることを示している。以下では、フィボナッチを適宜「フィボ」に略している。

# 2　ダ・ヴィンチ・コード

## 2.1　フィボナッチ数列

映画「ダ・ヴィンチ・コード」(2006 年) では冒頭のシーンで 10 桁の暗証番号

$$1\ \ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 5\ \ 8\ \ 1\ \ 3\ \ 2\ \ 1$$

が現れている。前号 [16,17] では、この 10 個の数字は 8 つの数字からなる列

$$\boxed{1}\ \boxed{1}\ \boxed{2}\ \boxed{3}\ \boxed{5}\ \boxed{8}\ \boxed{13}\ \boxed{21}$$

すなわち、フィボナッチ数列 (表 1) の第 1 項 $F_1 = 1$ から第 8 項 $F_8 = 21$ までの数列

$$\boxed{F_1}\ \boxed{F_2}\ \boxed{F_3}\ \boxed{F_4}\ \boxed{F_5}\ \boxed{F_6}\ \boxed{F_7}\ \boxed{F_8}$$

に他ならないことを紹介した。さらに、このフィボナッチ数列は数理計画の双対理論と深くかかわっていることも示した。

[1] 本表題「ダ・ヴィンチ・コード 64」の 64 は 6 : 4 型フィボナッチ分割法によって最適解ダ・ヴィンチ・コードが得られることを意図している。64(ロクヨン) か 46(ヨンロク) かは焼酎のお湯割りに準じている。

| $n$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F_n$ | 0 | 1 | 1 | 2 | 3 | 5 | 8 | 13 | 21 | 34 | 55 | 89 | 144 | 233 | 377 | 610 | 987 |

表 1　フィボナッチ数列 $\{F_n\}$

**フィボナッチ数列** $\{F_n\}$ は 2 階線形差分方程式（3 項間漸化式）

$$x_{n+2} - x_{n+1} - x_n = 0, \qquad x_1 = 1,\ x_0 = 0 \tag{1}$$

の解で定まっている [6,8,10–13,19,23,24]。

本論文でも一対の主（最小化）問題と双対（最大化）問題を解くが、その最小解には直接【ダ・ヴィンチ・コード】が現れ、最大解にはこのコードを 1 つシフトしたコードが現れることを示す。

## 2.2　主問題 $(\mathrm{P}_8)$

主問題 (primal problem) として次の最小化問題を考える（ [9, p.90–93] [14–17] 参照)。

**主問題** $(\mathrm{P}_8)$　定数 $c \in R^1$ を与える。最初の変数 $x_0$ が $x_0 = c$ に固定されているとき、以下の 8 変数 $x = (x_1,\ x_2, \ldots,\ x_8)$ の値を定めて、全平方和（総費用に相当する量）

$$F_8(x_0 - x_1)^2 + \frac{F_7^2}{F_8}x_1^2 + F_7(x_1 - x_2)^2 + \frac{F_6^2}{F_7}x_2^2 + \cdots$$
$$+ F_2(x_6 - x_7)^2 + \frac{F_1^2}{F_2}x_7^2 + F_1(x_7 - x_8)^2 + \frac{F_0^2}{F_1}x_8^2$$

を最小にせよ。このとき、最小値 $m_8$ および最小（値を与える）点 $\hat{x} = (\hat{x}_1,\ \hat{x}_2, \ldots,\ \hat{x}_8)$ を求めよ。

この最小化問題は次のようにも表される。

$$(\mathrm{P}_8) \qquad \begin{array}{lll} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{n=0}^{7}\left[F_{8-n}(x_n - x_{n+1})^2 + \frac{F_{7-n}^2}{F_{8-n}}x_{n+1}^2\right] + \frac{F_0F_1}{F_2}x_8^2 \\ \text{subject to} & \text{(i)}\ \ -\infty < x_n < \infty \quad n = 1, 2, \ldots, 8 \\ & \text{(ii)}\ \ x_0 = c. \end{array}$$

主問題 $(\mathrm{P}_8)$ は 点

$$\hat{x} = (\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \ldots,\ \hat{x}_7,\ \hat{x}_8)$$
$$= \frac{c}{\boxed{34}}\left(\boxed{21},\ \boxed{13},\ \boxed{8},\ \boxed{5},\ \boxed{3},\ \boxed{2},\ \boxed{1},\ \boxed{1}\right) \tag{2}$$

で最小値 $m_8 = \dfrac{\boxed{21\times13}}{\boxed{34}}c^2$ に達している。

この最敵解はいくつかの方法で求められる。たとえば、次のようである。

1. 完全平方による方法 [4]
2. 微分・偏微分法 (calculus) [4]
3. 行列解析 (matrix analysis) [4]
4. 動的計画法 (dynamic programming) [3,9]
5. フィボナッチ分割法 (Fibonacci section) [15,16]

フィボ分割法は後述のフィボナッチ条件に基づいている。この条件は最適化の 1 階条件を本問題固有の 2 次計画問題に対してさらに詳しく表現したものである。フィボ分割法はフィボ条件に従って所与の区間を逐次分割する方法である。この分割法は 1 階条件に基づいているという意味では微分・偏微分法に依拠している。しかし、この条件は隣接 2 項間の比例関係を与えているのでこの分割法は解法としては極めて優れているといえる。本論文では、5. フィボ分割法 で解く。

## 2.3　双対問題 ($D_8$)

今度は、主問題に対する双対問題 (dual problem) として、次の最大化問題を導入しよう ( [9, p.211–215, 220] [14–17] 参照)。

**双対問題** ($D_8$)　定数 $c$ は主問題で与えたものとする。条件 $\mu_8 = 0$ の下で、8 変数 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_8)$ の値を定めて、2 次の量**総アドバンテージ** (total advantage)

$$2cF_8\mu_1 - F_8\left[\mu_1^2 + \left(\frac{F_8}{F_7}\mu_1 - \mu_2\right)^2\right] - F_7\left[\mu_2^2 + \left(\frac{F_7}{F_6}\mu_2 - \mu_3\right)^2\right]$$
$$- \cdots - F_2\left[\mu_7^2 + \left(\frac{F_2}{F_1}\mu_8 - \mu_8\right)^2\right] - F_1F_2\mu_8^2$$

を最大にせよ。このとき、最大値 $M_8$ および最大点 $\mu^* = (\mu_1^*, \mu_2^*, \ldots, \mu_8^*)$ を求めよ。

この最大化問題は次のようにも表される。

$$(\mathrm{D}_8)\quad \begin{array}{ll} \text{Maximize} & 2cF_8\mu_1 - \displaystyle\sum_{n=1}^{7} F_{9-n}\left[\mu_n^2 + \left(\frac{F_{9-n}}{F_{8-n}}\mu_n - \mu_{n+1}\right)^2\right] - F_1\mu_8^2 \\ \text{subject to} & \text{(i)}\quad -\infty < \mu_n < \infty \quad n = 1, 2, \ldots, 7, \quad \text{(ii)}\quad \mu_8 = 0. \end{array}$$

総アドバンテージの負の値

$$-2cF_8\mu_1 + F_8\left[\mu_1^2 + \left(\frac{F_8}{F_7}\mu_1 - \mu_2\right)^2\right] + F_7\left[\mu_2^2 + \left(\frac{F_7}{F_6}\mu_2 - \mu_3\right)^2\right]$$
$$+ \cdots + F_2\left[\mu_7^2 + \left(\frac{F_2}{F_1}\mu_8 - \mu_8\right)^2\right] + F_1F_2\mu_8^2$$

を**総ペナルティ**(total penalty) と呼ぶ。総アドバンテージの最大化問題は総ペナルティの最小化問題

$$(\mathrm{D}_8') \quad \begin{array}{ll} \text{minimize} & -2cF_8\mu_1 + \displaystyle\sum_{n=1}^{7} F_{9-n}\left[\mu_n^2 + \left(\frac{F_{9-n}}{F_{8-n}}\mu_n - \mu_{n+1}\right)^2\right] + F_1\mu_8^2 \\ \text{subject to} & \text{(i)} \quad -\infty < \mu_n < \infty \quad n = 1, 2, \ldots, 7, \quad \text{(ii)} \ \ \mu_8 = 0 \end{array}$$

に等価である。すなわち、$(\mathrm{D}_8)$ の最大値の負値が $(\mathrm{D}_8')$ 最小値になり、最大点と最小点は一致する。

問題 $(\mathrm{D}_8)$ は 点

$$\mu^* = (\mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \ldots,\ \mu_7^*,\ \mu_8^*)$$
$$= \frac{c}{\boxed{34}}\left(\boxed{13},\ \boxed{8},\ \boxed{5},\ \boxed{3},\ \boxed{2},\ \boxed{1},\ \boxed{1},\ \boxed{0}\right) \tag{3}$$

で最大値 $M_8 = \dfrac{\boxed{21\times 13}}{\boxed{34}}c^2$ に到達している。

この双対問題は主問題と同様にいくつかの方法で解けるが、本論文ではフィボナッチ分割法で解く。

# 3 フィボナッチ・シフト双対性

主問題 $(\mathrm{P}_8)$ の最小解と双対問題 $(\mathrm{D}_8)$ の最大解の間には次の 3 つのの関係が成り立っている。

1. **(双対性)** 最小値と最大値が等しい：$m_8 = M_8$. 共に初期値 $c$ の 2 次式で、その係数は連続する 3 つのフィボナッチ数からなる比 $\dfrac{21\cdot 13}{34}$ である。
2. **(フィボナッチ)** 最小点 $(\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \ldots\ ,\ \hat{x}_7,\ \hat{x}_8)$ と最大点 $(\mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \ldots,\ \mu_7^*,\ \mu_8^*)$ は共にフィボ数列の後向きである。
3. **(シフト)** 最大点と最小点はお互いを 1 段シフトさせている。

すなわち、定数 $\dfrac{c}{34}$ を無視すれば、主問題の最適解

$$\boxed{\hat{x}_1}\ \boxed{\hat{x}_2}\ \boxed{\hat{x}_3}\ \boxed{\hat{x}_4}\ \boxed{\hat{x}_5}\ \boxed{\hat{x}_6}\ \boxed{\hat{x}_7}\ \boxed{\hat{x}_8}$$

は

$$\boxed{F_8}\ \boxed{F_7}\ \boxed{F_6}\ \boxed{F_5}\ \boxed{F_4}\ \boxed{F_3}\ \boxed{F_2}\ \boxed{F_1}$$

で、双対問題の最適解

$$\boxed{\mu_1^*}\ \boxed{\mu_2^*}\ \boxed{\mu_3^*}\ \boxed{\mu_4^*}\ \boxed{\mu_5^*}\ \boxed{\mu_6^*}\ \boxed{\mu_7^*}\ \boxed{\mu_8^*}$$

は

$$\boxed{F_7}\ \boxed{F_6}\ \boxed{F_5}\ \boxed{F_4}\ \boxed{F_3}\ \boxed{F_2}\ \boxed{F_1}\ \boxed{F_0}$$

となる。

主問題の最適解は冒頭の【ダ・ヴィンチ・コード】を**後向きに**したものである。

この三位一体の関係を**フィボナッチ・シフト双対性** (Fibonacci shift duality, FSD) という。これは今まで考察してきた**フィボナッチ相補双対性** (Fibonacci complementary duality, FCD) [14–18,20,21] と対をなすものである。さて、フィボナッチ・シフト双対性は一般の $n$ 変数問題の対 ($\mathrm{P}_n$) と ($\mathrm{D}_n$) の間に成り立つのだろうか。 また、主問題 ($\mathrm{P}_n$) が与えられたとき、双対問題 ($\mathrm{D}_n$) はどのように導かれるのだろうか。本論文では 簡単のため そして【ダ・ヴィンチ・コード】との一貫性のゆえに 8 変数問題に限るが、第 5 節で拡大ラグランジュ変数も用いて双対問題を導く。最後の第 6 節においては 4 変数問題の最適解と双対性を述べる ( [16,17] 参照)。

## 3.1　反転問題

前節の主問題 ($\mathrm{P}_8$) と双対問題 ($\mathrm{D}_8$) を反転させる。すなわち、9 変数 $(x_0,\ x_1,\ldots,\ x_8)$ を $(x_9,\ x_8,\ldots,\ x_1)$ に変換する。このとき、反転主問題は次のように表わされる。

$$(\mathrm{RP}_8)\qquad \begin{aligned}\text{minimize}\quad & F_0x_1^2+F_1(x_1-x_2)^2\\ &+\frac{F_1^2}{F_2}x_2^2+F_2(x_2-x_3)^2\\ &+\cdots\\ &+\frac{F_6^2}{F_7}x_7^2+F_7(x_7-x_8)^2\\ &+\frac{F_7^2}{F_8}x_8^2+F_8(x_8-c)^2\\ \text{subject to}\quad & \text{(i)}\ \ x\in R^8.\end{aligned}$$

主問題 ($\mathrm{P}_8$) は次でも表わされる。

$$\begin{aligned} &\text{minimize} \quad \frac{F_{-1}F_0}{F_1}x_1^2 + \sum_{k=1}^{8}\left[\frac{F_{k-1}^2}{F_k}x_k^2 + F_k(x_k - x_{k+1})^2\right] \\ &\text{subject to} \quad \text{(i)} \;\; x \in R^8, \quad \text{(ii)} \;\; x_9 = c. \end{aligned}$$

これは次を形式的に用いただけである。

$$F_0 x_1^2 \;=\; \frac{F_0^2}{F_1}x_1^2 + \frac{F_{-1}F_0}{F_1}x_1^2.$$

反転主問題 ($\mathrm{RP}_8$) の双対問題は

$$(\mathrm{RD}_8) \quad \begin{aligned} \text{Maximize} \quad & -F_1F_2\mu_1^2 - \frac{F_2}{F_1^2}\left(F_1\mu_1 - F_2\mu_2\right)^2 - F_2\mu_2^2 \\ & - \frac{F_3}{F_2^2}\left(F_2\mu_2 - F_3\mu_3\right)^2 - F_3\mu_3^2 \\ & - \cdots \\ & - \frac{F_7}{F_6^2}\left(F_6\mu_6 - F_7\mu_7\right)^2 - F_7\mu_7^2 \\ & - \frac{F_8}{F_7^2}\left(F_7\mu_7 - F_8\mu_8\right)^2 - F_8\mu_8^2 + 2F_8c\mu_8 \\ \text{subject to} \quad & \text{(i)} \;\; \mu \in R^8, \quad \text{(ii)} \;\; \mu_1 = 0 \end{aligned}$$

で与えられる。条件 (ii) の下では、最初の 3 項の和は次になる：

$$-F_1F_2\mu_1^2 - \frac{F_2}{F_1^2}\left(F_1\mu_1 - F_2\mu_2\right)^2 - F_2\mu_2^2 \;=\; -\frac{F_2F_3}{F_1}\mu_2^2.$$

双対問題 ($\mathrm{D}_8$) はまた次で表わされる。

$$\begin{aligned} &\text{Maximize} \quad -F_1F_2\mu_1^2 - \sum_{k=1}^{7}\left[\frac{F_{k+1}}{F_k^2}\left(F_k\mu_k - F_{k+1}\mu_{k+1}\right)^2 + F_{k+1}\mu_{k+1}^2\right] + 2F_8c\mu_8 \\ &\text{subject to} \quad \text{(i)} \;\; \mu \in R^8, \quad \text{(ii)} \;\; \mu_1 = 0. \end{aligned}$$

反転主問題 ($\mathrm{RP}_8$) および反転双対問題 ($\mathrm{RD}_8$) を考えると、両反転問題の最適解の間には今度は**前向きの**フィボ・シフト双対性が成り立つ。すなわち、反転主問題 ($\mathrm{RP}_8$) の最小解と反転双対問題 ($\mathrm{RD}_8$) の最大解の間には次の三位一体の関係が成り立っている。

1. （双対性） 最小値と最大値が等しい：$m_8 = M_8$. 共に初期値 $c$ の 2 次式で、その係数は 3 連フィボ数の比 $\dfrac{21\cdot 13}{34}$ である。

2. （フィボナッチ）　最小点 $(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2,\ \ldots,\ \tilde{x}_7,\ \tilde{x}_8)$ と最大点 $(\mu_1^\star,\ \mu_2^\star,\ \ldots,\ \mu_7^\star,\ \mu_8^\star)$ は共に（前向きの）フィボ数列である。

$$
\begin{aligned}
(\tilde{x}_1,\ \tilde{x}_2,\ \ldots,\ \tilde{x}_7,\ \tilde{x}_8) &= \frac{c}{34}\left(\boxed{1},\ \boxed{1},\ \ldots,\ \boxed{13},\ \boxed{21}\right) \\
(\mu_1^\star,\ \mu_2^\star,\ \ldots,\ \mu_7^\star,\ \mu_8^\star) &= \frac{c}{34}\left(\boxed{0},\ \boxed{1},\ \ldots,\ \boxed{8},\ \boxed{13}\right)
\end{aligned}
$$

3. （シフト）　最大点と最小点はお互いを１段シフトさせている。すなわち、定数 $\dfrac{c}{F_9}$ を無視すれば、反転主問題の最適解

$$\boxed{\tilde{x}_1}\ \boxed{\tilde{x}_2}\ \boxed{\tilde{x}_3}\ \boxed{\tilde{x}_4}\ \boxed{\tilde{x}_5}\ \boxed{\tilde{x}_6}\ \boxed{\tilde{x}_7}\ \boxed{\tilde{x}_8}$$

は

$$\boxed{F_1}\ \boxed{F_2}\ \boxed{F_3}\ \boxed{F_4}\ \boxed{F_5}\ \boxed{F_6}\ \boxed{F_7}\ \boxed{F_8}$$

で、反転双対問題の最適解

$$\boxed{\mu_1^\star}\ \boxed{\mu_2^\star}\ \boxed{\mu_3^\star}\ \boxed{\mu_4^\star}\ \boxed{\mu_5^\star}\ \boxed{\mu_6^\star}\ \boxed{\mu_7^\star}\ \boxed{\mu_8^\star}$$

は

$$\boxed{F_0}\ \boxed{F_1}\ \boxed{F_2}\ \boxed{F_3}\ \boxed{F_4}\ \boxed{F_5}\ \boxed{F_6}\ \boxed{F_7}$$

である。

すなわち、反転主問題の最適解には冒頭の【ダ・ヴィンチ・コード】が現れている。特に $c = 34$ のとき、この最適解は【ダ・ヴィンチ・コード】そのものになっている。

# 4　フィボナッチ分割

この節では、まず最適化の１階条件が簡単な条件に帰着できことを示す。これをフィボナッチ条件という。次に、この条件に基づいて所与の区間をフィボ比で逐次分割すれば、最適な分割が得られることを示す。すなわち、**フィボナッチ最適分割** (Fibonacci optimal section) を提示する。

## 4.1　主問題 $(\mathrm{P}_8)$

さて、主問題 $(\mathrm{P}_8)$ の目的関数を８変数 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_8)$ の関数 $f(x)$ で表す：

$$
\begin{aligned}
f(x) \;=\; & F_8(x_0 - x_1)^2 + \frac{F_7^2}{F_8}x_1^2 + F_7(x_1 - x_2)^2 + \frac{F_6^2}{F_7}x_2^2 + \cdots \\
& + F_2(x_6 - x_7)^2 + \frac{F_1^2}{F_2}x_7^2 + F_1(x_7 - x_8)^2 + \frac{F_0^2}{F_1}x_8^2.
\end{aligned}
$$

このとき $f(x)$ は凸関数である。また一般に最小解 $x$ は１階条件を満たす。したがって、この問題では１階条件を満たす $x$ を求めれば、最小解が得られる。実際、１階条件

$$\frac{\partial f}{\partial x_n} \;=\; 0 \qquad n = 1, 2, \ldots, 8$$

は 8 つの 1 次式からなる連立方程式系

$$\begin{aligned}
-F_8(x_0 - x_1) + \frac{F_7^2}{F_8}x_1 + F_7(x_1 - x_2) \;&=\; 0 \\
-F_7(x_1 - x_2) + \frac{F_6^2}{F_7}x_2 + F_6(x_2 - x_3) \;&=\; 0 \\
&\vdots \\
-F_2(x_6 - x_7) + \frac{F_1^2}{F_2}x_7 + F_1(x_7 - x_8) \;&=\; 0 \\
-F_1(x_7 - x_8) + \frac{F_0^2}{F_1}x_8 \;&=\; 0
\end{aligned} \tag{4}$$

になる。最後の第 8 式を除けば、すべて隣接 3 項間であるが、7 式とも敢えて整理しないでこのままにしておく。そうすると、最後の式から後向きに逐次 2 項間の比例式からなる系

$$\frac{c - x_1}{F_7} \;=\; \frac{x_1}{F_8}, \quad \frac{x_1 - x_2}{F_6} \;=\; \frac{x_2}{F_7}, \;\cdots$$
$$, \;\frac{x_6 - x_7}{F_1} \;=\; \frac{x_7}{F_2}, \quad F_1(x_7 - x_8) = F_0 x_8$$

が得られて

$$(\mathrm{F})_{\mathrm{P}} \qquad \frac{c - x_1}{F_7} \;=\; \frac{x_1}{F_8} \;=\; \frac{x_1 - x_2}{F_6} \;=\; \frac{x_2}{F_7} \;=\; \cdots$$
$$= \;\frac{x_6 - x_7}{F_1} \;=\; \frac{x_7}{F_2}, \quad x_7 = x_8$$

が導かれる。これを**フィボナッチ条件** (Fibonacci condition, FC)[2] という。したがって、この系またはフィボ条件 $(\mathrm{F})_{\mathrm{P}}$ を解けば、最小解が得られる。幸いにもこれは解き易い。隣接 2 項間の比例式であり、初期値 $c$ が与えられているから、前向きに解ける。

さて、ここで方程式系 (4) から条件 $(\mathrm{F})_{\mathrm{P}}$ を導いてこう。まず、$F_0 = 0$ より、(4) の最後の第 8 式は

$$x_7 = x_8$$

に他ならない。これより、次の第 7 式より

$$\frac{x_6 - x_7}{F_1} \;=\; \frac{x_7}{F_2}$$

[2] 厳密には 6 : 4 型のフィボナッチ条件という。4 : 6 型は既に [16] で導入している。

がわかる。よって、$x_7 = \dfrac{F_2}{F_3} x_6$. この関係を第 6 式に代入すると

$$\frac{x_5 - x_6}{F_2} = \frac{x_6}{F_3}$$

になる。すなわち、$x_6 = \dfrac{F_3}{F_4} x_5$. これを繰り返すと、最後に

$$\frac{c - x_1}{F_7} = \frac{x_1}{F_8}$$

になる。同時に、これらの値はすべて等しいこともわかる。したがって、$(\mathrm{F})_{\mathrm{P}}$ が成立することになる。

フィボ条件 $(\mathrm{F})_{\mathrm{P}}$ は最適分割を構成する点列 $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_8)$ が次のように 8 段階**フィボナッチ分割** (Fibonacci section, FS) によって生成されることを示している。まず区間 $[0,\ c]$ を $F_8 : F_7$ に内分する点を $x_1$ とし、次に $[0,\ x_1]$ の比 $F_7 : F_6$ による内分点を $x_2$ とする。さらに、 $[0,\ x_2]$ の $F_6 : F_5$ の内分点を $x_3$ とし、これを繰り返して最後に $[0,\ x_7]$ を $F_1 : F_0$ に内分する点を $x_8$ としている。すなわち、この最適分割は 16 個の 1 次量

$$x_1, \quad c - x_1, \quad x_2, \quad x_1 - x_2, \quad x_3, \quad x_2 - x_3, \quad x_4, \quad x_3 - x_4$$

$$, \quad x_5, \quad x_4 - x_5, \quad x_6, \quad x_5 - x_6, \quad x_7, \quad x_6 - x_7, \quad x_8, \quad x_7 - x_8$$

がフィボ連比

$$F_8 : F_7 : F_7 : F_6 : F_6 : F_5 : F_5 : F_4$$

$$: F_4 : F_3 : F_3 : F_2 : F_2 : F_1 : F_1 : F_0$$

になるように配分することである。

初期値 $x_0 = c\ (> 0)$ が与えられているとき、主問題 $(\mathrm{P}_8)$ の最適点 $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_8)$ は区間 $[0, c]$ の 7 段階フィボ条件によって得られる。まず第 1 段では、$x_1$ は区間 $[0, c]$ を $F_8 : F_7\ (= 21 : 13)$ の比に内分する点にとる。

次の第 2 段では、$x_2$ を $[0, x_1]$ を $F_7 : F_6\ (= 13 : 8)$ に内分する点にとる。第 3 段では、$x_3$ を $[0, x_2]$ の $F_6 : F_5\ (= 8 : 5)$ の内分点にする。第 4 段では、$x_4$ を $[0, x_3]$ の $F_5 : F_4\ (= 5 : 3)$ の内分点にする。第 5 段では、$x_5$ を $[0, x_4]$ の $F_4 : F_3\ (= 3 : 2)$ の内分点にする。第 6 段では、$x_6$ を $[0, x_5]$ の $F_3 : F_2\ (= 2 : 1)$ の内分点にする。第 7 段では、$x_7$ を $[0, x_6]$ の $F_2 : F_1\ (= 1 : 1)$ の内分点にする。最後の第 8 段では、$x_8$ を $[0, x_7]$ の $F_1 : F_0\ (= 1 : 0)$ の内分点にするにとる。

すなわち、第 1 段から第 8 段まですべて **6 : 4 型**の分割である。

さて、実際に $(\mathrm{F})_{\mathrm{P}}$ は容易に解けて、

$$
\begin{aligned}
\hat{x} &= (\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \ldots,\ \hat{x}_8) \\
&= \frac{c}{F_9}\Big(\ F_8,\quad F_7,\quad F_6,\quad F_5,\quad F_4,\quad F_3,\quad F_2,\quad F_1\ \Big)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

で最小値 $m_8 = \dfrac{F_8 F_7}{F_9} c^2$ をもつことを示そう。

最初の

$$\frac{c - x_1}{F_7} = \frac{x_1}{F_8}$$

より、まず

$$\hat{x}_1 = \frac{F_8}{F_9} c.$$

したがって、次は $\dfrac{\hat{x}_1 - x_2}{F_6} = \dfrac{x_2}{F_7}$ より

$$\hat{x}_2 = \frac{F_7}{F_9} c.$$

これを繰り返すと、最後は

$$\hat{x}_8 = \frac{F_1}{F_9} c$$

になる。すなわち、$\hat{x}$ が得られた。

このとき、次の**補題 1**(ii)

$$2 \sum_{n=1}^{7} F_n^2 F_{n+1} = F_7 F_8 F_9$$

を用いると、

$$
\begin{aligned}
F_9^2 \frac{f(\hat{x})}{c^2} &= \left(F_8 F_7^2 + F_7^2 F_8\right) + \left(F_7 F_6^2 + F_6^2 F_7\right) + \cdots + \left(F_2 F_1^2 + F_1^2 F_2\right) \\
&= 2\left(F_8 F_7^2 + F_7 F_6^2 + \cdots + F_2 F_1^2\right) \\
&= F_7 F_8 F_9
\end{aligned}
$$

になる。すなわち、最小値は

$$f(\hat{x}) = \frac{F_8 F_7}{F_9} c^2$$

である。

フィボナッチ数列の和については次の公式が成り立つ[3]。

[3] この 6 : 4 型では新たに導いた公式 (ii) を用いたが、4 : 6 型では [16] で既に (i)（リュカ）を用いている。

**補題 1**

$$\text{(i)（リュカ）}\quad \sum_{k=1}^{n} F_k^2 \ = \ F_n F_{n+1} \tag{6}$$

$$\text{(ii)（準立方和）}\quad 2\sum_{k=1}^{n} F_k^2 F_{k+1} \ = \ F_n F_{n+1} F_{n+2}. \tag{7}$$

## 4.2　双対問題 $(\mathrm{D}_8)$

今度は、双対問題 $(\mathrm{D}_8)$ の目的関数を 8 変数 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_8)$ の関数 $g(\mu)$ で表そう：

$$\begin{aligned} g(\mu) \ &= \ 2cF_8\mu_1 - F_8\left[\mu_1^2 + \left(\frac{F_8}{F_7}\mu_1 - \mu_2\right)^2\right] - F_7\left[\mu_2^2 + \left(\frac{F_7}{F_6}\mu_2 - \mu_3\right)^2\right] - \cdots \\ &\quad - F_3\left[\mu_6^2 + \left(\frac{F_3}{F_2}\mu_6 - \mu_7\right)^2\right] - F_2\left[\mu_7^2 + \left(\frac{F_2}{F_1}\mu_8 - \mu_8\right)^2\right] - F_1F_2\mu_8^2. \end{aligned}$$

$g(\mu)$ は凹関数である。最大解 $\mu$ は１階条件を満たすので、条件 (ii) と１階条件を解けば、最大解が得られる。実際、(ii) と１階条件

$$\frac{\partial g}{\partial \mu_n} \ = \ 0 \qquad n = 1, 2, \ldots, 7$$

は 8 つの一次式からなる連立方程式系

$$\begin{aligned} c - \mu_1 - \frac{F_8}{F_7}\left(\frac{F_8}{F_7}\mu_1 - \mu_2\right) \ &= \ 0 \\ -\frac{F_8}{F_7}\left(\frac{F_8}{F_7}\mu_1 - \mu_2\right) + \mu_2 + \frac{F_7}{F_6}\left(\frac{F_7}{F_6}\mu_2 - \mu_3\right) \ &= \ 0 \\ &\vdots \\ -\frac{F_4}{F_3}\left(\frac{F_4}{F_3}\mu_5 - \mu_6\right) + \mu_6 + \frac{F_3}{F_2}\left(\frac{F_3}{F_2}\mu_6 - \mu_7\right) \ &= \ 0 \\ -\frac{F_3}{F_2}\left(\frac{F_3}{F_2}\mu_6 - \mu_7\right) + \mu_7 + \frac{F_2}{F_1}\left(\frac{F_2}{F_1}\mu_7 - \mu_8\right) \ &= \ 0 \\ \mu_8 \ &= \ 0 \end{aligned} \tag{8}$$

になる。

これから双対問題 $(\mathrm{D}_8)$ に対するフィボ条件

$$(\mathrm{F})_{\mathrm{D}} \qquad \frac{c-\mu_1}{F_8} = \frac{\dfrac{F_8}{F_7}\mu_1-\mu_2}{F_7} = \frac{\mu_2}{F_6} = \frac{\dfrac{F_7}{F_6}\mu_2-\mu_3}{F_6} = \frac{\mu_3}{F_5}$$

$$= \cdots = \frac{\dfrac{F_4}{F_3}\mu_5-\mu_6}{F_3} = \frac{\mu_6}{F_2} = \frac{\dfrac{F_3}{F_2}\mu_6-\mu_7}{F_2} = \frac{\mu_7}{F_1}, \quad \mu_8 = 0$$

が導かれる。これは次の 8 つの等式からなる系に同値である。

$$\frac{c-\mu_1}{F_8} = \frac{\dfrac{F_8}{F_7}\mu_1-\mu_2}{F_7} = \frac{\mu_2}{F_6}, \quad \frac{\dfrac{F_7}{F_6}\mu_2-\mu_3}{F_6} = \frac{\mu_3}{F_5},$$

$$\cdots, \frac{\dfrac{F_4}{F_3}\mu_5-\mu_6}{F_3} = \frac{\mu_6}{F_2}, \quad \frac{\dfrac{F_3}{F_2}\mu_6-\mu_7}{F_2} = \frac{\mu_7}{F_1}, \quad F_0\left(\frac{F_2}{F_1}\mu_7-\mu_8\right) = F_1\mu_8$$

方程式系 (8) から条件 $(\mathrm{F})_{\mathrm{D}}$ を導こう。まず、 $\mu_8 = 0$ より、系の第 7 式より

$$\frac{\dfrac{F_3}{F_2}\mu_6-\mu_7}{F_2} = \frac{\mu_7}{F_1}$$

である。よって $\mu_7 = \dfrac{F_1}{F_2}\mu_6$. 次に、これを第 6 式に代入して

$$\frac{\dfrac{F_4}{F_3}\mu_5-\mu_6}{F_3} = \frac{\mu_6}{F_2}.$$

これを繰り返すと、

$$\frac{\dfrac{F_8}{F_7}\mu_1-\mu_2}{F_7} = \frac{\mu_2}{F_6}$$

が得られる。最後に、第 1 式は

$$\frac{c-\mu_1}{F_8} = \frac{\dfrac{F_8}{F_7}\mu_1-\mu_2}{F_7}$$

に他ならない。したがって、条件 $(\mathrm{F})_{\mathrm{D}}$ が成立する。

フィボ条件 $(\mathrm{F})_{\mathrm{D}}$ は 15 個の 1 次量

$$c-\mu_1, \quad \frac{F_8}{F_7}\mu_1-\mu_2, \quad \mu_2, \quad \frac{F_7}{F_6}\mu_2-\mu_3, \quad \mu_3, \quad \frac{F_6}{F_5}\mu_3-\mu_4, \quad \mu_4, \quad \frac{F_5}{F_4}\mu_4-\mu_5$$

$$, \quad \mu_5, \quad \frac{F_4}{F_3}\mu_5-\mu_6, \quad \mu_6, \quad \frac{F_3}{F_2}\mu_6-\mu_7, \quad \mu_7, \quad \frac{F_2}{F_1}\mu_7-\mu_8, \quad \mu_8$$

をフィボ連比

$$F_8 : F_7 : F_7 : F_6 : F_6 : F_5 : F_5 : F_4$$

$$: F_3 : F_3 : F_2 : F_2 : F_1 : F_1 : F_0$$

で配分することを意味している。すなわち、この条件とは、区間 $[0, c]$ に大きい方から順に 8 つの分点 $\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_8$ を入れて、15 個の量

$$c - \mu_1, \quad \mu_1, \quad \mu_1 - \mu_2, \quad \mu_2, \quad \mu_2 - \mu_3, \quad \mu_3, \quad \mu_3 - \mu_4, \quad \mu_4$$

$$, \quad \mu_4 - \mu_5, \quad \mu_5, \quad \mu_5 - \mu_6, \quad \mu_6, \quad \mu_6 - \mu_7, \quad \mu_7, \quad \mu_7 - \mu_8$$

がフィボ連比

$$F_8 : F_7 : F_5 : F_6 : F_4 : F_5 : F_3 : F_4$$

$$: F_2 : F_3 : F_1 : F_2 : F_0 : F_1 : F_1$$

になるように配分することである。

主問題 $(\mathrm{P}_8)$ の初期値 $x_0 = c\ (> 0)$ が与えられているとき、双対問題 $(\mathrm{D}_8)$ の最適点 $(\mu_1,\ \mu_2,\ \ldots,\ \mu_8)$ は区間 $[0, c]$ の 7 段階フィボ条件によって得られる。まず第 1 段では、$\mu_1$ は区間 $[0, c]$ を $F_7 : F_8\ (= 13 : 21)$ の比に内分する点にとる。

次の第 2 段では、$\mu_2$ を $[0, \mu_1]$ を $F_6 : F_5\ (= 8 : 5)$ に内分する点にとる。第 3 段では、$\mu_3$ を $[0, \mu_2]$ の $F_5 : F_4\ (= 5 : 3)$ の内分点にする。第 4 段では、$\mu_4$ を $[0, \mu_3]$ の $F_4 : F_3\ (= 3 : 2)$ の内分点にする。第 5 段では、$\mu_5$ を $[0, \mu_4]$ の $F_3 : F_2\ (= 2 : 1)$ の内分点にする。第 6 段では、$\mu_6$ を $[0, \mu_5]$ の $F_2 : F_1\ (= 1 : 1)$ の内分点にする。第 7 段では、$\mu_7$ を $[0, \mu_6]$ の $F_1 : F_0\ (= 1 : 0)$ の内分点にする。最後の第 8 段では、$\mu_8 = 0$ にとる。

すなわち、第 1 段では **4 : 6 型**の分割であるが、第 2 段から第 7 段までは **6 : 4 型**になっている。

さて、フィボ条件 $(\mathrm{F})_{\mathrm{D}}$ を解いて、

$$(\mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \ldots,\ \mu_8^*) = \frac{c}{F_9}\Big(\ F_7,\quad F_6,\quad \ldots,\quad F_0\ \Big)$$

が最大値 $M_8 = \dfrac{F_8 F_7}{F_9} c^2$ に達していることを示そう。

これには同値な系を次のように後向きに解けばよい。まず、最後の第 8 式の $\mu_8 = 0$ を第 7 式に代入すると、

$$\mu_7 = \mu_6 \quad \text{i.e.} \quad \frac{\mu_7}{F_1} = \frac{\mu_6}{F_2}.$$

これを第 6 式に代入して

$$\frac{\mu_6}{F_2} = \frac{\mu_5}{F_3}.$$

以下、同様に 1 つ上の式に代入して逐次

$$\frac{\mu_5}{F_3} = \frac{\mu_4}{F_4}, \ \cdots \ , \ \frac{\mu_2}{F_6} = \frac{\mu_1}{F_7}$$

が得られる。この最後の式を最初の第 1 式に代入すると、

$$\mu_1 = \frac{\mu_7}{F_9}c$$

になる。したがって、

$$\mu_2 = \frac{F_6}{F_9}c, \quad \mu_3 = \frac{F_5}{F_9}c, \ \ldots \ , \quad \mu_7 = \frac{F_1}{F_9}c$$

である。

ゆえに、

$$\begin{aligned} \mu^* &= (\mu_1^*,\ \mu_2^*,\ ,\quad \ldots,\ \mu_8^*) \\ &= \frac{c}{F_9}\Big(\ F_7\,,\quad F_6\,,\quad F_5\,,\quad F_4\,,\quad F_3\,,\quad F_2\,,\quad F_1\,,\quad F_0\ \Big) \end{aligned}$$

が得られた。このとき、補題 1(ii) より

$$\begin{aligned} g(\mu^*)F_9^2/c^2 &= 2F_7F_8F_9 - F_8\left[F_7^2 + (F_8 - F_6)^2\right] - F_7\left[F_6^2 + (F_7 - F_5)^2\right] - \cdots \\ &\quad - F_3\left[F_2^2 + (F_3 - F_1)^2\right] - F_2\left[F_1^2 + (F_2 - F_0)^2\right] - F_1F_2F_0^2 \\ &= 2F_7F_8F_9 - 2\left(F_8F_7^2 + F_7F_6^2 + \cdots + F_2F_1^2\right) \\ &= F_7F_8F_9 \end{aligned}$$

になる。すなわち、最大値

$$g(\mu^*) = \frac{F_8F_7}{F_9}c^2$$

が得られた。

# 5　双対問題の導出

さて、主問題から双対問題がどのようにして導かれるだろうか。一般に、2 つの方法――ラグランジュ乗数法 [16] と準線形化法 [5, 16, 17, 22] ――があるが、この章ではラグランジュ乗数法とは独立に直接双対問題を導こう。

主問題

$$
(\mathrm{P}_8)\qquad \begin{array}{ll} \text{minimize} & \displaystyle\sum_{n=0}^{7}\left[F_{8-n}(x_n-x_{n+1})^2+\frac{F_{7-n}^2}{F_{8-n}}x_{n+1}^2\right]+\frac{F_0F_1}{F_2}x_8^2 \\ \text{subject to} & \text{(i)}\ \ -\infty<x_n<\infty \quad n=1,2,\ldots,8 \\ & \text{(ii)}\ \ x_0=c \end{array}
$$

が与えられているとしよう。いま、$x=(x_1,\ \ldots,\ x_8)$ が制約条件 (i), (ii) を満たすとして、その目的関数の値を $I(x)$ で表わす：

$$
I(x)\ =\ \sum_{n=0}^{7}\left[F_{8-n}(x_n-x_{n+1})^2+\frac{F_{7-n}^2}{F_{8-n}}x_{n+1}^2\right]+\frac{F_0F_1}{F_2}x_8^2.
$$

このとき、変数列 $u=(u_1,\ \ldots,\ u_8)$ を

$$
u_n=x_{n-1}-x_n \qquad 1\le n\le 8 \tag{9}
$$

で導入すると、任意の実数列 $\mu=(\mu_1,\ \ldots,\ \mu_8)$ を用いて、値 $I(x)$ は次でも表わされる。

$$
\begin{aligned}
I(x)\ =\ & F_8u_1^2+\frac{F_7^2}{F_8}x_1^2+2F_8\mu_1(x_0-x_1-u_1)\\
&+F_7u_2^2+\frac{F_6^2}{F_7}x_2^2+2F_7\mu_2(x_1-x_2-u_2)\\
&\quad\vdots\\
&+F_2u_7^2+\frac{F_1^2}{F_2}x_7^2+2F_2\mu_7(x_6-x_7-u_7)\\
&+F_1u_8^2+\frac{F_0^2}{F_1}x_8^2+2F_1\mu_8(x_7-x_8-u_8)+\frac{F_0F_1}{F_2}x_8^2.
\end{aligned} \tag{10}
$$

(10) では 列 $\{2F_8\mu_1,\ 2F_7\mu_2,\ \ldots\ ,\ 2F_1\mu_8\}$ を等式制約に対応するラグランジュ変数列にとっているが、この列を**拡大ラグランジュ乗数列** (augmented Lagrange multipliers) と言おう[4]。このとき、

$$
\begin{aligned}
I(x)\ =\ & F_8\left(u_1^2-2\mu_1u_1\right)+\frac{F_7^2}{F_8}x_1^2-2\left(F_8\mu_1-F_7\mu_2\right)x_1+2F_8x_0\mu_1\\
&+F_7\left(u_2^2-2\mu_2u_2\right)+\frac{F_6^2}{F_7}x_2^2-2\left(F_7\mu_2-F_6\mu_3\right)x_2\\
&\quad\vdots\\
&+F_2\left(u_7^2-2\mu_7u_7\right)+\frac{F_1^2}{F_2}x_7^2-2\left(F_2\mu_7-F_1\mu_8\right)x_7\\
&+F_1\left(u_8^2-2\mu_8u_8\right)+F_0x_8^2-2F_1\mu_8x_8
\end{aligned}
$$

[4]たとえば、等式制約 $x_0-x_1=u_1$ に対応するラグランジュ乗数を $\lambda_1$ として、$\lambda_1$ 倍した $\lambda_1(x_0-x_1-u_1)$ を目的式に加えて、ラグランジュ関数を構成するのが通常であるが、ここでは $\mu_1$ を $2F_8$ 倍した $2F_8\mu_1$ をラグランジュ乗数として考え、$\mu_1$ 自身に関する最大化を思考している。

である。ここに $x_8^2$ の係数だけが $F_0=0$ で、他の 2 次項はすべて正係数である。したがって、

$$
\begin{aligned}
I(x) \;=\;& 2F_8x_0\mu_1 + F_8(u_1-\mu_1)^2 - F_8\mu_1^2 \\
&+ \frac{F_7^2}{F_8}\left\{x_1 - \frac{F_8}{F_7^2}(F_8\mu_1 - F_7\mu_2)\right\}^2 - \frac{F_8}{F_7^2}(F_8\mu_1 - F_7\mu_2)^2 \\
&\quad + F_7(u_2-\mu_2)^2 - F_7\mu_2^2 \\
&\quad \vdots \\
&+ \frac{F_2^2}{F_3}\left\{x_6 - \frac{F_3}{F_2^2}(F_3\mu_6 - F_2\mu_7)\right\}^2 - \frac{F_3}{F_2^2}(F_3\mu_6 - F_2\mu_7)^2 \\
&\quad + F_2(u_7-\mu_7)^2 - F_2\mu_7^2 \\
&+ \frac{F_1^2}{F_2}\left\{x_7 - \frac{F_2}{F_1^2}(F_2\mu_7 - F_1\mu_8)\right\}^2 - \frac{F_2}{F_1^2}(F_2\mu_7 - F_1\mu_8)^2 \\
&\quad + F_1(u_8-\mu_8)^2 - F_1\mu_8^2 + F_0x_8^2 - 2F_1\mu_8x_8.
\end{aligned}
$$

ゆえに、右辺から非負項を削除すると、

$$
\begin{aligned}
I(x) \;\geq\;& 2F_8x_0\mu_1 - F_8\mu_1^2 - \frac{F_8}{F_7^2}(F_8\mu_1 - F_7\mu_2)^2 \\
&- F_7\mu_2^2 - \frac{F_7}{F_6^2}(F_7\mu_2 - F_6\mu_3)^2 \\
&\quad \vdots \\
&- F_2\mu_7^2 - \frac{F_2}{F_1^2}(F_2\mu_7 - F_1\mu_8)^2 \\
&- F_1\mu_8^2 + F_0x_8^2 - 2F_1\mu_8x_8
\end{aligned}
$$

が成り立つ。さらに、この右辺から $+F_0x_8^2 - 2F_1\mu_8x_8$ を除去した項は $\mu=(\mu_1,\ldots,\mu_8)$ のみからなり、 $x_8$ を含まない[5]。これを $J(\mu)$ で表わそう：

$$
\begin{aligned}
J(\mu) \;=\;& 2F_8x_0\mu_1 - F_8\mu_1^2 - \frac{F_8}{F_7^2}(F_8\mu_1 - F_7\mu_2)^2 \\
&- F_7\mu_2^2 - \frac{F_7}{F_6^2}(F_7\mu_2 - F_6\mu_3)^2 \\
&\quad \vdots \\
&- F_2\mu_7^2 - \frac{F_2}{F_1^2}(F_2\mu_7 - F_1\mu_8)^2 \\
&- F_1\mu_8^2.
\end{aligned}
$$

[5] $x_0$ は定数である。

すると、不等式

$$I(x) \ \geq \ J(\mu) \tag{11}$$

が (9) を満たす任意の $(x, u)$ と $\mu_8 = 0$ を満たす任意の $\mu$ に対して成り立つ。等号は

$$\begin{aligned}
u_1 &= \mu_1, \quad x_1 = \frac{F_8}{F_7^2}\,(F_8\mu_1 - F_7\mu_2) \\
u_2 &= \mu_2, \quad x_2 = \frac{F_7}{F_6^2}\,(F_7\mu_2 - F_6\mu_3) \\
&\ \ \vdots \\
u_6 &= \mu_6, \quad x_6 = \frac{F_3}{F_2^2}\,(F_3\mu_6 - F_2\mu_7) \\
u_7 &= \mu_7, \quad x_7 = \frac{F_2}{F_1^2}\,(F_2\mu_7 - F_1\mu_8) \\
u_8 &= \mu_8
\end{aligned} \tag{12}$$

のときに限り成り立つ。

さて、(9),(12) を満たす $(x, u;\, \mu)$ を求めよう。まず $u, x$ を消去すると、

$$\begin{aligned}
&\frac{c-\mu_1}{F_8} = \frac{F_8\mu_1 - F_7\mu_2}{F_7^2}, \quad \frac{c-\mu_1-\mu_2}{F_7} = \frac{F_7\mu_2 - F_6\mu_3}{F_6^2}, \ \ldots, \\
&\frac{c-\mu_1-\cdots-\mu_6}{F_3} = \frac{F_3\mu_6 - F_2\mu_7}{F_2^2}, \quad \frac{c-\mu_1-\cdots-\mu_7}{F_2} = \frac{F_2\mu_7 - F_1\mu_8}{F_1^2}, \quad \mu_8 = 0
\end{aligned} \tag{13}$$

になる。このとき、

$$u_n \ = \ \mu_n, \quad x_n = c - \mu_1 - \cdots - \mu_n \qquad 1 \leq n \leq 8. \tag{14}$$

連立1次方程式 (13) を後向きに解こう。まず、最後から2番目と3番目の2式から $c-\mu_1-\cdots-\mu_6$ を消すと、

$$\mu_7 = \frac{F_3}{F_2^2}\,(F_3\mu_6 - F_2\mu_7) - \frac{F_2}{F_1^2}\,(F_2\mu_7 - F_1\mu_8)$$

になる。これに最後の式の $\mu_8 = 0$ を代入すると、$\mu_7, \mu_6$ の関係が

$$\frac{F_3\mu_6 - F_2\mu_7}{F_2^2} = \frac{\mu_7}{F_1}$$

として得られる。これより、$\mu_7, \mu_6$ の2項関係が比例式

$$\mu_6 = \mu_7 \quad \text{i.e.} \quad \frac{\mu_6}{F_2} = \frac{\mu_7}{F_1}$$

で表わされる。次に、最後から3番目と4番目の2式から $c - \mu_1 - \cdots - \mu_5$ を消すと、

$$\mu_6 = \frac{F_4\mu_3 - F_5\mu_4}{F_3^2} - \frac{F_3\mu_6 - F_2\mu_7}{F_2^2}.$$

これに上述の比例式を代入すると、$\mu_6, \mu_5$ 間に関係式

$$\frac{F_4\mu_5 - F_3\mu_6}{F_2^3} = \frac{\mu_6}{F_2}$$

が得られる。これより

$$\frac{\mu_5}{F_3} = \frac{\mu_6}{F_2}$$

になる。これを繰り返して、最初の 2 式から $c - \mu_1$ を消す。すると、いま導いた比例関係式より

$$\frac{F_8\mu_1 - F_7\mu_2}{F_7^2} = \frac{\mu_2}{F_6}$$

すなわち

$$\frac{\mu_1}{F_7} = \frac{\mu_2}{F_6}$$

が従う。最後に、これを用いると、最初の式自身から

$$\frac{c - \mu_1}{F_8} = \frac{\mu_1}{F_7}$$

が得られる。

すなわち、(13) から同値な 2 つの系

$$\frac{c - \mu_1}{F_8} = \frac{F_8\mu_1 - F_7\mu_2}{F_7^2}, \quad \frac{F_8\mu_1 - F_7\mu_2}{F_7^2} = \frac{\mu_2}{F_6},$$
$$\ldots, \frac{F_3\mu_6 - F_2\mu_7}{F_2^2} = \frac{\mu_7}{F_1}, \quad \mu_8 = 0$$

と

$$\frac{c - \mu_1}{F_8} = \frac{\mu_1}{F_7} = \frac{\mu_2}{F_6} = \cdots = \frac{\mu_7}{F_1}, \quad \mu_8 = 0$$

が導かれた。

したがって、方程式 (13) は解

$$\mu_n^* = \frac{F_{8-n}}{F_9}c \quad 1 \leq n \leq 8 \tag{15}$$

をもつ。すなわち、

$$\mu^* = \left( \mu_1^*, \ \mu_2^*, \ \ldots, \ \mu_7^*, \ \mu_8^* \right) = \frac{c}{F_9}\left( F_7, \ F_6, \ \ldots, \ F_1, \ F_0 \right).$$

また (14) より、

$$\hat{u}_n = \mu_n^* = \frac{F_{8-n}}{F_9}c, \quad \hat{x}_n = \frac{F_{9-n}}{F_9}c \tag{16}$$

になる。すなわち、

$$\hat{x} = \left( \hat{x}_1, \quad \hat{x}_2, \quad \ldots, \quad \hat{x}_7, \quad \hat{x}_8 \right) = \frac{c}{F_9} \left( F_8, \quad F_7, \quad \ldots, \quad F_2, \quad F_1 \right).$$

したがって、(9),(12) の解 $(\hat{x}, \hat{u};\, \mu^*)$ は (15),(16) で与えられる。これで $J(\mu)$ の制約付き最大化

$$(\mathrm{D}_8)\quad \begin{aligned} \text{Maximize}\quad & 2F_8 c\mu_1 - F_8\mu_1^2 - \frac{F_8}{F_7^2}\left(F_8\mu_1 - F_7\mu_2\right)^2 \\ & - F_7\mu_2^2 - \frac{F_7}{F_6^2}\left(F_7\mu_2 - F_6\mu_3\right)^2 \\ & \qquad \vdots \\ & - F_2\mu_7^2 - \frac{F_2}{F_1^2}\left(F_2\mu_7 - F_1\mu_8\right)^2 - F_1F_2\mu_8^2 \\ \text{subject to}\quad & \text{(i)}\ \ \mu \in R^8, \quad \text{(ii)}\ \ \mu_8 = 0 \end{aligned}$$

が双対問題であることが分かった。

# 6　4 変数問題

これまで、【ダ・ヴィンチ・コード】に焦点を当てるべく、8 変数問題に限定して、フィボナッチ・シフト双対性を導いてきた。しかし、$n$ を自然数として、一般にこの双対性は $n$ 変数問題に対しても成り立つ。ここでは $n = 4$ について、主問題と双対問題の対 $(\mathrm{P}_4)$, $(\mathrm{D}_4)$ および対応する反転問題の対 $(\mathrm{RP}_4)$, $(\mathrm{RD}_4)$ について、問題、最適解およびフィボナッチ・シフト双対性を述べよう。

## 6.1　主問題 $(\mathrm{P}_4)$ と双対問題 $(\mathrm{D}_4)$

4 変数 $x = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ の主問題

$$(\mathrm{P}_4)\quad \begin{aligned} \text{minimize}\quad & F_8(x_0 - x_1)^2 + \frac{F_7^2}{F_8}x_1^2 \\ & + F_7(x_1 - x_2)^2 + \frac{F_6^2}{F_7}x_2^2 \\ & + F_6(x_2 - x_3)^2 + \frac{F_5^2}{F_6}x_3^2 \\ & + F_5(x_3 - x_4)^2 + F_4x_4^2 \\ \text{subject to}\quad & \text{(i)}\ \ x \in R^4, \quad \text{(ii)}\ \ x_0 = c \end{aligned}$$

の双対問題は 4 変数 $\mu = (\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \mu_4)$ の最大化問題

$$
(\mathrm{D}_4)\quad
\begin{array}{ll}
\text{Maximize} & 2F_8x_0\mu_1 - F_8\mu_1^2 - \dfrac{F_8}{F_7^2}\left(F_8\mu_1 - F_7\mu_2\right)^2 \\
& \quad - F_7\mu_2^2 - \dfrac{F_7}{F_6^2}\left(F_7\mu_2 - F_6\mu_3\right)^2 \\
& \quad - F_6\mu_3^2 - \dfrac{F_6}{F_5^2}\left(F_6\mu_3 - F_5\mu_4\right)^2 - \dfrac{F_5F_6}{F_4}\mu_4^2 \\
\text{subject to} & \text{(i)}\ \ \mu \in R^4, \quad \text{(ii)}\ \ x_0 = c
\end{array}
$$

になる。この $(\mathrm{D}_4)$ は条件付きになっていないことに注意しよう。これは $(\mathrm{D}_8)$ の導出過程を検討すれば、$F_4 > 0$ より、すぐわかる。

主問題 $(\mathrm{P}_4)$ は

$$\hat{x} = \left(\ \hat{x}_1,\quad \hat{x}_2,\quad \hat{x}_3,\quad \hat{x}_4\ \right) = \frac{c}{F_9}\left(\ F_8,\quad F_7,\quad F_6,\quad F_5\ \right)$$

のとき、最小値 $m_4 = \dfrac{F_7F_8}{F_9}c^2$ をもつ。双対問題 $(\mathrm{D}_4)$ は

$$\mu^* = \left(\ \mu_1^*,\quad \mu_2^*,\quad \mu_3^*,\quad \mu_4^*\ \right) = \frac{c}{F_9}\left(\ F_7,\quad F_6,\quad F_5,\quad F_4\ \right)$$

のとき、最大値 $M_4 = \dfrac{F_7F_8}{F_9}c^2$ をもつ。

主問題 $(\mathrm{P}_4)$ の最小解と双対問題 $(\mathrm{D}_4)$ の最大解の間には次のフィボナッチ・シフト双対性が成り立っている。

1. （双対性）　最小値と最大値が等しい：$m_4 = M_4$. 共に初期値 $c$ の 2 次式で、その係数は 3 連フィボ数の比 $\dfrac{F_7F_8}{F_9}$ である。
2. （フィボナッチ）　最小点 $(\hat{x}_1,\ \hat{x}_2,\ \hat{x}_3,\ \hat{x}_4)$ と最大点 $(\mu_1^*,\ \mu_2^*,\ \mu_3^*,\ \mu_4^*)$ は共にフィボ数列の後向きである。
3. （シフト）　最大点 $\mu^*$ は最小点 $\hat{x}$ を 1 段シフトした点になる：

$$\mu_n^* = \hat{x}_{n+1} \qquad n = 1, 2, 3$$

## 6.2 主問題と双対問題の反転

4 変数の $(\mathrm{P}_4)$ と $(\mathrm{D}_4)$ を反転させる。すなわち、変数 $(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$ を $(x_4,\ x_3,\ x_2,\ x_1)$ に変換する。このとき、主問題と双対問題はそれぞれ次のように表わされる。

$$
(\mathrm{RP}_4)\qquad
\begin{aligned}
\text{minimize}\quad & F_4 x_1^2 + F_5(x_1 - x_2)^2 \\
& + \frac{F_5^2}{F_6} x_2^2 + F_6(x_2 - x_3)^2 \\
& + \frac{F_6^2}{F_7} x_3^2 + F_7(x_3 - x_4)^2 \\
& + \frac{F_7^2}{F_8} x_4^2 + F_8(x_4 - c)^2 \\
\text{subject to}\quad & \text{(i)}\ \ x \in R^4.
\end{aligned}
$$

関係式

$$
F_4 x_1^2 \ = \ \frac{F_4^2}{F_5} x_1^2 + \frac{F_3 F_4}{F_5} x_1^2.
$$

を用いると、この目的関数は

$$
\frac{F_3 F_4}{F_5} x_1^2 + \sum_{k=1}^{4} \left[ \frac{F_{3+k}^2}{F_{4+k}} x_k^2 + F_{4+k}(x_k - x_{k+1})^2 \right]
$$

でも表わされる。

この双対問題は

$$
(\mathrm{RD}_4)\qquad
\begin{aligned}
\text{Maximize}\quad & -\frac{F_5 F_6}{F_4}\mu_1^2 - F_6\left[\left(\mu_1 - \frac{F_6}{F_5}\mu_2\right)^2 + \mu_2^2\right] \\
& - F_7\left[\left(\mu_2 - \frac{F_7}{F_6}\mu_3\right)^2 + \mu_3^2\right] \\
& - F_8\left[\left(\mu_3 - \frac{F_8}{F_7}\mu_4\right)^2 + \mu_4^2\right] + 2F_8 c\mu_4 \\
\text{subject to}\quad & \text{(i)}\ \ \mu \in R^4
\end{aligned}
$$

になる。この目的関数は

$$
-\frac{F_5 F_6}{F_4}\mu_1^2 - \sum_{k=1}^{3} F_{k+5}\left[\left(\mu_k - \frac{F_{k+5}}{F_{k+4}}\mu_{k+1}\right)^2 + \mu_{k+1}^2\right] + 2F_5 c\mu_4
$$

でも表わされる。

問題 ($\mathrm{RP}_4$) は

$$\hat{x} = \left( \hat{x}_1, \quad \hat{x}_2, \quad \hat{x}_3, \quad \hat{x}_4 \right) = \frac{c}{F_9} \left( F_5, \quad F_6, \quad F_7, \quad F_8 \right)$$

のとき、最小値 $m_4 = \dfrac{F_7F_8}{F_9}c^2$ をもつ。問題 ($\mathrm{RD}_4$) は

$$\mu^* = \left( \mu_1^*, \quad \mu_2^*, \quad \mu_3^*, \quad \mu_4^* \right) = \frac{c}{F_9} \left( F_4, \quad F_5, \quad F_6, \quad F_7 \right)$$

のとき、最大値 $M_4 = \dfrac{F_7F_8}{F_9}c^2$ をもつ。

反転主問題 ($\mathrm{RP}_4$) の最小解と反転双対問題 ($\mathrm{RD}_4$) の最大解の間には次のフィボナッチ・シフト双対性が成り立っている。

1. （双対性） 最小値と最大値が等しい：$m_4 = M_4$. 共に初期値 $c$ の 2 次式で、その係数は 3 連フィボ数の比 $\dfrac{F_7F_8}{F_9}$ である。
2. （フィボナッチ） 最小点 $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3, \hat{x}_4)$ と最大点 $(\mu_1^*, \mu_2^*, \mu_3^*, \mu_4^*)$ は共にフィボ数列 (の前向き) である。
3. （シフト） 最大点 $\mu^*$ は最小点 $\hat{x}$ を 1 段シフトした点になる：

$$\mu_n^* = \hat{x}_{n-1} \qquad n = 2, 3, 4$$

# 参考文献


[1] 日本建築学会編,「黄金比とその周辺」,『建築学便覧 2』第 2 版, 丸善, 1977 年.

[2] 日本建築学会編,「黄金比・黄金分割」,『建築学用語辞典』第 2 版, 岩波書店, 1999 年.

[3] Bellman, R.E., *Dynamic Programming*, Princeton Univ. Press, NJ, 1957.

[4] Bellman, R.E., *Introduction to Matrix Analysis*, McGraw-Hill, NY, 1970 (Second Edition is a SIAM edition 1997).

[5] Bellman, R.E., *Eye of the Hurricane: an Autobiography*, Singapore, World Scientific, 1984.

[6] Beutelspacher, A. and Petri, B.,『黄金分割 — 自然と数理と芸術と — 』（柳井浩訳）, 共立出版, 2005 年; (Original) *Der Goldene Schnitt 2, überarbeitete und erweiterte Auflange*, Heidelberg, Elsevier GmbH, Spectrum Akademischer Verlag, 1996.

[7] Brown, D.,『ダ・ヴィンチ・コード (上・下)』（越前敏弥訳）, 角川書店, 2004 年; (Original) *The Da Vinci Code*, Doubleday(USA) & Bantam(UK), 2003.

[8] Dunlap, R.A.,『黄金比とフィボナッチ数』(岩永恭雄・松井講介訳）, 日本評論社, 2003 年; (Original) *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*, World Scientific Publishing Co.Pte.Ltd., 1977.

[9] 岩本誠一, 『動的計画論』, 九大出版会, 1987 年.

[10] Iwamoto, S., "Cross dual on the Golden optimum solutions,"「経済の数理解析」, 京大数理研講究録 1443, 2005 年, pp.27–43.

[11] Iwamoto, S., "The Golden trinity — optimility, inequality, identity —,"「経済の数理解析」, 京大数理研講究録, 2006 年, pp.1–14.

[12] Iwamoto, S., "The Golden optimum solution in quadratic programming," Ed. Takahashi, W. and Tanaka, T., *Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA05)*, Yokohama, Yokohama Publishers, 2007, pp.199–205.

[13] 岩本 誠一, 「黄金最適解を鑑賞する — 経済数学へのプレリュード（V）— 」, 経済学研究・別冊 第 12 号 (九大経済学会), 2006 年, pp.39–43.

[14] 岩本 誠一, 「最適化『ダ・ヴィンチ・コード』 — 経済数学へのプレリュード（VI）—」, 経済学研究・別冊 第 13 号 (九大経済学会), 2007 年, pp.45–52.

[15] 岩本 誠一, 「ダ・ヴィンチ・コードは最適か？」, 数理経済学研究センター会報, 第 37 号, 2009 年, pp.1–9.

[16] 岩本 誠一・吉良 知文・植野 貴之, 「ダ・ヴィンチ・コード」, 経済学研究 (九大経済学会), 第 76 巻 2/3 号, 2009 年, pp.1–22.

[17] 岩本 誠一・木村 寛, 「交互ダ・ヴィンチ・コード」, 経済学研究 (九大経済学会), 第 76 巻 4 号, 2010 年, pp.1–18.

[18] Iwamoto, S. and Kira, A., "The Fibonacci complementary duality in quadratic programming," Ed. Takahashi, W. and Tanaka, T., *Proceedings of the 5th Intl. Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis (NACA2007 Taiwan)*, Yokohama, Yokohama Publishers, 2009, pp.63–73.

[19] Iwamoto, S. and Yasuda, M., "Dynamic programming creates the Golden Ratio, too," *Proc. of the Sixth Intl. Conference on Optimization: Techniques and Applications (ICOTA 2004)*, Ballarat, Australia, 2004.

[20] Iwamoto, S. and Yasuda, M., "Golden optimal path in discrete-time dynamic optimization processes," Ed. Elaydi, S., Nishimura, K., Shishikura, M. and Tose, N., *Advanced Studies*

*in Pure Mathematics* Vol.53, Advances in Discrete Dynamic Systems, 2009, pp.77–86. *Proceedings of the Intl. Conference on Differential Equations and Applications (ICDEA2006)*, Kyoto, 2006.

[21] Kira, A. and Iwamoto, S., "Golden complementary dual in quadratic optimization," Modeling Decisions for Artificial Intelligence, *Proceedings of the Fifth Intl. Confernece (MDAI 2008)*, Barcelona, 2008. Eds. Torra, V. and Narukawa, Y., Springer-Verlag Lecture Notes in Artificial Intelligence, Vol.5285, 2008, pp.191–202.

[22] Lee, E.S., *Quasilinearization and Invariant Imbedding*, New York, Academic Press, 1968.

[23] 中村 滋, 『フィボナッチ数の小宇宙 — フィボナッチ数、リュカ数、黄金分割 — 』第 2 版, 日本評論社, 2008 年.

[24] Walser, H.,『黄金分割』(蟹江幸博訳）, 日本評論社, 2002 年; (Original) *Der Goldene Schnitt*, B.G. Teubner, Leibzig, 1996 年.

[25] 柳 亮, 『黄金分割：ピラミッドからル・コルビュジュまで』, 1965 年, 美術出版社.

[26] 柳 亮, 『黄金分割, 日本の比例』, 1977 年, 美術出版社.

岩本 誠一〔九州大学名誉教授〕

吉良 知文〔九州大学 大学院数理学府博士後期課程（日本学術振興会特別研究員)〕

植野 貴之〔長崎県立大学 経済学部 准教授〕