

表面張力入りのHele-Shaw問題

野見山, 雅之
立教大学大学院理学研究科数学専攻

笥, 三郎
立教大学理学部

梶原, 健司
九州大学マス・フォア・インダストリ研究所

<https://doi.org/10.15017/1807783>

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 26A0-S2 (32), pp.176-181, 2015-03. 九州大学応用力学研究
所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.26AO-S2
「非線形波動研究の現状 — 課題と展望を探る—」 (研究代表者 増田 哲)

Reports of RIAM Symposium No.26AO-S2

State of arts and perspectives of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 30 - November 1, 2014

Article No. 32 (pp. 176 - 181)

表面張力入りの Hele-Shaw 問題

野見山 雅之 (NOMIYAMA Masayuki), 笥 三郎 (KAKEI Saburo), 梶原 健司 (KAJIWARA Kenji)

(Received 15 January 2015; accepted 13 March 2015)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2015

表面張力入りの Hele-Shaw 問題

立教大学大学院理学研究科数学専攻 野見山雅之 (NOMIYAMA, Masayuki)

立教大学理学部 筧三郎 (KAKEI, Saburo)

九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 梶原健司 (KAJIWARA, Kenji)

概要

Hele-Shaw 問題において, ある種の表面張力効果を考慮すると, Dym 方程式に外力項を付け加えた方程式が得られる. 本研究では, その方程式を双線形化法の立場から議論する.

1 はじめに

本研究では, 表面張力入りの Hele-Shaw 問題を考察する. Hele-Shaw cell とは, 図 1 のように近接した 2 枚の平行なガラス板の薄い隙間に異なる粘性をもつ 2 種類の流体をはさんだ装置であり, H.S. Hele-Shaw によって 1898 年に導入された [3].

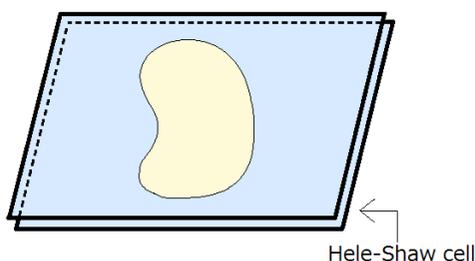


図 1 Hele-Shaw cell

よく知られているように, 2次元完全流体の運動は複素関数論の手法を用いた解析が行われている. Hele-Shaw 問題の場合も同様に, 複素関数論の手法を用いて, 多くの研究が行われてきた. 表面張力を無視した場合においては, 無分散戸田階層との関係が研究されている [9, 11]. Kadanoff ら [5, 12] は, ある種の表面張力効果を考慮し, Dym 方程式との関係を指摘した. Hele-Shaw 問題と Dym 方程式との関係はその後も様々な形で扱われてきたが, 本研究では Howison の手法 [4] を用いて, 外場と結合した形の Dym 方程式を議論する. 外場がない場合には, Dym 方程式は変形 KdV 方程式と関連しており, その関係を利用して (広田の意味での) 双線形化を行うことができる [2]. また特殊な外場 (“自己無撞着場”) 付きの Dym 方程式においては, “自己無撞着場” 付きの KdV 方程式 [14] から外場なしの場合と同様に双線形化を行えることを示す.

2 Dym 方程式の導出

本節では, Howison [4] の議論に従って, Dym 方程式を導出する. 出発点は, Navier-Stokes 方程式である:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} + \mathbf{F}. \quad (1)$$

ただし, $\mathbf{v} = (u, v, w)$ は流体の速度ベクトル, ρ は流体密度, p は圧力, ν は流体の動粘度, \mathbf{F} は流体に働く外力とする. ここに 4 つの条件

- 定常流れ
- 外力無し
- Stokes 近似 (非線形項は無視)
- Hele-Shaw 近似

を仮定する. ここで “Hele-Shaw 近似” とは, Hele-Shaw cell 中の流体速度に対し, 境界条件

$$u = v = 0 \quad \text{at} \quad z = 0, h \quad (2)$$

を満たすような 2 次関数

$$u = az(z - h), \quad v = bz(z - h) \quad (a, b \text{ は定数}) \quad (3)$$

とした上で, Hele-Shaw cell に垂直な方向の平均をとるという近似である (図 2).

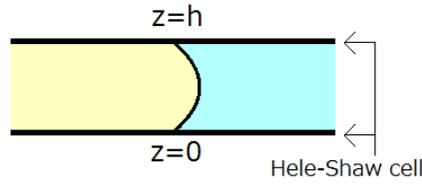


図 2 Hele-Shaw 近似

以上の仮定の下で, 次の関係式が得られる [7, 10, 13]:

$$\mathbf{v} = -\frac{h^2}{12\mu} \nabla p. \quad (4)$$

ただし, $\mu := \rho\nu$ (粘度) であり, h は Hele-Shaw cell の幅とする.

次に複素座標 $z := x + iy$ を導入し, Schwarz 関数を定義する:

定義 1 (Schwarz 関数 [1]). 実解析的な関数 $F(x, y)$ に対して, 座標平面上の曲線 C が $F(x, y) = 0$ で与えられているものとする. ここに $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$ を代入し, z について解きなおすと $\bar{z} = G(z)$ が得られたとする. このとき, $G(z)$ は z の (C の近傍で定義された) 正則関数であり, この $G(z)$ を (C に関する) Schwarz 関数という.

この Schwarz 関数を用いて Dym 方程式を導出していく. (以下では, “ \prime ” は複素変数 z に関する微分を表すものとする.) 複素平面上の曲線を C とし, C を境界とする 2 つの流体領域を D_1, D_2 とする (図 3).

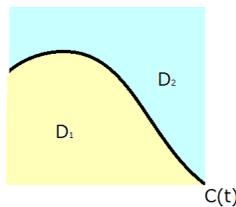


図 3 2 種の流体と界面

界面 C のパラメータ表示 $z(s) = x(s) + iy(s)$ を考える. ここで $s \in \mathbb{R}$ は弧長パラメータとしておく. 曲線 C の Schwarz 関数を $G(z)$ とすると,

$$\frac{dz}{ds} = (G')^{-\frac{1}{2}} \quad (5)$$

が成り立つ [1]. また, 単位接ベクトルを $T = \frac{dz}{ds}$ ($|T| = 1$), 単位法ベクトルを $N := iT$ とすると, 平面曲線に関する Frenet の公式 $\frac{dT}{ds} = \kappa N$ (κ は曲率) が成立する. 曲率 κ を Schwarz 関数を用いて表すと,

$$\kappa = -i \left((G')^{-\frac{1}{2}} \right)' \quad (6)$$

となる. また, 式 (6) の s 微分は, 以下のように表される:

$$\frac{d\kappa}{ds} = -i (G')^{-\frac{1}{2}} \left((G')^{-\frac{1}{2}} \right)'' \quad (7)$$

さらに、境界 C の法線速度を V_n としたとき、 V_n を Schwarz 関数で表すと、

$$V_n = \frac{i}{2} \frac{\partial G}{\partial t} (G')^{-\frac{1}{2}} \quad (8)$$

となる。

方程式 (4) より、各領域 D_1, D_2 における流速ベクトルは以下のように表される：

$$\mathbf{v}_j = -\frac{h^2}{12\mu_j} \nabla p_j \quad \text{in } D_j \quad (j = 1, 2). \quad (9)$$

ここで界面 C における D_j 側の流れの法線成分を $V_n^{(j)}$ ($j = 1, 2$) とすると、(9) より、

$$V_n^{(j)} = -\frac{h^2}{12\mu_j} \frac{\partial p_j}{\partial n} \quad \text{in } D_j \quad (j = 1, 2) \quad (10)$$

である。ただし、 $\partial/\partial n$ は法線方向の偏微分を表す。さらに、運動学的条件より C 上では $V_n = V_n^{(1)} = V_n^{(2)}$ となるので、(8) と合わせて

$$\frac{\partial p_j}{\partial n} = -\frac{6i\mu_j}{h^2} \frac{\partial G}{\partial t} (G')^{-\frac{1}{2}} \quad (j = 1, 2) \quad (11)$$

が得られる。

一方、非圧縮性の仮定より p_j は調和 ($\Delta p_j = 0$) であるので、 p_j と共役な調和関数を ψ_j をとることができる。複素ポテンシャルを $w_j := p_j + i\psi_j$ と定義すると、 w_j は $z = x + iy$ に関して、 D_j で正則である。各 w_j ($j = 1, 2$) は境界 C を含む領域に解析接続できると仮定する。また、

$$p := p_1 - p_2, \quad \psi := \psi_1 - \psi_2, \quad w := w_1 - w_2 \quad (12)$$

とする。このとき、弧長パラメータ方向の偏微分 $\partial/\partial s$ 、およびそれと直交する法線方向の偏微分 $\partial/\partial n$ についてのコーシー・リーマン関係式より、

$$\frac{\partial p}{\partial s} = \frac{\partial \psi}{\partial n}, \quad \frac{\partial p}{\partial n} = -\frac{\partial \psi}{\partial s} \quad (13)$$

が成立することが分かる。ここで、 w を $C : z = z(s, t)$ 上に制限して、 w を s で微分し、(13) を用いると、

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial p}{\partial s} + i \frac{\partial \psi}{\partial s} = \frac{\partial p}{\partial s} - i \frac{\partial p}{\partial n} \quad (14)$$

と表される。さらに、ヤング・ラプラスの式

$$p := p_1 - p_2 = \gamma \kappa \quad (\gamma: \text{表面張力係数}), \quad (15)$$

および (7), (11) を用いると、方程式 (14) は、

$$\frac{\partial w}{\partial s} = -i\gamma (G')^{-\frac{1}{2}} \left((G')^{-\frac{1}{2}} \right)'' - \frac{6(\mu_1 - \mu_2)}{h^2} \frac{\partial G}{\partial t} (G')^{-\frac{1}{2}} \quad (16)$$

となる。また、 C 上においては

$$\frac{\partial w(z(s, t))}{\partial s} = \frac{dw}{dz} \cdot T = \frac{dw}{dz} (G')^{-\frac{1}{2}} \quad (17)$$

であるので、方程式 (17) と方程式 (16) から、

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = -\frac{6(\mu_1 - \mu_2)}{h^2} \frac{\partial G'}{\partial t} - i\gamma \left((G')^{-\frac{1}{2}} \right)''' \quad (18)$$

なる方程式が得られる。ここで左辺 = 0 と仮定すると、次の方程式を得る；

$$\frac{6(\mu_1 - \mu_2)}{h^2} \frac{\partial G'}{\partial t} + i\gamma \left((G')^{-\frac{1}{2}} \right)''' = 0. \quad (19)$$

簡単のため、 t を適当に定数倍すれば、

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial G'}{\partial t} + i \left((G')^{-\frac{1}{2}} \right)''' = 0 \quad (20)$$

となる. 可積分系の研究においては

$$-\frac{1}{2} \frac{\partial G'}{\partial t} + \left((G')^{-\frac{1}{2}} \right)''' = 0 \quad (21)$$

という虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ を含まない形が扱われており, Dym 方程式と呼ばれている^{*1}. (21) の場合は変形 KdV 方程式とホドグラフ変換によって結びつくことが知られているが [6], ここで扱っている (20) の場合は, 対応する変形 KdV 方程式が

$$v_t + i \left(\frac{3}{2} v^2 v_s + v_{sss} \right) \quad (22)$$

という形になる. このことについて, 節を改めて, 双線形化法の立場から議論しよう.

3 Dym 方程式の双線形化

この章では, Dym 方程式 (20) を, 双線形化法の立場から議論する. 方程式 (20) は, 以下の 4 つの双線形方程式で表すことができる^{*2}:

$$D_s^2 f \cdot g = 0, \quad (23)$$

$$\frac{1}{2} D_s D_y g \cdot g = f^2 - g^2, \quad (24)$$

$$\frac{1}{2} D_s D_y f \cdot f = g^2 - f^2, \quad (25)$$

$$-i D_t D_y g \cdot g + 4 D_s^2 f \cdot f = 0. \quad (26)$$

(23), (24), (25) は, [2] で扱われた方程式において時間 t に関する微分の係数を $i = \sqrt{-1}$ で置き換えたものである. 方程式 (26) はホドグラフ変換に対応した双線形方程式であるが, 文献 [2] では扱われていない.

双線形方程式 (23), (24), (26) から Dym 方程式 (20) を導く. まず,

$$\psi := \frac{f}{g}, \quad \phi := 2 \log g, \quad \zeta := 2 \log f \quad (27)$$

とおくと, 双線形方程式 (23), (24), (26) から以下が得られる:

$$(23) \Rightarrow \psi \phi_{ss} + \psi_{ss} = 0, \quad \psi^{-1} \zeta_{ss} + (\psi^{-1})_{ss} = 0, \quad (28)$$

$$(24) \Rightarrow \frac{1}{2} \phi_{sy} = \psi^2 - 1, \quad (29)$$

$$(26) \Rightarrow -\frac{1}{2} i \phi_{ty} + 2 \zeta_{ss} \psi^2 = 0. \quad (30)$$

これらから ϕ, ζ を消去すれば,

$$\psi_t + i \left(\psi_{sss} - 3 \frac{\psi_s \psi_{ss}}{\psi} \right) = 0 \quad (31)$$

が導かれる. 次に $\psi^2 := R$ とおくことで, (31) を R の式で書き直す:

$$2R^2 R_t + i (2R^2 R_{sss} - 6RR_s R_{ss} + 3(R_s)^3) = 0. \quad (32)$$

ここで, 以下のように z, G を定義する:

$$z := (\log g)_y + s, \quad G := (\log f)_y + s. \quad (33)$$

すると, 方程式 (32) を (s, t) 座標から (z, t) 座標に変数変換することができる:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} &= \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} = R \frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial t} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial t}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + \left\{ \frac{1}{2} i R (R_z)^2 - i R^2 R_{zz} \right\} \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned} \quad (34)$$

^{*1} 方程式 (21) を “Harry-Dym 方程式” と呼んでいる文献も多いが, “Harry Dym” は一人の人物の名前なので, “Dym 方程式” と呼ぶ方が適切であろう.

^{*2} 研究発表会では 6 つの双線形方程式を用いたが, ここでの 4 つのみで表すことができる.

この変換をホドグラフ変換をいう。この変換の下で、方程式 (32) は、

$$R_t + iR^3 R_{zzz} = 0 \quad (35)$$

と表すことができる。双線形方程式 (25) を用いると $R = (G_z)^{-\frac{1}{2}}$ ととれるため、Dym 方程式 (20) が導かれる。

これまでにソリトン理論の研究者が扱ってきた Dym 方程式 (21) の場合は、対応する双線形方程式のソリトン解を明示的に構成することができる [2]。ここで扱っている (20) の場合は、(21) の解で $t \mapsto it$ と形式的に置き換えることで解が得られそうに思われるが、それだと複素共役の条件と両立しない。方程式 (20) に対する自明でない解を構成することには、今のところ成功していない。

4 外場付き Dym 方程式

前節では、方程式 (18) において左辺を 0 とおいた (20) を扱った。ここでは、外部 w の効果を取り入れることを試みる。

ソリトン方程式に対して、可積分性を壊さないように外場を取り入れる試みとして、Mel'nikov による研究がある [8]。Mel'nikov によるアイデアは、現在では“自己無撞着場 (self-consistent source)”と呼ばれており、関連する多くの研究がなされてきた。変形 KdV 方程式に“自己無撞着場”を付け加える試みもなされており、次の形の方程式が提案されている [14]:

$$\begin{aligned} u_t + 6u^2 u_x + u_{xxx} + \sum_{j=1}^N (\varphi_{1j}^2 + \varphi_{2j}^2)_x &= 0, \\ \varphi_{1j,x} = -\lambda_j \varphi_{1j} + u \varphi_{2j}, \quad \varphi_{2j,x} = -u \varphi_{1j} + \lambda_j \varphi_{1j} \quad (j = 1, 2, \dots, N). \end{aligned} \quad (36)$$

この方程式の双線形化、Wronskian 解は、[14] で議論されている。

方程式 (36) において、 $u = v_x$, $R = e^{2v}$ とおくと、

$$2R^2 R_t + 3(R_x)^3 - 6RR_x R_{xx} + 2R^2 R_{xxx} + \sum_{j=1}^N (\varphi_{1j}^2 + \varphi_{2j}^2) R^2 = 0 \quad (37)$$

が得られる。さらに、ホドグラフ変換を適用すると、

$$\begin{aligned} R_t + R^3 R_{zzz} + \sum_{j=1}^N (\varphi_{1j}^2 + \varphi_{2j}^2) &= 0, \\ \varphi_{1j,z} = -\frac{\lambda_j}{R} \varphi_{1j} + \frac{R_z}{2R} \varphi_{2j}, \quad \varphi_{2j,z} = -\frac{R_z}{2R} \varphi_{1j} + \frac{\lambda_j}{R} \varphi_{2j} \end{aligned} \quad (38)$$

という、“自己無撞着場”付き Dym 方程式が得られる。しかし、方程式 (38) の解についても、前節と同様の問題が生じる。こちらにおいても、複素共役の条件を満足するような解を構成することには、(自明なものを除いて) 今のところ成功していない。

5 おわりに

本研究では「外場なし」と「外場あり」の Dym 方程式を考察した。しかし、「外場なし」、「外場あり」のどちらの場合についても、Hele-Shaw 問題において意味のある特殊解を構成することには成功していない。これは解に対する実条件 (reality condition) が [2] の場合とは異なるためであるが、非線形シュレディンガー方程式に対する“bright soliton”, “dark soliton”のように、解の構造がまったく異なるのではないかと思われる。また、「外場あり」の場合においては、「外場が正則関数」という物理的要請を満足させることが難しい。

一方、第 3 節での外場なしの場合、第 4 節での自己無撞着場付きの場合のどちらに対しても、双線形化を行うこと自体は可能である。そこで、[2] のように双線形化法の立場からの離散化を行い、それに基づいた数値シミュレーションを行うことが、今後の課題としてあげられる。

参考文献

- [1] P.J. Davis, *The Schwarz Function and its Applications*, The Carus Mathematical Monographs **17**, 1974
- [2] B.-F. Feng, J. Inoguchi, K. Kajiwara, K. Maruno and Y. Ohta, Integrable discretizations of Dym equation, *Frontiers of Math. China*, **8** (2013), 1017–1029
- [3] H.S. Hele-Shaw, The flow of water, *Nature*, **58** (1985), 34–36
- [4] S.D. Howison, Complex variable methods in Hele-Shaw moving boundary problem, *Euro. Appl. Math.* **3** (1992), 209–224
- [5] L.P. Kadanoff, Exact solutions for the Saffman-Taylor problem with surface tension, *Phys. Rev. Lett.* **65** (1990), 2986–2988
- [6] S. Kawamoto, An exact transformation from the Harry Dym equation to the modified KdV equation, *J. Phys. Soc. Jpn.* **54** (1985), 2055–2056
- [7] 木村 正人, Hele-Shaw 移動境界問題の数理, 応用解析チュートリアル 講義ノート, 物性研究 **78** (2002), 159–171
- [8] V.K. Mel’nikov, Capture and confinement of solitons in nonlinear integrable systems, *Commun. Math. Phys.* **120** (1989), 451–468
- [9] T. Takebe, *Lectures on Dispersionless Integrable Hierarchies*, 立教大学数理物理学研究センター Lecture Notes, Vol. 2, 2014 (<http://id.nii.ac.jp/1062/00009024/>)
- [10] 牛島 健夫・矢崎 成俊, Hele-Shaw セル中を浮上する一つの泡のダイナミクスのシュミレーション, 数理解析研究所講究録 **1453** (2005), 73–84
- [11] A.N. Varchenko and P.I. Etingof, *Why the Boundary of a Round Drop Becomes a Curve of Order Four*, University Lecture Series **3**, AMS, 1992
- [12] G.L. Vasconcelos and L.P. Kadanoff, Stationary solutions for the Saffman-Taylor problem with surface tension, *Phys. Rev. A* **44** (1991), 6490–6495
- [13] 矢崎 成俊, 隙間流体の数理, 数学セミナー 2012 年 4 月号, 55–61
- [14] D.-J. Zhang, The N-soliton for the modified KdV equation with self-consistent sources, *J. Phys. Soc. Jpn.* **71** (2002), 2649–2656