

離散ハングリーロトカ・ボルテラ系に基づく非対称 帯行列の全固有対の計算

竹内, 弘史
東京理科大学大学院理学研究科

相原, 研輔
東京理科大学理学部

福田, 亜希子
芝浦工業大学システム理工学部

石渡, 恵美子
東京理科大学理学部

<https://doi.org/10.15017/1807782>

出版情報：応用力学研究所研究集会報告. 26A0-S2 (31), pp.170-175, 2015-03. 九州大学応用力学研究
所
バージョン：
権利関係：

応用力学研究所研究集会報告 No.26AO-S2
「非線形波動研究の現状 — 課題と展望を探る—」 (研究代表者 増田 哲)

Reports of RIAM Symposium No.26AO-S2

State of arts and perspectives of nonlinear wave science

Proceedings of a symposium held at Chikushi Campus, Kyushu University,
Kasuga, Fukuoka, Japan, October 30 - November 1, 2014

Article No. 31 (pp. 170 - 175)

離散ハングリーロトカ・ボルテラ系に 基づく非対称帯行列の全固有対の計算

竹内 弘史 (TAKEUCHI Hiroshi), 相原 研輔 (AIHARA
Kensuke), 福田 亜希子 (FUKUDA Akiko), 石渡 恵美子
(ISHIWATA Emiko)

(Received 15 January 2015; accepted 23 February 2015)



Research Institute for Applied Mechanics
Kyushu University
March, 2015

離散ハングリーロトカ・ボルテラ系に基づく非対称帯行列の全固有対の計算

東京理科大学大学院理学研究科 竹内 弘史 (TAKEUCHI Hiroshi)
東京理科大学理学部 相原 研輔 (AIHARA Kensuke)
芝浦工業大学システム理工学部 福田 亜希子 (FUKUDA Akiko)
東京理科大学理学部 石渡 恵美子 (ISHIWATA Emiko)

概要

離散ハングリーロトカ・ボルテラ系に基づく、ある非対称帯行列の複素固有値を計算する方法が知られている。本稿では、得られた固有値を利用して固有ベクトルを効率よく計算する方法を示す。また、固有ベクトル成分の陽的な表現を与える。

1 はじめに

これまでに、離散可積分系の数値計算アルゴリズムへの応用が報告されている。例えば、離散ロトカ・ボルテラ (discrete Lotka-Volterra, dLV) 系から、上二重対角行列の特異値を計算する mdLVs アルゴリズムが定式化されている [2]。また、dLV 系の拡張である離散ハングリーロトカ・ボルテラ (discrete hungry Lotka-Volterra, dhLV) 系から、ある非対称帯行列の固有値を計算する dhLV アルゴリズムが定式化されている [1]。dhLV アルゴリズムは、可積分系に関連する固有値計算アルゴリズムの中で、複素固有値が求まる初めてのアルゴリズムである。

mdLVs アルゴリズムに特異ベクトル計算を付加して特異値分解を行う I-SVD アルゴリズムが定式化されている [4]。しかし、dhLV アルゴリズムについては、対象とする行列の固有ベクトルを計算する方法は言及されていない。複素固有値が得られている場合、たとえば逆反復法を利用すれば対応する固有ベクトルを計算できるが、一般に複素数による演算が必要となる。一方、dhLV アルゴリズムでは、本質的に実数による演算のみで複素固有値を計算できる。そこで本稿では、dhLV アルゴリズムが対象とする非対称帯行列について、固有値を求める場合と同様に、実数による演算のみで固有ベクトルが計算できることを示す。また、固有ベクトル成分が dhLV 系の変数を用いて陽的に表現できることを明らかにする。

本稿の構成は以下のとおりである。2 節では、dhLV 系と dhLV アルゴリズムの概略を述べる。3 節では、実数による演算を用いてすべての固有ベクトルを効率よく計算する方法を提案する。4 節では、固有ベクトル成分の陽的な表現を与える。5 節では、数値実験により、提案した方法で固有ベクトルが精度よく求まることを示す。

2 dhLV 系と dhLV アルゴリズム

dhLV 系は、1 種の生物が M 種の生物を捕食する関係にある生物種の個体数変動を記述した差分方程式系であり、以下のように表される。

$$\begin{cases} u_k^{(n+1)} = u_k^{(n)} \prod_{j=1}^M \frac{1 + \delta^{(n)} u_{k+j}^{(n)}}{1 + \delta^{(n+1)} u_{k-j}^{(n+1)}}, & k = 1, 2, \dots, M_m, \quad n = 0, 1, \dots, \\ u_{1-M}^{(n)} \equiv 0, \quad u_{2-M}^{(n)} \equiv 0, \dots, u_0^{(n)} \equiv 0, \quad u_{M_m+1}^{(n)} \equiv 0, \dots, u_{M_m+M}^{(n)} \equiv 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

補題 3.1 S の固有値 λ が, 実数 $r > 0$ と $\ell \in \{1, 2, \dots, M+1\}$ によって,

$$\lambda = r \exp\left(\frac{2\pi\ell i}{M+1}\right) \quad (3.4)$$

と書けるとする. このとき, λ に対応する固有ベクトル \boldsymbol{x} の成分 x_j は,

$$x_j = y_j \exp\left(-\frac{2\pi\ell j i}{M+1}\right), \quad j = 1, 2, \dots, M_m + M \quad (3.5)$$

と書ける. ただし, y_j は以下の関係式を満たす実数である.

$$y_{M_m+M} = 1, \quad (3.6)$$

$$y_j = r y_{j+1}, \quad j = M_m, M_m + 1, \dots, M_m + M - 1, \quad (3.7)$$

$$y_j = r y_{j+1} - U_{j+1} \cdot y_{j+M+1}, \quad j = 1, 2, \dots, M_m - 1. \quad (3.8)$$

証明. 各 x_j に対して (3.5)–(3.8) を満たす y_j が存在することを $j = M_m + M, M_m + M - 1, \dots, 1$ に関する数学的帰納法で示す. まず, $x_{M_m+M} = 1$ とする. ここで, $y_{M_m+M} = 1$ とすれば,

$$x_{M_m+M} = 1 = 1 \cdot \exp\left(-\frac{2\pi\ell(M+1)mi}{M+1}\right) = y_{M_m+M} \exp\left(-\frac{2\pi\ell(M_m+M)i}{M+1}\right)$$

となる. よって, $j = M_m + M$ のとき (3.5), (3.6) が成り立つ.

次に $j = M_m + M - 1, M_m + M - 2, \dots, M_m$ について示す. (3.2), (3.4) より,

$$\begin{aligned} x_j &= \lambda x_{j+1} \\ &= \lambda^{M_m+M-j} \\ &= r^{M_m+M-j} \exp\left(\frac{2\pi\ell(M_m+M-j)i}{M+1}\right) \\ &= r^{M_m+M-j} \exp\left(\frac{2\pi\ell((M+1)m-j)i}{M+1}\right) \\ &= r^{M_m+M-j} \exp\left(-\frac{2\pi\ell j i}{M+1}\right) \end{aligned}$$

と書ける. 従って, $y_j = r^{M_m+M-j}$ とすれば, y_j は (3.5), (3.7) を満たす.

最後に, $j = M_m - 1, M_m - 2, \dots, 1$ について示す. $p \in \{1, 2, \dots, M_m - 1\}$ を任意にとり, $j = p + 1, j = p + M + 1$ のときに (3.5)–(3.8) が成り立つと仮定すると,

$$\begin{aligned} x_{p+1} &= y_{p+1} \exp\left(-\frac{2\pi\ell(p+1)i}{M+1}\right), \\ x_{p+M+1} &= y_{p+M+1} \exp\left(-\frac{2\pi\ell(p+M+1)i}{M+1}\right) \\ &= y_{p+M+1} \exp\left(-\frac{2\pi\ell p i}{M+1}\right) \end{aligned}$$

と書ける. 帰納法の仮定と (3.3) より,

$$\begin{aligned} x_p &= \lambda x_{p+1} - U_{p+1} \cdot x_{p+M+1} \\ &= r \exp\left(\frac{2\pi\ell i}{M+1}\right) \cdot y_{p+1} \exp\left(-\frac{2\pi\ell(p+1)i}{M+1}\right) - U_{p+1} \cdot y_{p+M+1} \exp\left(-\frac{2\pi\ell p i}{M+1}\right) \end{aligned}$$

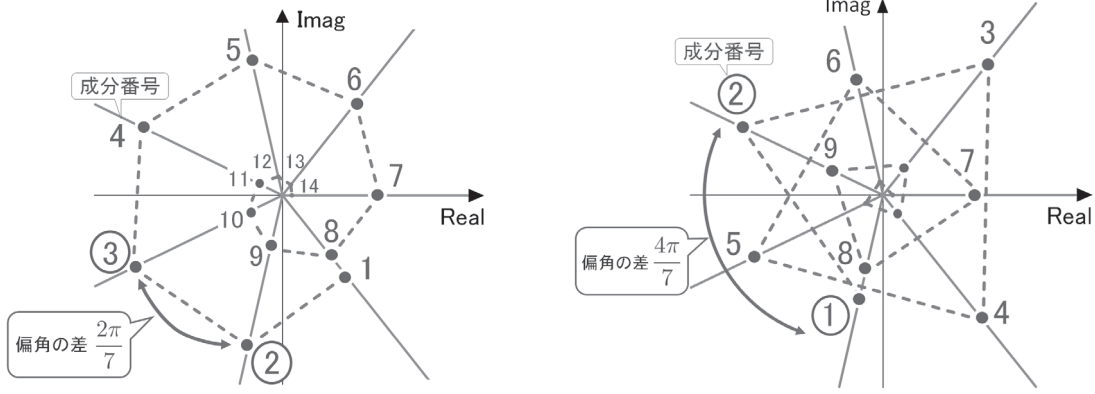


図1 偏角 $2\pi/7$ (左), $4\pi/7$ (右) の固有値に対応する固有ベクトル成分の分布

$$\begin{aligned}
 &= ry_{p+1} \exp\left(-\frac{2\pi l p i}{M+1}\right) - U_{p+1} \cdot y_{p+M+1} \exp\left(-\frac{2\pi l p i}{M+1}\right) \\
 &= (ry_{p+1} - U_{p+1} \cdot y_{p+M+1}) \exp\left(-\frac{2\pi l p i}{M+1}\right).
 \end{aligned}$$

となる. ここで, $y_p = ry_{p+1} - U_{p+1} \cdot y_{p+M+1}$ とすれば, $x_p = y_p \exp(-2\pi l p i / (M+1))$ が成り立つ. 以上より, $j = 1, 2, \dots, M_m + M$ について (3.5)–(3.8) を満たす y_j が存在する. \square

補題 3.1 より, 隣り合う固有ベクトル成分の偏角の差は $2\pi l / (M+1)$ であり, これは対応する固有値の偏角に一致する. ここで, 固有ベクトルの各成分を複素数平面上にプロットしたグラフを図1に示す. ただし, $M = 6, m = 2, U_k = 3/2, k = 1, 2, \dots, M_m$ とする. 図1より, 固有ベクトル成分の偏角は固有値の偏角に依存した規則性を持つことがわかる.

各 y_j の値を (3.6)–(3.8) によって定めれば, (3.5) を用いて対応する偏角の情報を付加することで, x_j を求めることができる. ここで, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_{M_m+M})^\top$ とすれば, (3.6)–(3.8) は $(S - rI)\mathbf{y} = \mathbf{0}$ を満たす実固有ベクトル $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ を求めていることに注意されたい.

一方, 近似固有値が得られているとき, 対応する固有ベクトルを計算する方法として, 逆反復法が知られている. 具体的には, 行列 A の近似固有値 $\tilde{\lambda}$ に対して, 次の反復を行う.

$$\mathbf{x}^{(N+1)} = (A - \tilde{\lambda}I)^{-1} \mathbf{x}^{(N)}, \quad N = 0, 1, 2, \dots$$

$\tilde{\lambda}$ の精度がよければ, $\mathbf{x}^{(N)}$ は数回の反復で固有ベクトルの良い近似となる. いま, S の固有ベクトルを求めるための素朴な方法として, すべての固有値に対して逆反復法を適用することが考えられるが, この場合は複素数による演算が必要となる. ただし, 実固有値に対応する実固有ベクトルのみを計算する際は, 実数による演算だけでよい.

以上のことから, S の全固有対を次のように計算する. まず, dhLV アルゴリズムを用いてすべての複素固有値を求める. 次に, 以下の方法 (a) または (b) を用いて, 実数による演算のみですべての固有ベクトルを求める.

- (a) 漸化式 (3.6)–(3.8) により実固有ベクトルを計算し, (3.5) を用いて複素固有ベクトルを求める
- (b) 逆反復法により実固有ベクトルを計算し, (3.5) を用いて複素固有ベクトルを求める

4 固有ベクトル成分の陽的表現

本節では、固有ベクトル成分の陽的な表現を与える。 $\bar{S} = S - \lambda I$ の k 次首座小行列式 $\det \bar{S}_k$ は、以下のように表される [3].

$$\det \bar{S}_{(M+1)p+q} = (-\lambda)^{(M+1)p+q} + \sum_{K=1}^p \left[(-1)^{KM} (-\lambda)^{(M+1)(p-K)+q} \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_K) \in \Psi_{K,p,q}} U_{j_1} U_{j_2} \cdots U_{j_K} \right]. \quad (4.1)$$

ただし、 $\Psi_{K,p,q} = \{(j_1, j_2, \dots, j_K) \mid 1 \leq j_1, j_1 + M + 1 \leq j_2, j_2 + M + 1 \leq j_3, \dots, j_{K-1} + M + 1 \leq j_K \leq M_p + q\}$ である。首座小行列式 $\det \bar{S}_k$ を求める漸化式 [3] において、変数変換

$$y_{M_m+M-j} := (-1)^j \det \bar{S}_j, \quad j = 0, 1, \dots, M_m + M - 1, \quad (4.2)$$

$$U_{M_m-j+1} := U_j, \quad j = 1, 2, \dots, M_m, \quad (4.3)$$

$$r := \lambda \quad (4.4)$$

を行うと y_j は漸化式 (3.6)–(3.8) を満たす。ただし、 $\det \bar{S}_0 = 1$ と定める。以上より、(4.1) に変数変換 (4.2)–(4.4) を施すと以下の定理が得られる。

定理 4.1 $k = 1, 2, \dots, m$, $\ell = 1, 2, \dots, M + 1$, および $j = 1, 2, \dots, M_m + M$ について

$$y_j^{(k,\ell)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(u_{M_k}^{(n)} \right)^{\varphi_j} + \sum_{K=1}^{p_j} \left[(-1)^K \left(u_{M_k}^{(n)} \right)^{\varphi_j - K} \sum_{(j_1, j_2, \dots, j_K) \in \Psi_{K,p_j,q_j}} \prod_{s=1}^K U_{M_m - j_s + 1} \right] \right)$$

とおき、

$$x_j^{(k,\ell)} = y_j^{(k,\ell)} \exp \left(-\frac{2\pi \ell j i}{M+1} \right)$$

とする。このとき、ベクトル $\mathbf{x}^{(k,\ell)} = \left(x_1^{(k,\ell)}, x_2^{(k,\ell)}, \dots, x_{M_m+M}^{(k,\ell)} \right)^\top$ は、 S の固有値 (2.5) に対応する固有ベクトルである。ただし、 $j = 1, 2, \dots, M_m + M$ について、 $\varphi_j = (M_m + M - j)/(M + 1)$, $p_j = \lfloor \varphi_j \rfloor$, $q_j = (M + 1)(m - p_j) - j + 1$ である。

5 数値実験

本節では、数値実験により、3節で提案した方法で固有ベクトルが精度よく求まることを示す。テスト行列は 200 次の非対称帯行列とし、 $M = 9$, $m = 20$ とする。 $U_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, M_m$ とし、区間 $(0, 1)$, $(0, 1/2)$ 上の乱数を与えた行列をそれぞれ S_1 , S_2 とする。行列の固有値を dhLV アルゴリズムで計算した上で、3節で示した 2 種類の方法 (a), (b) によって固有ベクトルを求める。

計算機環境は Intel Core i7-3635QM 2.40GHz CPU であり、MATLAB R2010b の倍精度演算を用いて計算した。逆反復法の初期値は $(1, 1, \dots, 1)^\top \in \mathbb{R}^{200}$ とし、反復回数は 3 回とする。また、逆反復法における方程式 $(S - \tilde{r}I)\mathbf{y}^{(N+1)} = \mathbf{y}^{(N)}$ は組み込み関数 `mldivide (\)` によって解く。Mathematica 9.0 を用いて 200 桁精度で計算した固有ベクトルを真の値とみなし、正規化した固有ベクトルの誤差 2 ノルムで精度を評価する。

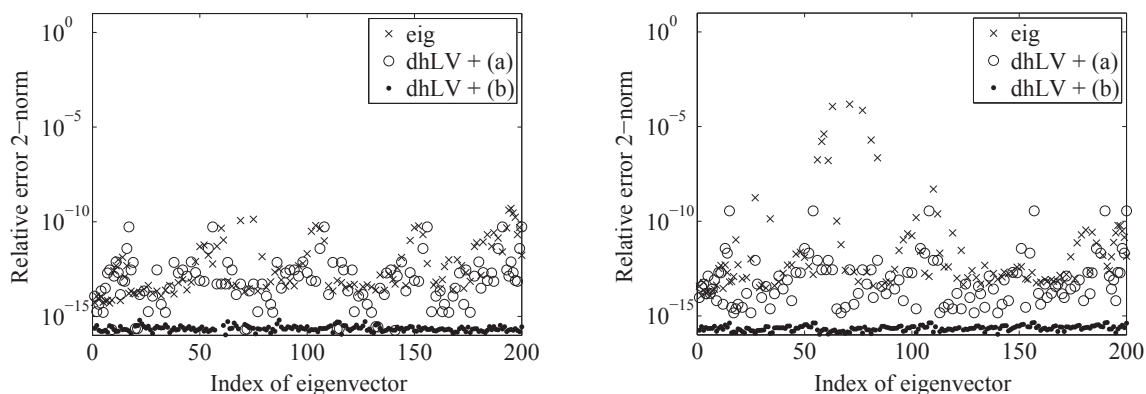


図2 S_1 (左), S_2 (右) に対する固有ベクトルの精度

図2に(a), (b)それぞれの方法で得られた固有ベクトルの精度を示す. 横軸は固有ベクトル番号, 縦軸は相対誤差2ノルムである. ただし, 固有ベクトル番号は, 対応する固有値の絶対値が昇順になるように与えた. また, 参考のために固有ベクトルをMATLABの組み込み関数 `eig` で計算した結果も示す.

図2より, S_1 の固有ベクトルはいずれの方法でも同程度の精度で得られている. 一方, S_2 では, 関数 `eig` で計算された固有ベクトル成分の一部は精度が大きく劣化しているのに対して, (a), (b)の方法で得られた固有ベクトルはより高い精度を維持していることがわかる.

6 まとめ

本稿では, dhLV アルゴリズムの対象とする非対称帯行列について, 固有ベクトルを効率よく計算する方法を提案した. これは, 固有ベクトル成分の偏角の規則性を利用して, 成分の絶対値と偏角を分離して計算する方法である. 実装では, 実固有ベクトルを計算してから, 対応する偏角の情報を付加することで, 実数による演算のみですべての固有ベクトルが得られる. 数値実験により, 固有ベクトルが精度よく計算できることを示した. また, 解析的な結果として, dhLV 系の変数を用いて固有ベクトル成分が陽的に表現できることを明らかにした.

参考文献

- [1] A. Fukuda, E. Ishiwata, M. Iwasaki, Y. Nakamura, The discrete hungry Lotka-Volterra system and a new algorithm for computing matrix eigenvalues, *Inverse Problems*, **25** (2009), 015007 (17pp).
- [2] M. Iwasaki, Y. Nakamura, Accurate computation of singular values in terms of shifted integrable schemes, *Jpn. J. Indust. Appl. Math.*, **23** (2006), 239–259.
- [3] S. Kakizaki, A. Fukuda, Y. Yamamoto, M. Iwasaki, E. Ishiwata, Y. Nakamura, Conserved quantities of the integrable discrete hungry systems, *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series S (DCDS-S)*, in press.
- [4] 中村 佳正, 可積分系の機能数理, 共立出版, 東京, 2006.